

**Севастопольский национальный технический университет
Кафедра физики**

**Доцент, кандидат физико-математических наук Леонтович А.Л.,
доцент, кандидат физико-математических наук Петренко Н.В.**

Конспект лекций по курсу «Общая физика» (часть 2)

Электромагнетизм. Колебания и волны. Волновая оптика

**(методическое пособие для студентов специальности «Кибернетика и
вычислительная техника»)**

(на правах рукописи)

Утверждено на заседании кафедры физики, протокол № 5 от 26.03.2010 г.

Севастополь 2010

Оглавление

ЛК. 1. Математическое введение	6
1.1. Принятые обозначения	6
1.1.1. Обозначения координат и единичных векторов	6
1.1.2. Обозначения величин	6
1.2. Векторы	7
1.2.1. Некоторые формулы векторной алгебры	7
1.2.2. Операции векторного анализа	8
1.2.3. Интегральные формулы векторного анализа	10
1.2.4. Дифференциальные формулы векторного анализа	10
1.2.5. Уравнение силовых линий	10
1.3. Дельта - функция Дирака	11
1.3.1. Примеры применения дельта-функции	11
ЛК. 2. Введение в электродинамику	12
2.1. Фундаментальные взаимодействия	12
2.2. Взаимодействие в механике и в электродинамике	14
2.3. Интернациональная система единиц СИ и СГС система Гаусса	15
2.3.1. Обозначения и названия единиц	15
2.3.2. Десятичные приставки к названиям единиц	15
2.3.3. Единицы электрических и магнитных величин	15
2.3.4. Основные формулы электромагнетизма	16
ЛК. 3. Электростатическое поле и его характеристики	19
3.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда	19
3.2. Закон Кулона	19
3.3. Напряженность и потенциал электрического поля. Принцип суперпозиции	19
3.4. Расчёт электрических полей методом суперпозиции	20
3.5. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме. Уравнение Пуассона	20
3.5.1. Применение теоремы О.-Г. к расчету полей	21
3.6. Проблема равновесия и устойчивости электрического заряда в электрическом поле. Теорема Ирншоу	21
3.7. Работа сил электрического поля. Циркуляция вектора $\vec{E}$.	22
ЛК. 4. Электрическое поле в диэлектрике	22
4.1. Электрический диполь в однородном и неоднородном электрических полях	22
4.2. Энергия диполя в электрическом поле	23
4.3. Поляризация диэлектриков. Сегнетоэлектрики	23
4.4. Вектор электрического смещения $\vec{D}$. Диэлектрическая проницаемость ϵ	24
4.5. Теорема Остроградского – Гаусса для электрического поля в диэлектрике	24
4.6. Условия для электростатического поля на границе раздела диэлектрических изотропных сред	25

ЛК. 5. Проводники в электрическом поле	25
5.1. Распределение зарядов в проводнике. Поле внутри проводника и у его поверхности	25
5.2. Электроёмкость. Конденсаторы	26
5.2.1. Ёмкость уединённого шара.	26
5.2.2. Ёмкость плоского конденсатора	27
5.2.3. Ёмкость цилиндрического конденсатора (коаксиального кабеля)	27
5.3. Соединения конденсаторов	27
5.4. Энергия электрического поля конденсатора. Объёмная плотность энергии	27
5.5. Электростатическая сила между заряженными проводниками (пандеромоторная сила)	27
Постоянный электрический ток	
ЛК.6. Классическая электронная теория электропроводности	28
6.1. Законы Ома и Ленца – Джоуля в дифференциальной и интегральной формах. Закон Видемана – Франца	29
6.2. Разность потенциалов, напряжение, электродвижущая сила	30
6.3. Правила Кирхгофа	31
ЛК. 7. Электрический ток в газах. Плазма. Электрический ток в вакууме	31
7.1. Электрический ток в газах	31
7.2. Плазма	33
7.3. Электрический ток в вакууме	33
Электромагнетизм	
ЛК. 8. Магнитное поле. Магнитное поле тока	34
8.1. Инвариантность потока вектора напряжённости электрического поля. Преобразование полей. Относительный характер электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля	34
8.2. Магнитное поле одиночного движущегося заряда	35
8.3. Закон Био – Савара – Лапласа	36
8.3.1. Магнитное поле линейного проводника с током	36
8.3.2. Магнитное поле на оси и в центре кругового тока	36
8.4. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля	36
ЛК. 9. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле	37
9.1. Действие электромагнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца	37
9.1.1. Принцип действия циклического ускорителя заряженных частиц	37
9.1.2. β - и масс – спектрометры. МГД – генератор	37
9.1.3. Эффект Холла. Униполярный генератор. Электромагнитный насос	37
9.2. Действие магнитного поля на проводник и рамку с током	38
9.3. Магнитный поток. Теорема Остроградского – Гаусса для магнитного поля	39
9.4. Работа перемещения проводника (контура) с током в магнитном поле	39

ЛК 10. Явление электромагнитной индукции	39
10.1. Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца	39
10.2. Явление взаимной индукции	40
10.3. Явление самоиндукции	41
10.4. Энергия магнитного поля. Объёмная плотность энергии	41
10.5. Токи при замыкании и при размыкании электрической цепи	41
10.5.1. Ток при замыкании цепи	41
10.5.2. Экстраток при размыкании цепи	41
ЛК. 11. Магнитное поле в веществе	42
11.1. Магнитный момент атома. Типы магнетиков. Намагниченность	42
11.2. Элементарная теория диамагнетизма. Парамагнетизм. Парамагнитный резонанс	43
11.3. Ферромагнетизм	44
11.3.1. Ферромагнетизм. Спиновая природа ферромагнетизма	44
11.4. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах	46
11.4.1. Первое уравнение Максвелла	46
11.4.2. Второе уравнение Максвелла	48
11.4.3. Третье уравнение Максвелла	49
11.4.4. Четвёртое уравнение Максвелла	50
11.4.5. Уравнение непрерывности	50
11.4.6. Закон Ома в дифференциальной форме	51
11.5. Энергия и поток энергии электромагнитного поля. Вектор Умова – Пойнтинга.	
Импульс электромагнитного поля	51
ЛК.12. Колебания и волны	51
12.1. Колебания и их характеристики. Свободные незатухающие колебания	51
12.2. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение	52
12.2.1. Математический маятник	52
12.2.2. Физический маятник	53
12.2.3. Электрический LC – колебательный контур	53
12.2.4. Энергия гармонических колебаний	53
12.2.5. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты	53
12.2.6. Биения	54
12.2.7. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу	54
12.3. Свободные затухающие колебания	55
12.3.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Механический осциллятор	55
12.3.2. Электрический RLC – осциллятор	56
12.4. Вынужденные колебания	56
12.4.1. Механический осциллятор. Резонанс	56
12.4.2. Электрический осциллятор	57
ЛК. 13. Волновые процессы	57
13.1. Волны в упругой среде. Продольные и поперечные волны	58
13.1.1. Волны, распространяющиеся в одном направлении - $A(x,t)$.	58
13.1.2. Распространение волн на плоскости	58
13.1.3. Распространение волн в пространстве	58

13.2. Гармонические волны	59
13.3. Волновое уравнение	59
13.3.1. Фазовая скорость и дисперсия волн	59
13.4. Энергия волны. Принцип суперпозиции волн и границы его применимости	60
13.4.1. Волновой пакет. Групповая скорость.	60
13.4.2. Когерентность	61
13.5. Стоячие волны. Образование стоячих волн. Уравнение стоячей волны	61
13.5.1. Акустические волны	61
ЛК. 14. Электромагнитные волны.	62
14.1. Излучение дипольной антенны	62
14.2. Излучение атомного диполя	63
ЛК. 15. Волновая оптика	64
15.1. Интерференция света	64
15.1.1. Монохроматичность и когерентность световых волн	64
15.1.2. Пространственная когерентность	65
15.1.3. Расчёт интерференционной картины от двух когерентных источников	65
15.1.4. Интерференция света в тонких плёнках	66
15.2. Дифракция света	66
15.2.1. Принцип Гюйгенса–Френеля. Метод зон Френеля. Дифракции Френеля и Фраунгофера	67
15.2.2. Дифракционная решётка	68
15.2.3. Дифракция на пространственной решётке. Формула Вульфа – Брэгга	68
15.2.4. Голография	68
ЛК. 16. Дисперсия света	69
16.1. Классическая электронная теория дисперсии света	69
ЛК. 17. Поляризация света	70
17.1. Естественный и поляризованный свет	70
17.1.1. Поляризация света при отражении и преломлении света на границе раздела двух диэлектрических сред. Закон Брюстера	71
17.1.2. Двойное лучепреломление. Закон Малюса	72
17.1.3. Интерференция поляризованного света	73
17.1.4. Искусственная оптическая анизотропия	74
17.1.5. Вращение плоскости поляризации оптически активными веществами	74

ЛК. 1. Математическое введение.

"Математика - это язык" И. Ньютон.

1.1. Принятые обозначения.

1.1.1. Обозначения координат и единичных векторов:

x, y, z - декартовы прямоугольные координаты;

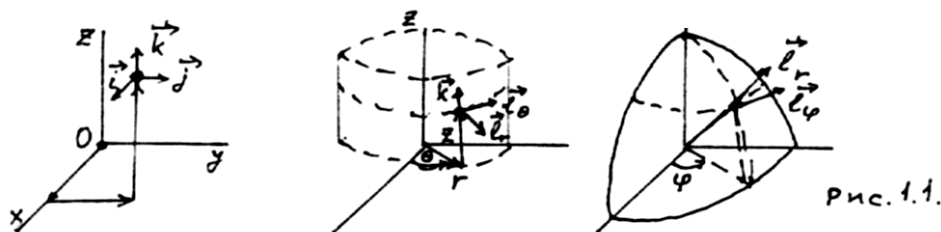
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы в декартовых прямоугольных координатах;

r, Θ, z - цилиндрические координаты;

$\vec{l}_r, \vec{l}_\Theta, \vec{k}$ - единичные векторы в цилиндрических координатах;

r, Θ, φ - сферические координаты;

$\vec{l}_r, \vec{l}_\Theta, \vec{l}_\varphi$ - единичные векторы в сферических координатах /рис.1.1/.



1.1.2. Обозначения величин.

$\vec{A}$ - вектор, векторный потенциал магнитного поля;

$\vec{B}$ - вектор, магнитная индукция;

C - электрическая емкость;

c - скорость света;

$\vec{D}$ - электрическое смещение / электрическая индукция /;

$\vec{E}$ - напряженность электрического поля;

ε - электродвижущая сила;

$\vec{F}$ - сила;

f - частота;

$\vec{H}$ - напряженность магнитного поля;

H - оператор Гамильтона / гамильтониан /;

I, i - сила тока;

$\vec{J}$ - интенсивность намагничивания / намагниченность /;

L - индуктивность, момент импульса, оператор Лагранжа;

M - взаимная индуктивность;

$\vec{M}$ - момент силы;

$\vec{P}$ - вектор поляризации;

P, p - активная мощность; давление;

Q - реактивная мощность; добротность;

Q, q - электрический заряд;
 R, r - электрическое сопротивление; радиус;
 $\vec{S}$ - вектор Умова - Пойнтинга; поверхность;
 T - период;
 t - время;
 U, u - электрическое напряжение, разность потенциалов;
 u - групповая скорость;
 v - фазовая скорость электромагнитной волны;
 W - энергия;
 Z - импеданс, волновое сопротивление;
 α - коэффициент поглощения; угол;
 β - коэффициент фазы; угол;
 γ - коэффициент затухания;
 δ - вариация;
 ε - диэлектрическая проницаемость;
 ε_0 - электрическая постоянная
 η - вязкость; КПД;
 λ - длина волны;
 μ - магнитная проницаемость;
 μ_0 - магнитная постоянная;
 ν - частота; коэффициент распространения волны;
 $\vec{P}$ - вектор Умова - Пойнтинга;
 ρ - удельное электрическое сопротивление; плотность вещества;
 ρ - объемная плотность электрического заряда;
 σ - поверхностная плотность электрического заряда;
 τ - линейная плотность заряда; время релаксации;
 Φ - магнитный поток; электрический поток;
 φ - потенциал; фаза; азимутальный угол;
 ψ - магнитное потокоцепление;
 Ω - угловая частота прецессии;
 ω - угловая частота.

"Математический формализм оказывает совершенно удивительную услугу в деле описания сложных вещей, но он нисколько не помогает в понимании реальных процессов". Макс Борн.

1.2. Векторы.

1.2.1. Некоторые формулы векторной алгебры.

Ниже имеются в виду векторы $\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z$, $\vec{B} = \vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z$ и $\vec{C} = \vec{i} C_x + \vec{j} C_y + \vec{k} C_z$, где $A_x, A_y, \dots$ - декартовы компоненты, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты.

Скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad 1.1$$

Векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$[\vec{A}, \vec{B}] \equiv \vec{A} \times \vec{B} = \vec{n}_0 AB \sin \alpha = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x) \quad 1.2$$

$\vec{n}_0$ - единичный вектор нормали к плоскости векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, причем $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{n}_0$ образуют "правую тройку" векторов. В краткой записи:

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad 1.2a$$

Векторно-скалярное / смешанное / произведение векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$:

$$\vec{A} \cdot [\vec{B}, \vec{C}] = [\vec{A}, \vec{B}] \cdot \vec{C} = [\vec{C}, \vec{A}] \cdot \vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad 1.3$$

Двойное векторное произведение векторов $\vec{A}, \vec{B}$ и $\vec{C}$:

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}) \quad 1.4$$

1.2.2. Операции векторного анализа.

В рассмотрение входят скалярные функции φ и векторные функции $\vec{A}$ как декартовых координат, так и криволинейных ортогональных координат q_1, q_2, q_3 /орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; метрические коэффициенты h_1, h_2, h_3 /, в частности, координат цилиндрических $q_1 = r, q_2 = \Theta, q_3 = Z; \vec{i} = \vec{l}_r, \vec{j} = \vec{l}_\Theta, \vec{k} = \vec{k}; h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$ / и сферических $q_1 = r, q_2 = \Theta, q_3 = \varphi; \vec{i} = \vec{l}_r, \vec{j} = \vec{l}_\Theta, \vec{k} = \vec{l}_\varphi; h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \Theta$ /.

Градиент.

а) В декартовых координатах:

$$\text{grad} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad 1.5$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\text{grad} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \vec{j} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \vec{k} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \quad 1.6$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\text{grad} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{l}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{l}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad 1.7$$

г) В сферических координатах:

$$\text{grad} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{l}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{l}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \vec{l}_\varphi \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \quad 1.8$$

Дивергенция.

а) В декартовых координатах:

$$\text{div} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad 1.9$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad 1.10$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad 1.11$$

г) В сферических координатах:

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta \cdot A_\Theta) + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad 1.12$$

Скалярный оператор Лапласа $\nabla^2 \equiv \text{div} \cdot \text{grad}$.

а) В декартовых координатах:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi \equiv \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad 1.13$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right] \quad 1.14$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad 1.15$$

г) В сферических координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} \quad 1.16$$

Ротор.

а) В декартовых координатах:

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad 1.17$$

б) В произвольных, ортогональных криволинейных координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{h_2 h_3}{\partial / \partial q_1} & \frac{h_3 h_1}{\partial / \partial q_2} & \frac{h_1 h_2}{\partial / \partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad 1.18$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{l}_r & \vec{l}_\Theta & \vec{k} \\ \frac{r}{\partial / \partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\Theta & A_z \end{vmatrix} \quad 1.19$$

г) В сферических координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{l}_r}{r^2 \sin \Theta} & \frac{\vec{l}_\Theta}{r \sin \Theta} & \frac{\vec{l}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\Theta & r \sin \Theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad 1.20$$

1.2.3. Интегральные формулы векторного анализа.

Теорема Остроградского-Гаусса: $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ 1.21

Теорема Грина:

1) $\int_V \left(\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi + \psi \nabla^2 \varphi \right) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$ 1.22

2) $\int_V \left(\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \right) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$ 1.23

Теорема Стокса: $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$ 1.23a

Формула с объемным интегралом от $\text{rot } \vec{A}$: $\int_V \vec{\nabla} \times \vec{A} dV = \oint_S [d\vec{S}, \vec{A}]$ 1.24

В записанных формулах $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$ / $\vec{n}_0$ - единичный вектор внешней нормали $\vec{n}$ /;
 $d\vec{l} = \vec{\tau}_0 dl$ / $\vec{\tau}_0$ - единичный вектор касательной /.

1.2.4 Дифференциальные формулы векторного анализа.

$\vec{\nabla} \varphi \psi = \varphi \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \varphi$ 1.25

$\vec{\nabla} \psi \vec{A} = \vec{A} \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \vec{A}$ 1.26

$\vec{\nabla} [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{B} \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \vec{\nabla} \times \vec{B}$ 1.27

$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ 1.28

$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$ 1.29

$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ 1.30

$\vec{\nabla} \times \varphi \vec{A} = [\vec{\nabla} \varphi, \vec{A}] + \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A}$ 1.31

$\vec{\nabla} f(\xi) = f'(\xi) \vec{\nabla} \xi$ 1.32

1.2.5 Уравнение силовых линий.

$\frac{h_1 dq_1}{A_1} = \frac{h_2 dq_2}{A_2} = \frac{h_3 dq_3}{A_3}$ 1.33

В частности, в декартовых координатах $\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$ 1.34

1.3. Дельта - функция Дирака.

Дельта - функцией Дирака $\delta(x - x')$ называют особый математический объект, входящий в следующее соотношение:

$$\int_L f(x)\delta(x - x')dx = \begin{cases} 0, x' \notin L \\ f(x'), x' \in L \end{cases} \quad 1.35$$

где $f(x)$ - некоторая функция, рассматриваемая в обычном математическом анализе. Соотношение 1.35 принимают за определение дельта-функции.

Если интегрирование в 1.35 распространить на бесконечный интервал $[-\infty, +\infty]$, то результат будет $f(x')$.

В частности, из 1.35 при $f(x) = 1$ следует:

$$\int_L \delta(x - x')dx = \begin{cases} 0, x' \notin L \\ 1, x' \in L \end{cases} \quad 1.36$$

По существу соотношение 1.35 регламентирует и употребление дельта-функции. Обобщение дельта-функции на трехмерные области:

$$\int f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}')dV = \begin{cases} 0, M(\vec{r}') \notin V \\ f(\vec{r}'), M(\vec{r}') \in V \end{cases} \quad 1.37$$

в частности, при $f(\vec{r}) = 1$

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}')dV = \begin{cases} 0, M(\vec{r}') \notin V \\ 1, M(\vec{r}') \in V \end{cases} \quad 1.38$$

Представление дельта - функции $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad 1.39$$

1.3.1. Примеры применения дельта-функции.



А) Представление плотности заряда $\rho(\vec{r})$ в случае точечного заряда q , расположенного в точке $P(\vec{r}')$: $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ 1.40

Б) Представление плотности заряда $\rho(\vec{r})$ в случае поверхности S , заряженной с плотностью $\sigma(q_1, q_2)$: $\rho(\vec{r}) = \sigma(q_1, q_2)\delta(n - n')$ 1.41

q_1, q_2 - координаты на S ; n - ортогональная к S координата, принимающая значение n' на S , рис. 2а/.

в) Представление плотности тока $\vec{j}(\vec{r})$ в случае поверхностного тока, распределенного на S с плотностью $\eta(q_1, q_2)$:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \eta(q_1, q_2) \delta(n - n') \quad 1.42$$

/рис.6/.

г) Представление плотности тока $\vec{j}(\vec{r})$ в случае тока I , проходящего по линии L / рис.2в /:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{\tau}_0 I \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad 1.43$$

где дельта-функция двумерная; соответственно этому точки $M(\vec{r})$ и $P(\vec{r}')$

(последняя лежит на L) при интегрировании остаются на к.-л. поверхности, пересекаемой током; орт $\vec{\tau}'$ указывает направление тока.

ЛК. 2. Введение в электродинамику.

"Нельзя объять необъятное". К. Прутков.

"Но если очень хочется, то..."

2.1. Фундаментальные взаимодействия.

"Был мир кромеишной тьмой окутан..."

Впрочем, изначально ни мира, ни тьмы еще не было. И вот через 10^{-43} с в области планковского масштаба радиусом меньше 10^{-50} см "зародился" первоначальный хаос. Все фундаментальные силы природы - гравитация, сильное, слабое взаимодействия и электромагнетизм - объединены. Всеми процессами управляет теория всего сущего (ТВС). Вследствие высокой температуры, достигающей 10^{33} К, такая система не будет устойчивой и на 10^{-33} с происходит отделение гравитации от других сил. Начинается раздувание Вселенной. Область, соответствующая наблюдаемой Вселенной, расширяется до размера апельсина. Все процессы в этой области подчиняются теории великого объединения /ТВО/. Далее, после 10^{-10} с сильное взаимодействие отделяется от электрослабого. Раздувание заканчивается. Вселенная заполнена горячей электрон - кварковой смесью. С 1с по 500000 лет происходит разделение электромагнитного и слабого взаимодействий; объединение кварков с образованием протонов и электронов; объединение протонов и электронов с образованием нейтронов; образование гелия и других легких элементов в результате нуклеосинтеза. Далее до 1 млн лет образуются атомы, Вселенная становится прозрачной, происходит разделение вещества и излучения, которое впоследствии наблюдается как микроволновое реликтовое фоновое излучение. Именно с этого времени высказано: "Да будет свет...".

С 1 млн до 1 млрд лет происходило образование протогалактик, но большинство из них все еще недоступны для наблюдения. В течение еще 2 млрд лет образовались некоторые наблюдаемые квазары и радиогалактики, и далее к 8 млрд лет - большинство галактик, включая Млечный Путь. К 13 млрд лет существования Вселенной произошло образование Солнца и планет, произошло зарождение жизни на Земле/ Рис. 2.1 /.

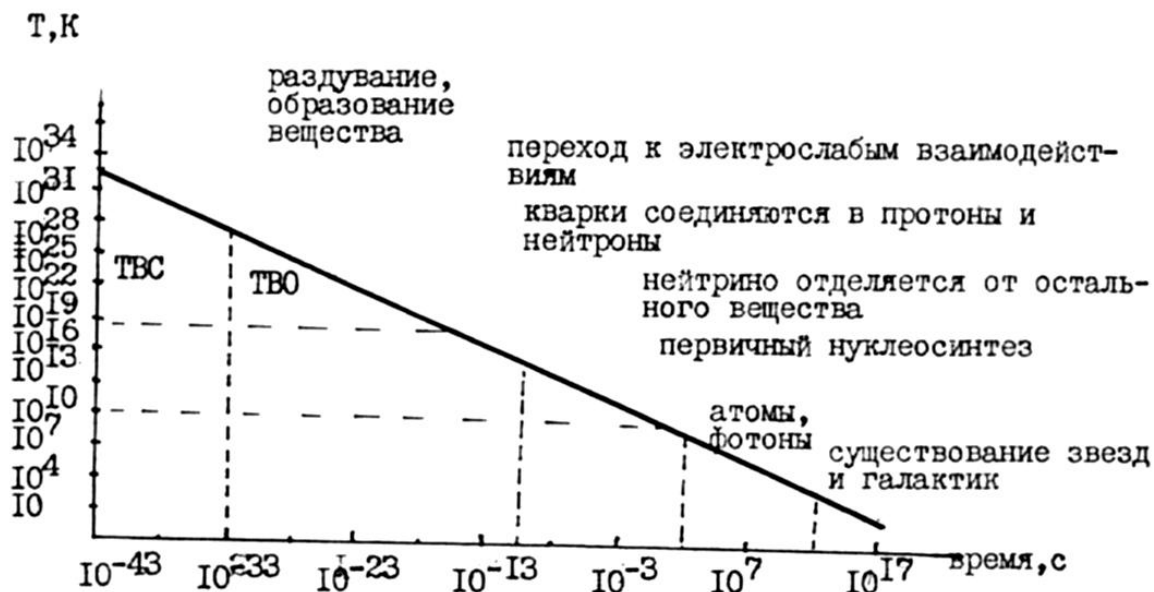


Рис.2.1.

Структурные уровни строения материи мира, в котором мы живем, представлены на рис. 2.2.

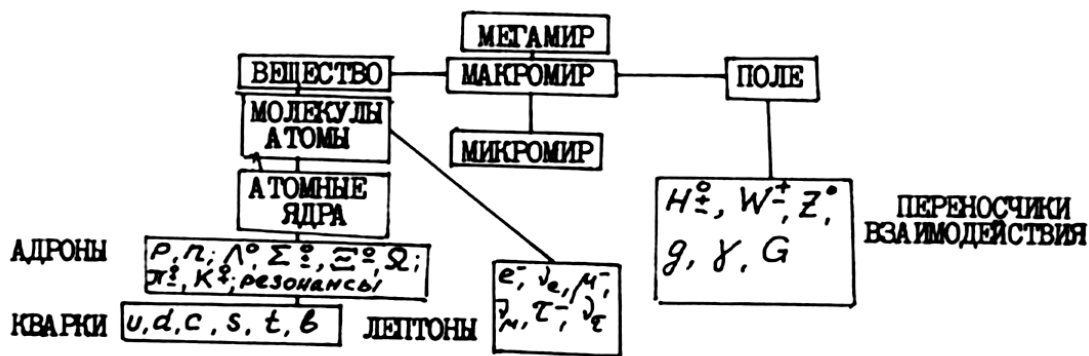


Рис.2.2

Сравнительная таблица фундаментальных взаимодействий представлена ниже:

Взаимодействие	α_i	$R, м$	$\tau, с$	законы сохранения	участники	переносчики	изменяются	
							цвет	аромат
Сильное, S	1	10^{-15}	10^{-23}	все	$q(H)$	g_i $i = 1..8$	+	-
Электромагнитное, E	10^{-2}	∞	10^{-20}	все, кроме T	$q(H)$ $l^\pm$ $W^\pm$	γ	-	-
Слабое, W	10^{-10}	10^{-18}	10^{-13}	$p, E, I,$ q, B, L	$q(H)$ l	$W^\pm$ Z^0	-	+
Гравитационное, G	10^{-38}	∞	?	? все	все	G	?	?

2.2. Взаимодействие в механике и в электродинамике.

Взаимодействие заряженных тел в электродинамике является, прежде всего, взаимодействием зарядов с электромагнитным полем. Именно, вместо того, чтобы говорить о действии одной частицы на другую, можно сказать, что частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая сила. Но физическое понятие поля в электродинамике коренным образом отличается от понятия поля в механике Ньютона.

В классической механике полем тяготения называют пространство, в котором действуют силы тяготения. Значения этих сил в любой точке поля определяются мгновенным положением гравитирующих тел, как бы далеко от данной точки они ни находились. Поэтому здесь поле является лишь некоторым способом описания физического явления - взаимодействия частиц.

В электродинамике такое представление о поле неудовлетворительно: за то время, пока электромагнитное возмущение дойдет от одного заряда к другому, последний может переместиться на большое расстояние. Элементарные заряды - электроны, протоны, мезоны - очень часто имеют скорости, близкие к скорости распространения электромагнитных возмущений.

Современная теория тяготения ОТО показывает, что и гравитационное взаимодействие распространяется с конечной скоростью. Но т.к. макроскопические тела движутся со скоростями, значительно меньшими, в масштабе солнечной системы конечная скорость передачи гравитационного воздействия приводит только к незначительным поправкам к законам движения ньютоновской механики.

В электродинамике элементарных зарядов конечная скорость распространения электромагнитных возмущений имеет решающее значение. Если говорить о точечных зарядах, то действие поля на заряд всегда определяется только полем в той точке, где находится заряд, и в тот момент времени, когда он в ней находится. В противоположность "дальнодействию" ньютоновской механики такое взаимодействие называют "близкодействием".

Если под действием поля изменились энергия и импульс частицы, то они могут быть непосредственно переданы только электромагнитному полю, ибо для того, чтобы изменились энергия и импульс других частиц, необходим конечный промежуток времени. Но это значит, что электромагнитное поле само по себе обладает энергией и импульсом и является реальным физическим объектом, совершенно в той же мере, как и заряженные частицы. Уравнения электродинамики должны непосредственно описывать распространение электромагнитных возмущений - волн - в пространстве и взаимодействие зарядов с полем.

Изучению взаимодействий частиц с электромагнитным полем предположим некоторые общие соображения, относящиеся к понятию "частицы" в СТО.

