

Севастопольський національний технічний університет

Кафедра фізики

Доцент Леонтович О.Л., доцент Петренко Н.В.

Учбовий посібник з фізики

Механіка. Молекулярна фізика. Термодинаміка.

(для студентів 1 курсу спеціальності «Кібернетика й обчислювальна техніка»)

(на правах рукопису)

Севастополь 2008

Лекція 1. ВСТУП.

1.1. Предмет фізики.

Фізика – наука про форми матерії (їх іноді називають **первинними** або **загальними**), які входять до складу будь-яких складних матеріальних систем, про взаємодії цих форм матерії і їх рухах (змінах). Поняття матерії формувалося в тривалому процесі розвитку філософії й природничих наук. Коротко про матерію можна сказати так: 1) **матерія** – це те, що існує об'єктивно (усе суще), тобто незалежно від чиїї б то не було свідомості або відчуттів, 2) матерія копіюється, відображається нашими відчуттями й, отже, пізнавана. **Рух** (зміна) є способом існування матерії. Структура матерії реалізується в просторі й часі, у закономірному розташуванні різних об'єктів (тіл) поза один одного, у закономірнім проходженні явищ один за одним. Матерія немислима поза певною координатою її частин і процесів, поза часом і поза простором. У свою чергу простір і час нерозривно пов'язані з матерією, будучи формами буття матерії. У філософії простір і час визначені у такий спосіб: **простір** – сукупність відносин, що виражають координату співіснуючих об'єктів, - їх розташування друг щодо друга й відносну величину (відстані й орієнтацію); **час** – сукупність відносин, що виражають координату змінюючих один одного станів (явищ), їхня послідовність і тривалість. Фізика намагається дати опис, пояснення й завбачення явищ природи, виходячи з певних початкових положень. Причому, опис дається в тривимірному просторі й у часі. Пояснення полягає у формулюванні фізичного закону, застосовного до спостережуваного й досліджуваного явища, і у встановленні співвідношення між причиною й наслідком. Воно дається в рамках теорії, здатної дати елементи передбачення. Опис і завбачення повинні бути кількісними; це основна ознака точної науки. Але кількість виражається й визначається тільки в результаті вимірів. Вимір фізичної величини зводиться до порівняння її з іншою однорідною величиною, точно визначеною й умовно прийнятою за одиницю для виміру всіх таких же величин. Тому для просторово – часових вимірів необхідно перейти від філософського визначення простору й часу до конкретно фізичного (вимірнювального), тобто виражених за допомогою певних фізичних об'єктів і процесів.

Так, основними одиницями Міжнародної системи одиниць (СІ) є метр, секунда, кілограм, ампер, кельвін, кандела, радіан, стерadian.

Одиниця довжини **метр** (м) є довжина, рівна $1650763,73$ довжин хвиль у вакуумі випромінювання, відповідного до переходу між рівнями $2p^{10}$ і $5d^3$ атома криптому – 86. **Секунда** (с) – інтервал часу, протягом якого відбувається 9192631770 коливань, відповідних до резонансної частоти енергетичного переходу між рівнями надтонкої структури основного стану атома цезію – 133. **Кілограм** (кг) – одиниця маси – представлений масою міжнародного прототипу кілограма.

Фізичні експерименти, у яких чутливість (розрізнення) відігравала визначальну роль, уперше почали проводитися наприкінці 18 ст. Г.Кавендишем і Ш.О.Кулоном. У їхніх досвідах вимірялося прискорення по величині механічного зсуву (амплітуди коливань). Пізніше фізична величина реєструвалася по зміні інтервалу часу (відмінності частот). Виміри з високою чутливістю до малих механічних зсувів, малих прискорень і малих змін частоти (інтервалів часу) привели до відкриття найважливіших фізичних законів. Краще рішення, досягнуте в «долазерную» еру, належить Р.Джонсу й Дж.Ричардсу, які зареєстрували зсув 10^{-14} м при зрушенні зображення однієї дифракційної решітки щодо іншої решітки. Відразу після появи перших лазерів А.Джаван виміряв зсув одного дзеркала оптичного резонатора Фабрі – Перо щодо іншого з розрішенням 10^{-15} м.

1.2. Навколишній всесвіт і фундаментальні взаємодії.

