

УДК 62.50

Б.А.Скороход, профессор, д-р техн. наук,**А.С. Бегун, ассистент***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: AntonBegun@rambler.ru***ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ С
ОДНОВРЕМЕННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ОБЪЕКТА***Предложен адаптивный алгоритм прогнозирующего управления.**Ключевые слова: оптимальное управление, прогнозирующий критерий, идентификация, рекуррентный алгоритм оценки параметров.*

1. Постановка задачи. Методы построения управлений, основанные на использовании прогноза поведения объекта, полученного по его модели, хорошо известны и широко применяются при решении различных задач [1]. Кроме модели объекта, предполагается заданной траектория, которую выход объекта должен отслеживать. При этом поведение замкнутой системы характеризуется критерием качества, определяющего степень рассогласования прогноза выхода системы и отслеживаемой траектории на интервале прогноза $[t, t+t_{pr}]$ в каждый момент времени t , где $t_{pr} > 0$ – горизонт прогноза. Вместе с тем, типичной является ситуация, когда модель объекта определена с точностью до входящего в ее описание вектора неизвестных конструктивных параметров. В этом случае методы построения прогнозирующих управлений, в основе которых положено допущение, что модель известна, оказываются непригодными. Как следствие, возникает необходимость в использовании адаптивных алгоритмов [2].

Целью статьи является разработка алгоритма прогнозирующего управления с одновременной идентификацией объекта.

Далее предполагается, что объект управления описывается моделью авторегрессии (ARX) с экзогенной управляющей переменной

$$y_t = -a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - \dots - a_n y_{t-n} + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + \dots + b_n u_{t-n}, t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где a_i, b_i – параметры объекта, y_t, u_t – выход и управление системы в момент времени t . Априорная информация о параметрах a_i, b_i отсутствует, порядок модели n задан и известны значения выхода и управления в моменты $t, t-1, \dots, t-N$ для всех $t = 0, 1, \dots$, где $N > 2n$.

Введем критерий качества

$$J_f(\theta, \Delta U) = \sum_{i=n_1}^{n_2} q_i (\hat{y}_{t+i|t} - w_{t+i})^2 + \sum_{j=0}^{n_3-1} r_j (\Delta \hat{u}_{t+j|t})^2, t = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Здесь $\hat{y}_{t+i|t}$ – прогноз выхода системы в момент t на i шагов вперед, $i = n_1, n_1+1, \dots, n_2$; $n_1 = 1$; n_2 – начальный и конечный горизонты прогноза; n_3 – горизонт управления; w_{t+i} – желаемая траектория выхода системы; $q_i \geq 0, r_j \geq 0$ – заданные числа; $\Delta \hat{u}_{t+i|t} = \hat{u}_{t+i|t} - \hat{u}_{t+i-1|t}$ – приращение сигнала управления на i -м шаге прогноза, причём $\Delta \hat{u}_{t+i|t} = 0, i \geq n_3$, $\Delta U = (\Delta \hat{u}_{t|t}, \Delta \hat{u}_{t+1|t}, \dots, \Delta \hat{u}_{t+n_3-1|t})^T \in R^{n_3}$; $\theta = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)^T = (\theta_a^T, \theta_b^T)^T \in R^{2n}$.

При известных параметрах объекта, прогнозирующее управление определяется выражением [1]

$$u_t^{opt} = u_{t-1} + e_1 \Delta U^{opt}, t = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где ΔU^{opt} – вектор, минимизирующий $J_f(\theta, \Delta U)$, $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \in R^{1 \times n_3}$. Модернизируем задачу с учетом того, что мы хотим получать оценки параметры объекта в процессе управления и использовать их в контуре управления. Для того чтобы это сделать введем еще один критерий качества, характеризующий точность оценивания θ по известным к моменту t значениям выхода объекта и управлений, полагая

$$J_p(\theta) = \sum_{i=-n_4}^0 \lambda^{-i} (y_{t+i} - y_{t+i}^{mod})^2, \quad (4)$$