В классической механике можно ввести понятие абсолютно твердого тела, т.е. тела, которое ни при каких условиях не может быть деформировано. В СТО под абсолютно твердыми телами подразумевают тела, все размеры которых остаются неизменными в той системе отсчета, где они покоятся. Легко, однако, видеть, что СТО делает невозможным существование абсолютно твердых тел. Пусть, например, к-л. твердое тело внешним воздействием в некоторой точке приводится в движение. Если бы тело было абсолютно твердым, то все его точки должны были бы прийти в движение одновременно с той, которая подверглась воздействию; в противном случае тело деформировалось бы. СТО, однако, делает это невозможным, т.к. воздействие от данной точки передается к остальным с конечной скоростью, а потому все точки тела не могут одновременно начать двигаться.

Из сказанного вытекают определенные выводы относительно "элементарных" частиц. Очевидно, что если бы элементарная частица обладала бы конечными размерами, т.е. была бы протяженной, то она не могла бы деформироваться, т.к. понятие деформации связано с возможностью независимого движения отдельных частей тела. Но, как мы только что видели, СТО показывает невозможность существования абсолютно твердых тел.

Таким образом, мы приходим к результату, что в классической релятивистской механике частицам, которые мы рассматриваем как элементарные, нельзя приписывать конечных размеров. Другими словами в классической электродинамике частицы должны рассматриваться как точечные. Заметим однако, что хотя квантовая механика существенно меняет ситуацию, но и здесь теория относительности делает крайне трудным введение неточечного взаимодействия.

Взаимодействие между зарядами осуществляется через электромагнитное поле. При этом такие законы, как закон Кулона или закон Био-Савара-Лапласа, в которые входят только мгновенные положения или мгновенные скорости зарядов, имеют приближенный характер и справедливы только тогда, когда относительные скорости зарядов малы по сравнению со скоростью передачи электромагнитных возмущений. Эта скорость есть фундаментальная постоянная, входящая в уравнения электродинамики. Она равна скорости света в вакууме и с большой точностью составляет $3 \cdot 10^8$ м/с.

2.3. Интернациональная система единиц СИ и СГС система Гаусса.

2.3.1. Обозначения и названия единиц.

А - ампер, В - вольт, Вб - вебер, Вт - ватт, Гн - генри, г - грамм, Гс - гаусс, Гц - герц, дин - дина, Дж - джоуль, К - кельвин, Кл - кулон, м - метр, мин - минута, Мкс - максвелл, Н - ньютон, рад - радиан, с - секунда, См - сименс, Тл - тесла, Ф - фарада, ч - час, Э - эрстед, эВ - электронвольт.

2.3.2. Десятичные приставки к названиям единиц.

Т - тера = 10^{12} , Г - гига = 10^9 , М - мега = 10^6 , к - кило = 10^3 , г - гекто = 10^2 , да - дека = 10, д - деци = 10^{-1} , с - санти = 10^{-2} , м - милли = 10^{-3} , мк - микро = 10^{-6} , н - нано = 10^{-9} , п - пико = 10^{-12} , ф - фемто = 10^{-15} , а - атто = 10^{-18} .

2.3.3. Единицы электрических и магнитных величин.

Величина	Обозн.	СИ	СГС	СИ/СГС
Сила	F	Н	дин	10^5
Работа, энергия	A, W	Дж	эрг	10^7
Заряд	q	Кл	ед.СГСЭ	$3 \cdot 10^9$
Напряженность электрического поля	E	В/м	-//-	$1/30000$
Потенциал, напряжение	φ, U	В	-//-	$1/300$
Электрический момент	P_e	Кл·м	-//-	$3 \cdot 10^{11}$
Поляризованность	P	Кл/м ²	-//-	$3 \cdot 10^5$
Вектор электрического смещения	D	Кл/м ²	-//-	$12\pi \cdot 10^5$
Емкость	C	Ф	см	$9 \cdot 10^{11}$
Сила тока	I	А	ед.СГСЭ	$3 \cdot 10^9$
Плотность тока	j	А/м ²	-//-	$3 \cdot 10^5$
Сопротивление	R	Ом	-//-	$1/9 \cdot 10^{11}$
Удельное сопротивление	ρ	Ом·м	-//-	$1/9 \cdot 10^9$
Проводимость	Σ	См	-//-	$9 \cdot 10^{11}$
Удельная проводимость	σ	См/м	-//-	$9 \cdot 10^9$
Магнитная индукция	B	Тл	Гс	10^4
Магнитный поток, потокосцепление	Φ, ψ	Вб	Мкс	10^8
Магнитный момент	P_m	А·м ²	ед.СГСМ	10^3
Намагниченность	J	А/м	-//-	10^{-3}
Напряженность магнитного поля	H	А/м	Э	$4\pi \cdot 10^{-3}$
Индуктивность	L	Гн	см	10^9

2.3.4. Основные формулы электромагнетизма.

Наименование	СИ	СГС
Поле E точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = k_0 \frac{q}{r^2}$	$E = \frac{q}{r^2}$
Поле E в пл. конденс. и у поверхн. пр.	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$
Потенциал поля точечного заряда	$\varphi = k_0 \frac{q}{r}$	$\varphi = \frac{q}{r}$
Связь между $\vec{E}$ и φ	$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi, \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$	
Циркуляция $\vec{E}$ в эл.-ст. поле	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	
Электрический момент диполя	$\vec{p}_e = q \vec{l}$	
Электрический диполь в поле $\vec{E}$	$\vec{F} = p_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}, \vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}], W = -\vec{p}_e \vec{E}$	
Связь поляризованности с $\vec{E}$	$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$	$\vec{P} = \kappa \vec{E}$
Связь между $\sigma', \vec{P}$ и $\vec{E}$	$\sigma' = P_n = \epsilon_0 \kappa E_n$	$\sigma' = P_n = \kappa E_n$
Определение вектора $\vec{D}$	$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$
Связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
Связь между κ и ϵ	$\epsilon = 1 + \kappa$	$\epsilon = 1 + 4\pi \kappa$
Теорема Остроградского-Гаусса	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi q$
Емкость плоского конденсатора	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon \cdot S}{d}$	$C = \frac{\epsilon \cdot S}{4\pi d}$
Емкость конденсатора	$C = \frac{q}{U}$	
Энергия системы зарядов	$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$	
Полная энергия взаимодействия	$W = \frac{1}{2} \int \rho \cdot \varphi \cdot dV$	
Энергия конденсатора	$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$	
Плотность энергии эл. поля	$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$	$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{8\pi}$
Уравнение непрерывности	$\int \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\dot{q}, \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dot{\rho}$	
Закон Ома	$R \cdot I = \varphi_1 - \varphi_2 + \epsilon_{12}, \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$	
Закон Ленца - Джоуля	$\dot{Q} = R \cdot I^2, \dot{Q}_{y0} = \rho \cdot j^2$	

Сила Лоренца	$\vec{F} = q \vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$	$\vec{F} = q \vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{B}]$
Поле $\vec{b}$ движущегося заряда	$\vec{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$	$\vec{b} = \frac{1}{c} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$
Закон Био-Савара-Лапласа	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}] \cdot dV}{r^3}$ $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$	$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{[\vec{j}, \vec{r}] \cdot dV}{r^3}$ $d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{I \cdot [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$
Поле B :		
а/ прямого тока	$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$	$B = \frac{1}{c} \cdot \frac{2 \cdot I}{r}$
б/ в центре витка	$B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{r}$	$B = \frac{1}{c} \cdot \frac{2\pi \cdot I}{r}$
в/ в соленоиде	$B = \mu_0 n I$	$B = \frac{4\pi}{c} n I$
Закон Ампера		
	$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$ $d\vec{F} = [\vec{j}, \vec{B}] \cdot dV$	$d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}]$ $d\vec{F} = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] \cdot dV$
Сила взаимодей. парал. токов	$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r}$	$\frac{F}{l} = \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{r}$
Магнитный момент контура с током	$p_m = I \cdot S$	$p_m = \frac{1}{c} \cdot I \cdot S$
Магнитный диполь $\vec{p}_m$ в поле $\vec{B}$	$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}, \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$	
Работа перемещ. контура с током	$A = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$	$A = \frac{I}{c} \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$
Циркуляция намагниченности	$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = I'$	$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \frac{I'}{c}$
Определение вектора $\vec{H}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{J}$
Циркуляция $\vec{H}$ в стационарн.поле	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$
Связь между: $\vec{J}$ и $\vec{H}$	$\vec{J} = \chi \vec{H}$	
μ и χ	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
$\vec{B}$ и $\vec{H}$	$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
Закон преобразования полей E и B при $v < c$	$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]$ $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}]$	$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}]$ $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{E}]$
Инварианты эл.-магн. поля	$\vec{E} \cdot \vec{B} = inv$	

	$E^2 - c^2 B^2 = inv$	$E^2 - B^2 = inv$
Э.д.с. индукции	$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$	$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$
Индуктивность	$L = \frac{\Phi}{I}$	$L = \frac{c \cdot \Phi}{I}$
Индуктивность соленоида	$L = \mu_0 \mu \cdot n^2 V$	$L = 4\pi \mu \cdot n^2 V$
Э.д.с. самоиндукции	$\varepsilon_s = -L \cdot \dot{I}$	$\varepsilon_s = -\frac{1}{c^2} L \cdot \dot{I}$
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{L \cdot I^2}{2}$	$W = \frac{1}{c} \frac{L \cdot I^2}{2}$
Плотность энергии магн. поля	$\omega = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$	$\omega = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{8\pi}$
Плотность тока смещения	$\vec{j}_{см} = \dot{\vec{D}}$	$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \dot{\vec{D}}$
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$
	$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho \cdot dV$	$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int \rho \cdot dV$
	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{j} + \dot{\vec{D}}) \cdot d\vec{S}$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int (\vec{j} + \frac{\dot{\vec{D}}}{4\pi}) \cdot d\vec{S}$
	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}}$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$
	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \frac{\dot{\vec{D}}}{4\pi})$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	
Связь E и H в эл.-магн. волне	$E\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H\sqrt{\mu_0 \mu}$	$E\sqrt{\varepsilon} = H\sqrt{\mu}$
Вектор Умова - Пойнтинга	$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$
Плотность импульса эл.-магн. поля	$\vec{G} = \frac{1}{c^2} [\vec{E}, \vec{H}]$	$\vec{G} = \frac{1}{4\pi \cdot c} [\vec{E}, \vec{H}]$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{м}, \quad k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{\Phi}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{м}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

ЛК. 3. Электростатическое поле и его характеристики.

3.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда.

Электрические заряды бывают «положительными» и «отрицательными». В природе существуют элементарные частицы (ЭЧ), имеющие элементарный «+» заряд или элементарный «-» заряд, или не имеющие электрического заряда – нейтральные частицы. Величина элементарного заряда $e = 1,6021892(46) \cdot 10^{-19}$ Кл. Передаваемый при взаимодействиях тел электрический заряд – всегда целое кратное от величины e ($q = eN$, где $N = 1, 2, 3, \dots$). Примером +ЭЧ являются: $p, e^+, \mu^+, \pi^+, \dots$. Примером -ЭЧ - $\bar{p}, e^-, \mu^-, \pi^-, \dots$. Примером нейтральных ЭЧ являются: $n, \tilde{n}, \gamma, \nu, \tilde{\nu}, \pi^0, \dots$. В изолированной системе полный электрический заряд

сохраняется: $\sum_{i=1}^N q_i = \text{const}$. Заряды бывают «свободные» и «связанные». Свободные – заряды, которые вместе с несущими их частицами, способны на макроскопические перемещения. Их упорядоченное перемещение образует электрический ток проводимости. Связанные – заряды, фиксированные на структурных частицах твёрдых тел. Они могут перемещаться только в пределах межатомных расстояний. При их одновременном смещении возникает поляризация тела.

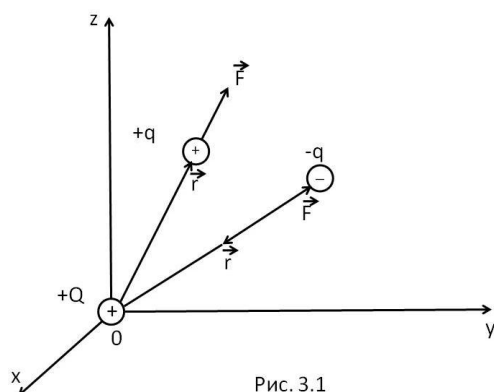


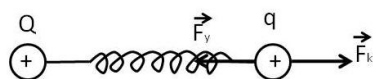
Рис. 3.1

3.2. Закон Кулона.

$$\vec{F} = k_0 \frac{Qq}{\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3},$$

$$\text{где } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\Phi}.$$

3.3. Напряженность и потенциал электрического поля. Принцип суперпозиции.



$q_1, q_2, \dots$
 $F_1, F_2, \dots$
 $W_1, W_2, \dots$

Рис. 3.2

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \varphi = \frac{W}{q}, \vec{F} = -\vec{\nabla} W, \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad \text{Напряжённость и}$$

потенциал электрического поля системы точечных зарядов равны сумме напряжённостей и потенциалов каждого из этих зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i. \quad \rightarrow \text{принцип суперпозиции}$$

(независимости действия) электрических полей.

3.4. Расчёт электрических полей методом суперпозиции.

$\vec{E}_i = k_0 \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$. $\vec{E} = k_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i, \varphi = k_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$. Или, переходя к пределу, получаем:

$\vec{E} = k_0 \int \frac{dq}{r^3} \vec{r}, \varphi = k_0 \int \frac{dq}{r}$. В качестве примера рассмотрим электрическое поле

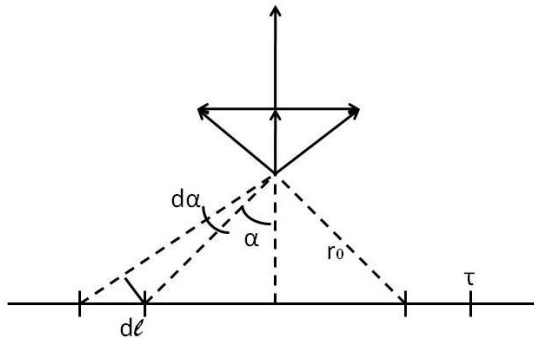


Рис. 3.3

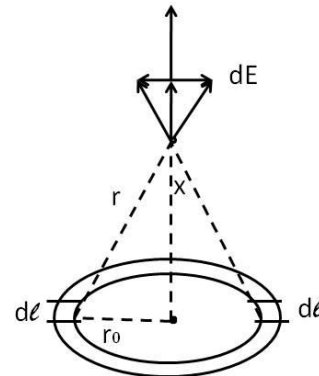


Рис. 3.4

прямолинейной бесконечно длинной нити,

равномерно заряженной с линейной плотностью заряда $\tau = \frac{dq}{dl}$:

1). Рис.3.3. $E = \int dE \cos \alpha = k_0 \tau \int \frac{dl \cdot \cos \alpha}{r^2} = k_0 \tau \int \frac{r \cdot d\alpha}{r^2} = \frac{k_0 \tau}{r_0} \int_{270^\circ}^{90^\circ} \cos \alpha \cdot d\alpha \rightarrow E = \frac{2k_0 \tau}{r_0}$.

2). Электрическое поле на оси тонкого заряженного кольца радиуса R:

Рис. 3.4. $dE_n = dE \cdot \cos \alpha, E = \frac{k_0 \tau \cos \alpha}{r^2} \oint dl = \frac{2\pi k_0 \tau R \cos \alpha}{r^2} \rightarrow E = \frac{2\pi k_0 \tau R x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$.

3.5. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме. Уравнение Пуассона.

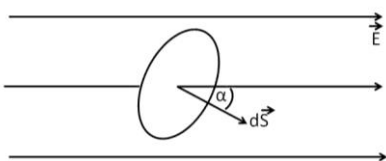


Рис. 3.5

Теорема О. – Г. устанавливает связь между характеристиками электрического поля и его источниками (зарядами). Для этого вводят понятие потока $\vec{E} : d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos \alpha, \Delta\Phi = \int_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S}$

(Рис. 3.5). Полный поток $\vec{E}$ сквозь замкнутую поверхность S не зависит от формы поверхности и её величины (Рис.3.6): $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Таким образом, для сферы радиуса r имеем:

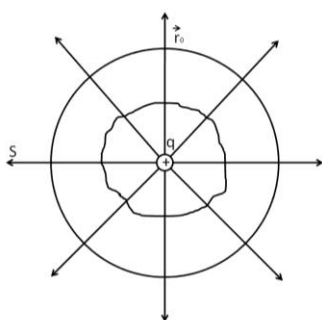


Рис. 3.6

$\Phi = E \oint dS = E \cdot 4\pi r^2 = k_0 \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$: Поток $\vec{E}$ сквозь замкнутую поверхность равен суммарному заряду, находящемуся внутри объёма, ограниченного этой поверхностью. Учитывая теорему Гаусса, связывающую

поверхностный интеграл с объёмным: $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \vec{A} dV$, получаем $\int_V \vec{\nabla} \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$

и $\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ - дифференциальная форма теоремы Остроградского – Гаусса.

Учитывая, что $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$, получаем:

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, или $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ - уравнение Пуассона. ∇^2 – оператор Лапласа.

Всюду, где $\rho = 0$, $\nabla^2 \phi = 0$ - уравнение Лапласа.

3.5.1. Применение теоремы О.-Г. к расчету полей.

1) Нить радиуса r , длины ℓ_∞ и линейной плотности заряда τ (Рис.3.7):

$$\Phi = E \cdot S = E \cdot 2\pi r \ell_\infty = \frac{\tau \cdot \ell_\infty}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{2k_0 \tau}{r}.$$

2) Плоскость с поверхностной плотностью заряда σ (Рис. 3.8):

$$E \cdot 2S_\infty = \frac{\sigma S_\infty}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

3) Параллельные плоскости (Рис. 3.9): Вне пластин $E = 0$, внутри $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

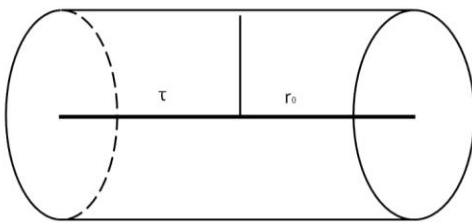


Рис. 3.7

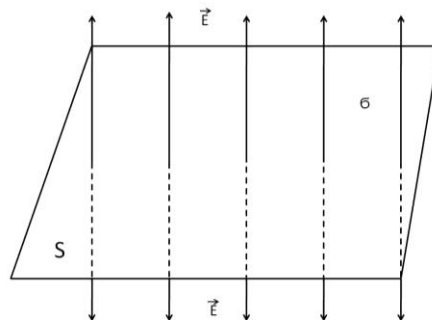


Рис. 3.8

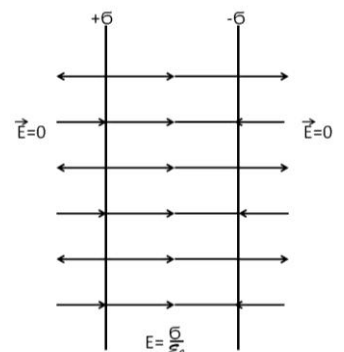
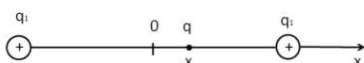


Рис. 3.9

3.6. Проблема равновесия и устойчивости электрического заряда в электрическом поле. Теорема Ирншоу.



1. $q_1 \cdot q > 0 \rightarrow$ равнов. устойч.

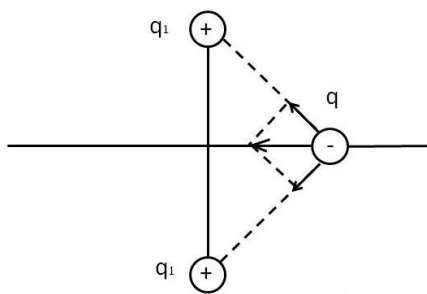
2. $q_1 \cdot q < 0 \rightarrow$ равнов. неустойч.

Рис. 3.10

Положение равновесия характеризуется равенством нулю действующей на заряд силы. Рассмотрим два примера:

1. Заряд q движется вдоль оси x , на которой закреплены два заряда $q_1 = q_2$, симметричных относительно начала координат и удалённых на расстояние $2a$ один от другого (Рис. 3.10).

$$U(x) = k_0 \left(\frac{q_1 q}{a+x} + \frac{q_1 q}{a-x} \right), \frac{dW}{dx} = k_0 q_1 q \left(-\frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(a-x)^2} \right), \frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{4k_0 q_1 q}{a^3}. \text{ (Равновесие будет в } x=0 \text{)}$$



3. $q_1 \cdot q > 0 \rightarrow$ равнов. неустойч.

4. $q_1 \cdot q < 0 \rightarrow$ равнов. устойчив.

Рис. 3.11

точке $x=0$, т.к. в ней $F = 0$). При $q_1 q > 0 \rightarrow \frac{d^2 W}{dx^2} > 0$ и при $x = 0$ $W(x)$ имеет $\min \rightarrow$ равновесие устойчиво.

При $q_1 q < 0 \rightarrow \frac{d^2 W}{dx^2} < 0 \rightarrow W(x)$ имеет $\max$ и равновесие неустойчиво.

2. Заряды q_1 и $q_2 = q_1$ находятся на линии, перпендикулярной к координате x , по которой движется заряд q (Рис. 3.11).

$$3. W(x) = 2k_0 \frac{q_1 q}{\sqrt{a^2 + x^2}}, W'(x) = 2k_0 q_1 q \left(-\frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right), W'' = 2k_0 q_1 q \frac{-a^2 + 2x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad \text{Равновесие в}$$

точке $x=0$. В этой точке $W'' = -\frac{2k_0 q_1 q}{a^3}$. При $q_1 q < 0, W'' > 0 \rightarrow \min$ – равновесие устойчивое, а при $q_1 q > 0, W'' < 0 \rightarrow \max$ – равновесие неустойчиво.

Таким образом, при любых знаках зарядов в к.-л. из направлений движения равновесие оказывается неустойчивым. Этот результат доказывает теорему Ирншоу: система неподвижных точечных зарядов, находящихся на конечных расстояниях друг от друга, не может быть устойчивой.

3.7. Работа сил электрического поля. Циркуляция вектора $\vec{E}$.

Определим работу сил электрического поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 (рис. 3.12).

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow A = k_0 Q q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow A_{12} = q \left(k_0 \frac{Q}{r_1} - k_0 \frac{Q}{r_2} \right) = qU, U = -\Delta\varphi = -(\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

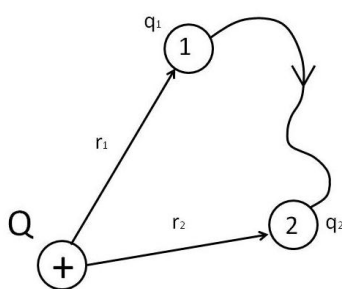


Рис. 3.12

Если работа совершается по замкнутому контуру, то $\oint_{\Gamma} dA = 0 \rightarrow q \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$. По теореме Стокса $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

Если в электрическом поле $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ всюду, то это – достаточное условие консервативности поля (отсутствие завихрений, циркуляции).

ЛК. 4. Электрическое поле в диэлектрике.

4.1. Электрический диполь в однородном и неоднородном электрических полях.

В простейшем случае электрический диполь – совокупность двух разноимённых зарядов q , расположенных на некотором расстоянии ℓ друг от друга. Основной характеристикой диполя является электрический дипольный

момент $\vec{p}$, определяемый как вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и численно равный произведению заряда q на расстояние ℓ между зарядами: $\vec{p} = q \cdot \vec{\ell}$.

Потенциал φ электрического диполя в произвольной точке поля равен сумме потенциалов, создаваемой в этой точке зарядами $\pm q$, и равен:

$$\varphi = k_0 q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \text{ где } r_1 \text{ и } r_2 - \text{расстояния от зарядов } +q \text{ и } -q \text{ до точки наблюдения. В}$$

случае системы диполей вектор $\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$ - определяет электрический дипольный момент системы. Диполь (система диполей) взаимодействует с электрическим полем. Однородное поле (рис. 4.1) создаёт вращающий момент $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$, стремящийся повернуть диполь так, чтобы его момент был параллелен полю.

В неоднородном электрическом поле (рис. 4.2) на диполь, помимо вращательного момента, действует сила:

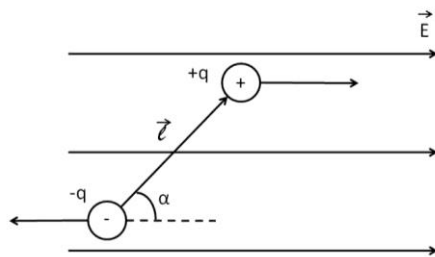


Рис. 4.1

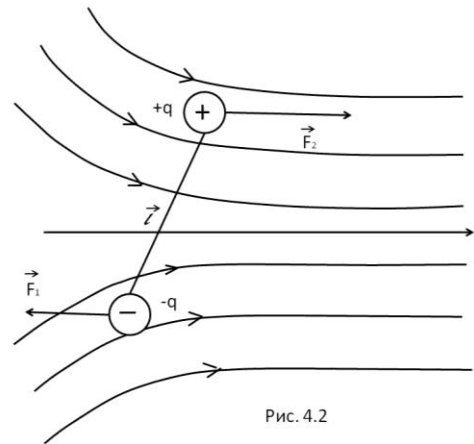


Рис. 4.2

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1), E_2 = E_1 + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot X \rightarrow E_2 - E_1 = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \ell \cos \alpha, F = p \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \cos \alpha$$

и, окончательно, получаем: $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$. Сила, действующая на диполь в неоднородном электрическом поле, направлена в сторону возрастания поля и тем большая, чем больше неоднородность поля.

4.2. Энергия диполя в электрическом поле.

$$W = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \ell, \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} = -E_\ell, \rightarrow W = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

При $\vec{p} \parallel \vec{E} \rightarrow W_{\min} = -pE$.

4.3. Поляризация диэлектриков. Сегнетоэлектрики.

Во внешнем электрическом поле молекулы диэлектрика, имеющие электрический дипольный момент – *полярные молекулы*, могут поворачиваться, деформироваться и перемещаться в сторону возрастания поля (рис. 4.3). Внутри

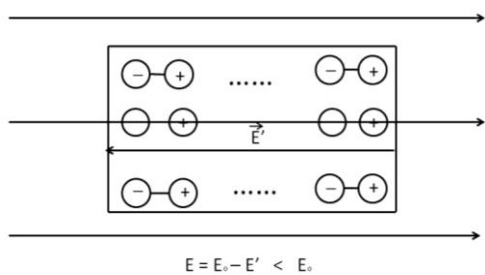


Рис. 4.3

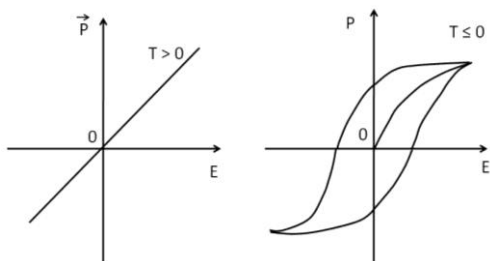


Рис. 4.4

однородного диэлектрика *объёмные заряды отсутствуют*. На поверхности – *связанные поверхностные заряды* с поверхностной плотностью σ' . $E = E_0 - E' < E_0$, где $E = \frac{E_0}{\epsilon}$.

Упорядочение в расположении диполей диэлектрика, вызванное внешним электрическим полем, называют *поляризацией диэлектрика*.

Степень поляризации характеризуется вектором

поляризации $\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{V}$. В слабых полях $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$,

где $\kappa = \kappa(E, T)$ - коэффициент поляризуемости. По

закону Кюри $\kappa = \frac{C}{T - \Theta}$. При $T > \Theta, \kappa \approx 1$ - обычный

диэлектрик, а при $T \leq \Theta$ $\kappa \approx 10^4$ - сегнетоэлектрик ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$; $\Theta = 296\text{K}$). (Рис. 4.4).

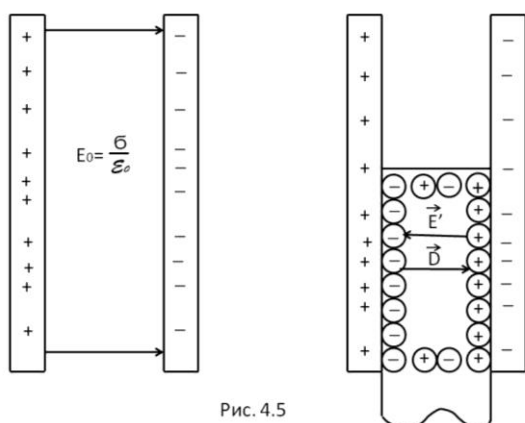


Рис. 4.5

4.4. Вектор электрического смещения $\vec{D}$. Диэлектрическая проницаемость ϵ .