Навколишній всесвіт являє собою чотиривимірну просторово-часову «сцену», на якій розігруються події всілякого масштабу. Елементи, що виступають на «сцені», - частки-хвилі (фотони, лептони, мезони, баріони, резонанси), атоми, молекули, планети, зірки, галактики. Вони взаємодіють один з одним, взаємно перетворюються друг у друга або змінюють стани один одного.

Згідно із сучасними уявленнями, існує тільки чотири, якісно різних, фундаментальних взаємодій. Вони і є відповідальними за все різноманіття властивостей навколишнього всесвіту, відповідальними за всі явища, що відбуваються у світі. У міру збільшення інтенсивності взаємодії вони розташовуються в наступному порядку: гравітаційне, слабе, електромагнітне й сильне. Успішне створення теорії електрослабкої взаємодії стимулювало спроби об'єднання електромагнітного, слабкого й сильного взаємодій у рамках теорії Великого об'єднання. Є спроби об'єднання всіх чотирьох типів взаємодії в теорії всього сущого (ТВС). Далі розглянемо коротко сучасні уяви про природу фундаментальних взаємодій.

1.2.1. Гравітаційна взаємодія.

Гравітаційна взаємодія універсальна. У ній беруть участь усі види матерії, усі об'єкти природи. Загальноприйнятою класичною (не квантовою) теорією гравітаційної взаємодії є ейнштейнівська загальна теорія відносності (**ЗТВ**). Гравітація, зокрема, визначає рух планет у зоряних системах, відіграє важливу роль у процесах, що відбуваються у зірках, «керує» еволюцією Всесвіту й т.п. Якщо ж знехтувати всіма релятивістськими ефектами й обмежитися слабкими стаціонарними гравітаційними полями, то ЗТВ зводиться до ньютонівської теорії тяжіння, у якій гравітаційну взаємодію вважають **далекосяжною**.

Теоретичні дослідження показують, що на квантовому рівні гравітаційна взаємодія переноситься **гравітонами**. Частинка випускає гравітон, а інша частинка його поглинає. Обидві частинки змінюють стани руху. У результаті виникає взаємний вплив частинок однієї на іншу. Для оцінки інтенсивності взаємодії вводять безрозмірну константу зв'язку. Для її одержання використовують фундаментальні постійні G , $\hbar$, c і m_p . Тоді безрозмірна константа зв'язку гравітаційної взаємодії буде дорівнювати $\alpha_g = Gm_p^2/\hbar c \cong 10^{-39}$. Таким чином, ця константа має дуже малу величину, тому для шкали, прийнятої у фізиці високих енергій, гравітаційні сили нехтувально малі в порівнянні з іншими фундаментальними взаємодіями.

Теоретично встановлено, що гравітаційні збурювання можуть поширюватися у вигляді гравітаційних хвиль. Перспективи експериментального виявлення можливих джерел гравітаційних хвиль зв'язують із: 1) зливаючимися подвійними системами, які складаються із чорних дір зоряних мас; 2) реліктовими гравітаційними хвилями. При цьому вважають, що чорні діри, що зливаються, швидше за все будуть зафіксовані першими наземними інтерферометрами, що вступають у лад. Відповідні оцінки показують, що перші інтерферометри будуть бачити 2 – 3 події в рік від чорних дір з масами компонентів в 10 - 15 зоряних мас при відношенні сигналу до шуму, рівному 3 у мережі детекторів, що складаються із GEO, VIRGO і двох антен LIGO. Що стосується реліктових гравітаційних хвиль, то вони можуть бути відкриті космічним інтерферометром у діапазоні частот $2 \cdot 10^{-3} - 10^{-2}$ Гц при відношенні сигналу до шуму теж приблизно рівному трьом.

1.2.2. Слабка взаємодія.

Уперше слабкі взаємодії спостерігалися при β - розпаді атомних ядер. При дуже високих енергіях слабка взаємодія описується як обмінна, при якій здійснюється обмін квантом, наділеним слабким зарядом і діючим між

ферміонами. Такі кванти були вперше виявлені в 1983 р. на коллайдері в ЦЕРНі. Це заряджені бозони $W^{\pm}$ і нейтральний бозон W^0 зі спином 1 і масами, рівними за порядком величини $100m_p$. Безрозмірна константа слабкої взаємодії дорівнює 10^{-5} . Видно, що ця взаємодія набагато інтенсивніше гравітаційної.