где y_{t+i} – известные (измеренные) значения выхода в соответствующие моменты времени, $\lambda \in [0,1]$ – заданная константа, характеризующая степень важности i -го измерения для оценки параметров, $i = -n4, -n4+1, \dots, 0, n4 < N$,

$$y_{t+i}^{\text{mod}} = [-y_{t+i-1} \quad -y_{t+i-2} \quad \dots \quad -y_{t+i-n} \quad u_{t+i-1} \quad u_{t+i-2} \quad \dots \quad u_{t+i-n}] \theta = \varphi_{t+i} \theta. \quad (5)$$

Стандартный алгоритм конструирования адаптивного прогнозирующего управления состоит в следующем [2]. При каждом текущем значении $t = 0, 1, \dots$ находится оценка $\hat{\theta}_t$ вектора неизвестных параметров θ , минимизирующая критерий (4) с использованием модели (5). Полученные оценки подставляются в модель объекта (1), с помощью которой рассчитывается прогнозирующее управление в предположении, что модель задана. Характеристики системы с таким управлением в значительной степени зависят от точности оценки неизвестных параметров. В настоящей работе предлагается повысить их точность путем использования дополнительной информации, получаемой по прогнозу поведения замкнутой системы относительно отслеживаемой траектории. Это становится принципиально возможным, когда выход объекта попадает в достаточно малую окрестность отслеживаемой траектории. Формализация этой идеи приводит к следующей задаче.

Найти векторы $\theta, \Delta U$ из условия

$$\min_{\Delta U \in R^{n3}, \theta \in R^{2n}} \tilde{J}_t(\theta, \Delta U), \quad (6)$$

где $\tilde{J}_t(\theta, \Delta U) = J_p(\theta) + (1-\gamma) \cdot J_f(\theta, \Delta U)$ – расширенный критерий качества системы; $\gamma = J_f(\theta^{\text{opt}}, \Delta U^{\text{opt}}) / J_f(\theta^{\text{opt}}, \Delta U^{\text{opt}})_{\text{MAX}}$ – нормированный весовой коэффициент $\gamma \in [0,1]$, характеризующий степень приближения прогноза выхода системы к желаемой траектории; $J_f(\theta^{\text{opt}}, \Delta U^{\text{opt}})$ – значение прогнозирующего критерия (2) в текущий момент времени t ; $J_f(\theta^{\text{opt}}, \Delta U^{\text{opt}})_{\text{MAX}}$ – максимальное значение критерия (2) до момента времени t , причём вектора $\theta^{\text{opt}}, \Delta U^{\text{opt}}$ – текущие оценки вектора неизвестных параметров и приращений управлений, рассчитанных с помощью стандартного адаптивного алгоритма. Таким образом, по мере приближения прогноза выхода $\hat{y}(t+k|t)$ системы (1) к желаемой траектории $w(t+k)$, коэффициент γ будет постепенно уменьшаться, и прогнозы выхода системы можно считать дополнительными измерениями для оценки параметров системы.

2. Расчёт прогнозирующего управления при известных параметрах. Использование уравнения (1) дает

$$\begin{aligned} y_{t+1} + a_1 y_t + \dots + a_n y_{t-n+1} &= b_1 u_t + b_2 u_{t-1} + \dots + b_n u_{t-n+1}, \\ y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + \dots + a_n y_{t-n+2} &= b_1 u_{t+1} + b_2 u_t + \dots + b_n u_{t-n+2}, \\ &\vdots \\ y_{t+n2} + a_1 y_{t+n2-1} + \dots + a_n y_{t-n+2} &= b_1 u_{t+n2-1} + b_2 u_{t+n2} + \dots + b_n u_{t-n+2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя прогноз y_{t+1} в выражение для y_{t+2} , получаем