Рассмотрим рис. 4.5. Ту часть напряжённости электрического поля, которая создаётся внутри диэлектрика смещёнными свободными электрическими зарядами обкладок конденсатора, называют *вектором электрического смещения* или *электрической индукцией* $\vec{D}$. Поле, в котором находится

диэлектрик,

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} - E' \rightarrow D = \epsilon_0 (E + E'), E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}, P = \frac{\sum_i p_i}{V} = \frac{\sigma' S \ell}{S \ell} = \sigma' \rightarrow P = \sigma' \Rightarrow E' = \frac{P}{\epsilon_0}, \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}' + \vec{P}, P = \epsilon_0 \kappa E, D = \epsilon_0 (1 + \kappa) E, 1 + \kappa = \epsilon \rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}.$$

4.5. Теорема Остроградского – Гаусса для электрического поля в диэлектрике.

По аналогии с электрическим полем в вакууме, можно ввести понятие *потока N вектора $\vec{D}$* : $dN = \vec{D} \cdot d\vec{S}$. Полный поток вектора электрического

смещения будет равен: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = q + q' \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho + \rho'$. Здесь

ρ' – объёмная плотность связанных зарядов.

4.6. Условия для электростатического поля на границе раздела диэлектрических изотропных сред.

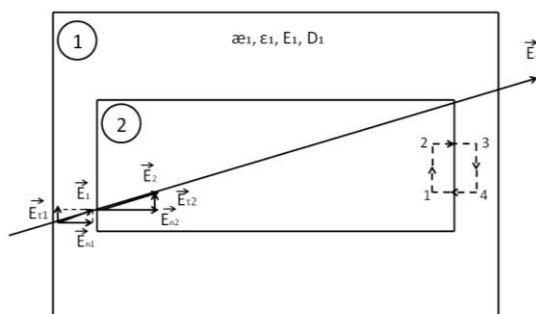


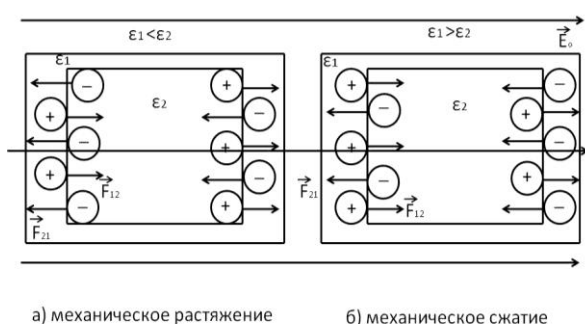
Рис. 4.6

Соотношения, показывающие связь между значениями векторов электростатического поля в разных средах у поверхности раздела, называют граничными условиями. Итак, необходимо установить соотношения между $\vec{E}_1, \vec{D}_1$ и $\vec{E}_2, \vec{D}_2$, также – между ε_1 и ε_2 (Рис. 4.6). Здесь $\vec{E}_0$ – вектор напряжённости внешнего электрического поля, $\vec{E}_{1n}, \vec{E}_{2n}, \vec{D}_{1n}, \vec{D}_{2n}, \vec{E}_{1\tau}, \vec{E}_{2\tau}, \vec{D}_{1\tau}, \vec{D}_{2\tau}$ –

соответственно нормальные и тангенциальные составляющие векторов напряжённости и смещения в диэлектрических средах 1 и 2. Из рис. 4.6 видно, что

$$E_{1n} = \frac{E_{0n}}{\varepsilon_1}, E_{2n} = \frac{E_{0n}}{\varepsilon_2} \rightarrow E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n}, D_{2n} = D_{1n}, \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \int_1^2 E_{2\tau} d\ell - \int_3^4 E_{1\tau} d\ell = 0 \rightarrow E_{2\tau} = E_{1\tau}, D_{2\tau} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{1\tau}.$$

Из рис. 4.7 следует, что диэлектрики в электрическом поле испытывают



а) механическое растяжение

б) механическое сжатие

Рис. 4.7

механическое растяжение или сжатие в (в зависимости от соотношений между величинами ε_1 и ε_2). Это явление называют *электрострикцией*. Наблюдают обратный эффект – при деформации диэлектрической пластинки (например, кварцевой) на её гранях (вследствие поляризации) возникает разность потенциалов – *пьезоэлектрический эффект*.

ЛК. 5. Проводники в электрическом поле.

5.1. Распределение зарядов в проводнике. Поле внутри проводника и у его поверхности.

Рассмотрим проводник в электрическом поле $\vec{E}_0$ (Рис. 5.1). На свободные заряды проводника (электроны в металлах, положительно или отрицательно

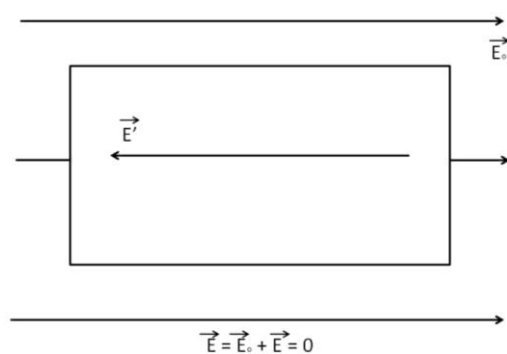


Рис. 5.1

заряженные ионы в электролитах, электроны и дырки в полупроводниках и т.д.) будет действовать сила, увлекающая положительные заряды в одном направлении, а отрицательные – в другом. Скопившиеся у поверхности, они сами создают внутри проводника электрическое поле $\vec{E}'$, направленное против $\vec{E}_0$. Движение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока поле

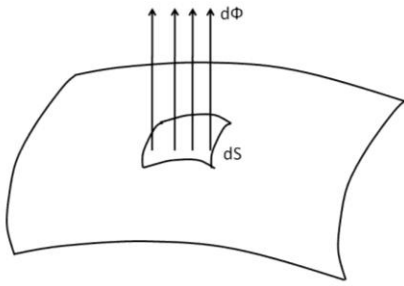


Рис. 5.2

внутри проводника не станет равным нулю: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$. Поскольку такая компенсация «автоматически» происходит во всяком проводнике, рассматривают только поверхность проводника. Поскольку поверхность проводника эквипотенциальна – поверхность постоянного потенциала, то напряжённость электрического поля, равная $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$,

должна быть перпендикулярной к поверхности в каждой её точке. При переходе из внутренней части проводника наружу у поверхности наблюдается резкое изменение электрического поля: поле $\vec{E}$ не равно нулю на внешней поверхности проводника, но равно нулю внутри. Разрыв непрерывности $\vec{E}$ объясняется присутствием поверхностного заряда плотности σ , которую можно с помощью теоремы Остроградского – Гаусса непосредственно связать с $\vec{E}$ (Рис. 5.2). Здесь $\vec{E}_r = 0, \vec{E} = \vec{E}_n, d\Phi = \frac{\sigma \cdot dS}{\varepsilon_0}, E_n = \frac{d\Phi}{dS} \rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Электрическое поле вблизи заряженной поверхности *однородно* независимо от формы поверхности. Отсутствие поля внутри проводящей поверхности используют для экранировки электронных устройств от влияния внешних электрических полей, в генераторе Ван-де-Граафа и т.п.

5.2. Электроёмкость. Конденсаторы.

Разность потенциалов между проводниками 1 и 2 (Рис. 5.3а) определяют по формуле $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \rightarrow E = -\frac{d\varphi}{d\ell} \rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \varphi_1 - \varphi_2 = U$ - *напряжение*.

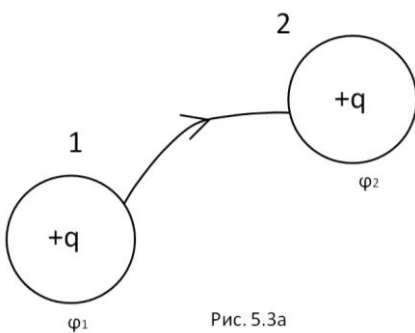


Рис. 5.3а

$$\vec{E} \sim q \rightarrow \vec{E} = \vec{R} \cdot q \rightarrow U = q \cdot \int_1^2 \vec{R} \cdot d\vec{\ell}.$$

Обозначим $\int \vec{R} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{C} \rightarrow C = \frac{q}{U}$. [C] = Ф = Кл/В.

Здесь C – *электроёмкость проводника*. Система проводников обладает значительно большей электроёмкостью, чем уединённый проводник и, притом, не зависящей от окружающих тел. Такую систему называют *конденсатором*. Используя выражение для C и теорему Остроградского – Гаусса, можно получить расчётные формулы ёмкости различных конденсаторов.

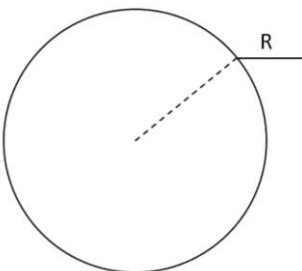


Рис. 5.3б

5.2.1. Ёмкость уединённого шара.

Для шара радиусом R (рис. 5.3б), в диэлектрической среде (ε) ёмкость $C = \frac{q}{\varphi}, \varphi = k_0 \frac{q}{\varepsilon R} \rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. Ёмкость Земли $C = 708$ мкФ.

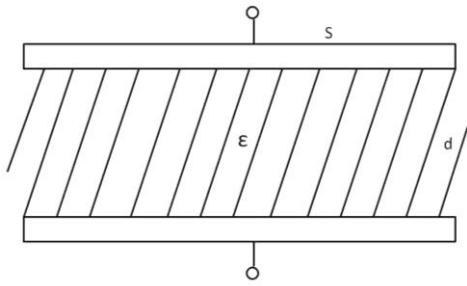


Рис. 5.3в

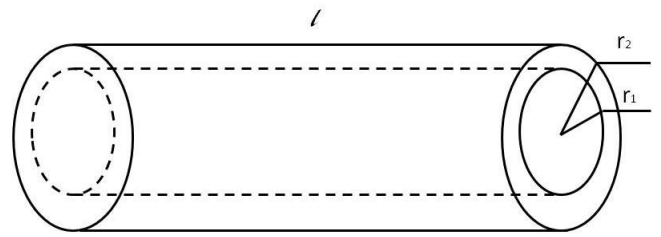


Рис. 5.4

5.2.2. Ёмкость плоского конденсатора (рис.5.3в).

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{E \cdot d} = \frac{q}{\frac{\Phi}{S} \cdot d} = \frac{q}{\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S} d} \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

5.2.3. Ёмкость цилиндрического конденсатора (коаксиального кабеля).

Пусть радиус внутреннего цилиндра r_1 , а внешнего – r_2 (рис.5.4). Тогда $E = \frac{d\Phi}{dS}$, $E = -\frac{d\varphi}{dr} \rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\Phi}{dS} \cdot dr$, $\frac{d\Phi}{dS} = \frac{\Phi}{S} \rightarrow U = \frac{\Phi}{2\pi\ell} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\Phi}{2\pi\ell} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\ell \epsilon_0 \epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ell$.

5.3. Соединения конденсаторов (рис.5.5).



Рис. 5.5

При последовательном соединении конденсаторов $U = \sum_{i=1}^N U_i = q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \rightarrow \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$. При последовательном соединении складываются величины, обратные ёмкостям.

При параллельном соединении конденсаторов $q = \sum_{i=1}^N q_i \rightarrow C = \sum_{i=1}^N C_i$. При таком соединении складываются ёмкости.

5.4. Энергия электрического поля конденсатора. Объёмная плотность энергии.

Для определения потенциальной энергии электрического поля W конденсатора вычислим работу, необходимую для увеличения на dq заряда конденсатора:

$$dA = F \cdot d\ell = qE \cdot d\ell = -q \cdot d\varphi \rightarrow A = -\int q \frac{dq}{C} = -\frac{q^2}{2C} \rightarrow W = \frac{q^2}{2C}, W = \frac{CU^2}{2}. \text{ Плотность энергии электрического поля } w = \frac{W}{V} = \frac{CU^2}{2V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2 d^2}{2Sd^2} \rightarrow w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}, D = \epsilon_0 \epsilon E \rightarrow w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}.$$

5.5. Электростатическая сила между заряженными проводниками (пондеромоторная сила, рис.5.6).

Работа, совершаемая против электростатической силы при малом относительном перемещении проводников $\delta A = -\vec{F} \cdot \delta \vec{r}$, увеличивает потенциальную

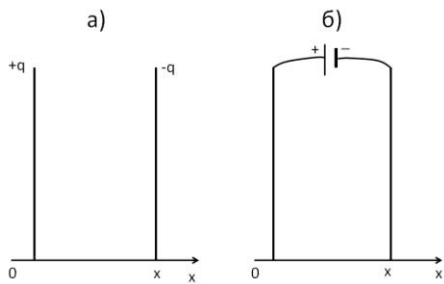


Рис. 5.6

энергию системы. Это обстоятельство позволяет определить силы, действующие между заряженными проводниками, пользуясь энергетическими соотношениями.

1. Рассчитаем силу притяжения между обкладками плоского конденсатора при $q = \text{const}$ (конденсатор зарядили, а затем отключили источник постоянного тока).

$F = -\frac{dW}{dx}$, $W = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} x \rightarrow F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$ - сила взаимодействия пластин не зависит от расстояния между ними, т.к. поле между пластинами считается однородным.

2. $U = \text{const}$ (конденсатор соединён с батареей).

Потенциальная энергия системы (конденсатор - батарея) складывается из энергии конденсатора $W_k = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2x}$ и энергии источника за счёт работы,

совершаемой при изменении заряда: $dA_i = dq \cdot U = U^2 \cdot dC \rightarrow A_i = U^2 C \rightarrow W_i = -\frac{U^2 \epsilon_0 S}{x}$,

откуда $W = W_k + W_i = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2x} \rightarrow F = -\frac{dW}{dx} \rightarrow F = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2x^2}$.

В обоих случаях знак «-» указывает, что между пластинами действует сила притяжения. Обе найденные для F величины совпадают, т.к. $q = CU$.

Постоянный электрический ток.

ЛК.6. Классическая электронная теория электропроводности.

Электрический ток – упорядоченное перемещение электрических зарядов. Основным признаком электрического тока – *магнитное поле*, существующее вокруг движущихся зарядов. Различают три вида тока: 1) ток проводимости, 2) ток конвекции и 3) ток смещения. В дальнейшем, если не будет специально оговорено, под термином «электрический ток», или просто «ток» будем понимать *ток проводимости* (электронов, ионов, дырок и т.д.).

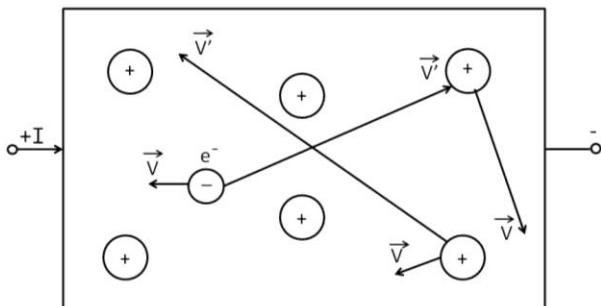


Рис. 6.1

Рассмотрим электрический ток в металлическом проводнике сечения S , длины ℓ и концентрацией электронов n . При отключенной батарее, свободные электроны в проводнике движутся хаотически (рис.6.1). Поэтому величина их средней арифметической скорости может быть оценена по формуле, полученной для идеального газа,

$$\langle v' \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 10^5 \text{ (м/с)} = 100 \text{ км/с.}$$

Если к проводнику подключить источник тока, создающий в нём постоянное во времени однородное электрическое поле $\vec{E}$, то на каждый электрон действует сила $\vec{F} = e\vec{E}$. Под действием этой силы электроны должны двигаться ускоренно. Но источник постоянного тока создаёт в проводнике постоянный ток, который соответствует закону Ома. Такое несоответствие говорит о том, что электроны не могут двигаться свободно: что-то должно мешать их движению. Эта «сила трения» вызывается столкновениями электронов друг с другом и с любыми другими частицами среды (колеблющимися структурными частицами кристаллической решётки). Как ввести эту силу «трения» - зависит от особенности рассматриваемой модели.

Величину (силу) тока в проводнике определяют величиной заряда dq , проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени: $I = \frac{dq}{dt} \equiv \dot{q}$.

$$dq = e \cdot n \cdot dS \cdot v \cdot dt \rightarrow j = \frac{dI}{dS} = env \rightarrow \vec{j} = en\vec{v} - \text{вектор плотности тока.}$$

Оценим среднюю скорость упорядоченного движения электронов в медном проводнике при плотности тока $j = 10 \text{ А/мм}^2$:

$$v = \frac{j}{en} = \frac{jA}{e\rho N_0} = \frac{10 \cdot 63,5 \cdot 10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,9 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 0,74 \left(\frac{\text{мм}}{\text{с}} \right).$$
 Средняя скорость теплового движения электронов на 8 порядков превышает скорость упорядоченного движения электронов.

6.1. Законы Ома и Ленца – Джоуля в дифференциальной и интегральной формах. Закон Видемана – Франца.

Для установления соотношения между j и E (I и U) необходимо найти среднюю скорость установившегося движения электрона и подставить её выражение в формулу плотности тока:

$$a = \frac{eE}{m}, \langle v \rangle = \frac{a\tau}{2}, \tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v' \rangle} \rightarrow v = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v' \rangle} E, j = env \rightarrow j = \frac{e^2 n}{2m} \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v' \rangle} E \rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}, - \text{закон Ома в}$$

дифференциальной форме. Здесь τ - время свободного пробега электрона, а $\langle \lambda \rangle$ - средняя длина этого пробега, $\sigma = \frac{e^2 n}{2m} \cdot \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v' \rangle}$ - удельная проводимость проводника

($\frac{\text{См}}{\text{м}}$). Учитывая, что удельное сопротивление проводника

$$\rho = \frac{1}{\sigma}, \vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} \varphi, I = \vec{j} \cdot \vec{S} = -\sigma \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{x_2 - x_1} S = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{\ell} \cdot S, R = \rho \frac{\ell}{S}, \text{ получим закон Ома для участка}$$

цепи: $I = \frac{U}{R}$ - ток в проводнике пропорционален падению напряжения и обратно пропорционален сопротивлению проводника.

Кинетическая энергия, передаваемая электроном при его столкновении с ионом кристаллической решётки за время $\Delta t = 1c$, будет:

$E_k = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{m}{2} \left(\frac{eE\tau}{m} \right)^2 \cdot \frac{1}{\tau} = \frac{e^2}{2m} \cdot \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v' \rangle} E^2$. Выделяемая в единице объёма вещества

энергия – *объёмная плотность тепловой энергии* будет: $w = E_k \cdot n = \frac{e^2 n}{2m} \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v' \rangle} E^2 = \sigma E^2$.

Величина $w = \sigma E^2$ определяет закон Ленца – Джоуля в дифференциальной форме.

$$Q = wVt = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t - \text{закон Ленца – Джоуля для участка цепи.}$$

Отношение коэффициента теплопроводности $K = \frac{1}{3} \langle v' \rangle \langle \lambda \rangle m n c_v$ к удельной электропроводности σ – величина, пропорциональная абсолютной температуре T :

$$\frac{K}{\sigma} = \text{const} \cdot T - \text{закон Видемана – Франца. } (K/\sigma = 8/\pi (k/e)^2 T).$$

6.2. Разность потенциалов, напряжение, электродвижущая сила (рис.6.2).

В цепи постоянного тока источником ЭДС является механизм (источник *сторонних сил*), переносящий заряды в направлении, противоположном тому, в котором их пытается двигать электрическое поле. Одни электростатические силы

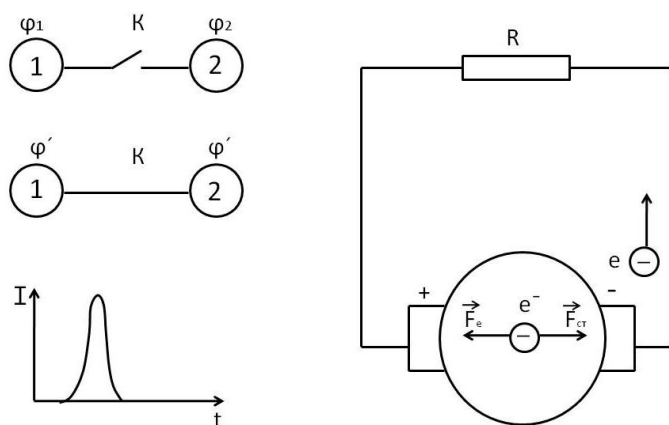


Рис. 6.2

не могут поддерживать постоянный ток в замкнутой цепи: работа этих сил по передвижению заряда по замкнутой цепи равна нулю, а течение тока обычно сопровождается рассеянием энергии – *джоулевыми потерями*. Поэтому внешний по отношению к цепи источник «забирает» энергию извне и превращает её в энергию движения зарядов. Этот источник поддерживает разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ на

концах проводника (напряжение $U = -\Delta\varphi$) и порождает *добавочное электрическое поле* $\vec{E}'$, работа сил которого по замкнутому контуру не равна нулю: $\oint \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} \neq 0$.

Величину $\mathcal{E}$ называют ЭДС. Она равна работе неэлектростатических сил, производимой над единичным зарядом: $\mathcal{E} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{\ell}$. ЭДС, как и потенциал, измеряется в В. Создавать ЭДС могут диффузия ионов в электролитах, изменение магнитного потока через контур (электромагнитная индукция) и т.д. По отношению к внешней цепи источник тока вполне можно представить в виде эквивалентной схемы, состоящей из ЭДС $\mathcal{E}$, соединённой последовательно с некоторым внутренним сопротивлением R_i . Присоединение к внешнему сопротивлению R даёт в результате ток $I = \mathcal{E}/(R+R_i)$.

6.3. Правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда ($\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0$) и состоит в том, что алгебраическая сумма всех токов I_i , притекающих в точку разветвления проводников, равна нулю, т.е. $\sum_i I_i = 0$. Второе правило гласит: если в любой системе линейных проводников, как бы сложна она ни была, выделить замкнутый контур, то сумма падений напряжений, подсчитанная вдоль контура, должна равняться сумме сторонних ЭДС в этом контуре: $\sum_i I_i \cdot R_i = \sum_i \mathcal{E}_i$. Второе правило Кирхгофа – следствие того, что потенциал проводника в каждой точке есть однозначная функция этой точки.

ЛК. 7. Электрический ток в газах. Плазма. Электрический ток в вакууме.

7.1. Электрический ток в газах.

Рассмотрим электрический ток в газоразрядной трубке (рис. 7.1). В обычных условиях концентрация носителей заряда в газе (электронов и ионов)

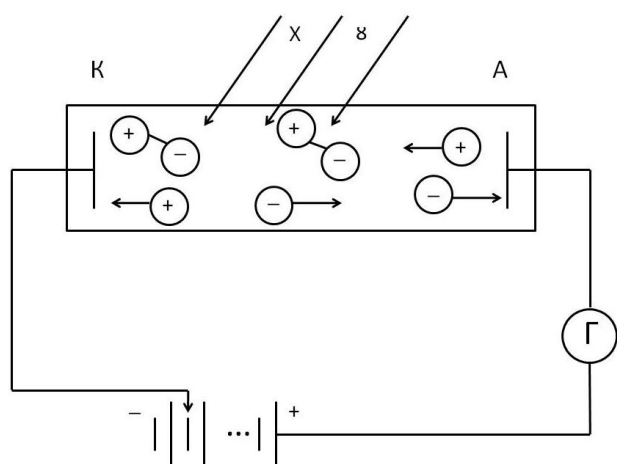


Рис. 7.1

весьма мала, вследствие чего газ – очень хороший диэлектрик. Для получения заметной проводимости газа необходимо, чтобы в нём в результате ионизации возникало достаточно большое количество носителей заряда. Так как плотность тока проводимости в любой среде равна $\vec{j} = e \sum_i z_i n_i v_i$, где $z_i e$ – величина заряда, n_i – их концентрация и v_i – их направленная скорость, то проводимость газа

определяется условиями образования и движения носителей заряда. Газ обладает стационарной электропроводностью в случае равновесия между возникновением и исчезновением зарядов. Заряды могут исчезать в результате объёмной рекомбинации, диффузии из межэлектродного пространства и ухода на электроды при прохождении тока. Если ионизация осуществляется только под действием внешнего ионизатора (облучение, нагрев и т.п.), а напряжённость поля столь мала, что отвод зарядов током не играет существенной роли, и поперечные размеры разрядного промежутка весьма велики по сравнению с длиной свободного пробега и расстоянием между электродами, то основным процессом исчезновения зарядов является объёмная рекомбинация. В этом случае условие равновесия процессов возникновения и исчезновения зарядов имеет вид: $N = \alpha n^2 V$, где α – коэффициент рекомбинации, V – объём разрядного промежутка, N – число пар зарядов, создаваемых внешним ионизатором в единицу времени.

Концентрация зарядов остаётся при этом практически постоянной. Если скорость движения зарядов пропорциональна напряжённости поля, то проводимость газа подчиняется закону Ома. При возрастании напряжённости поля начинает сказываться убыль зарядов вследствие их ухода к электродам. При достаточно больших полях можно пренебречь рекомбинацией, в результате чего ток достигает насыщения и становится равным $I = Ne$. Если поле $\vec{E}$ настолько велико, чтобы имеющиеся ионы на длине свободного пробега λ ускоряясь, приобрели кинетическую энергию E_k , достаточную для ионизации молекул газа, то проводимость будет *самостоятельной*. При достаточно длительном воздействии внешнего ионизатора в объёме газа устанавливается равновесие между числом ионов, образующихся в единицу времени в единице объёма и числом ионов рекомбинирующих в молекулы за единицу времени в единице объёма: $\dot{n}_r = rn^2$. В этом случае в объёме находится определённая концентрация свободных носителей n_+ и n_- . Под действием электрического поля заряды двигались бы ускоренно. Постоянство тока говорит о равенстве сил поля силам «трения»:

$$q_{\pm}E = k_{\pm}v_{\pm}, k_{\pm} - \text{коэффициент трения. } v_{\pm} = \frac{q_{\pm}}{k_{\pm}}E, \frac{q_{\pm}}{k_{\pm}} = u_{\pm} = \frac{v_{\pm}}{E} - \text{подвижность ионов} -$$

физическая величина, численно равная скорости установившегося движения ионов при напряженности электрического поля 1 В/м. Тогда закон Ома в дифференциальной форме имеет вид:

$$j = q_+n_+v_+ + q_-n_-v_-, v_{\pm} = u_{\pm}E, j = q_{\pm}n_{\pm}(u_+ + u_-)E, \sigma = q_{\pm}n_{\pm}(u_+ + u_-) \rightarrow \vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

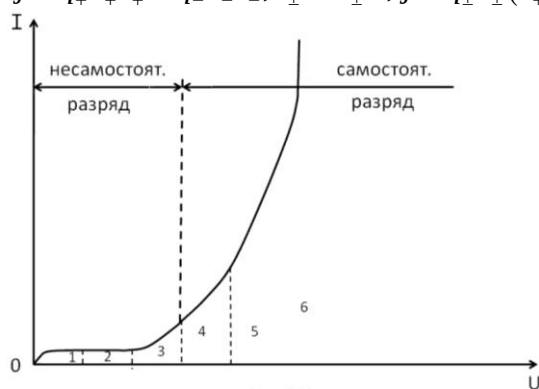


Рис. 7.2

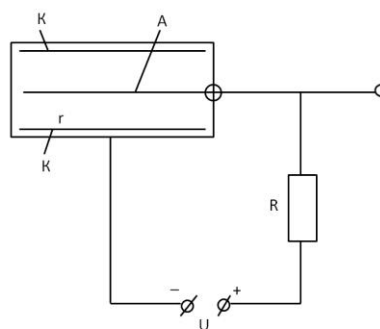


Рис. 7.3

Рассмотрим вольт-амперную характеристику разряда в газе (рис. 7.2).

На ней можно выделить 6 областей: 1 — область Ома, 2 — насыщения, 3 — пропорциональности, 4 — непропорциональности, 5 — Гейгера (счетчик Гейгера рис. 7.3), 6 — пробоя.