Необхідність уведення слабкої взаємодії обумовлена тим, що в природі відбуваються процеси, у яких електромагнітні й сильні розпади заборонені законами збереження. Слабка взаємодія є короткодійою. Експериментально встановлено, що характерний радіус її дії порядку 10^{-17} м, тобто вона зосереджена на відстанях менше розмірів атомного ядра. Слабка взаємодія зв'язана не тільки із процесом β - розпаду, але й відіграє важливу роль у термоядерних реакціях, відповідальних за механізм виділення енергії в зірках.

1.2.3.Електромагнітна взаємодія.

В електромагнітній взаємодії беруть участь усі заряджені тіла, усі заряджені елементарні частинки. Можливо, ця найважливіша взаємодія (принаймні, на рівні мікросвіту), тому що воно не тільки поєднує всі електричні явища, але й забезпечує сили, завдяки яким речовина на атомному й молекулярному рівні існує як ціле. Класичною теорією електромагнітної взаємодії є максвеллівська електродинаміка. З погляду квантової теорії переносником електромагнітної взаємодії є елементарна частка **фотон** – безмасовий бозон зі спином 1. Заряджена частинка випускає фотон, у силу чого стан її руху змінюється. Інша частинка поглинає фотон і також змінює стан свого руху. Для електромагнітних сил константа взаємодії рівна сталій тонкої структури: $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Легко помітити, що дана константа значно перевищує константи гравітаційного й слабого взаємодій.

Із сучасної точки зору електромагнітна й слабка взаємодії являють собою різні сторони єдиної електрослабої взаємодії (теорія Вайнберга – Салама – Глешоу, що поєднує з єдиних позицій усі аспекти електромагнітних і слабких взаємодій). Характерна енергія об'єднання оцінюється за порядком величини як 10^2 Гев. Із цієї причини вони не проявляють у звичайних фізичних явищах своєї єдиної сутності.

1.2.4.Сильна взаємодія.

Сильна взаємодія відповідальна за стійкість атомних ядер. Оскільки атомні ядра більшості хімічних елементів стабільні, то ясно, що взаємодія, яка втримує їх

від розпаду, повинна бути досить сильною. Теорія сильної взаємодії аналогічна електродинаміці й називається квантовою хромодинамікою (**КХД**). Згідно із цією теорією частинки, що беруть участь у сильній взаємодії й названі **адронами**, складаються з елементарних частинок, які одержали назву **кварків**. Відмітною рисою кварк – кваркових взаємодій є те, що зі зменшенням відстані між кварками їх взаємодія слабшає. Тому для сильних взаємодій розглядаються дві області: область, для якої радіус взаємодії r більше розміру нуклона r_N , і область, для якої $r < r_N$. У першому випадку взаємодію можна розглядати як обмін **піоном** (квантом ядерного поля). У цьому випадку константа взаємодії $g \cong 15$. У другому випадку відбувається обмін **глюонами**, і величина константи взаємодії не перевищує одиницю.

1.3. Фізика й техніка.

Фізика є найбільш широкою теоретичною основою техніки; розвиток фізики приводить до появи нових галузей техніки (радіоелектроніка, ядерна енергетика, автоматика й кібернетика та ін.). Стимульований фізикою розвиток технічних наук у свою чергу сприяє створенню зовсім нових методів дослідження, що обумовлюють прогрес фізики й суміжних наук.

У цьому зв'язку коротко зупинимося на перспективах створення, обробки, зберігання й передачі інформації. Незадовго до смерті Ампер написав «Нарис по філософії наук» (1834), де, зокрема, при класифікації наук їм була вперше зазначена (і названа) наука про керування – **кібернетика**. У цій галузі знань за останні 40 – 50 років отримані більш ніж вражаючі результати. Якщо нові результати, отримані в процесі переосмислювання основних ідей квантової механіки – це теоретична основа квантової інформації, то експериментальною базою слід уважати ті розділи науки, які пов'язані з вивченням будь-яких об'єктів, що відносяться до квантового світу.