$$\begin{aligned} y_{t+2} &= a_1 a_1 y_t + a_1 a_2 y_{t-1} + \dots + a_1 a_n y_{t-n+1} - a_1 b_1 u_t - a_1 b_2 u_{t-1} - \dots - a_1 b_n u_{t-n+1} - \\ &\quad - a_2 y_t - a_3 y_{t-1} - \dots - a_n y_{t-n+2} + b_1 u_{t+1} + b_2 u_t + \dots + b_n u_{t-n+2} = \\ &= a_1^{(1)} y_t + a_2^{(1)} y_{t-1} + \dots + a_{n-1}^{(1)} y_{t-n+2} + a_n^{(1)} y_{t-n+1} + b_2^{(1)} u_{t-1} + \dots + b_n^{(1)} u_{t-n+1} + b_1 u_{t+1} + b_1^{(1)} u_t, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= a_1 a_i - a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; & b_i^{(1)} &= -a_1 b_i + b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ a_n^{(1)} &= a_1 a_n; & b_n^{(1)} &= -a_1 b_n. \end{aligned}$$

Далее, используя индукцию, нетрудно показать, что прогноз y_{t+j} для $j = 1, 2, \dots, n2$ представляется в виде [3]

$$y_{t+j} = a_1^{(j-1)} y_t + a_2^{(j-1)} y_{t-1} + \dots + a_n^{(j-1)} y_{t-n+1} + b_2^{(j-1)} u_{t-1} + \dots + b_n^{(j-1)} u_{t-n+1} + b_1^{(0)} u_{t+j-1} + b_1^{(1)} u_{t+j-2} + \dots + b_1^{(j-1)} u_t, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^{(j)} &= -a_1^{(j-1)} a_i + a_{i+1}^{(j-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; & b_i^{(j)} &= a_1^{(j-1)} b_i + b_{i+1}^{(j-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ a_n^{(j)} &= -a_1^{(j-1)} a_n; & b_n^{(j)} &= a_1^{(j-1)} b_n; \\ a_i^{(0)} &= -a_i; & b_i^{(0)} &= b_i. \end{aligned}$$

Используя векторно-матричные обозначения, прогнозы (9) можно представить следующим образом

$$\hat{Y}_f = H_a Y_p + M \hat{U}_f + H_b U_p, \quad (10)$$

где $\hat{Y}_f = (\hat{y}_{t+1|t}, \hat{y}_{t+2|t}, \dots, \hat{y}_{t+n|t})^T$; $Y_p = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-n+1})^T$; $\hat{U}_f = (\hat{u}_{t|t}, \hat{u}_{t+1|t}, \dots, \hat{u}_{t+n-1|t})^T$;
 $U_p = (u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-n+1})^T$;

$$H_a = \begin{bmatrix} a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & \dots & a_n^{(0)} \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & \dots & a_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}; \quad H_b = \begin{bmatrix} b_2^{(0)} & b_3^{(0)} & \dots & b_n^{(0)} \\ b_2^{(1)} & b_3^{(1)} & \dots & b_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} & \dots & b_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \in R^{n \times n-1},$$

$$M = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ b_1^{(1)} & b_1^{(0)} & \dots & 0 \\ b_1^{(2)} & b_1^{(1)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & b_1^{(0)} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}.$$

Используя представление для управлений [1]

$$u_{t+j} = \sum_{k=0}^j \Delta \hat{u}_{t+k|t} + u_{t-1}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

преобразуем (10) к виду

$$\hat{Y}_f = H_a Y_p + H_b U_p + M [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T u_{t-1} + M \Delta \hat{U}_f, \quad (11)$$

где $\Delta \hat{U}_f = (\Delta \hat{u}_{t|t}, \Delta \hat{u}_{t+1|t}, \dots, \Delta \hat{u}_{t+n-1|t})^T \in R^{n-1}$.