В общем случае, электрические разряды в газе подразделяют на:

- 1) *тихий* - j малы, не сопровождается светом и звуком;
- 2) *тлеющий* — давление ~ 1 мм Hg, $U \sim 100$ В — применяют в газосветных трубках;
- 3) *дуговой* - $j \sim 10^3$ А/мм², $U \sim 10$ В — сварка, дуговые осветители, прожекторы;
- 4) *искровой* — $U = U_{\text{пробоя}}$, в природе — молния;
- 5) *коронный* — атмосферное давление, слабый ток, свечение.

7.2 Плазма.

Плазма – состояние вещества, характеризующееся высокой ионизацией его частиц, доходящей до полной ионизации. $\alpha = \frac{n_i}{n_0}$ – степень ионизации плазмы.

При $\alpha=1$ – полная ионизация; $\alpha \approx 10^{-3}$ – слабо ионизованная; $\alpha \approx 10^{-2}$ – средне ионизованная плазма. Полная ионизация наблюдается на Солнце (звёздах и т.п.).

Плазма - ионизованный квазинейтральный газ. Для выполнения последнего условия он должен занимать достаточно большой объём, при котором тепловые флуктуации не могут нарушить его квазинейтральность. Размеры этого объёма

задают *дебаевской длиной* (*дебаевским радиусом*): $D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2ne^2}}$. На расстоянии D кулоновское поле любого заряда плазмы экранируется зарядом противоположного знака. Чтобы плазма была квазинейтральной необходимо, чтобы её размеры $L \ll D$. Плазма создаётся в газовых разрядах в твёрдых телах

(металлах и полупроводниках). Проводимость плазмы $\sigma = \frac{e^2 n}{m} \cdot \tau, \tau = \frac{\lambda}{v'}$.

Электрический потенциал убывает по закону: $\varphi = k_0 \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{D}}$.

7.3. Электрический ток в вакууме.

Рассмотрим схему рис. 7.4.

Из уравнения Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{en}{\epsilon_0}$ и

$$j = -env \rightarrow \nabla^2 \varphi = \frac{j}{v\epsilon_0}, v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}} \rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{j}{\epsilon_0 v} = \frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \varphi^{-1/2} = C \cdot \varphi^{-1/2} \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = C \varphi^{-1/2} \rightarrow$$

$$\int \frac{d\varphi}{dx} \cdot d \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = C \int \varphi^{1/2} d\varphi \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 2C \varphi^{3/2} \rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{C} \varphi^{3/2} \rightarrow \int_0^U \varphi^{-1/4} d\varphi = 2\sqrt{C} \int_0^\ell dx \rightarrow$$

$$\frac{4}{3} U^{3/4} = 2\sqrt{C} \cdot \ell \rightarrow \frac{4}{9} U^{3/2} = \frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot \ell^2 \rightarrow j = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0}{\ell^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U^{3/2} \rightarrow I = \frac{4\epsilon_0}{9} \cdot \frac{S}{\ell^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot U^{3/2} \rightarrow I = \alpha U^{3/2}.$$

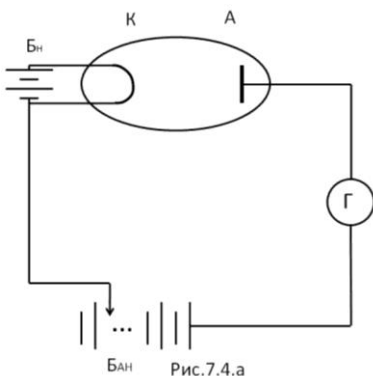


Рис.7.4.а

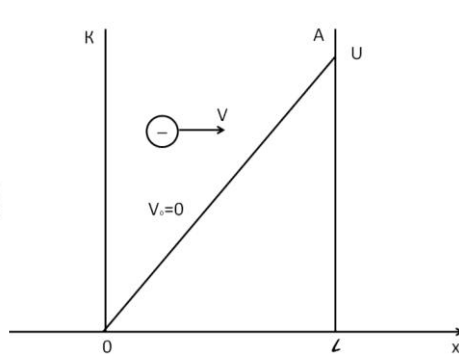


Рис.7.4.б

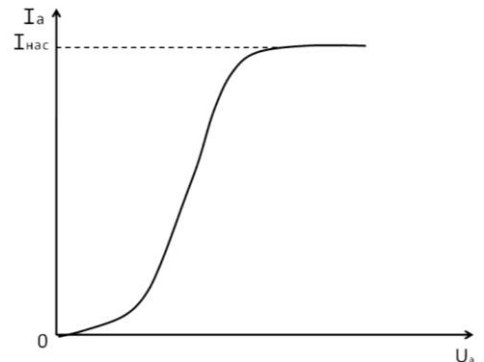


Рис.7.4.в

Последнее уравнение выражает закон Богуславского – Ленгмюра (закон 3/2).

Плотность тока насыщения определяют формулой Ричардсона – Дешмана:
 $j_n = BT^2 e^{-\frac{eU}{kT}}$, где $B = \frac{4\pi me k^2}{h^3} \approx 120 \text{ (А/см}^2\text{К}^2\text{)}$. (Эксперимент даёт для W 60 и для Мо 55).

Электромагнетизм.

ЛК. 8. Магнитное поле. Магнитное поле тока.

8.1. Инвариантность потока вектора напряжённости электрического поля. Преобразование полей. Относительный характер электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля.

В 1600 г. Гильберт утверждает различную природу электричества и магнетизма. В 1820 г. Эрстед наблюдал отклонение магнитной стрелки вблизи проводника с током. Гей-Люссак и Араго установили намагничивание железа током. Ампер установил взаимодействие проводников с током. Эти и другие исследователи установили связь «электричества» и «магнетизма».

Рассмотрим поведение магнитной стрелки и рамки с током в магнитном поле (рис. 8.1). Эти и другие эксперименты позволяют установить характер взаимодействия проводников с током с магнитным полем, определить основные характеристики магнитного поля и единицы их измерения.

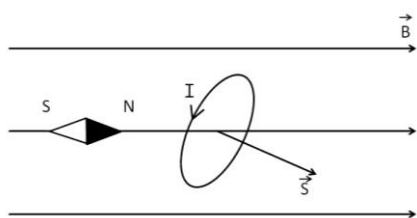


Рис.8.1

$\vec{p}_m = IS\vec{n}$ – магнитный момент рамки с током.

$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{B}]$ – механический вращающий момент,

действующий на рамку с током в магнитном поле. Полагая угол между $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ 90° , и измеряя $|\vec{M}|$ и $|\vec{p}_m|$, получим определения и единицу измерения индукции B

$$\text{магнитного поля } [B] = \frac{H \cdot m}{A \cdot m^2} = \frac{\text{Дж}}{A \cdot m^2} = \frac{\text{Кл} \cdot B}{A \cdot m^2} = \frac{B \cdot c}{m^2} = \frac{B\phi}{m^2} = \text{Тл}.$$

Электрическое и магнитное поля являются компонентами единого объекта – электромагнитного поля. Разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное носит относительный характер: оно зависит от системы отсчёта (СО), в которой они рассматриваются. Поле, постоянное в одной СО, может быть переменным в другой СО (рис. 8.2). Более того, в случае рис. 8.2б нет СО, в

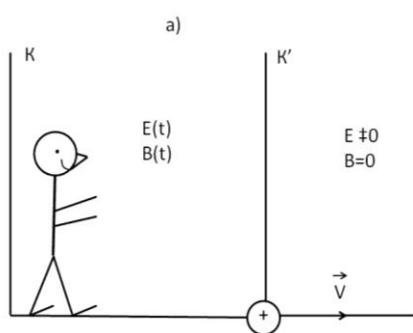


Рис.8.2

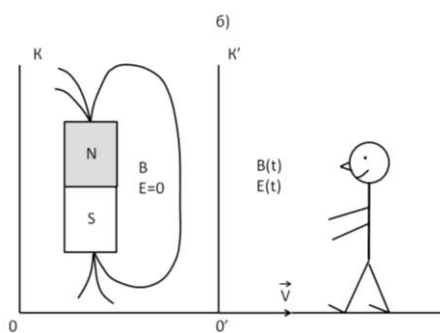


Рис. 8.2

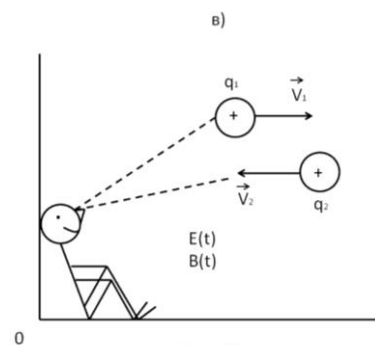


Рис.8.2

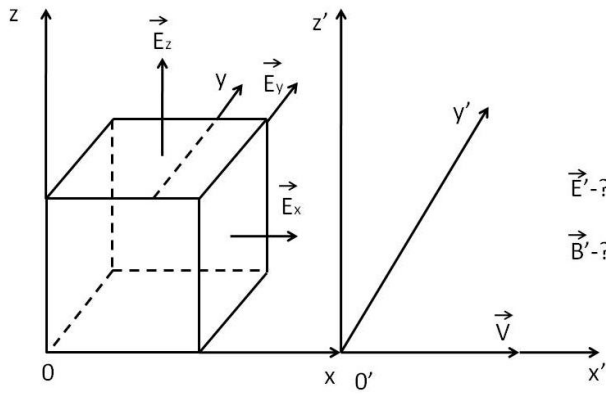


Рис. 8.3

которой было бы только одно из полей.

Учитывая инвариантность электрического заряда ($q = inv$) и теорему Остроградского – Гаусса ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$), получаем $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = inv$ - теорема О.-Г. справедлива не только для покоящегося наблюдателя, но и для движущегося. При этом поверхностный интеграл должен быть вычислен для одного и того же момента времени в данной СО (рис. 8.3):

$$\vec{E} \cdot \vec{S} = \vec{E}' \cdot \vec{S}' \rightarrow ES = E'S' = inv, E_x \cdot y \cdot z = E'_x \cdot y'z', y = y', z = z' \rightarrow E_x = E'_x \rightarrow \vec{E}_{||} = \vec{E}'_{||} -$$

продольная составляющая напряжённости электрического поля не меняется.

Далее:
$$E_z \cdot x \cdot y = E'_z \cdot x' \cdot y' \rightarrow E_z \cdot x = E'_z \cdot x' \rightarrow E_z \cdot x = E'_z \cdot \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow E'_z = E_z \frac{x\sqrt{1 - \beta^2}}{x - vt}.$$

Учитывая, что $\frac{x}{t} = c$, получим:
$$E'_z = E_z \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = E_z \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} = E_z \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_z + \frac{E_z}{c}v}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$
 Из

того, что
$$\left[\frac{E}{c} \right] = \frac{B \cdot c}{m \cdot m} = \frac{B\phi}{m^2} = Tl \rightarrow \frac{E_z}{c} = B_x \rightarrow \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$
 Аналогично можно

получить закон преобразования для $\vec{B}$. Окончательно закон преобразования полей

можно представить в виде:
$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||}, \vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||}; \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Выводы: 1) При преобразовании полей продольные составляющие $\vec{E}$ и $\vec{B}$ одинаковы во всех ИСО. 2) $\vec{E}$ и $\vec{B}$ связаны между собой симметричным образом. 3) Для обратных преобразований от K' к K необходимо поменять знак перед $\vec{v}$. В случае $v \ll c$ в уравнениях преобразований нужно положить $\beta = 0$.

8.2. Магнитное поле одиночного движущегося заряда.

Пусть наблюдатель, находящийся в ИСО K , определяет магнитное поле $\vec{b}$ заряда q , движущегося со скоростью $v \ll c$ – ИСО K'

(рис. 8.4):
$$\vec{b} = \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}'] \quad (\vec{b}' = 0),$$

$$\vec{E}' = k_0 \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2 \rightarrow \vec{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}.$$

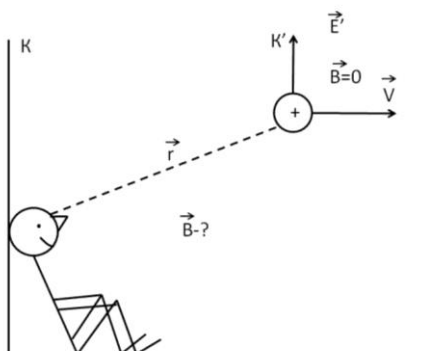


Рис. 8.4

8.3. Закон Био – Савара – Лапласа.

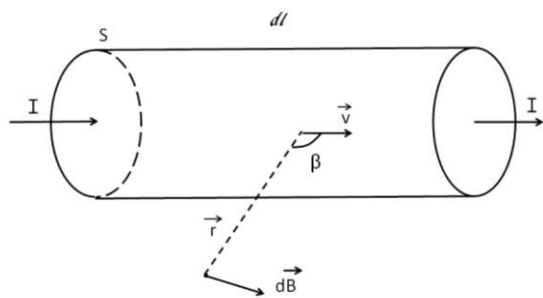


Рис. 8.5

Закон Б-С-Л устанавливает зависимость магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемого элементом тока $I \cdot d\vec{\ell}$ в точке $\vec{r}$ от элемента $d\ell$ проводника (рис. 8.5).

Согласно принципу суперпозиции

$$d\vec{B} = \sum_{i=1}^{dN} \vec{b}_i = \vec{b} \cdot dN, dN = n \cdot S \cdot d\ell, I = j \cdot S = qnvS \rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Последнее выражение – закон Био – Савара – Лапласа. Рассмотрим его применения.

8.3.1. Магнитное поле линейного проводника с током.

Рис.8.5.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\ell}{r^2} \sin \beta, r = \frac{r_0}{\sin \beta}, \ell = r_0 \cot \beta \rightarrow d\ell = -\frac{r_0 d\beta}{\sin^2 \beta} \rightarrow B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\pi}^0 \sin \beta \cdot d\beta \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

8.3.2. Магнитное поле на оси и в центре кругового тока.

Рис. 8.6.

$$B = \int dB_{||} = \int dB \cdot \cos \alpha \rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \alpha}{r^2} \oint d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \cdot 2\pi R \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Индукция в}$$

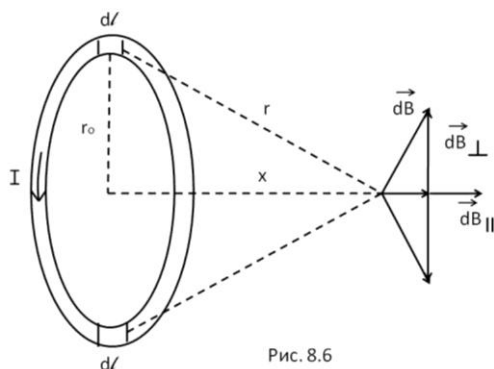


Рис. 8.6

центре кругового тока $B_0 = \mu_0 \frac{I}{2R}$. Индукция на

большом расстоянии от кругового тока будет

равна: $B_{\infty} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{r^3_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{r^3_0}$. (Как и для электрического диполя).

8.4. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

Рис. 8.7.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell \cos \vartheta = \oint B r d\varphi = \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r d\varphi = \mu_0 I \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \text{ Последние}$$

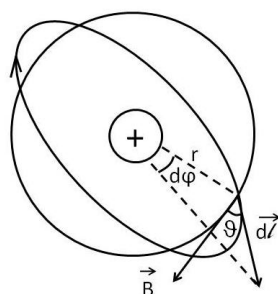


Рис. 8.7

две формулы выражают интегральную и дифференциальную формы теоремы о ЦВИМП. Применение этой теоремы позволяет определить индукцию магнитного поля в соленоиде: $B = \mu_0 n I, n = \frac{N}{\ell}$, где n – число витков на единице длины соленоида.

ЛК. 9. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле.

9.1. Действие электромагнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Пусть частица заряда q и массы m движется в электромагнитном поле (рис.9.1). На частицу действует сила

$$\vec{f} = q\vec{E}', \vec{E}' = \frac{\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow \vec{f} = \frac{q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{при}$$

$$v \ll c \rightarrow \vec{f} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad \text{если } E=0, \text{ то } \vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B} - \text{сила Лоренца.}$$

Уравнение движения в общем случае имеет вид: $m\ddot{\vec{r}} = q \frac{\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, при $v \ll c \rightarrow m\ddot{\vec{r}} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$ и при $E=0 \rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ или, при $v \ll c, \rightarrow m\ddot{\vec{r}} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

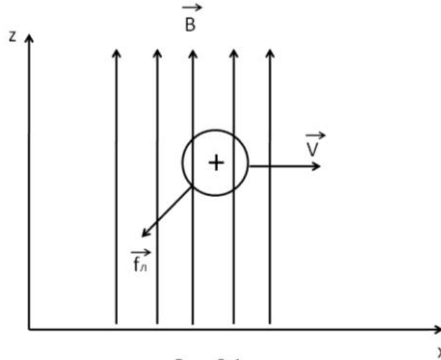
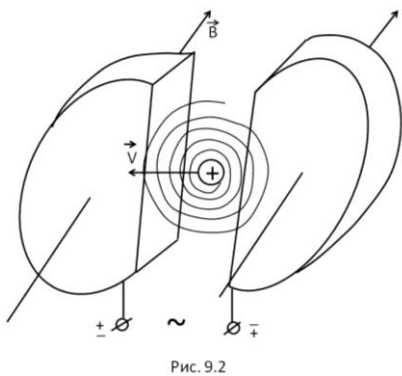


Рис. 9.1

9.1.1. Принцип действия циклического ускорителя заряженных частиц.

Рассмотрим движение заряженной частицы в циклотроне (рис.9.2) при $\beta \approx 0$:

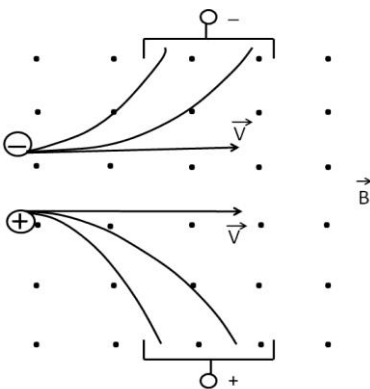
$$v = \frac{qE}{m}T, \vec{v} \perp \vec{B} \rightarrow qvB = \frac{mv^2}{r} \rightarrow v = \frac{qBr}{m}, T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB} \rightarrow \omega = \frac{qB}{m}, \quad r = \frac{mv}{qB} = \frac{E}{B}T.$$



образом, при увеличении скорости заряженной частицы в межэлектродном промежутке радиус кривизны траектории увеличивается (при постоянном периоде обращения частицы) и при достижении необходимой скорости пучок выводится на мишень.

9.1.2. β - и масс – спектрометры. МГД – генератор.

Рассмотрим рис. 9.3:



При попадании заряженной частицы в магнитное поле ($\vec{v} \perp \vec{B}$) радиус кривизны её траектории в заданном магнитном поле зависит от скорости, массы и знака заряда частицы: $r = \frac{vm}{qB}$. Таким образом, при попадании пучка частиц одинакового заряда и массы в магнитное поле частицы разделяются по скоростям - β - спектрометр; частицы одинаковой скорости и заряда разделяются по массе – масс-спектрометр, и разделение частиц по знаку заряда приводит к созданию ЭДС–МГД – генератор.

9.1.3. Эффект Холла. Униполярный генератор. Электромагнитный насос.

Эффект Холла – возникновение в проводнике с током $\vec{j}$, помещённом в магнитное поле $\vec{B}$, электрического поля $\vec{E}$ в направлении, перпендикулярном $\vec{j}$ и $\vec{B}$:

Рис. 9.4.

$$\mathcal{E}_X = E \cdot a, eE = evB \rightarrow \mathcal{E}_X = vBa, I = jS = envS = envab \rightarrow v = \frac{I}{enab}, \rightarrow \mathcal{E}_X = \frac{1}{en} \cdot \frac{IB}{b} - \text{ЭДС}$$

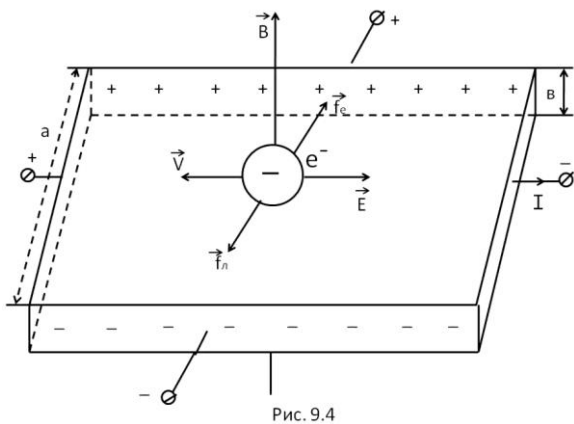


Рис. 9.4

Холла (1879), $R_X = \frac{1}{en}$ - постоянная Холла – служит *основной характеристикой эффекта Холла*, являющегося одним из наиболее важных *гальваномагнитных явлений*. Он – один из наиболее эффективных методов исследования носителей тока, в особенности в полупроводниках. Этот метод не только даёт убедительную экспериментальную аргументацию в пользу введения понятия *дырок*, но и позволяет оценивать

концентрации носителей (n, p) и определять их знак, что в свою очередь позволяет судить о количестве примесей в полупроводниках и характере химической связи. Температурная зависимость R_X даёт сведения о ширине запрещённой зоны и об энергетической глубине залегания примесных уровней у примесных полупроводников.

Униполярный генератор – *электрическая машина постоянного тока, основанная на явлении униполярной индукции – явлении возникновения ЭДС в намагниченном теле, движущемся перпендикулярно оси намагничивания* (рис. 9.5).

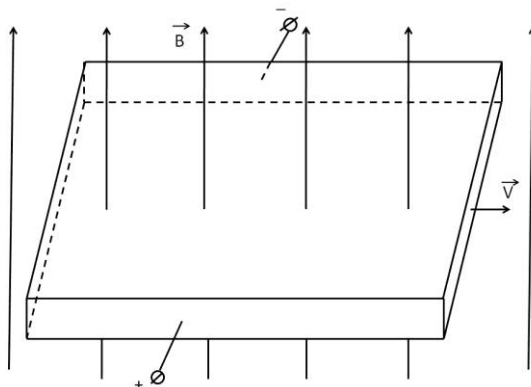


Рис. 9.5

При этом ЭДС направлена перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{B}$ и $\vec{v}$ магнита. В соответствии с законом преобразования полей в ИСК, связанной с магнитом, электрическое поле $\vec{E}$ отсутствует. Тогда в лабораторной СО электрическое поле будет равно $\vec{E}' = -\vec{v} \times \vec{B}$. Наличие электрического поля $\vec{E}'$ приводит к

появлению постоянной разности потенциалов, что и используют для генерирования постоянного тока в *униполярной машине*. Эта машина позволяет получать токи большой величины, но низкого напряжения.

Электромагнитный насос применяют для перекачки расплавленного вещества. Для этого его помещают в магнитное поле и пропускают электрический ток так, чтобы $\vec{j} \perp \vec{B}$. Тогда на ионы тока будет действовать сила Лоренца $\vec{f} = q[\vec{v}, \vec{B}]$, перекачивая расплав.

9.2. Действие магнитного поля на проводник и рамку с током.

На электроны проводимости подвижного проводника в магнитном поле будет действовать сила Лоренца $\vec{f} = e\vec{v} \times \vec{B}$, а на элемент его длины – сила

$d\vec{F} = \vec{f} \cdot dN = e\vec{v} \times \vec{B} \cdot nSd\ell \rightarrow d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$ - сила Ампера. На весь подвижный проводник с током действует сила $\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$. Между двумя параллельными проводниками с током действует сила в соответствии с законом Ампера:

$$d\vec{F} = I_2 \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B}_1, \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r_0} \rightarrow dF = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r_0} \cdot d\ell \rightarrow \frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r_0} \quad - \quad \text{сила Ампера,}$$

действующая на единицу длины параллельных проводников с током.

Рассмотрим рамку с током в поле постоянного магнита:

На рамку действует вращающий момент

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow M = rF \sin \alpha = ISB \sin \alpha \rightarrow \vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}.$$

9.3. Магнитный поток. Теорема Остроградского – Гаусса для магнитного поля.

Магнитный $d\Phi$ поток сквозь поверхность ΔS определяют как скалярное произведение $\vec{B}$ на $d\vec{S}$:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow \Delta\Phi = \int_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad \text{Для потока сквозь замкнутую поверхность,}$$

учитывая замкнутость линий магнитного поля, получим:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ и в дифференциальной форме - } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \text{ Магнитное поле - вихревое.}$$

9.4. Работа перемещения проводника (контур) с током в магнитном поле.

$$dA = F \cdot dx = I\ell B dx = IBdS \rightarrow dA = I \cdot d\Phi.$$

ЛК 10. Явление электромагнитной индукции.

М. Фарадей (1791 - 1867) – самообразование. Открыл: бензол и бутилен, получил ряд газов в сжиженном состоянии; с 1830 г. – открытия в области электричества и магнетизма – закон электромагнитной индукции, пара- и диамагнетизм, вращение плоскости поляризации веществ в магнитном поле, электрохимия (термины – электрод, катод, анод и др.). Ввёл понятие *поля* → картину силовых линий. Много консультировал в промышленности. Популяризировал научные достижения.

Максвелл (1831 - 1879) – образование в Эдинбурге, затем – Тринити-Колледж в Кембридже. В 1865 г. после смерти отца поселился в родовом имении, где и был написан 2-х т. «Трактат об электричестве и магнетизме» в 1873г. – законченная теория явлений электромагнетизма, завершающаяся уравнениями электромагнитного поля – *уравнения Максвелла*. С 1871г. – 1-й директор Кавендишской лаборатории в Кембридже, где за 100 лет было сделано больше открытий, чем в любой другой лаборатории. В последние годы – в биофизике, молекулярной биологии и радиоастрономии.

10.1. Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Опыты Фарадея (1831) представлены на рис. 10.1. $\rightarrow \mathcal{E} \sim \frac{d\Phi}{dt}$. Ленц (1833)

$\rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, или в интегральной форме: $\oint_{\ell} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ - при всяком изменении

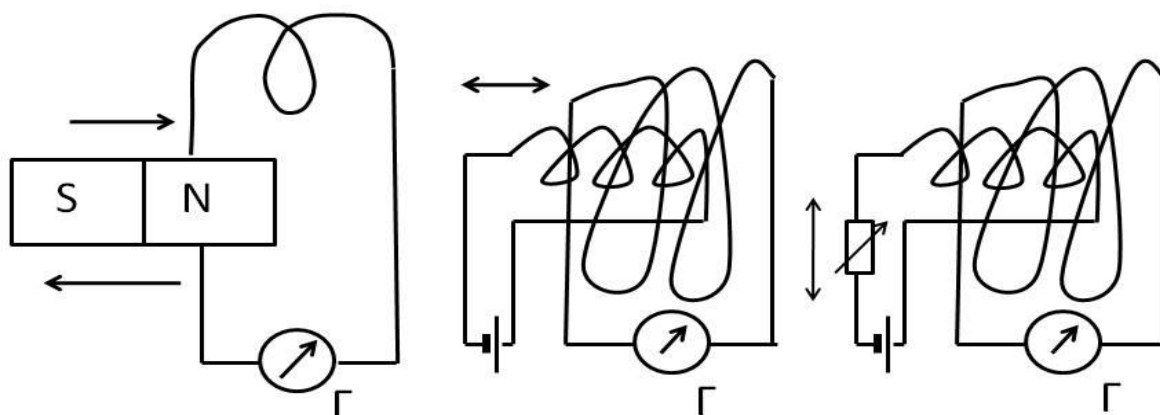


Рис. 10.1

во времени магнитного потока в пространстве возникает циркуляция вектора напряжённости электрического поля. Причём, это уравнение имеет смысл независимо от того, реализован ли контур ℓ в виде проводника, диэлектрика, или речь идёт о мысленно выделенном контуре в вакууме (электрогенераторы, токи Фуко – плавка металлов в вакууме, микроволновые печи, бетатрон и т.п.). В дифференциальной форме закон электромагнитной индукции имеет вид:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

10.2. Явление взаимной индукции.