Ідея квантових комп'ютерів уперше була висловлена в роботах Р.Фейнмана в середині 80-х рр. 20 ст. Приводом для її обґрунтування з'явився висновок про те, що ресурси пам'яті й швидкодії класичних машин недостатні для розв'язку квантових завдань. У цей час обчислювальна техніка підійшла до межі своїх можливостей по швидкодії комп'ютерів (1 ГГц) і розміру мікросхем ($\approx 0,1$ мкм). Масштаб $\approx 10^{-7}$ м визначає границю застосовності законів класичної фізики до розрахунків характеристик електронних приладів. При прагненні до подальшого збільшення швидкодії й зменшенню розмірів ми попадаємо в новий фізичний світ зі своїми законами. У міру наближення розмірів твердотільних структур до нанометрової області, а це утворення з одиниць і десятків атомів, усе

більше проявляються квантово – хвильові властивості електрона. З одного боку, це приводить до порушення працездатності класичних транзисторів, а з іншого – відкриває перспективи створення нових унікальних перемикаючих, запам'ятовуючих і посилюючих елементів для інформаційних систем. Тому для розв'язку завдань конструювання обчислювальних обладнань нового покоління – завдань наноелектроніки, яка зародилася наприкінці 20 ст., - потрібні принципово нові підходи. Такими є, зокрема, ідеї, що лежать в основі квантових комп'ютерів.

Квантові комп'ютери – фізичні обладнання, що виконують логічні операції над квантовими станами шляхом унітарних перетворень, що не порушують квантові суперпозиції в процесі обчислень. Схематично робота квантового комп'ютера може бути представлена як послідовність трьох операцій:

- 1) запис (готування) початкового стану;
- 2) обчислення (унітарне перетворення початкових станів);
- 3) виведення результату (вимір, проєцирування кінцевого стану).

Для того, щоб розібратися у фізиці створення й роботи квантових комп'ютерів, у питаннях квантової криптографії й квантової телепортації й т.п., студентів у відносно короткий час (3 – 4 семестри) має бути засвоєні фундаментальні положення класичної (у тому числі й релятивістської) і квантової фізики, а також математичних наук (теорії інформації, дискретної математики й т.п.)

1.4. Математичне введення.

1.4.1. Прийняті позначення.

1.4.1.1. Позначення координат і одиничних векторів:

x, y, z - декартові прямокутні координати;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори в декартових прямокутних координатах;

r, Θ, z - циліндричні координати;

$\vec{l}_r, \vec{l}_\Theta, \vec{k}$ - одиничні вектори в циліндричних координатах;

r, Θ, φ - сферичні координати;

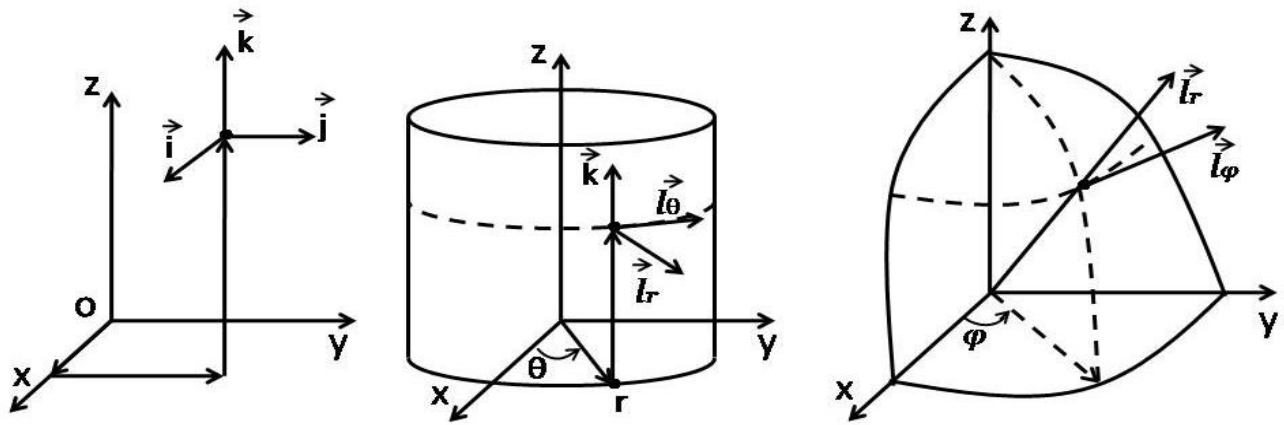


Рис. 1.1

$\vec{l}_r, \vec{l}_\theta, \vec{l}_\phi$ - одиничні вектори в сферичних координатах /мал.1.1/.

"Математичний формалізм виявляє зовсім дивну послугу в справі опису складних речей, але він анітрошки не допомагає в розумінні реальних процесів". Макс Борн.

1.4.2. Вектори.

1.4.2.1. Деякі формули векторної алгебри.