Далее с учётом обозначений

$$W = (w_{t+1}, w_{t+2}, \dots, w_{t+n})^T, \quad \hat{Y} = \hat{Y}_f, \quad \Delta U = \Delta \hat{U}_f, \quad F = H_b U_p + H_a Y_p, \quad H = M [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T,$$

выражение (11) принимает вид

$$\hat{Y} = F + H u_{t-1} + M \Delta U. \quad (12)$$

Полученное выражение для прогноза выхода системы (12) подставляется в критерий качества (2), что дает

$$J_f(\theta, \Delta U) = (F + H u_{t-1} + M \Delta U - W)^T Q (F + H u_{t-1} + M \Delta U - W) + (\Delta U)^T R \Delta U, \quad (13)$$

где $R = \text{diag}(r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$, $Q = \text{diag}(q_1, q_{n+1}, \dots, q_n)$ – матрицы штрафов. Запишем соотношение (13) в более удобной для последующего использования виде

$$\begin{aligned} J_f &= (\Delta U)^T M^T Q M \Delta U + 2(F + H u_{t-1} - W)^T Q M \Delta U + \\ &+ (F + H u_{t-1} - W)^T Q (F + H u_{t-1} - W) + (\Delta U)^T R \Delta U. \end{aligned}$$

Используя условия минимума

$$\partial J_f / \partial \Delta U = 2M^T Q M \Delta U + 2M^T Q (F + H u_{t-1} - W) + R \Delta U = 0,$$

находим

$$\Delta U^{opt} = (M^T Q M + R)^{-1} M^T Q (W - F - H u_{t-1}). \quad (14)$$

Для расчёта прогнозирующего управления найденное решение ΔU^{opt} подставляется в (3)

$$u_t^{opt} = u_{t-1} + e_1 \Delta U^{opt} = u_{t-1} + e_1 K_{opt} \begin{bmatrix} W \\ F \\ u_{t-1} \end{bmatrix}$$

где

$$K_{opt} = (M^T Q M + R)^{-1} M^T Q [I_{n2}, -I_{n2}, -H]$$

Если матрица $M \in R_{n3}^{n2 \times n3}$ имеет полный столбцовый ранг, то при $R_{n3 \times n3} = 0$ из (14) следует, что

$$\Delta U^{opt} = (M^T Q M)^{-1} M^T Q (W - F - H u_{t-1}).$$

3. Одновременное оценивание параметров и расчёт управления. Обратимся теперь к задаче построения управления при неизвестных параметрах объекта. Рассматривается критерий качества работы замкнутой системы (6). Для одновременной оценки неизвестных параметров и управлений при минимизации критерия используется градиентный метод

$$\Delta U_i = \Delta U_{i-1} - \mu \partial \tilde{J}_t(\theta_{i-1}, \Delta U_{i-1}) / \partial \Delta U_{i-1},$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} - \mu \partial \tilde{J}_t(\theta_{i-1}, \Delta U_{i-1}) / \partial \theta_{i-1},$$

$$\partial \tilde{J}_t(\theta_{i-1}, \Delta U_{i-1}) / \partial \Delta U_{i-1} = \partial J_p(\theta_{i-1}) / \partial \Delta U_{i-1} + (1 - \gamma) \cdot (\partial J_f(\theta_{i-1}, \Delta U_{i-1}) / \partial \Delta U_{i-1}),$$

$$\partial \tilde{J}_t(\theta_{i-1}, \Delta U_{i-1}) / \partial \theta_{i-1} = \partial J_p(\theta_{i-1}) / \partial \theta_{i-1} + (1 - \gamma) \cdot (\partial J_f(\theta_{i-1}, \Delta U_{i-1}) / \partial \theta_{i-1}),$$