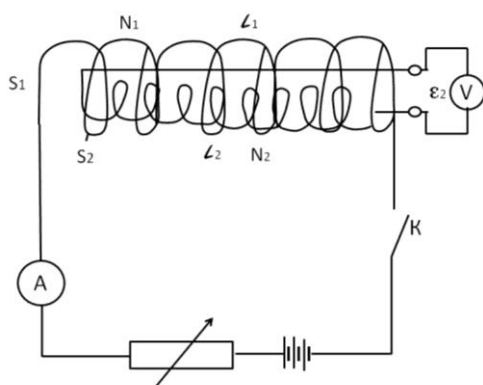


Рис. 10.2

Рассмотрим рис. 10.2. При изменении тока I_1 в первичной катушке во вторичной возникнет ЭДС $\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$,

$$\Phi_2 = N_2 S_2 B_1, B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} I_1, \rightarrow \Phi_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} S_2 I_1.$$

Вводя коэффициент взаимной индуктивности

$$L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1}, \text{ получаем } \Phi_2 = L_{12} I_1, \text{ откуда ЭДС}$$

$$\text{взаимной индукции имеет вид: } \mathcal{E}_2 = -L_{12} \frac{dI_1}{dt},$$

знак $\mathcal{E}_2$ определяется знаком L_{12} , который может принимать значения « $\pm$ ». В результате относительности взаимной индукции $L_{12} = L_{21}$. Две катушки на общем сердечнике – трансформатор.

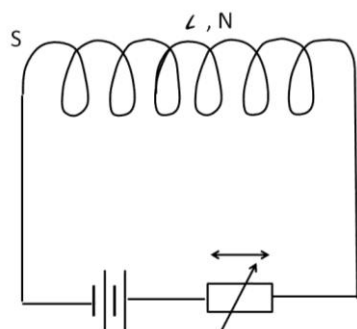


Рис. 10.3

10.3. Явление самоиндукции.

Явление самоиндукции – возникновение ЭДС в той же катушке, в которой изменяют ток (рис. 10.3).

$\mathcal{E} = -L \frac{d\Phi}{dt}$, $\Phi = LI$, $N_1 = N_2 = N$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, $S_1 = S_2 = S \rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$, $\frac{N}{\ell} = n \rightarrow L = \mu_0 n^2 V$. Если в катушке индуктивности находится сердечник, то $L = \mu_0 \mu n^2 V$. В вакууме $\mu = 1$ и $L_{12} = k\sqrt{L_1 \cdot L_2}$, $k \leq 1$. $[L] = [L_{12}] = \text{Гн}$.

10.4. Энергия магнитного поля. Объёмная плотность энергии.

При пропускании тока по виткам катушки индуктивности в последней возникает магнитное поле, потенциальную энергию которого определяют по формуле $dW = I \cdot d\Phi \rightarrow I \cdot L \cdot dI \rightarrow W = \frac{LI^2}{2} \rightarrow w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0^2 n^2 I^2}{2\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0}$. Для

ферромагнитной среды $B = \mu_0 \mu H \rightarrow w = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$. Для электромагнитного поля будет:

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} \rightarrow w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}.$$

10.5. Токи при замыкании и при размыкании электрической цепи.

Рассмотрим схему рис. 10.4.

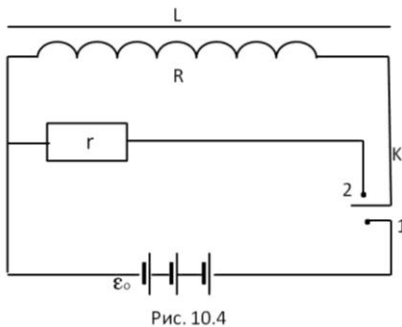


Рис. 10.4

10.5.1. Ток при замыкании цепи.

$K \rightarrow 1$ - включение: по закону Кирхгофа $\mathcal{E}_0 - LI = IR \rightarrow i + \frac{R}{L}I = \frac{1}{L} \cdot \mathcal{E}_0$. Сделаем замену переменной: $I = i + \frac{1}{L} \cdot \mathcal{E}_0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i + \frac{1}{L} \cdot \mathcal{E}_0 = \frac{1}{L} \cdot \mathcal{E}_0 \rightarrow \int_{-\frac{1}{R}\mathcal{E}_0}^i \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \rightarrow$

$$\ln i / (-\mathcal{E}_0/R) = -\frac{R}{L}t \rightarrow i = -(\mathcal{E}_0/L) \exp(-R/L \cdot t) \rightarrow I = (\mathcal{E}_0/R) \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (\text{рис. 10.5}).$$

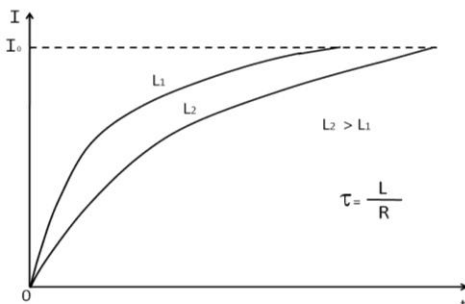


Рис. 10.5

10.5.2. Экстраток при размыкании цепи.

$K \rightarrow 2 \rightarrow t_0 = 0, r, \mathcal{E}_0 = 0$

$$\rightarrow Ir = L \frac{dI}{dt} \rightarrow \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t dt \rightarrow I = I_0 \cdot e^{-\frac{r}{L}t} \quad (\text{рис. 10.6}).$$

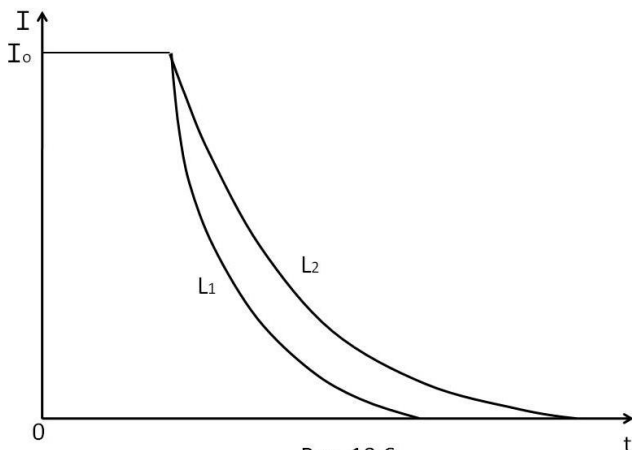


Рис. 10.6

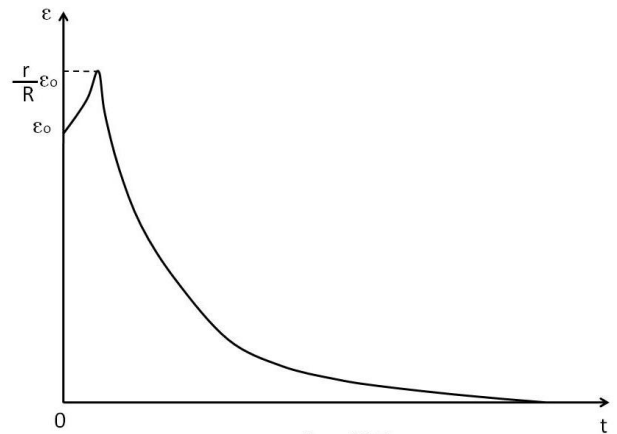


Рис. 10.7

Пусть $r \rightarrow \infty$, тогда $\frac{dI}{dt} \rightarrow \infty$, т.к. $\frac{dI}{dt} = -\frac{r}{L} I_0 e^{-\frac{r}{L}t}$, $E_i = -L \frac{dI}{dt} \rightarrow E_i = \frac{r}{R} \cdot E_0 \cdot e^{-\frac{r}{L}t}$, при
вблизи $t \geq 0$ $E_i = (r/R)E_0$ (рис. 10.7) – ЭДС индукции возрастает до напряжения
пробоя в рассматриваемой среде – экстраток размыкания (искра, дуга).

Лк. 11. Магнитное поле в веществе.

11.1. Магнитный момент атома. Типы магнетиков. Намагниченность.

По теории атома Резерфорда – Бора электрон обращается вокруг ядра с
угловой скоростью $\omega \approx 10^{15} \text{с}^{-1}$, создавая микроток i и магнитный момент $\vec{p}_m = iS\vec{n}$
 $\rightarrow \vec{p}_m = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2 \vec{n} = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{er^2}{2} \vec{\omega}$. Момент импульса электрона $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (рис. 11.1).

Учитывая, что $\vec{L} = I\vec{\omega} = mr^2 \cdot \vec{\omega}$, найдём *гиромагнитное отношение* $\Gamma = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} \rightarrow$

$\vec{p}_m = \Gamma \cdot \vec{L}$. Из постулата Бора $L = n\hbar, n=1,2,3,\dots$ для $n=1$ получим: $p_m = \frac{e}{2m} \hbar \rightarrow$

$\frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} = 0,92 \cdot 10^{-23} (\text{А} \cdot \text{м}^2)$. Индукция магнитного поля в центре такого

атома $B = \frac{\mu_0 i}{2r} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_m}{r^3} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{0,92 \cdot 10^{-23}}{0,5^3 \cdot 10^{-30}} = 15 (\text{Тл})$ и очень
быстро убывает с ростом r .

Для атома, включающего N электронов

$\vec{p}_{mat} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi(эл)}$. Суммарный магнитный момент атома

может быть равным нулю – *диамагнетики*, или быть
больше нуля – *парамагнетики*.

Если $|\vec{p}_{m,am}| > 0$, то в веществе в отсутствие
внешнего магнитного поля из-за теплового движения
атомов, магнитный момент равен нулю. Во внешнем
магнитном поле магнитные моменты атомом

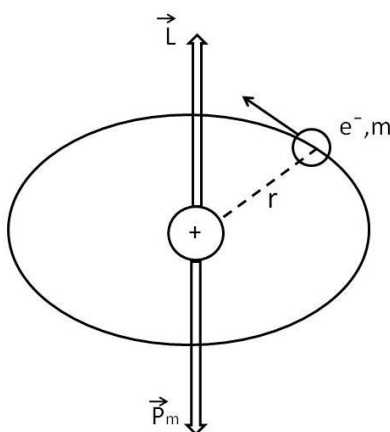


Рис. 11.1

ориентируются вдоль поля. Степень намагниченности характеризуют *вектором*

намагниченности $\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_{m(am)}}{V}$. Магнитное поле $\vec{B}$ в веществе будет состоять из внешнего магнитного поля $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ и поля намагниченности вещества $\mu_0 \vec{J}$: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}$. Учитывая, что $J = \chi H$, где χ – магнитная восприимчивость вещества, получаем для однородного изотропного магнетика $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, где μ – магнитная проницаемость вещества. Для парамагнетиков $\chi \geq 0, \mu > 1$, для диамагнетиков – $\chi \leq 0, \mu < 1$.

11.2. Элементарная теория диамагнетизма. Парамагнетизм. Парамагнитный резонанс.

Рассмотрим атом Резерфорда – Бора (рис. 11.2). Магнитный момент атома $\vec{p} = \frac{er^2}{2} \vec{\omega}$. При «внесении» атома в магнитное поле магнитный момент атома

изменяется: $\Delta \vec{p}_m = \frac{er^2}{2} \Delta \vec{\omega} \oint_{\Gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow E' \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \rightarrow E' = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$. На электрон,

вращающийся вокруг ядра, действует механический момент: $M = reE', M = -\frac{er^2}{2} \frac{dB}{dt}$,

с другой стороны, $M = I \frac{d\omega}{dt} \rightarrow -\frac{er^2}{2} \frac{dB}{dt} = mr^2 \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = -\frac{e}{m} \int_0^B dB \rightarrow \Delta \omega = -\frac{e}{2m} B \rightarrow$ и

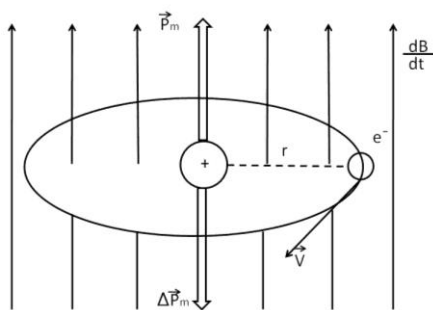


Рис. 11.2

окончательно имеем: $\Delta \vec{p}_m = -\frac{e^2 r^2}{4m} \vec{B}$. При внесении

атома в магнитное поле, в нём возникает *дополнительный магнитный момент* $\Delta \vec{p}_m$, направленный против внешнего магнитного поля $\vec{B}$. Это явление получило название *диамагнетизма атома*. Явление диамагнетизма присуще всем элементам. У диамагнетиков $\vec{p}_m = 0$ и возникает

только $\Delta \vec{p}_m$ при их внесении в магнитное поле, в результате чего такие атомы выталкиваются из магнитного поля. К диамагнетикам относятся: W, Hg, P, S, Au, Ag, Cu, He, H₂O и подавляющее большинство органических соединений. Для многоэлектронного атома диамагнетика имеем:

$$\Delta \vec{p}_{m(am)} = -\sum_i \frac{e^2 r_i^2}{4m} \cdot \vec{B}, \mu_0 J = \chi B, J = n \cdot \Delta p_{m(am)} \rightarrow \vec{J} = -\frac{ne^2}{4m} \sum_i r_i^2 \cdot B \rightarrow \chi = -\frac{\mu_0 ne^2}{4m} \sum_i r_i^2.$$

У щелочных металлов и т.п. $p_m(am) \neq 0$ и для

парамагнетиков $J = \frac{\chi}{\mu_0} B$, где $\chi = \mu_0 \frac{np_m^2}{3kT}$. В 1944г.

Завойский открыл явление *парамагнитного резонанса* (рис. 11.3). $\Delta \omega = \Gamma \cdot B$.

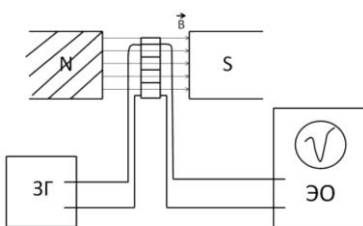


Рис. 11.3

11.3. Ферромагнетизм.

11.3.1. Ферромагнетизм. Спиновая природа ферромагнетизма.

Ферромагнетизм – свойство твёрдого тела, т.е. кристаллической решётки, а не атомов или молекул. Основные характеристики ферромагнитного вещества такие: 1. Магнитная проницаемость μ может достигать очень больших значений ($\sim 10^3$), 2. Зависимость $J(H)$ теряет линейный характер; возникает явление *магнитного насыщения*, которое при обычных температурах наблюдается уже в слабых полях. 3. Ферромагнитный образец обнаруживает явление *гистерезиса*, т.е. зависимость между J и H более не является однозначной; при этом магнитная проницаемость μ зависит не только от H : она бывает различной в зависимости от того, какой магнитной обработке подвергался образец раньше. Следовательно, магнитная проницаемость зависит от магнитной истории образца.

Ферромагнитными могут быть только те вещества, которые состоят, по крайней мере частично, из парамагнитных атомов. При некотором расположении атомов кристаллической решётки могут даже в слабых полях проявляться взаимодействия между магнитными диполями, которые вызывают определённые ориентировки, охватывающие громадные количества атомов. Выше некоторой

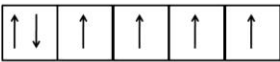
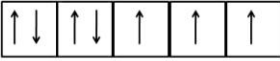
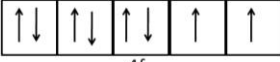
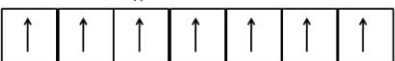
	3d	0°C
Fe		770
Co		1131
Ni		358
	4f	
Gd		16

Рис. 11.4

критической температуры (*точка Кюри*), различной для каждого ферромагнитного вещества, энергии теплового движения оказывается достаточно, чтобы разрушить эти внутренние связи, обуславливающие ориентацию; тогда это вещество становится *парамагнитным*. При обычных температурах основными ферромагнитными веществами (в самом общем смысле) являются следующие:

1. Три хорошо известных металла из *переходных элементов группы железа* (незаполненная 3d-оболочка): Fe, Co, Ni и их сплавы; один редкоземельный элемент (незаполненная 4f-оболочка) – гадолиний Gd (рис. 11.4).
2. Сплавы Гейслера (Cu, Mn, Al), в которых ионы Mn и Al являются парамагнитными.
3. Ферриты, ферромагнитные химические соединения $M^{II}OFe_2O_3$ (спеченные сплавы типа $Fe_2O_3 + M^{II}O$, где $M^{II}O$ – окись двухвалентного металла), например $FeO-Fe_2O_3$ (магнетит) или $NiO-Fe_2O_3$ (феррит никеля).

Объяснение ферромагнетизма состоит в следующем. В ферромагнитном веществе имеются области, в которых все диполи ориентированы параллельно (*домены Вейсса*). Каждый домен обнаруживает самопроизвольное (спонтанное) намагничивание, его результирующий магнитный момент зависит от температуры T . Намагничивание определяется суммой моментов всех доменов и может быть

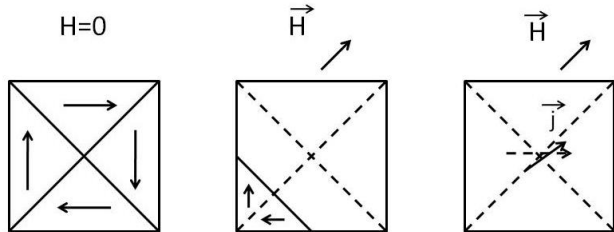


Рис. 11.5

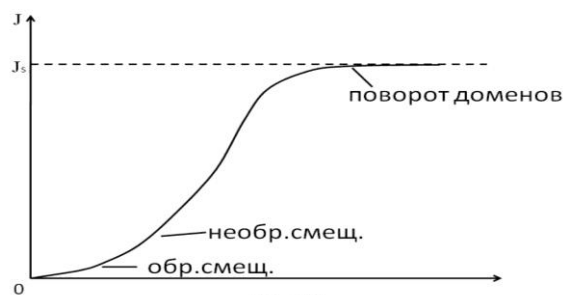


Рис. 11.6

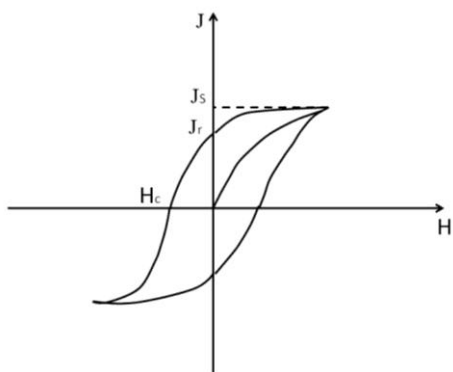


Рис. 11.7

(рис.11.5 – 11.9).

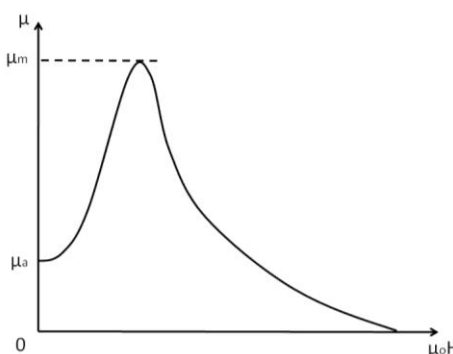


Рис. 11.8

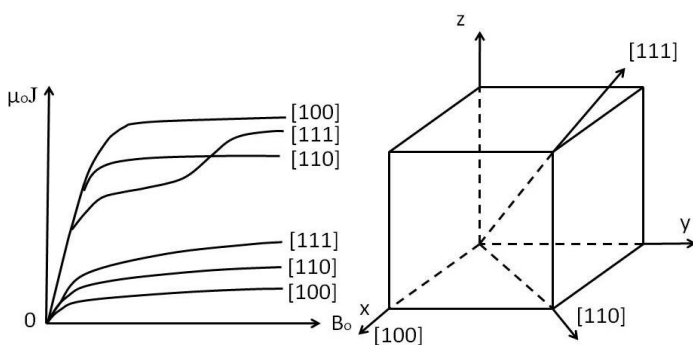


Рис. 11.9

равно нулю, если домены ориентированы хаотически (рис. 11.5). Намагничивание образца может возникать при росте одного домена за счет другого – этот процесс соответствует *смещению границ*, разделяющих домены. Когда все домены примут ориентацию, наиболее близкую к направлению внешнего поля **H**, всё ещё может продолжаться рост намагниченности за счёт *поворота* диполей внутри доменов до почти полной их ориентировки по направлению **H**, что соответствует *намагничиванию насыщения J_s*,

Направления, вдоль которых устанавливаются магнитные моменты доменов Вейсса, являются направлениями *лёгкого намагничивания*. Они определяются кристаллической структурой твёрдого тела. Так, у железа, которое кристаллизуется в кубической системе, имеется 6 преимущественных направлений намагничивания, а именно вдоль 3 рёбер куба [100], [010], [001], в обоих направлениях. В случае Ni – диагональ куба [111], у Co – вдоль оси элементарной гексагональной призмы (рис.11.9). Кривые намагничивания для образца, первоначально не намагничённого имеют вид, показанный на рис. 11.6.

Намагничивание насыщения можно оценить, исходя из величины момента атомного диполя – близкой к μ_B - и из числа атомов в единице объёма. Для

железа получаем: $\mu_0 J_s \approx n \cdot \mu_B = 7,0 \cdot 10^{28} \cdot 1,16 \cdot 10^{-29} = 8,1 \cdot 10^{-1} \text{ Тл}$.

Если после того как достигнуто насыщение образца, начать уменьшать **H**, то намагниченность не будет спадать по той же кривой, по которой она возрастала. Домены Вейсса имеют тенденцию сохранять свою ориентировку вследствие

упругих напряжений, возникающих внутри поликристаллического образца, которые противодействуют перемещению границ доменов. При $H = 0$ остаётся некоторое намагничивание, названное *остаточным намагничиванием* J_r . Для его устранения необходимо изменить направление поля $\mathbf{H}$ на обратное и увеличить его до некоторого значения H_c , которое называют *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении поля, обратного по отношению к первоначальному, возникает намагничивание противоположного знака, которое также достигает значения насыщения. Вновь ослабляя поле до нуля и вновь изменяя его направление, получаем симметричный процесс, так что кривая замыкается, образуя *петлю гистерезиса* (рис. 11.7).

Площадь полного цикла $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{H}$ изображает затраченную энергию, соответствующую работе поворота и новой ориентировке диполей. *Потери на гистерезис* приводят к нагреванию образца или *ферромагнитного сердечника* в переменном поле (например, в трансформаторах).

11.4. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

11.4.1. Первое уравнение Максвелла.

Для характеристики электромагнитного поля было введено шесть векторов $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{J}$ и $\vec{H}$. Учитывая связь векторов $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$, а также векторов $\vec{B}, \vec{J}$ и $\vec{H}$, то для определения электромагнитного поля можно ограничиться нахождением четырех векторов. Обычно в качестве таких векторов используют векторы $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ и $\vec{H}$. В линейных изотропных средах электромагнитное поле может быть полностью определено двумя векторами (обычно $\vec{E}$ и $\vec{H}$).

Все электромагнитные процессы, относящиеся к макроскопической электродинамике, подчиняются законам, впервые сформулированным в виде дифференциальных уравнений Дж. К. Максвеллом, которые были опубликованы им в 1873г. Эти уравнения были получены в результате обобщения накопленных экспериментальных данных и называются "Уравнениями Максвелла".

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока (закона Ампера). Этот закон утверждал, что циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля по замкнутому контуру Γ равна току I , пронизывающему данный контур: $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

В качестве контура Γ может быть взят любой замкнутый контур, охватывающий ток I один раз. Причем, под током I понимали только ток проводимости. В общем случае распределение тока I внутри контура Γ может быть неравномерным. Поэтому $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$, где S - произвольная поверхность, опирающаяся на контур Γ ; $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$, $\vec{n}_0$ - орт нормали к поверхности S , образующий правовинтовую систему с направлением обхода контура, а $\vec{j}$ -

вектор плотности тока проводимости: $\vec{j} = \frac{dI}{dS} \cdot \vec{n}$. Здесь $\vec{n}$ - единичный вектор, показывающий направление тока; dI - ток, протекающий через площадку dS , перпендикулярную к вектору $\vec{n}$. Итак, получаем: $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$. Это уравнение, справедливое в случае постоянных токов и поля, оказывается неверным в случае переменных процессов.

Максвелл дал обобщенную формулировку закона полного тока. Он ввел фундаментальное понятие тока смещения и, основываясь на работах Фарадея, предположил, что в случае переменных полей ток смещения с точки зрения образования магнитного поля равноценен току проводимости.

Примером электрической системы, в которой преобладают токи смещения, может служить конденсатор в цепи переменного тока. Переменный ток может циркулировать между обкладками конденсатора даже в том случае, когда они разделены идеальным диэлектриком или находятся в вакууме и, следовательно, образование тока проводимости невозможно. Соединительный провод, по которому течет ток проводимости, окружен кольцевыми линиями магнитного поля, которые как бы образуют "оболочку" вокруг всего провода. Максвелл предположил, что эта "оболочка" не обрывается у пластин конденсатора, а образует замкнутую поверхность, т.е. переменное электрическое поле конденсатора также окружено кольцевыми линиями магнитного поля. Таким образом, переменное электрическое поле, так же как и ток проводимости, сопровождается появлением магнитного поля. Это послужило основанием введения понятия о новом виде тока - тока смещения. Плотность тока смещения

определяется формулой $\vec{j}_{см} = \dot{\vec{D}}$.

Подчеркнем, что ток проводимости и ток смещения в вакууме имеют различную физическую сущность. Ток проводимости - это упорядоченное движение свободных электрических зарядов. Ток смещения в вакууме соответствует только изменению электрического поля и не сопровождается каким-либо движением электрических зарядов. Этот ток не сопровождается выделением тепла.

Таким образом, первое уравнение Максвелла в интегральной форме, выражающее обобщенный закон полного тока принимает вид:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_S \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{S}$$

Максвеллом этот закон был сформулирован в дифференциальной форме. Для перехода к дифференциальной форме воспользуемся теоремой Стокса:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{j} + \dot{\vec{D}}) \cdot d\vec{S}$$

Так как S - произвольная поверхность, то это равенство возможно только в случае, если

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

Это равенство

называют первым уравнением Максвелла. Оно эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые в прямоугольной системе координат x, y, z имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \dot{D}_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \dot{D}_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \dot{D}_z \end{aligned} \right\}$$

11.4.2. Второе уравнение Максвелла.

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея, который формулируется следующим образом: если замкнутый контур Γ пронизывается переменным магнитным потоком Φ , то в контуре возникает э.д.с. $\mathcal{E}$, равная скорости изменения магнитного потока $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}$, где знак минус в правой части означает, что возникающая в контуре э.д.с. всегда как бы стремится воспрепятствовать изменению потока, пронизывающего данный контур - "правило Ленца".

До Максвелла считалось, что это уравнение справедливо только в случае проводящего контура. Максвелл предположил, что оно справедливо и в том случае, если среда не обладает проводимостью. Учитывая сказанное, второе уравнение Максвелла в интегральной форме, сформулированное для контура конечных размеров, имеет вид:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Максвеллом это уравнение было сформулировано в дифференциальной форме.

Предположим, что контур Γ неподвижен и не изменяется со временем. В этом случае производную по времени в правой части уравнения можно внести под знак интеграла. Преобразовывая левую часть по теореме Стокса, получаем:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Так как S - произвольная поверхность, то равенство возможно только в том случае, если

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

Это соотношение называют вторым уравнением Максвелла. Переходя к прямоугольной системе координат x, y, z , получаем три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

11.4.3. Третье уравнение Максвелла.

Третье уравнение Максвелла является обобщением закона Остроградского - Гаусса. Этот закон связывает поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность S с зарядом Q , сосредоточенным внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q,$$

где $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$, $\vec{n}_0$ - орт внешней нормали к поверхности S .

Заряд Q может быть произвольно распределен внутри поверхности V . Поэтому в общем случае

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV,$$

где $\rho = \frac{dQ}{dV}$ - объемная плотность электрического заряда.

Это уравнение обычно называют третьим уравнением Максвелла в интегральной форме. Для перехода к дифференциальной форме преобразуем левую часть уравнения по теореме Остроградского - Гаусса. В результате получим

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho \cdot dV$$

Это равенство выполняется при любом объеме V . Это возможно лишь в том случае, если $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$. Это соотношение принято называть третьим уравнением Максвелла. В прямоугольной системе координат x, y, z уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

Из этого равенства следует, что дивергенция вектора $\vec{D}$ отлична от нуля в тех точках пространства, где имеются свободные заряды. В этих точках линии вектора $\vec{D}$ имеют начало (исток) или конец (сток). Линии вектора начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

В отличие от вектора $\vec{D}$, истоками (стоками) вектора $\vec{E}$ могут быть как свободные, так и связанные заряды. Чтобы показать это, запишем уравнение для вектора $\vec{E}$: $\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$. Второй член в правой части имеет смысл объемной

плотности зарядов ρ_n возникающих в результате неравномерной поляризации среды (такие заряды называют поляризационными), т.е.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_n \rightarrow \epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} = \rho + \rho_n$$

11.4.4. Четвертое уравнение Максвелла.

Четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме совпадает с законом Остроградского - Гаусса для магнитного поля, который можно сформулировать следующим образом. Поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность S равен нулю: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$. Это означает, что не существует линий

вектора $\vec{B}$, которые только входят в замкнутую поверхность (или, наоборот, только выходят из поверхности): они всегда пронизывают ее. Это уравнение называют четвертым уравнением Максвелла в интегральной форме. К дифференциальной форме можно перейти с помощью теоремы Остроградского - Гаусса так же, как это было сделано в случае третьего уравнения Максвелла. В результате получим четвертое уравнение Максвелла:

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0$$

Оно показывает, что в природе отсутствуют магнитные заряды. Из этого уравнения также следует, что линии вектора $\vec{B}$ (силовые линии магнитного поля) являются непрерывными.

11.4.5. Уравнение непрерывности.

Уравнение непрерывности можно получить из первого уравнения Максвелла. Взяв дивергенцию от обеих частей этого равенства , получаем:

$$\vec{\nabla} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Правая часть уравнения представляет собою сумму плотностей тока проводимости и тока смещения, т.е. плотность полного тока $\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, эквивалентно условию $\vec{\nabla} \vec{j}_{полн} = 0$.

Равенство нулю дивергенции к.-л. вектора означает непрерывность линий этого вектора. Следовательно, это уравнение показывает, что линии плотности полного тока являются непрерывными, в то время как линии тока проводимости начинаются в тех точках пространства, где плотность зарядов уменьшается и заканчиваются там, где плотность зарядов возрастает, иными словами линии токов проводимости и смещения могут иметь начало и конец.

Представленное уравнение тесно связано с законом сохранения заряда и, по существу, является его дифференциальной формой.

11.4.6. Закон Ома в дифференциальной форме.

К основным уравнениям электродинамики относят также закон Ома в дифференциальной форме, который выражает зависимость плотности тока проводимости $\vec{j}$ в к.-л. точке проводящей среды от напряженности $\vec{E}$ электрического поля в этой точке: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Здесь σ - удельная проводимость, являющаяся важной характеристикой среды. В изотропных средах в отсутствие внешнего постоянного магнитного поля σ - скалярная величина. Ее значение зависит от температуры. В анизотропных средах параметр σ является тензором. При этом плотность тока проводимости и напряженность электрического поля не совпадают по направлению.

11.5. Энергия и поток энергии электромагнитного поля. Вектор Умова – Пойнтинга. Импульс электромагнитного поля.

Плотность энергии электромагнитного поля - $w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$. $W = \int_V w \cdot dV$.

Вектор

Умова-Пойнтинга: $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ (рис.11.10). $\Pi = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{w \Delta S \Delta \ell}{\Delta S \Delta \ell} = wv \rightarrow \vec{\Pi} = w \cdot \vec{v}$, в

вакууме $\vec{\Pi} = w \cdot \vec{c}$, где c – скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

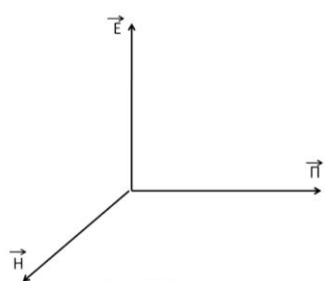


Рис. 11.10

$-\frac{dW}{dt} = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV$ - убыль энергии в единицу времени в данном объёме равно потоку энергии сквозь поверхность, ограничивающую данный объём, плюс работа в единицу времени (мощность), которую поле производит над зарядами вещества внутри этого объёма.

$\vec{p} = \frac{W}{c} \vec{n}$ - импульс, $\vec{G} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}$ - плотность импульса

электромагнитного поля.

ЛК.12. Колебания и волны.

12.1. Колебания и их характеристики. Свободные незатухающие колебания.

Колебания – процессы, точно или приблизительно повторяющиеся через равные промежутки времени. Механические колебания – повторяющиеся изменения положения и скорости к.-л. тел или частей тел – могут происходить под действием упругих сил, силы тяжести, а также других сил, например, капиллярных. Электрические колебания – повторяющиеся изменения напряжений

и сил токов в электрических цепях и напряжённостей электрических и магнитных полей в пространстве вокруг этих цепей.

Несмотря на различную природу колебаний, в них обнаруживаются одни и те же закономерности. Они описываются одними и теми же уравнениями.

Наиболее важными являются *гармонические колебания* не только потому что они часто встречаются на практике, но и потому, что они играют важную роль при изучении колебаний по форме заметно отличающихся от гармонических.

Причины возникновения колебаний различны, - в основном, в результате нарушения состояния равновесия системы: при некоторых условиях система, выведенная из состояния равновесия и предоставленная самой себе, начинает совершать колебания около этого положения. Такие колебания называют *собственными или свободными*. Они могут быть *незатухающими или затухающими*. Колебания, совершающиеся под действием внешней силы называют *вынужденными*. Наиболее важными свойствами гармонических колебаний являются: 1) независимость частоты ν колебаний от амплитуды A , 2) принцип суперпозиции – сложение эффектов.

Одномерное движение в *потенциальной яме* – финитно и является *периодическим*. Промежуток времени, по истечении которого движение повторяется, называют *периодом*: $f(t) = f(t+T), \nu = \frac{1}{T}$.

12.2. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение.

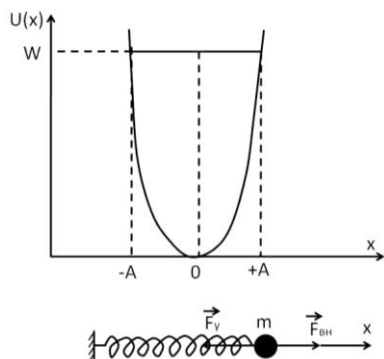


Рис. 12.1

Рассмотрим движение *гармонического осциллятора* в потенциальной яме (рис. 12.1). Колебания совершаются под действием упругой (квазиупругой) силы:

$$ma = F, F = -kx, m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0, \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решением этого уравнения будет

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Здесь x – смещение, A – амплитуда (максимальное смещение от положения равновесия), $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний (в момент времени $t=0$).

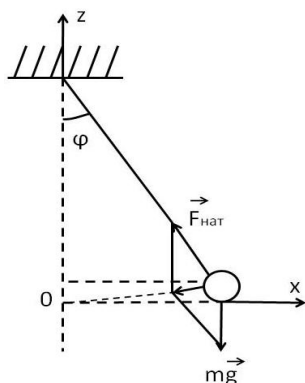


Рис.12.2

12.2.1. Математический маятник.

Учение о гармонических колебаниях в значительной степени связано с задачей о маятнике. Точечная масса m , сосредоточенная на конце невесомой нити длиной ℓ , подвешенной за другой конец, и находящаяся в гравитационном поле представляет собой *математический маятник* (рис. 12.2). Уравнение движения маятника имеет

вид: $ma = -mg \sin \varphi, s = \ell \varphi, a = \ddot{s} = \ell \ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0$. Отсчитывая смещение точки от начала координат, разложение $\sin \varphi$ в ряд Маклорена даёт:
 $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ При малых значениях φ можно ограничиться первым слагаемым (при $\varphi = 30^\circ = 30\pi/180 = 0,5236$, 4,5%; $\sin 10^\circ = 0,17315$, $\rightarrow$ 0,09%). Тогда имеем:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

12.2.2. Физический маятник

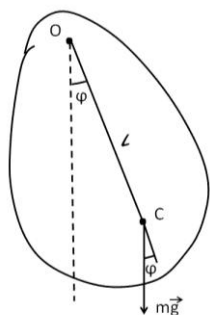


Рис. 12.3

Рис. 12.3. $I\ddot{\varphi} = \vec{M} \rightarrow I\ddot{\varphi} = -\ell mg \sin \varphi$. При малых φ $\sin \varphi \approx \varphi$ и $\ddot{\varphi} + \frac{\ell mg}{I} \varphi = 0, \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$. По теореме Гюйгенса – Штейнера $I = I_0 + m\ell^2, \omega_0 = \sqrt{\frac{\ell mg}{I}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\ell mg}}$. Вводя понятие *приведенной* длины ℓ' физического маятника: $\ell' = \frac{I}{\ell m}$, получим $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell'}{g}}$.

12.2.3. Электрический LC – колебательный контур.

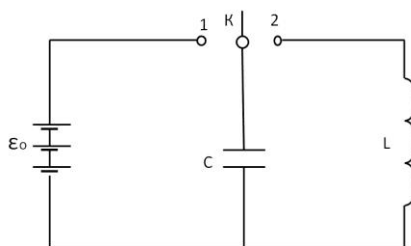


Рис. 12.4

Рассмотрим схему рис. 12.4. При подключении конденсатора к батарее (K $\rightarrow$ 1) конденсатор заряжается, при повороте ключа в положение K $\rightarrow$ 2 – разряд конденсатора через катушку индуктивности. По закону Кирхгофа $-L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} \rightarrow$

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC} I = 0 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

12.2.4. Энергия гармонических колебаний.

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, k = m\omega_0^2, x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \dot{x} = v = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \rightarrow W = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

12.2.5. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

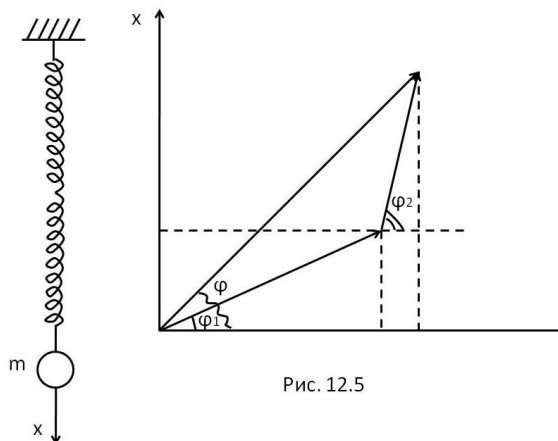


Рис. 12.5

Пусть

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \rightarrow x = x_1 + x_2$$

(рис. 12.5). $\rightarrow x = A \sin(\omega t + \varphi)$. Необходимо

определить A и φ :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \text{ далее}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \text{ В частных случаях: 1)}$$

$$\Delta \varphi = 2\pi \cdot n, n = 0, 1, 2, \dots \rightarrow A = A_1 + A_2, \text{ при}$$

$$A_1 = A_2 \rightarrow A = 2A_1. \text{ Если}$$

$$\Delta \varphi = (2n+1)\pi, \rightarrow A = A_1 - A_2, \text{ и при } A_1 = A_2 \rightarrow A = 0.$$

12.2.6. Биения.

Рассмотрим сложение двух колебаний одного направления при $A_1 = A_2 = A, \omega_1 \geq (\cong) \omega_2 \rightarrow x = x_1 + x_2 = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \rightarrow x = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$

(рис. 12.6). $x = A(t) \cos \omega t, A(t) = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t, \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

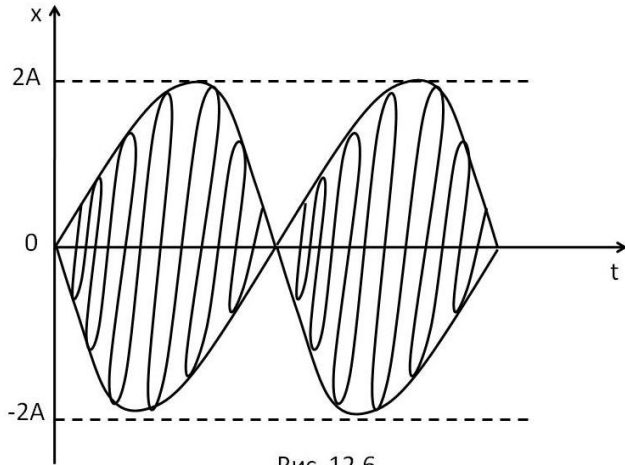


Рис. 12.6

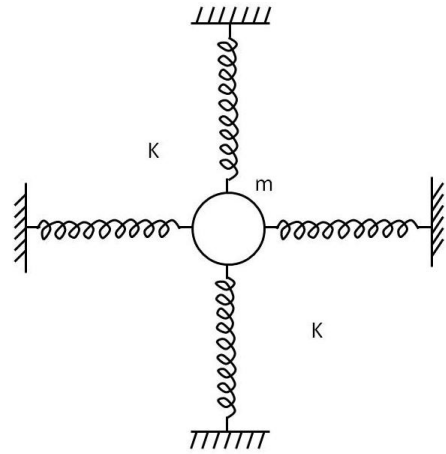


Рис. 12.7

12.2.7. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.

Рассмотрим колебания пружинного маятника рис. 12.7. Уравнения движения материальной точки массы m вдоль оси x и вдоль оси y имеют вид: $m\ddot{x} + 2k_1 x = 0, m\ddot{y} + 2k_2 y = 0$. При $2k_1 = 2k_2 = k$ уравнения принимают вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ и $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$, решения которых -

$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_1), y = B \sin(\omega_0 t + \varphi_2), t = 0 \rightarrow x = A, y = B \cos \varphi \rightarrow x = A \cos \omega_0 t \rightarrow \cos \omega_0 t = \frac{x}{A}$, тогда

$\sin \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}, y = B \cos(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow y = B \cos \omega_0 t \cdot \cos \varphi - B \sin \omega_0 t \cdot \sin \varphi \rightarrow$ откуда получаем:

$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi \rightarrow \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{xy}{AB} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi$, учитывая

$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, окончательно: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. - уравнение эллипса.

Частные случаи: 1) $\Delta \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ - уравнение эллипса, приведенного к главным осям. При $A = B \rightarrow x^2 + y^2 = A^2$ - уравнение окружности.

2) $\Delta \varphi = 2n\pi \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} = 0 \rightarrow y = \frac{B}{A} x$ и 3) $\Delta \varphi = (2n+1)\pi \rightarrow y = -\frac{B}{A} x$ - уравнения прямой.

В случае $k_1 \neq k_2 \rightarrow \omega_{01} \neq \omega_{02} \rightarrow$ фигуры Лиссажу.

12.3. Свободные затухающие колебания.

12.3.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Механический осциллятор.

Взаимодействие колеблющегося тела со средой приводит к *диссипации энергии и к затуханию колебаний* (рис.12.8а) : $m\ddot{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}}, \vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}, \vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{v}$,

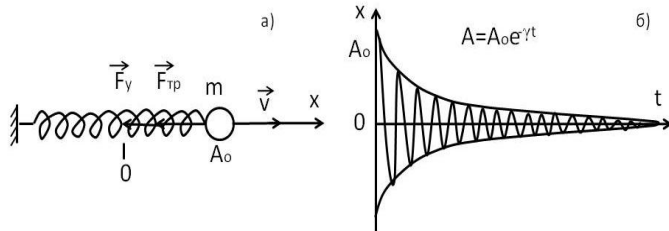


Рис. 12.8

где k – коэффициент упругости («квазиупругости»), r – коэффициент, зависящий от взаимодействия тела со средой («трения», «сопротивления»). Уравнение движения вдоль оси x примет вид:

$$m\ddot{x} = -rv - kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ или вводя}$$

обозначения: $\frac{r}{m} = 2\gamma, \frac{k}{m} = \omega_0^2$, где γ – коэффициент затухания, уравнение движения примет вид: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Решение этого уравнения для случая $\omega_0 > \gamma$ ищем в виде $x = A(t)\sin(\omega t + \varphi)$. Наша задача – определить $A(t), \omega$ и φ . φ определяем из начальных условий $t = 0 \rightarrow x = A(t)\cos\omega t$. Убыль энергии – работа сил трения –

$$dW = -rv dx = -rv^2 dt \cdot \frac{2m}{2m} \rightarrow \frac{dW}{dt} = -\frac{2r}{m} \cdot \frac{mv^2}{2}. \text{ В среднем за период } \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{kx^2}{2} \right\rangle = \frac{W}{2} \rightarrow$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{r}{m}W \rightarrow \frac{dW}{dt} = -2\gamma W - \text{ скорость убыли энергии осциллятора пропорциональна}$$

$$\text{пропорциональна его энергии. } \int_{W_0}^W \frac{dW}{W} = -2\gamma \int_0^t dt \rightarrow \ln \frac{W}{W_0} = -2\gamma t \rightarrow W = W_0 e^{-2\gamma t} \rightarrow A = A_0 e^{-\gamma t}.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения затухающих колебаний имеет вид: $x = A_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t$. Осталось найти ω . $\dot{x} = -A_0 \gamma e^{-\gamma t} \cos \omega t - A_0 \omega e^{-\gamma t} \sin \omega t$; далее:

$$\ddot{x} = A_0 \gamma^2 e^{-\gamma t} \cos \omega t + 2A_0 \gamma \omega e^{-\gamma t} \sin \omega t - A_0 \omega^2 e^{-\gamma t} \cos \omega t - 2A_0 \gamma^2 e^{-\gamma t} \cos \omega t - 2A_0 \gamma \omega e^{-\gamma t} \sin \omega t +$$

$$+ A_0 \omega_0^2 e^{-\gamma t} \cos \omega t = 0 \rightarrow -\gamma^2 - \omega^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad \text{График затухающих колебаний представлен на рис. 12.8б.}$$

$$\text{При } t = \tau = \frac{1}{\gamma} - \text{ время релаксации } A = \frac{A_0}{e}, \text{ за это время совершается } N = \frac{\tau}{T}$$

$$\text{колебаний. } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} - \text{ период затухающих колебаний. Логарифмический}$$

$$\text{декремент затуханий } \delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma(t+T)}} = \gamma T = \frac{T}{\tau} \rightarrow A = A_0 e^{-\frac{\delta}{T} t} = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad \text{Для}$$

характеристики осциллирующей системы применяют понятие *добротности Q*:

$$Q = 2\pi \frac{\text{запас энергии}}{\langle \text{энергия потерь за период} \rangle} \rightarrow Q = 2\pi \frac{W_0}{W_0(1 - e^{-2\gamma T})} \quad Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}}. \quad \text{При } \tau \gg T,$$

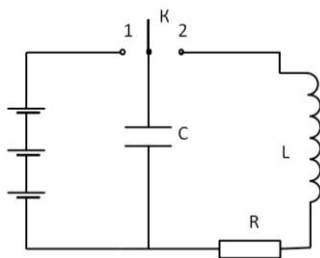
$$\text{разложение в ряд } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^{-\frac{2T}{\tau}} \approx 1 - \frac{2T}{\tau} \rightarrow Q = \frac{\pi\tau}{T} = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\omega\tau}{2} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\delta}.$$

Несколько значений добротности: 1) Земля – сейсмические волны – $25 \div 1400$,
2) рояльная (скрипичная струна) струна – 10^3 , 3) возбуждённый атом – 10^7 ,
4) возбуждённое ядро атома – $3 \cdot 10^{12}$.

При апериодическом процессе $\omega_0 \leq \gamma \rightarrow x = C_1 e^{-\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t}$.

12.3.2. Электрический RLC – осциллятор.

Рассмотрим схему рис.12.9. $K \rightarrow 1$ - зарядка конденсатора, $K \rightarrow 2$ - разряд.



Энергия контура $W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$, потери энергии -

$$-\frac{dW}{dt} = I^2 R \rightarrow -I^2 R = \frac{q\dot{q}}{C} + LI\dot{I} \rightarrow$$

$$-IR = \frac{q}{C} + LI\dot{I} \rightarrow LI\ddot{I} + RI\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \rightarrow \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0, \quad \text{обозначая}$$

$$\frac{R}{L} = 2\gamma, \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \text{ получим } \ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = 0, \text{ решение которого}$$

$$I = I_0 e^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \delta = \gamma T, \rightarrow$$

$$\delta = \frac{TR}{2L} = \frac{\pi R}{\omega L}, Q = \frac{\omega L}{R}, \delta = \frac{\pi}{Q}, \tau = \frac{2L}{R}.$$

Рис.12.9

12.4. Вынужденные колебания.

12.4.1. Механический осциллятор. Резонанс.

Рассмотрим движение механического осциллятора под действием периодической силы (рис. 12.10). Будем рассматривать стационарные колебания. В стационарном режиме полная энергия $W = \text{const}$, т.к. расход (диссипация) энергии компенсируется притоком энергии за счёт внешней периодической силы:

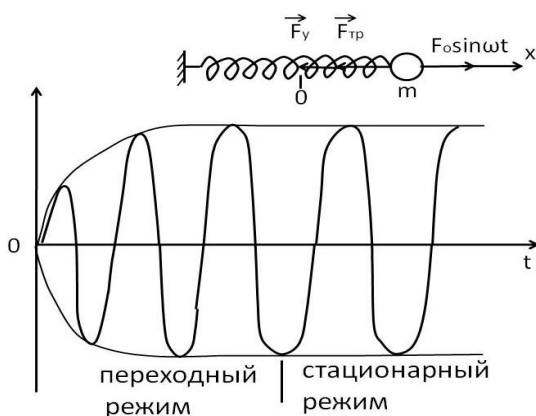


Рис. 12.10

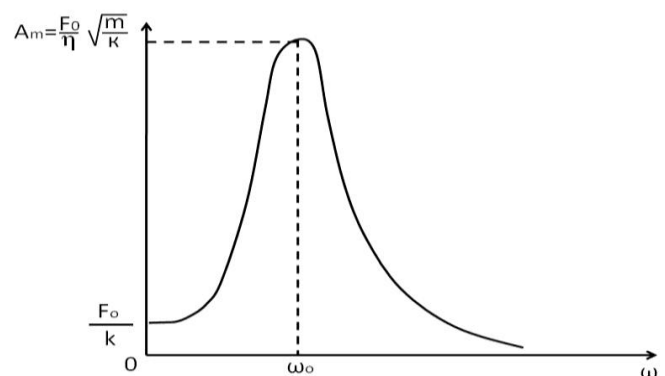


Рис. 12.11

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$. Необходимо найти A и φ .

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi - \varphi) = \sin(\omega t + \varphi)\cos\varphi - \cos(\omega t + \varphi)\sin\varphi \rightarrow$$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + 2A\omega\gamma \cos(\omega t + \varphi) + A\omega_0^2 \sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \varphi)\cos\varphi - \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \varphi)\sin\varphi.$$

Коэффициенты при одинаковых переменных функциях в левой и правой частях уравнения должны быть равны: $\{A(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \cos\varphi, 2A\omega\gamma = -\frac{F_0}{m} \sin\varphi\} \rightarrow \tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$,

$$A^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2] = \frac{F_0^2}{m^2} \rightarrow A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (\text{рис. 12.11}).$$

При $\omega = 0$ $A = \frac{F_0}{k}$. При $\omega = \omega_0$ $A = A_{\max} = \frac{F_0}{2\gamma m \omega_0} = \frac{F_0}{r} \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow$ при малом r ($r \rightarrow 0$)

$A \rightarrow \infty$ - резонанс. При $\omega \rightarrow \infty$ $A \rightarrow 0$.

12.4.2. Электрический осциллятор.

Рассмотрим схему рис. 12.12. По закону Кирхгофа $U_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C} \rightarrow$

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = -\frac{U_0\omega}{L} \sin \omega t, I = I_0 \cos(\omega t + \varphi), I_0 = \frac{U_0\omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$I_0 = \frac{U_0}{Z}, Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, X_L = \omega L, X_C = \frac{1}{\omega C}, Z$ - полное сопротивление цепи переменного тока. Из векторной диаграммы напряжений (рис. 12.13)

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

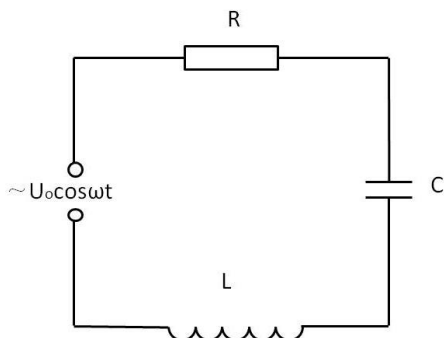


Рис. 12.12

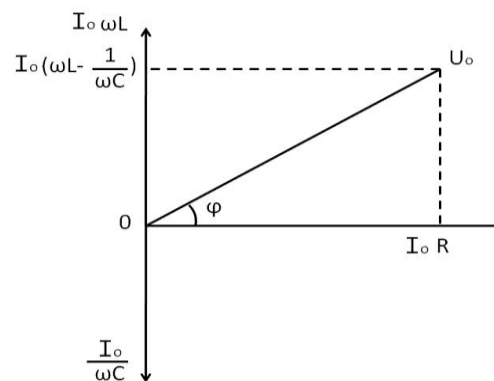


Рис. 12.13

ЛК. 13. Волновые процессы.

Волны – возмущения, распространяющиеся в пространстве от точки к точке. Их распространение характеризуется явлениями отражения, преломления, интерференции, дифракции и др. Амплитуда возмущения зависит от координат и

времени: $A = A(x, y, z, t)$. Волновая поверхность $A(x, y, z, t) = \text{const}$. A^2 – величина, пропорциональная плотности потока энергии ($[\frac{Bm}{M^2}]$).

13.1. Волны в упругой среде. Продольные и поперечные волны.

Волны в упругой среде могут распространяться в одном направлении, на поверхности и в пространстве. Продольная волна - $\vec{A} \parallel \vec{n}$; поперечная волна - $\vec{A} \perp \vec{n}$.

13.1.1. Волны, распространяющиеся в одном направлении - $A(x, t)$.

На рис. 13.1 $A(x, t) = f(x - vt)$ или, иначе, $A(x, t) = f\left[-v\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \rightarrow A(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right)$.

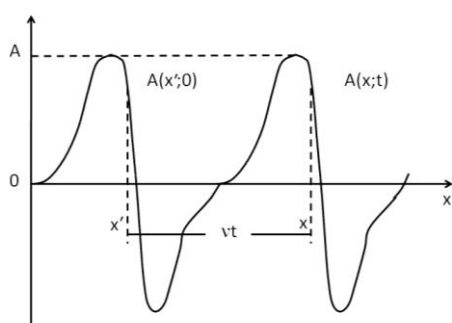


Рис.13.1

В первом уравнении vt – расстояние: чтобы два наблюдателя, измеряя амплитуду возмущения в моменты времени 0 и t , получали одинаковые амплитуды, необходимо, чтобы они находились на расстоянии vt друг от друга. Во втором уравнении $\frac{x}{v}$ – время – до второго наблюдателя, измеряющего амплитуду возмущения в точке x , – амплитуда с тем же значением A дойдет с опозданием $\frac{x}{v}$.

$\varphi = x - vt$ – фаза волны. При $\varphi = \text{const}$ $A = \text{const}$. Скорость распространения амплитуды – фазовая скорость $v_\phi = \dot{x}$.

13.1.2. Распространение волн на плоскости.

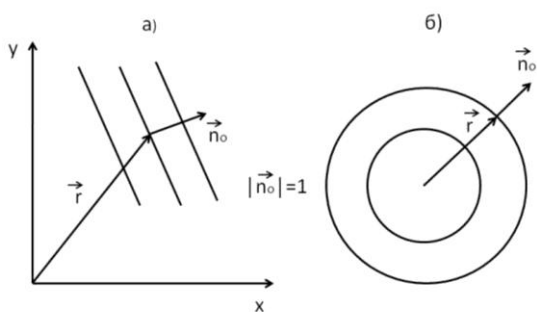


Рис. 13.2

$A = A(x, y, t)$: волны на плоскости можно получить от линейного осциллятора (рис. 13.2a) – $A(x, y, t) = f(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt)$ или от точечного осциллятора (рис. 13.2б) –

$$A(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r - vt).$$

13.1.3. Распространение волн в пространстве.

$A(x, y, z, t)$: плоские волны (рис. 13.3a) – $A(x, y, z, t) = f(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt)$; сферические волны (рис. 13.3б) – $A(r, t) = \frac{1}{r} f(r - vt)$.

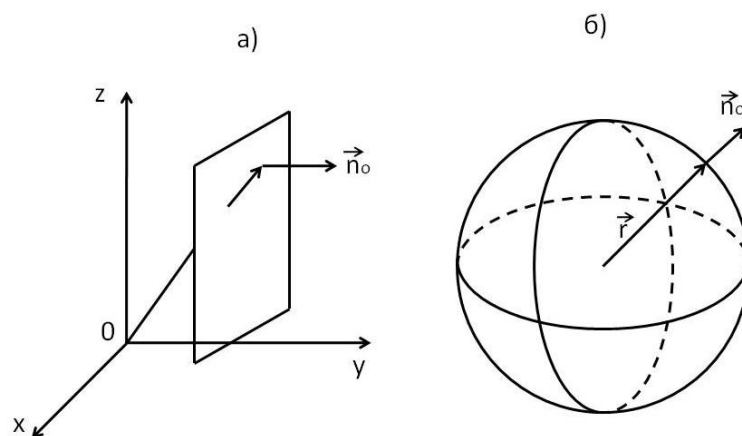


Рис. 13.3

13.2. Гармонические волны.