Нижче маються на увазі вектори $\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z$,

$$\vec{B} = \vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z, \vec{C} = \vec{i} C_x + \vec{j} C_y + \vec{k} C_z,$$

де $A_x, A_y, \dots$ - декартові компоненти, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти.

Скалярний добуток векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$:

$$(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad 1.1$$

Векторний добуток векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$:

$$[\vec{A}, \vec{B}] \equiv \vec{A} \times \vec{B} = \vec{n}_0 AB \sin \alpha = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x) \quad 1.2$$

$\vec{n}_0$ - одиничний вектор нормалі до площини векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$, причому $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{n}_0$ утворюють "праву трійку" векторів. У короткому записі:

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad 1.2 \text{ а}$$

Векторно-скалярний (змішаний) добуток векторів $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$:

$$\vec{A} \cdot [\vec{B}, \vec{C}] = [\vec{A}, \vec{B}] \cdot \vec{C} = [\vec{C}, \vec{A}] \cdot \vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad 1.3$$

Подвійний векторний добуток векторів $\vec{A}, \vec{B}$ і $\vec{C}$:

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}) \quad 1.4$$

1.4.2.2. Операції векторного аналізу.

У розгляд входять скалярні функції φ й векторні функції $\vec{A}$ як декартових координат, так і криволінійних ортогональних координат q_1, q_2, q_3 (орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; метричні коефіцієнти h_1, h_2, h_3), зокрема, координат циліндричних ($q_1 = r, q_2 = \Theta, q_3 = Z$; $\vec{i} = \vec{l}_r, \vec{j} = \vec{l}_\Theta, \vec{k} = \vec{k}; h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$) і сферичних ($q_1 = r, q_2 = \Theta, q_3 = \varphi$; $\vec{i} = \vec{l}_r, \vec{j} = \vec{l}_\Theta, \vec{k} = \vec{l}_\varphi; h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \Theta$).

Градiєнт.

а) У декартових координатах:

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad 1.5$$

б) У довільних ортогональних криволінійних координатах :

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \vec{j} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \vec{k} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \quad 1.6$$

в) У циліндричних координатах:

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{l}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{l}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad 1.7$$

г) У сферичних координатах:

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{l}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{l}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \vec{l}_\varphi \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \quad 1.8$$

Дивергенція.

а) У декартових координатах:

$$\text{div } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad 1.9$$

б) У довільних ортогональних криволінійних координатах:

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad 1.10$$

в) У циліндричних координатах:

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad 1.11$$

г) У сферичних координатах:

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta \cdot A_\Theta) + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad 1.12$$

Скалярний оператор Лапласа $\nabla^2 \equiv \text{div} \cdot \text{grad}$.

а) У декартових координатах:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi \equiv \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad 1.13$$

б) У довільних ортогональних криволінійних координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right] \quad 1.14$$

в) У циліндричних координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad 1.15$$

г) У сферичних координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} \quad 1.16$$

Ротор.

А) У декартових координатах:

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad 1.17$$

б) У довільних, ортогональних криволінійних координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{i}}{h_2 h_3} & \frac{\vec{j}}{h_3 h_1} & \frac{\vec{k}}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad 1.18$$

в) У циліндричних координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{l}_r}{r} & \frac{\vec{l}_\Theta}{r} & \frac{\vec{k}}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\Theta & A_z \end{vmatrix} \quad 1.19$$

г) У сферичних координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{l}_r}{r^2 \sin \Theta} & \frac{\vec{l}_\Theta}{r \sin \Theta} & \frac{\vec{l}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\Theta & r \sin \Theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad 1.20$$

1.4.2.3.. Інтегральні формули векторного аналізу.

Теорема Остроградського-Гаусса: $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ 1.21

Теорема Гріна:

$$1) \int_V \left(\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi + \psi \nabla^2 \varphi \right) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad 1.22$$

$$2) \int_V \left(\nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \right) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad 1.23$$

Теорема Стокса: $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$ 1.23a

Формула з об'ємним інтегралом від $\text{rot } \vec{A}$:
$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{A} dV = \oint_S [d\vec{S}, \vec{A}]$$
 1.24

У записаних формулах $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$ ($\vec{n}_0$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі $\vec{n}$); $d\vec{l} = \vec{\tau}_0 dl$ ($\vec{\tau}_0$ - одиничний вектор дотичної) .