где μ – размер шага, $i = 0, 1, \dots$ – номер итерации в каждый момент времени t . При этом для решения поставленной задачи необходимо вычисление частных производных по векторам неизвестных

$$\partial J_{1t}(\theta_{i-1}, \Delta U_{i-1}) / \partial \theta_{i-1}^k = 2 J(\theta)^T Q (F + H u_{t-1} + M \Delta U - W),$$

$$\partial J_{1t}(\theta_{i-1}, \Delta U_{i-1}) / \partial \Delta U_{i-1} = 2 \left(M^T Q M \Delta U + M^T Q (F + H u_{t-1} - W) + R \Delta U \right) \Big|_{\substack{\Delta U = \Delta U_{i-1} \\ \theta = \theta_{i-1}}},$$

$$\partial J_{2t}(\theta_{i-1}) / \partial \theta_{i-1} = 2 \left(-\Phi^T L Y + \Phi^T L \Phi \theta \right) \Big|_{\theta = \theta_{i-1}},$$

$$\partial J_{2t}(\theta_{i-1}) / \partial \Delta U_{i-1} = 0_{n3 \times 1},$$

где $Y = [y_{t-n4}, y_{t-n4+1}, \dots, y_t]^T$ – вектор известных значений выхода, $\Phi = [\varphi_{t-n4}^T, \varphi_{t-n4+1}^T, \dots, \varphi_t^T]^T$; $L = \text{diag}(\lambda^{n4}, \lambda^{n4-1}, \dots, \lambda^0)$; $J(\theta)$ – Якобиан, состоящий из частных производных $J_{j,k}(\theta_{i-1}) = \partial \hat{y}_{t+j|t} / \partial \theta_{i-1}^k$ вычисление, которых с учётом представлений (7)–(9), может выполняться рекуррентно, т.е.

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial \theta_{i-1}^k} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial a_m^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k} y_{t-m+1} + \sum_{m=2}^n \frac{\partial b_m^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k} u_{t-m+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\partial b_1^{(l)}}{\partial \theta_{i-1}^k} u_{t+l}, \quad j = 1, 2, \dots, n2,$$

$$\frac{\partial a_m^{(j)}}{\partial \theta_{i-1}^k} = -\frac{\partial a_1^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k} a_m - a_1^{(j-1)} \frac{\partial a_m^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k} + \frac{\partial a_{m+1}^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\frac{\partial a_n^{(j)}}{\partial \theta_{i-1}^k} = -\frac{\partial a_1^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k} a_n - a_1^{(j-1)} \frac{\partial a_n^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k},$$

$$\frac{\partial b_m^{(j)}}{\partial \theta_{i-1}^k} = \frac{\partial a_1^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k} b_m + a_1^{(j-1)} \frac{\partial b_m^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k} + \frac{\partial b_{m+1}^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{\partial b_n^{(j)}}{\partial \theta_{i-1}^k} = \frac{\partial a_1^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k} b_n + a_1^{(j-1)} \frac{\partial b_n^{(j-1)}}{\partial \theta_{i-1}^k}.$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, 2n$ – номер компоненты вектора параметров.

Заключение. В работе предложены алгоритмы рекуррентного оценивания параметров и расчёта оптимального управления на основе расширенного критерия качества, использующего как прошлые измерения, так и дополнительную информацию, полученную из прогноза поведения выхода системы.

Перспективой дальнейших исследований является проведение имитационного моделирования, а также исследование свойств разработанных алгоритмов.

Библиографический список

1. Maciejowski J.M. Predictive control: with constraints / J.M. Maciejowski. — N.Y.: Prentice Hall, 2002. — 331 p.
2. Feng G. Adaptive Control Systems / G. Geng, R. Lozano. — London.: Newnes, 1999. — 334 p.
3. Eure K.W. Adaptive Predictive Feedback Techniques for Vibration Control: dissertation of the Doctor of Philosophy in Electrical Engineering / K.W. Eure. — Blacksburg: Virginia, 1998. — 155 p.

Поступила в редакцию 07.04.2010 г.