1) Линейная волна: $A(x,t) = f(x-vt) = A_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]$, вводя обозначения

$\frac{2\pi}{\lambda} = k$ - волновое число, λ - длина волны, $\frac{2\pi}{\lambda}vt = \frac{2\pi}{T}t = \omega t \rightarrow$

$A(x,t) = A_0 \sin(kx - \omega t)$, или $A(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx)$. 2) Для плоской волны:

$A(x,y,t) = A_0 \sin(kr - \omega t)$; для круговой волны - $A(r,t) = \frac{A_0}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t)$. 3) Для пространственной плоской волны $A(x,y,z,t) = A_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$; для сферической волны - $A(r,t) = \frac{A_0}{r} \sin(kr - \omega t)$.

13.3. Волновое уравнение.

$A = f(x-vt) \rightarrow \dot{A} = -v\dot{f}(x-vt), \ddot{A} = v^2 \ddot{f}(x-vt); A' = f'(x-vt), A'' = f''(x-vt), \ddot{f} = f'' \rightarrow \ddot{A} = v^2 A'' \rightarrow \ddot{A} = v^2 \nabla^2 A$ - волновое уравнение.

13.3.1. Фазовая скорость и дисперсия волн.

В качестве примера применения волнового уравнения рассмотрим определение скорости распространения упругой продольной волны в стержне (рис. 13.4). По

закону Гука $\frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E}, \ell = dx, \delta \ell = \delta(dx) = A(x+dx, t) - A(x, t) = \frac{\partial A}{\partial x} dx \rightarrow \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\sigma}{E} \rightarrow E \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$.

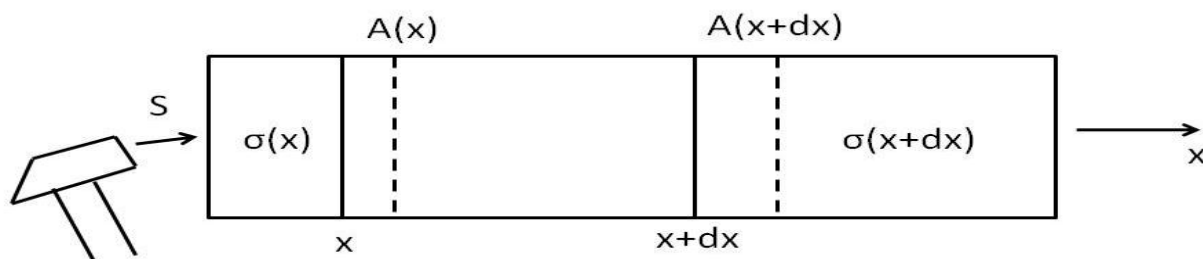


Рис. 13.4

По второму закону Ньютона

$$ma = F, m = \rho S dx, a = \ddot{A}, F = S[\sigma(x+dx) - \sigma(x)] = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \rightarrow \rho S dx \ddot{A} = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \rightarrow E \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \rightarrow \ddot{A} = \frac{E}{\rho} A'' \rightarrow v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \text{ Для железа } E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \rho = 7,7 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \rightarrow v = 5050 \text{ м/с}.$$

Зависимость фазовой скорости волны от частоты $v(\omega)$ – *дисперсия*. $v = \frac{\omega}{k}$.

13.4. Энергия волны. Принцип суперпозиции волн и границы его применимости.

Интенсивность акустической волны I (сила звука)

$$I = \frac{\langle W \rangle}{St} = \frac{\langle w \cdot V \rangle}{St} = w \cdot v, \langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{W}{2}. \rightarrow W = 2E_k \rightarrow I = \frac{2E_k}{St} = 2 \cdot \frac{1}{2} \rho \langle \dot{A}^2 \rangle v. A = A_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\rightarrow \dot{A} = -A_0 \omega \sin(kx - \omega t) \rightarrow \langle \dot{A}^2 \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \omega^2 \rightarrow I = 0,5 \cdot A_0^2 \omega^2 \rho v, v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \rightarrow I = 0,5 A_0^2 \omega^2 \sqrt{E \cdot \rho}.$$

Поток энергии волны сквозь поверхность S $\Phi = \iint_S \vec{I} \cdot d\vec{S}$. Распространение акустической волны в однородной среде сопровождается диссипацией энергии, обусловленной внутренним трением и теплопроводностью: $I = I_0 e^{-2\mu x}$, μ – коэффициент поглощения.

Если в среде распространяются одновременно N различных волн, то каждая из них распространяется независимо от других, т.е., как если бы их не было. Результирующие смещение, скорость, ускорение любой частицы равны векторным суммам соответствующих величин, обусловленных каждой из волн – *принцип суперпозиции* – он выполняется только для *линейных сред, подчиняющихся закону Гука, т.е. пока скорость распространения волн в среде не зависит от их интенсивности*.

13.4.1. Волновой пакет. Групповая скорость.

Реальные волны не являются монохроматическими, т.к. всегда имеют ограниченную протяжённость в пространстве и ограниченную длительность во времени. Такие волны могут быть представлены в виде совокупности монохроматических волн, называемых *группой волн* или *волновым пакетом*. Для характеристики распространения группы волн и скорости переноса ими энергии, т.е. скорости распространения сигнала, понятия фазовой скорости недостаточно. *Скорость переноса энергии группой волн называют групповой скоростью* u :

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}}, v = \frac{\omega}{k} = \text{фазовая скорость модулируемой волны}, \lambda = 2\pi \frac{v}{\omega} -$$

её длина волны. В случае отсутствия дисперсии $\frac{dv}{d\omega} = \frac{dv}{d\lambda} = 0 \rightarrow u = v$.

13.4.2. Когерентность.

Две волны называют когерентными, если *разность их фаз не зависит от времени*: $\varphi = kx - \omega t, \rightarrow \Delta\varphi = kx, \omega_1 = \omega_2 = \omega$. Этому условию удовлетворяют монохроматические волны, частоты которых одинаковы. Две волны будут *некогерентными*, если разность их фаз изменяется с течением времени. Монохроматические волны различных частот, а также волны, состоящие ряда групп – *цугов волн*, начинающихся и обрывающихся независимо друг от друга со случайными значениями фаз в моменты начала и обрыва каждой группы, являются *немонохроматическими*.

Для когерентных волн $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \rightarrow$ складываются амплитуды (интерференция). Для некогерентных волн $\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2 \rightarrow$ складываются интенсивности.

13.5. Стоячие волны. Образование стоячих волн. Уравнение стоячей волны.

Стоячей называют волну, возникающую в результате наложения двух волн, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях и удовлетворяющих следующим условиям: $\omega_1 = \omega_2 = \omega, A_1 = A_2 = A$. Возникновения стоячих волн является частным случаем интерференции волн (рис. 13.5):

$A_1 = A_0 \sin(kx - \omega t), A_2 = A_0 \sin(kx + \omega t), A = A_1 + A_2 \rightarrow A = 2A_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t$. Если амплитуда

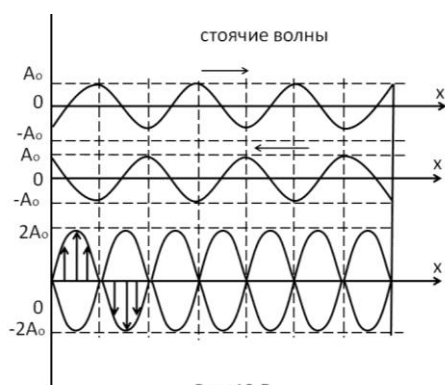


Рис. 13.5

волны $2A_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x = 2A_0 \rightarrow$ пучность волны, если она $= 0 \rightarrow$ узел волны. Пучности будут при $\frac{2\pi}{\lambda_{cm}} x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2N+1)\frac{\lambda_{cm}}{4}, N = 0, 1, 2, \dots$ Узлы - $\frac{2\pi}{\lambda_{cm}} x = N\pi \rightarrow x = N\frac{\lambda_{cm}}{2}$, где $\lambda_{cm} = \frac{\lambda}{2}$. Расстояние между соседними пучностями или узлами $\Delta x = \frac{\lambda_{cm}}{2}$.

13.5.1. Акустические волны.

Акустические волны – распространяющиеся в упругой среде слабые возмущения – механические колебания с малыми амплитудами.

Скорость продольных волн в тонком стержне, поперечные размеры которого $\ell \ll \lambda$: $c_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Скорость распространения поперечных волн в струне:

$c_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{S\rho}}$. В изотропной твёрдой среде скорость поперечных волн:

$c_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}}$, продольных: $c_2 = \sqrt{\frac{E\mu}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)} + \frac{2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}$, $c_2 > c_1$.

Скорость волн в жидкостях и газах: $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$, где K – модуль объёмной упругости. Процесс «деформации» жидкости или газа при распространении в них звука может считаться адиабатическим. Для идеального газа $K = \gamma p$, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, где p – давление невозмущённого газа. $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$. В воздухе $c = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} \approx 340 \text{ м/с}$.

ЛК. 14. Электромагнитные волны.

Если внутри колебательного контура протекают быстропеременные токи, то в нём выделяется энергия в форме электромагнитных полей. Если эта энергия не

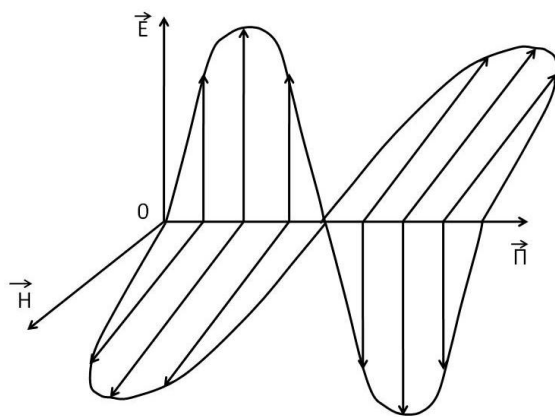


Рис. 14.1

рассеивается в виде джоулевой теплоты, то при стационарном состоянии системы она должна выходить через его границы в окружающее пространство. Уравнения Максвелла показывают, что плотность потока энергии электромагнитного поля определяется вектором Умова – Пойнтинга: $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ (рис. 14.1). Здесь $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{v}$, плотность потока электромагнитной энергии $I = \langle P \rangle \rightarrow \vec{P} = \langle w \rangle \cdot \vec{v}$, где

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}, \quad c - \text{ скорость света в}$$

пустоте. Мощность электромагнитной волны определяют по формуле: $P = \int_{\Delta S} \vec{P} \cdot d\vec{S}$.

14.1. Излучение дипольной антенны.

По теории классической электродинамики в открытом колебательном контуре (антенна) создаётся высокочастотный ток $I = I_0 \cos \omega t$, равномерно

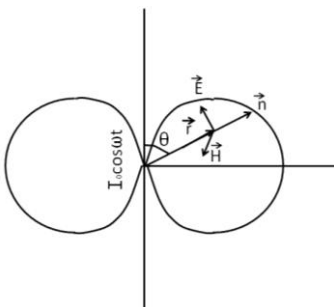


Рис. 14.2

распределённый по всей длине ℓ антенны. Решение уравнений Максвелла в этом случае даёт для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на больших расстояниях в вакууме следующие выражения:

$$H = \frac{I_0}{2} \frac{\ell}{\lambda} \frac{\sin \vartheta}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H. \quad \text{Эти выражения}$$

соответствуют излучению, равному нулю в направлении колебания тока в дипольной антенне и максимальному в перпендикулярном направлении (рис. 14.2.). Вводя внутреннее характеристическое сопротивление вакуума

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 376,6 \text{ Ом, получаем}$$

$$\Pi = Z_0 H^2 = \frac{Z_0 I_0^2}{4} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \sin^2(\omega t - kr) \rightarrow \langle \Pi \rangle = \frac{Z_0 I_0^2 \sin^2 \vartheta}{8 r^2} \rightarrow P = \dot{W} = \int_{\Delta S} \langle \Pi \rangle dS,$$

$$dS = r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \rightarrow P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \Pi \cdot r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \rightarrow P = \frac{\pi Z_0 I_0^2}{4} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta \rightarrow P = \frac{\pi}{3} Z_0 I_0^2 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 -$$

формально эту мощность можно рассматривать как мощность, «потерянную» на некотором «сопротивлении излучения антенны» $R_{изл}$: $P = I_{эф}^2 R_{изл} = \frac{I_0^2}{2} R_{изл} \rightarrow$ тогда

$$\frac{I_0^2}{2} R_{изл} = \frac{\pi}{3} Z_0 I_0^2 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \rightarrow R_{изл} = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \rightarrow R_{изл} = 789 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \text{ Ом.}$$

Рассмотрим осуществление передачи информации с помощью модуляции. Гармоническое колебание определённой частоты и амплитуды не может нести информацию о сигнале, поскольку каждый последующий цикл колебаний является точной копией предыдущего. Чтобы передать определённую информацию с такой волной, её нужно *промодулировать*, т.е. изменить какой-то

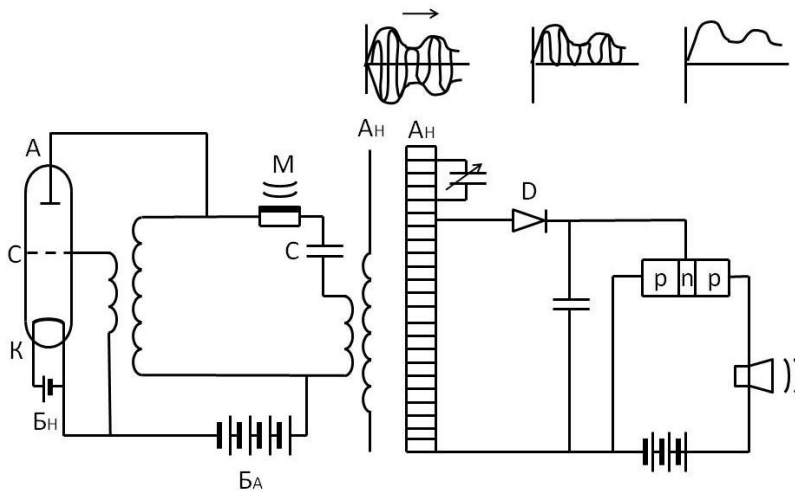


Рис. 14.3

параметр волны в соответствии с изменением смыслового сигнала. В бегущей волне такими изменяемыми параметрами могут быть амплитуда, частота и фаза. Соответственно различают *амплитудную, частотную и фазовую модуляции*. Принципиальная схема такой передачи информации представлена на рис. 14.3.

14.2. Излучение атомного диполя.

Оставляя в стороне различные квантовые эффекты, можно уподобить излучение, вызванное колебаниями электронов в атоме, излучению некоторого диполя. Так как размеры атома порядка 10^{-10} м и, следовательно, значительно меньше длины излучаемой волны ($\sim 10^{-7}$ м), а расстояния, на которых проводятся наблюдения, макроскопические – намного превышают размеры атома, то полученные в разделе 14.1 результаты можно применить и для атомных диполей.

Соотношение между диполем и осциллирующим зарядом следующее:

Осциллирующий заряд характеризуется дипольным моментом: $p = p_0 \sin \omega t = e \ell_0 \sin \omega t$, $\dot{p} = \omega p_0 \cos \omega t$, $\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \sin \omega t$. Диполь (антенна) – эквивалентный дипольный момент диполя постоянной длины ℓ , имеющего заряды $\pm q$ на концах:

$$p = \ell q, \dot{p} = \ell \frac{dq}{dt} = \ell I = \ell I_0 \cos \omega t. \text{ Следовательно, } p_0 \omega = \ell I_0 \rightarrow I_0 = \frac{p_0}{\ell} \omega. \text{ Подставляя это}$$

выражение для I_0 в $P = \dot{W}$, получаем:

$$\dot{W} = \frac{\pi}{3} Z_0 I_0^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{p_0^2 \omega^2}{\lambda^2}, \text{ откуда, принимая во внимание, что } c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \text{ и } p_0^2 \omega^4 = 2 \langle \ddot{p}^2 \rangle, \text{ находим: } \dot{W} = k_0 \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{p}^2 \rangle.$$

Так как $p \sim \ell$, $\ddot{p} \sim \ddot{\ell}$ - ускорение a заряда, то видно, что $\dot{W} = \frac{2k_0}{3c^3} e^2 a^2$. Этот результат является весьма общим и указывает на то, что всякая заряженная частица, движущаяся ускоренно, излучает энергию. Именно это свойство объясняет излучение рентгеновских лучей при торможении электронов анодом рентгеновской трубки (*тормозное излучение*).

Этот же важный результат классической электродинамики противоречит полной устойчивости атома, в котором электроны движутся по круговым орбитам и, следовательно, обладают ускорением; они должны были бы излучать энергию, что вызвало бы замедление их движения и последующее падение на ядро. Только квантовая механика даёт возможность объяснить устойчивость атомов, дополняя электромагнитные явления новыми законами.

ЛК. 15. Волновая оптика.

15.1. Интерференция света.

15.1.1. Монохроматичность и когерентность световых волн.

Условию *когерентности* световых волн удовлетворяют монохроматические волны одинаковой частоты. Это необходимое, но недостаточное условие. Ещё необходимо, чтобы световые векторы $\vec{E}$ электромагнитных полей интерферирующих волн *совершались вдоль одного и того же или близких направлений*.

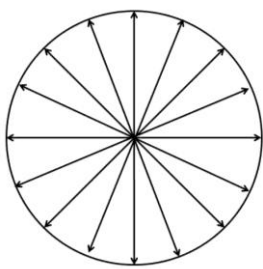


Рис. 15.1

Свет, испускаемый макроскопическим источником, *немонохроматичен*, т.к. состоит из множества быстро сменяющих друг друга *цугов*, начальные фазы которых изменяются совершенно *хаотично*. Каждый цуг плоскополяризован, однако для различных цугов плоскости поляризации могут быть ориентированы по-разному. Такой свет называют *естественным* (рис.15.1).

Спектр циклических частот реальной волны имеет конечную ширину $\Delta\omega$, т.е. включает циклические частоты $\omega - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega + \frac{\Delta\omega}{2}$.

Промежуток времени $\tau_{\text{ког}}$, в течение которого $\Delta\varphi$ колебаний, соответствующих волнам с частотами $\omega + \frac{\Delta\omega}{2}$ и $\omega - \frac{\Delta\omega}{2}$, изменяется на 2π ,

называют *временем когерентности* некогерентной волны: $\tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\omega}$. Расстояние $\ell_{\text{ког}}$, на которое распространяется за время $\tau_{\text{ког}}$ волна с циклической частотой ω и

фазовой скоростью v , называют *длиной когерентности* или *длиной гармонического цуга*, соответствующего рассматриваемой немонохроматической волне: $\ell_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi v}{\Delta\omega}$. Чем данная волна ближе к монохроматической тем меньше ширина $\Delta\omega$ спектра её частот и тем больше её время и длина когерентности.

Для обычного света $\lambda \sim 400 \div 700$ нм (видимый диапазон) и $\nu \sim (8 \div 14)10^{14}$ Гц, откуда $\tau_{\text{ког}} \sim 10^{-14}$ с и $\ell_{\text{ког}} \sim 10^{-6}$ м. Для вынужденного излучения лазеров непрерывного действия $\tau_{\text{ког}} \sim 10^{-5}$ с, $\ell_{\text{ког}} \sim 10^3$ м.

15.1.2. Пространственная когерентность.

Когерентные волны можно получить с помощью обычных источников путём разделения света от одного источника на две или несколько систем волн. Из-за общности происхождения эти волны когерентны (метод Юнга, бизеркала и бипризмы Френеля и т.п.).

Когерентность колебаний, которые совершаются в один и тот же момент времени в разных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, называют *пространственной когерентностью* (в отличие от *временной когерентности* колебаний, совершающихся в одной и той же точке, но в разные моменты времени). Пространственная когерентность сохраняется также по всему поперечному сечению пучка света, излучаемого лазером.

15.1.3. Расчёт интерференционной картины от двух когерентных источников.

Оптическая разность хода (рис.15.2) $\Delta S = n_2 r_2 - n_1 r_1 \rightarrow$ при $n_1 = n_2$, будет равна $\Delta S = n \cdot \Delta r$, где Δr - геометрическая разность хода. Для двух волн:

$$A_1 = A_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и } A_2 = A_0 \cos(\omega t + \varphi_2), A = A_1 + A_2 \rightarrow \langle A^2 \rangle = 2A_0^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \rightarrow I = 2I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \rightarrow$$

$$I = 2I_0 \cos^2 \pi \frac{\Delta S}{\lambda}. \text{ При } \Delta\varphi = (2k+1)\pi, \Delta S = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow \max; \Delta\varphi = 2k\pi, \Delta S = k\lambda \rightarrow \min, k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим интерференционную картину от двух когерентных источников, находящихся на расстоянии d друг от друга и на расстоянии $\ell \gg d$ от экрана (рис.15.3).

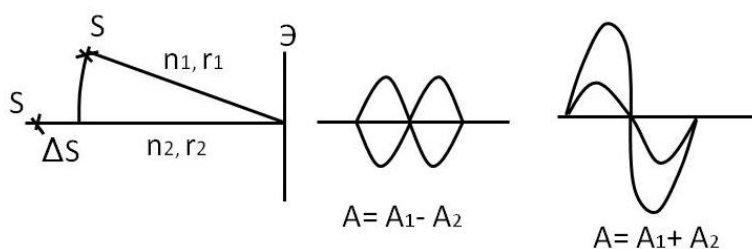


Рис. 15.2

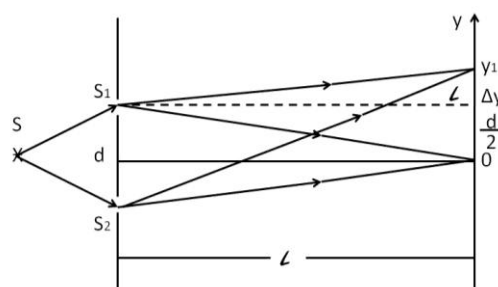


Рис. 15.3

$$\Delta S = n(S_2 y_1 - S_1 y_1) = k\lambda \rightarrow \max; (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow \min. \Delta S = n(\sqrt{\ell^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{\ell^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}) =$$

$$= n\ell\left(1 + \frac{\frac{d^2}{4} + dy + y^2}{\ell^2} - 1 - \frac{\frac{d^2}{4} - dy + y^2}{\ell^2}\right) = n\frac{yd}{\ell}; \Delta S = n\frac{d}{\lambda}y \rightarrow y_{\max} = k\frac{\lambda\ell}{nd}, y_{\min} = (2k+1)\frac{\lambda\ell}{2nd}.$$

Расстояние между max и между min равны $\Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{\lambda\ell}{nd} \rightarrow I_{\max} = 2I_0 \cos^2 \pi \frac{nd}{\lambda\ell} y$.

Для сферической волны (точечный источник) – *интерференция Френеля*, для плоской волны – *интерференция Фраунгофера*.

15.1.4. Интерференция света в тонких плёнках.

В проходящем свете максимум наблюдают (Рис.15.4), при условии

$$\Delta S = n(AB + BC) - AD - \frac{\lambda}{2} = 2n\frac{d}{\cos \gamma} - 2d \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha - \frac{\lambda}{2} = \frac{2nd - 2d \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}} - \frac{\lambda}{2} =$$

$$= \frac{2nd - 2d \frac{\sin^2 \alpha}{n}}{\frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \text{ В отражённом свете максимум будет при}$$

$$\Delta S = k\lambda \rightarrow 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \text{ В проходящем} - 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = k\lambda. \text{ Если на}$$

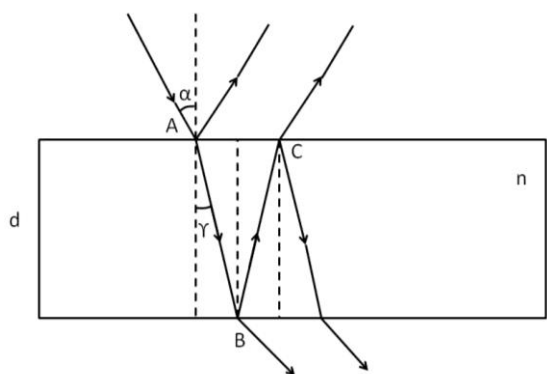


Рис. 15.4

плёнку падает белый свет, то вследствие интерференции волн одинаковой длины волны наблюдают явление *дисперсии* – *плёнка окрашивается*.

Самостоятельно рассмотреть следующие темы: «Кольца Ньютона», «Интерференция многих волн», «Интерферометры».

15.2. Дифракция света.

Дифракция света – совокупность явлений, которые обусловлены волновой природой света, и наблюдаются при его распространении в среде с резко выраженными неоднородностями. В более узком смысле – явление огибания светом малых препятствий, т.е. отклонения от законов геометрической оптики.

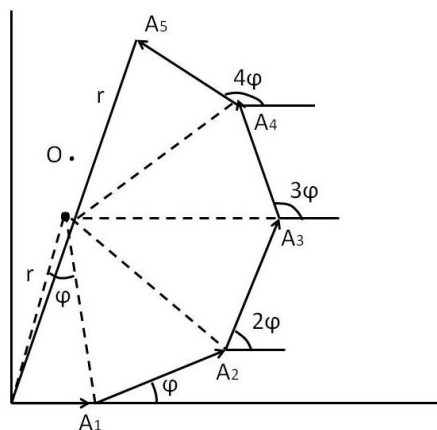


Рис. 15.5

Между дифракцией и интерференцией нет физического различия. Когда источников мало, например 2, то результат их совместного действия обычно называют *интерференцией*, а если источников много, то чаще говорят о *дифракции*.

Пусть имеем N осцилляторов, расположенных на равных расстояниях друг от друга и обладающих

равными амплитудами A , но различными фазами φ создаваемых ими полей. Разность фаз $\Delta\varphi$ возникает либо из-за определённых фазовых сдвигов колебаний осцилляторов, либо потому, что мы находимся под углом к ним и возникает разность хода лучей. Для определения результирующей амплитуды воспользуемся *векторной диаграммой* (рис.15.5).

$$A = 2r \sin \frac{\varphi}{2}, A_{\text{рез}} = 2r \sin N \frac{\varphi}{2} \rightarrow A_{\text{рез}} = A \frac{\sin N \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \rightarrow I = I_0 \frac{\sin^2 N \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

определение I возможно на основе решения уравнений Максвелла при заданных начальных и краевых условий. Такие решения сложные. Поэтому применяют приближённые решения.

15.2.1. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Дифракции Френеля и Фраунгофера.

Гюйгенс в 1678 г. сформулировал правило: *в любой точке, находящейся вне волновой поверхности Σ , световая волна, возбуждаемая источником S , может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, которые «излучаются» элементарными фиктивными источниками, непрерывно распределёнными вдоль вспомогательной поверхности Σ* . (Френель в 1815 г. уточнил когерентность вторичных волн) (Рис.15.6 и рис 15.7).

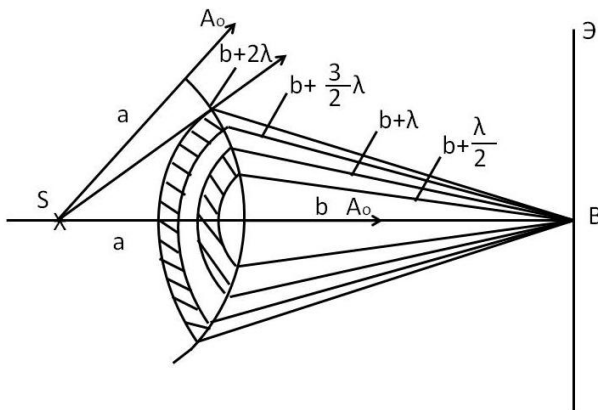


Рис. 15.6

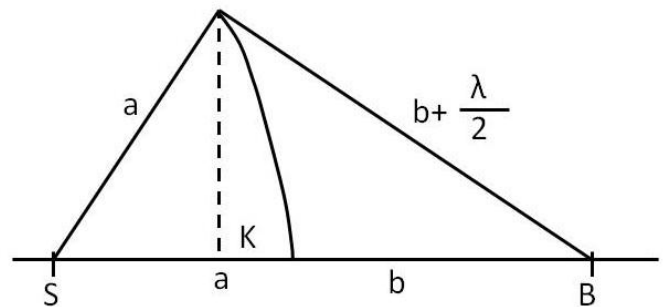


Рис. 15.7

$A_0 > A_1 > A_2 > \dots$, $A = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots \rightarrow A = A_0 - (A_1 - A_2) - (A_3 - A_4) - \dots < A_0$.
Вычислим площадь зоны Френеля.