1.2.4 Диференціальні формули векторного аналізу.

$$\vec{\nabla} \varphi \psi = \varphi \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \varphi$$
 1.25

$$\vec{\nabla} \psi \vec{A} = \vec{A} \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \vec{A}$$
 1.26

$$\vec{\nabla} [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{B} \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$
 1.27

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$
 1.28

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$$
 1.29

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$
 1.30

$$\vec{\nabla} \times \varphi \vec{A} = [\vec{\nabla} \varphi, \vec{A}] + \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
 1.31

$$\vec{\nabla} f(\xi) = f'(\xi) \vec{\nabla} \xi$$
 1.32

1.2.5. Рівняння силових ліній.

$$\frac{h_1 dq_1}{A_1} = \frac{h_2 dq_2}{A_2} = \frac{h_3 dq_3}{A_3}$$
 1.33

Зокрема, у декартових координатах $\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$ 1.34

1.3. Дельта - функція Дірака.

Дельта - функцією Дірака $\delta(x - x')$ називають особливий математичний об'єкт, що входить у наступне співвідношення:

$$\int_L f(x) \delta(x - x') dx = \begin{cases} 0, x' \notin L \\ f(x'), x' \in L \end{cases}$$
 1.35

де $f(x)$ - деяка функція, розглянута у звичайному математичному аналізі. Співвідношення 1.35 прийнято за визначення дельта-функції.

Якщо інтегрування в 1.35 поширити на нескінченний інтервал $(-\infty, +\infty)$, то результат буде $f(x')$.

Зокрема, з 1.35 при $f(x) = 1$ випливає:

$$\int_L \delta(x - x') dx = \begin{cases} 0, x' \notin L \\ 1, x' \in L \end{cases} \quad 1.36$$

По суті співвідношення 1.35 регламентує й уживання дельта-функції. Узагальнення дельта - функції на тривимірні області:

$$\int f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0, M(\vec{r}') \notin V \\ f(\vec{r}'), M(\vec{r}') \in V \end{cases}, \quad 1.37$$

зокрема, при $f(\vec{r}) = 1$

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0, M(\vec{r}') \notin V \\ 1, M(\vec{r}') \in V \end{cases} \quad 1.38$$

Представлення дельта - функції $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad 1.39$$

1.3.1. Приклади застосування дельта-функції.

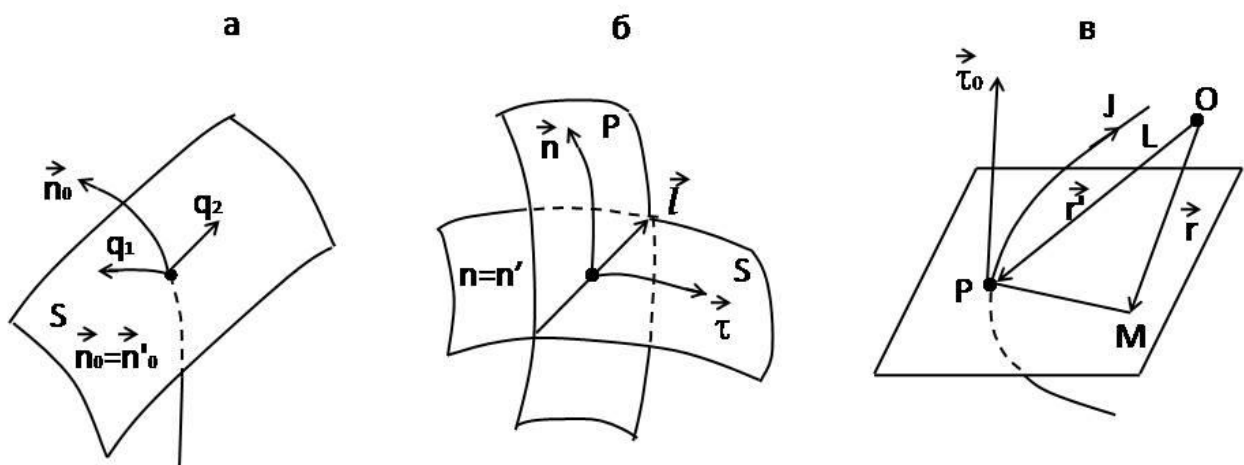


Рис. 2

а) Представлення густини заряду $\rho(\vec{r})$ у випадку точкового заряду q , розташованого в точці $P(\vec{r}')$: $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ 1.40

б) Представлення густини заряду $\rho(\vec{r})$ у випадку поверхні S , зарядженої із поверхневою густиною $\sigma(q_1, q_2)$: $\rho(\vec{r}) = \sigma(q_1, q_2)\delta(n - n')$ 1.41

q_1, q_2 - координати на S ; n - ортогональна до S координата, що ухвалює значення n' на S , мал. 2а/.