$\Delta S = 2\pi a x, a^2 - (a - x)^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x)^2 \rightarrow x = \frac{b}{a + b} \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow \Delta S = \pi \frac{ab}{a + b} \lambda$ для сферической волны и $\Delta S = \pi b \lambda$ для плоской волны.

Радиус k -й зоны в случае сферической волны $r_k = \sqrt{k \frac{ab}{a + b} \lambda}$ и плоской – $r_k = \sqrt{k b \lambda}$. Для усиления интенсивности света применяют *зональные пластинки*.

Рассмотреть самостоятельно дифракцию Френеля на круглом отверстии и диске, а также дифракцию Фраунгофера на щели.

15.2.2. Дифракционная решётка (рис.15.8).

Период дифракционной решётки $d = a + b$, условие максимумов $d \sin \varphi = \pm k \lambda$.

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \varphi}{\lambda}, A = \sum_{i=1}^N A_i \rightarrow A = A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi N d \sin \varphi}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}\right)} \right|.$$

Условие дисперсии

дифракционной решётки: $D = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda} = \frac{k}{d \cdot \cos \varphi}$, разрешающая способность $R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = kN$, где N – число штрихов решётки.

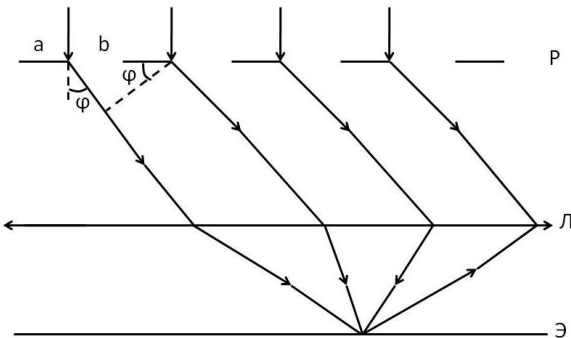


Рис. 15.8

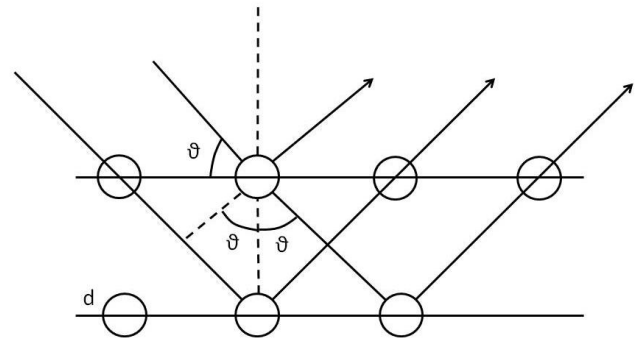


Рис. 15.9

15.2.3. Дифракция на пространственной решётке. Формула Вульфа – Брэгга.

Рассмотрим условие дифракционных максимумов при рассеянии рентгеновских лучей на пространственной решётке (рис.15.9). $2d \sin \vartheta = k \lambda$ - формула Вульфа – Брэгга.

15.2.4. Голография.

Английский физик Д.Габор (1948) предложил регистрировать с помощью фотопластинки не только интенсивности, но и фазы рассеянных объектом волн, воспользовавшись для этого явлением интерференции. Этот метод получил название *голография* (рис.15.10). Фотопластинка Φ регистрирует интерференционную картину, возникающую от наложения волны 1, рассеянной объектом A *сигнальной* волной, или *предметным пучком*, и когерентной ей волны 2, названной *опорной*, или *опорным пучком*. Интерференционную картину, зафиксированную на фотопластинке Φ после проявления называют *голограммой*. Для этого должна быть обеспечена высокая когерентность света. Для этой цели используют свет лазера. Для наблюдения

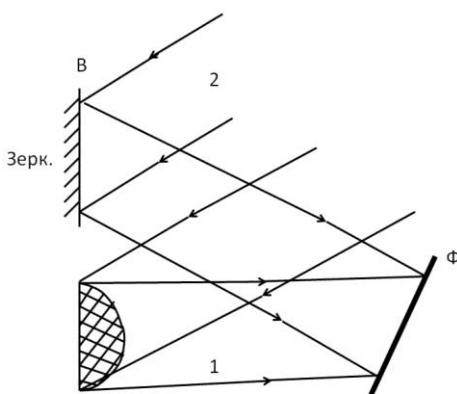


Рис. 15.10

изображения голограмму просвечивают как диапозитив той же опорной волной 2, причём ориентация голограммы по отношению к опорной волне должна быть

сохранена. Можно получать и цветное изображение. Ю.Н.Денисюк в 1962 г. объёмные голограммы, используя толстослойные фотоэмульсии.

Лк.16. Дисперсия света.

Дисперсия света – зависимость фазовой скорости электромагнитной волны в среде от частоты. Такие среды называют *диспергирующими*. Дисперсия отсутствует только в вакууме.

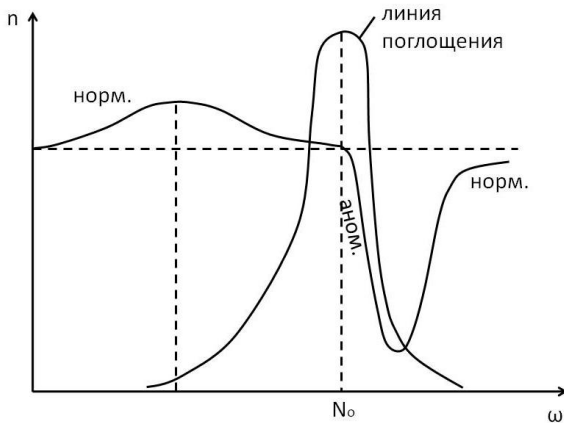


Рис. 16.1

Групповая скорость волны

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}}, \lambda = \frac{2\pi v}{\omega}.$$

нормальной дисперсии $\frac{dv}{d\omega} < 0$ или

$\frac{dv}{d\lambda} > 0 \rightarrow u < v.$ Для аномальной дисперсии

$\frac{dv}{d\omega} > 0, \frac{dv}{d\lambda} < 0 \rightarrow u > v$ (рис.16.1). Нормальная дисперсия наблюдается вдали от линий (или полос) поглощения света веществом.

16.1. Классическая электронная теория дисперсии света.

Вынужденные колебания электронов вещества под действием внешнего электромагнитного поля (рис.16.2) описываются дифференциальным уравнением движения вида:

$$ma = -kx - rv + eE \rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{eE_0}{m} \sin \omega t \rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} \sin \omega t,$$

решение которого ищем в виде $x = A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow A = \frac{eE_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, p_e = eA \rightarrow$

$$p_e = \frac{e^2 E_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, P = \frac{\sum_i p_i}{V} = n_0 p_e, P = \varepsilon_0 \kappa E \rightarrow \varepsilon_0 \kappa = \frac{n_0 e^2}{E_0}, \kappa = \varepsilon - 1 \rightarrow n^2 = \varepsilon = 1 + \kappa \rightarrow$$

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \text{ Вблизи полосы поглощения } \omega \approx \omega_0, \gamma - \text{ велико } \rightarrow$$

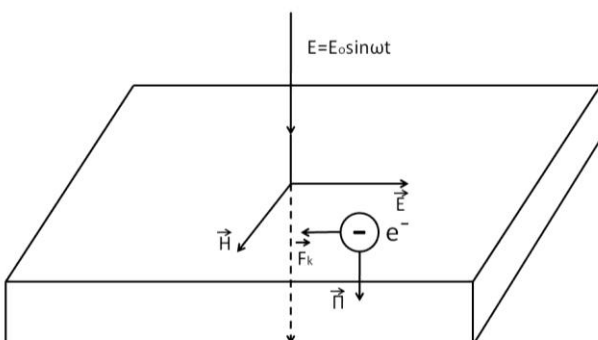


Рис. 16.2

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 n_0}{2\varepsilon_0 m \gamma \omega_0}. \text{ Вне этой области}$$

$$4\gamma^2 \omega^2 \ll (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \rightarrow n^2 = 1 + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Для свободных электронов $\omega_0 = 0$ и

$$n^2 = 1 - \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m \omega^2}.$$

Для рентгеновских лучей ω очень велико и $n^2 \approx 1$.

Лк. 17. Поляризация света.

Опыт показывает, что электромагнитные колебания – поперечные: $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \rightarrow \vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{n}$. Параметры движения электрического вектора $\vec{E}$ в плоскости Р, перпендикулярной к $\vec{n}$ определяют *состояние поляризации* волны. В случае гармонического колебания волны наиболее общим состоянием поляризации является *эллиптическая поляризация* (рис.17.1а): $E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz)$,

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \rightarrow \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \text{ Её частные случаи: } \textit{линейная}$$

поляризация (рис.17.1б) (наиболее часто встречающаяся) $\frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \text{const}$ и

круговая поляризация (рис.17.1в) $\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, E_{0x} = E_{0y} = E_0 \rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$.

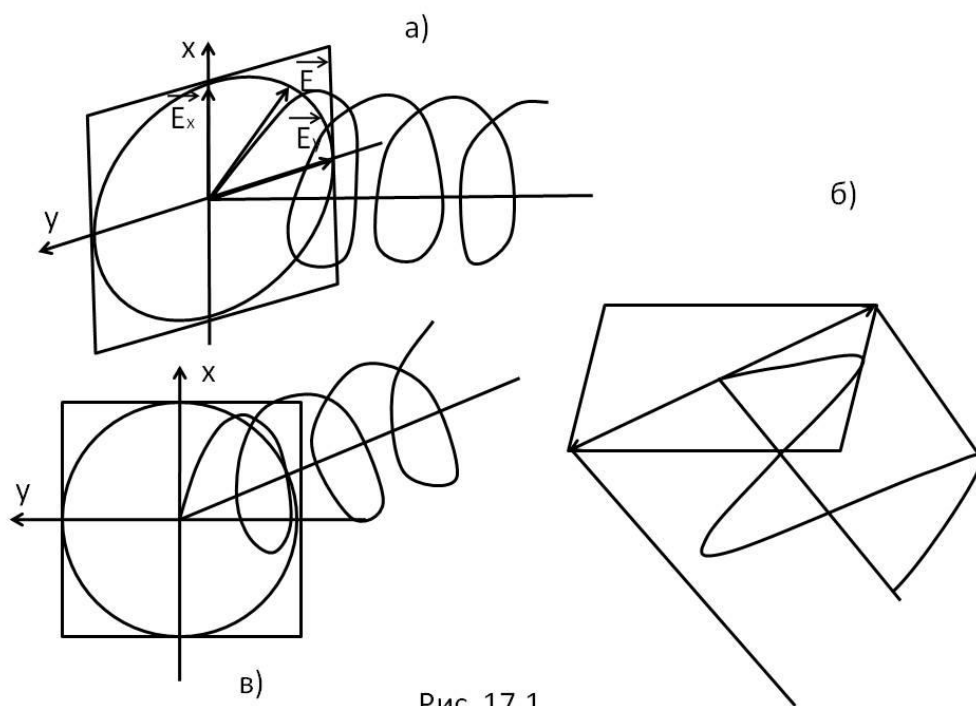


Рис. 17.1

17.1. Естественный и поляризованный свет.

Световые волны, излучаемые обычными источниками, поляризованы, вообще говоря, линейно (или по кругу). Это излучение является результатом элементарных атомных актов, независимых друг от друга. Поэтому для последовательных волн не существует никакого постоянного соотношения между фазой и состоянием поляризации (различные состояния равновероятны). Это означает, что конец волнового вектора $\vec{E}$ будет случайным образом занимать в плоскости Р все возможные положения (рис.17.2а) – *естественный свет*. Некоторые вещества обладают свойством пропускать только определённую компоненту падающей на них волны; в результате оказывается возможным

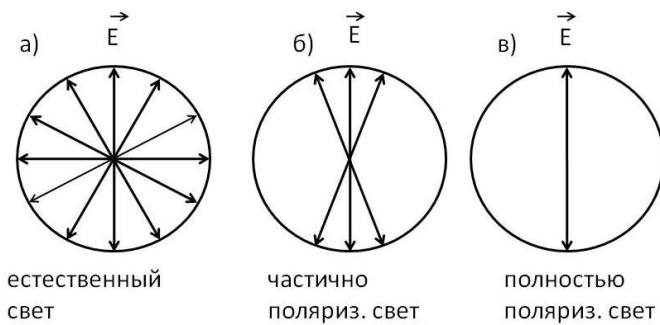


Рис. 17.2

выделить из колебаний, первоначально неполяризованных, некоторые колебания с определённым состоянием поляризации – частичной (рис.17.2б) или полной (рис.17.2в). Оптические системы с таким свойством называют *поляризаторами*.

Поляризация света происходит при: 1) отражении от диэлектрической поверхности, 2) преломлении в прозрачных средах, 3) прохождении через анизотропные кристаллы (исландский шпат, турмалин, кварц), 4) рассеянии на взвешах и молекулярных неоднородностях.

17.1.1. Поляризация света при отражении и преломлении света на границе раздела двух диэлектрических сред. Закон Брюстера.

При определённом угле падения α (рис.17.3) отражённый пучок 2 оказывается линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, тогда как преломлённый пучок 3 становится поляризован в плоскости падения. Коэффициент отражения $R = \frac{I'}{I}$. Условия на границе раздела сред будут:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma, E_{1r} = E_{2r}, \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}; E \cos \alpha - E' \cos \alpha = E'' \cos \gamma, \varepsilon_1 E \sin \alpha + \varepsilon_1 E' \cos \alpha = \varepsilon_2 E'' \sin \gamma, \\ E + E' = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} E'' \rightarrow E'' = \frac{1}{n} (E + E') \rightarrow nE \cos \alpha - nE' \cos \alpha = E \cos \gamma + E' \cos \gamma \rightarrow$$

$$E'(n \cos \alpha + \cos \gamma) = E(n \cos \alpha - \cos \gamma) \rightarrow R = \left(\frac{E'}{E} \right)^2 = \frac{(n \cos \alpha - \cos \gamma)^2}{(n \cos \alpha + \cos \gamma)^2}. \text{ В частном случае, при}$$

$\alpha = \gamma = 0 \quad R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$. Если падающий луч полностью поляризован в плоскости

падения, то при определённом угле падения α_B – угле *полной поляризации* (угол Брюстера) отражённый луч отсутствует ($R = \frac{I'}{I} = 0 \rightarrow n \cos \alpha = \cos \gamma \rightarrow \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} = n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$)

$$\rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_B = n - \text{закон Брюстера.}$$

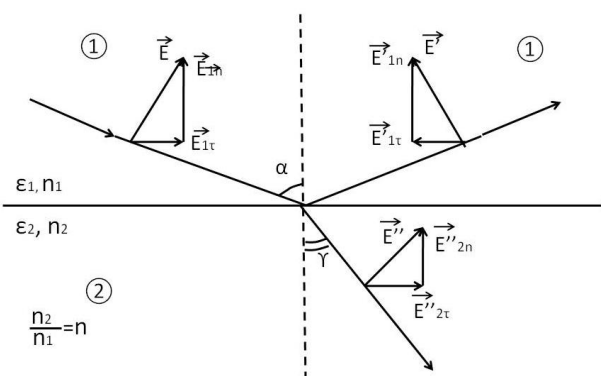


Рис. 17.3

Закон Брюстера объясняется непосредственно, если учесть, что отражённые и преломлённые пучки представляют собой вторичное излучение материальной среды, возбуждённое падающей волной. Электроны в среде колеблются в направлении электрического поля $\vec{E}$. Осциллирующий электрический диполь (элемент линейной антенны) не излучает волны в направлении

колебаний; максимум излучения приходится на перпендикулярное направление в соответствии с общей формулой, рассмотренной ранее: $I(\vartheta) = \frac{k_0 p_0^2 \omega^4}{3c^3 r^2} \sin^2 \vartheta$. Отсюда непосредственно видно, что энергия, отражаемая от некоторой среды в направлении колебаний диполей, равна нулю.

17.1.2. Двойное лучепреломление. Закон Малюса.

Кристаллы, анизотропные с электрической точки зрения, являются такими же и с оптической точки зрения. Анизотропные среды обладают свойством двойного преломления лучей: световая волна, распространяющаяся в таких средах, разделяется на две компоненты, имеющие различные скорости

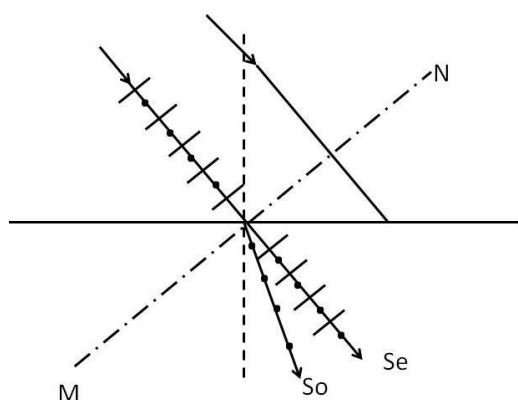


Рис. 17.4

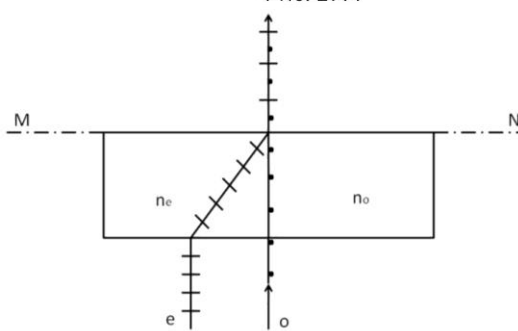


Рис. 17.5

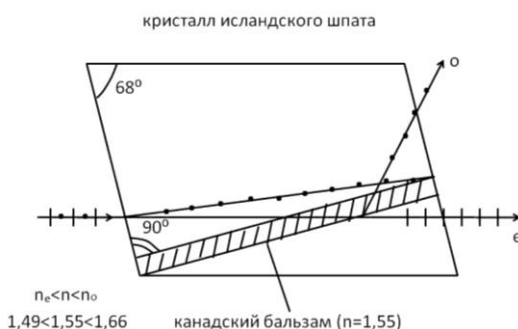


Рис. 17.6

распространения и, следовательно, различные показатели преломления. Кроме того, обе компоненты оказываются линейно поляризованными в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис.17.4). В случае одноосного кристалла один из этих лучей подчиняется обычному закону преломления. Следовательно, этот луч (*обыкновенный* - n_o) не отклоняется в сторону в случае нормального падения; другой (*необыкновенный* - n_e) не подчиняется обычному закону преломления – его показатель преломления зависит от угла падения. Плоскости поляризации двух лучей взаимно перпендикулярны. В случае двуосного кристалла оба луча не подчиняются обычному закону преломления. К одноосным кристаллам относятся: исландский шпат CaCO_3 , кварц SiO_2 (рис.17.5), к двуосным – слюда, силикоалюминат калия, железа, марганца. При прохождении обоими лучами расстояния Δr между ними возникает оптическая разность хода: $\Delta S = (n_o - n_e)\Delta r$.

Рассмотрим кристалл исландского шпата, разрезанного и склеенного канадским бальзамом (рис.17.6). Обработка кристаллов и выбор клея делаются с таким расчётом, чтобы необыкновенный луч проходил через призму, а обыкновенный луч отклонялся в сторону вследствие полного внутреннего отражения на поверхности склейки. Плоскость поляризации

необыкновенного луча параллельна большой диагонали поперечного сечения призмы. При прохождении луча через две такие призмы (одна – *поляризатор*,

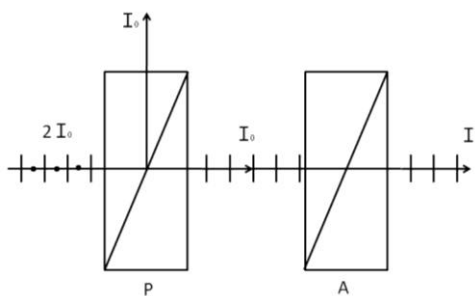


Рис.17.7

вторая - *анализатор*) (рис.17.7) интенсивность луча на выходе анализатора подчиняется закону Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi.$$

17.1.3. Интерференция поляризованного света.

Рассмотрим прохождение монохроматического луча света через поляризатор и одноосный кристалл, оптическая ось MN которого совпадает с плоскостью кристалла (рис.17.8 а,б). $E_p = E_o + E_e$, E_p – линейно поляризованный монохроматический свет, длина волны которого в вакууме λ_0 .

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta S}{\lambda_0} = \frac{2\pi(n_o - n_{e0})d}{\lambda_0}$$
 В зависимости от толщины пластинки d возможны

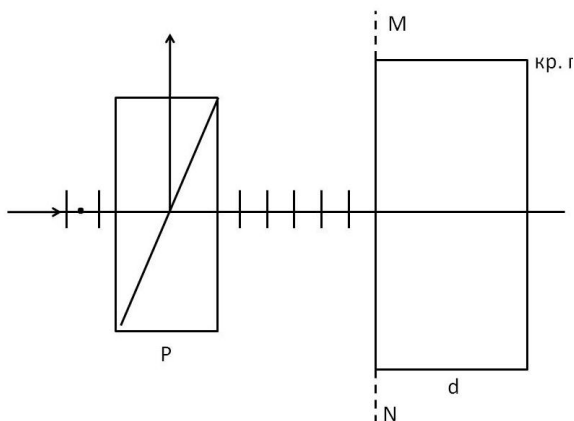


Рис.17.8 (а)

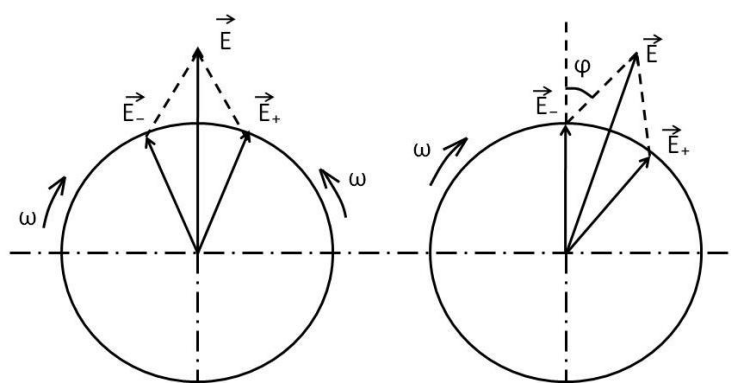


Рис. 17.8 (б)

следующие случаи: 1) Пластинка в четверть волны: $d(n_o - n_{e0}) = \pm(k + \frac{1}{4})\lambda_0$, $k=1,2,\dots$, + - для оптически отрицательного кристалла ($n_e \leq n_o$), - - для оптически положительного кристалла ($n_e \geq n_o$). На выходе из такой пластинки колебания векторов $\vec{E}_o$ и $\vec{E}_e$ сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$. 2) Пластинка в полволны:

$d(n_e - n_{e0}) = \pm(k + \frac{1}{2})\lambda_0$ – на выходе из такой пластинки колебания векторов $\vec{E}_o$ и $\vec{E}_e$ сдвинуты по фазе на π . Свет, выходящий из пластинки, остаётся линейно поляризованным. 3) Пластинка в целую волну: $d(n_o - n_{e0}) = \pm k\lambda_0$ – после прохождения через такую пластинку свет остаётся линейно поляризованным в той же плоскости, что и падающий свет.

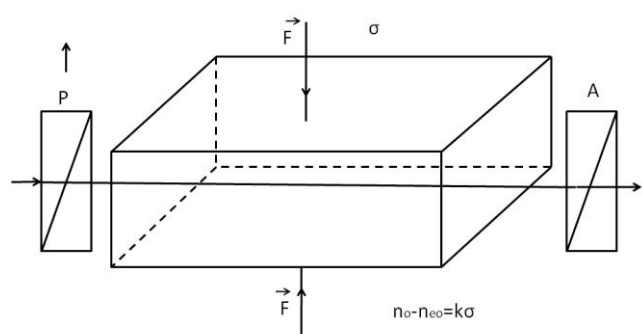
Когерентные волны, выходящие из кристаллической пластинки, не могут интерферировать, т.к. они поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Поэтому за пластинкой устанавливается ещё одна поляризационная призма – *анализатор*. Анализатор выделяет из падающих на него когерентных

волн составляющие, поляризованные в одной плоскости, что приводит к интерференции этих волн.

Результат интерференции зависит от $\Delta\varphi$, приобретаемой обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке, от составляющих амплитуд A и угла α между главными плоскостями анализатора и поляризатора. Пусть β - угол между главной осью P и MN $\beta = \frac{\pi}{4}$, $A_o = A_e$, тогда возможны два предельных случая:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n_o - n_{e0}) = \pm 2k\pi \text{ или } \Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n_o - n_{e0}) = \pm(2k+1)\pi.$$

17.1.4. Искусственная оптическая анизотропия.



фотоупругость (Зеебек, Брюстер)

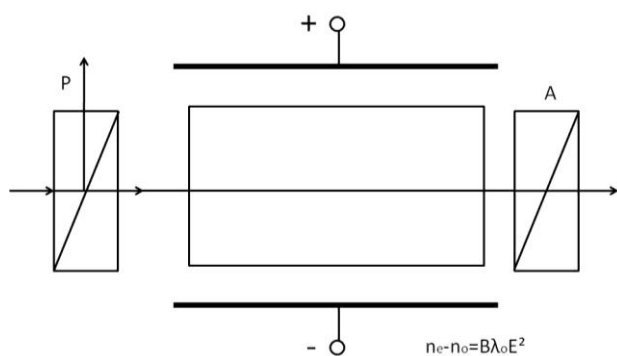
Рис. 17.9

Анизотропию в изотропном веществе можно осуществить по-разному :

1) созданием в теле механических напряжений (рис.17.9) – *фотоупругость* (Зеебек – 1813, Брюстер - 1816) : $n_o - n_{e0} = k\sigma$; 2) помещение диэлектрического вещества в поперечное электрическое поле (рис.17.10) – эффект Керра (1875)

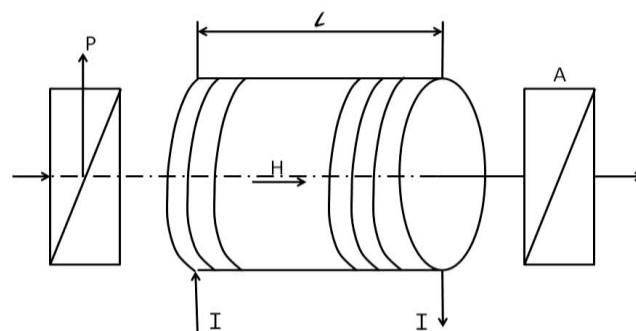
$n_{e0} - n_o = B\lambda_0 E^2$, где B – константа Керра (для воды $B = 4,7 \cdot 10^{-7}$, для натрибензола

$B = 22 \cdot 10^{-6}$, $\tau = 10^{-12}$ с); 3) помещением в магнитное поле (рис.17.11) – эффект Коттона – Мутона - $n_{e0} - n_o = C \cdot \lambda_0 \cdot H^2$.



(Эффект Керра)

Рис. 17.10



$$n_e - n_o = C \lambda_0 H^2$$

(Эффект Коттона-Мутона)

Рис. 17.11

17.1.5. Вращение плоскости поляризации оптически активными веществами.

Некоторые оптически прозрачные вещества способны при пропускании через них линейно поляризованного луча поворачивать его плоскость поляризации. Кристаллы кварца, например, оптически активны в направлении вдоль оптической оси (направление, в котором двойного лучепреломления не

наблюдается). Асимметрия вращения – винтовая линия может быть левой или правой – оказывает действие на линейно поляризованный луч. Угол вращения $\varphi = \alpha \ell$, где α – постоянная вращения. В растворе $\varphi = \alpha C \ell = \alpha D K \ell$, где C – плотность оптически активного вещества в растворе, D – плотность раствора, $K = \frac{C}{D}$ – долевая концентрация по массе.

Фарадей в 1845 г. экспериментально установил, что оптически неактивная среда становится активной под действием магнитного поля – *эффект Фарадея*: $\varphi = V \cdot H \cdot \ell$, где V – постоянная Верде – зависит от вещества и λ_0 .