в) Представлення густини струму $\vec{j}(\vec{r})$ у випадку поверхневого струму, розподіленого на S із густиною $\eta(q_1, q_2)$:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \eta(q_1, q_2)\delta(n - n') \quad 1.42$$

/мал.б/.

г) Представлення густини струму $\vec{j}(\vec{r})$ у випадку струму I , що проходить по лінії L

(мал.2в) $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{\tau}_0 I \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, 1.43

де дельта-функція двовимірною; відповідно до цього крапки $M(\vec{r})$ й $P(\vec{r}')$

(остання лежить на L) при інтегруванні залишаються на к.-л. поверхні, пересічної струмом; орт $\vec{\tau}'$ указує напрямок струму.

Лекція 2. Фізичні основи класичної механіки.

Механіка вивчає рухи твердих тіл, рідин і газів. Під механічним рухом розуміють зміну із часом взаємного положення тіл або їх частин у просторі. Розглянуті в механіці взаємодії являють собою ті дії тіл один на одного, результатом яких є зміни руху цих тіл або їх деформації. Таким чином, основним завданням механіки є: по заданих початкових значеннях координат і імпульсів усіх часток системи в початковий момент часу, використовуючи рівняння руху, знайти ці величини в будь-який наступний момент часу. Крім того, будь-яка інша характеристика тіла (або системи тіл) – енергія, момент імпульсу й т.п. виражається через координати й імпульси. Самим Ньютоном закони механіки були сформульовані у векторній формі. Усі величини, з якими має справа теорія, - переміщення, швидкості, імпульси, сили – розглядаються як вектори. Надалі завдяки працям великих учених 18 і 19 сторіч Л.Ейлера, Ж.Лагранжа, П.Лапласа й особливо У.В.Гамільтона були повністю виявлені всі фізичні й математичні

наслідки теорії Ньютона. Були знайдені всі можливі формулювання основних принципів класичної механіки, і їм була додана винятково загальна й витончена математична форма.

2.1. Механічний рух як найпростіша форма руху матерії. Кінематика матеріальної точки, що рухається зі швидкістю набагато меншою швидкості світла.

Найпростішою формою руху матерії є механічний рух, який полягає в переміщенні тіл або їх частин друг щодо друга. Рух завжди відносний. Звідси випливає, що для опису руху деякого тіла необхідно вказати, стосовно яких інших тіл відбувається рух тіла. Рух відбувається як у просторі (**П**), так і в часі (**Ч**). Тому для опису руху необхідно вміти вимірювати відстані («лінійки») і час («годинник»).

Сукупність тіл, які умовно вважаються нерухливими, і стосовно яких розглядається рух інших тіл, й відраховуючих час годинників, утворюють систему відліку (**СВ**). Число різних СВ величезне й усі вони рівноправні. Тому із усієї сукупності різних СВ необхідно вибрати такі, стосовно яких рух розглянутого тіла описувалося б найбільш просто.

Тіло, що перебуває настільки далеко від інших тіл, що воно не зазнає впливу з боку останніх (або їм можна знехтувати), називають вільно рухомими тілами (**ВРТ**). Якщо в якості СВ вибрати ВРТ, то в такій СВ рух інших ВРТ виглядає найбільш просто: воно відбувається рівномірно й прямолінійно (закон інерції Галілея). СВ, зв'язану із ВРТ, називають інерціальною системою відліку (**ІСВ**).

Для ІСВ виконується механічний принцип відносності Галілея: усі механічні явища в різних ІСВ протікають однаковим чином, внаслідок чого ніякими механічними досвідами неможливо встановити, покоїться дана СВ або рухається рівномірно й прямолінійно.

Усякий рух твердого тіла можна розкласти на два основні види руху – поступовий й обертальний. Поступовий – це такий рух, при якому будь-яка пряма, пов'язана з рухомим тілом, залишається паралельною сама собі. При обертотому русі всі крапки тіла рухаються по колам, центри яких лежать на одній і тій же прямій, називаною віссю обертання. Вісь обертання може перебувати поза тілом.

Для того, щоб описувати рух кількісно, необхідно зв'язати із СВ деяку

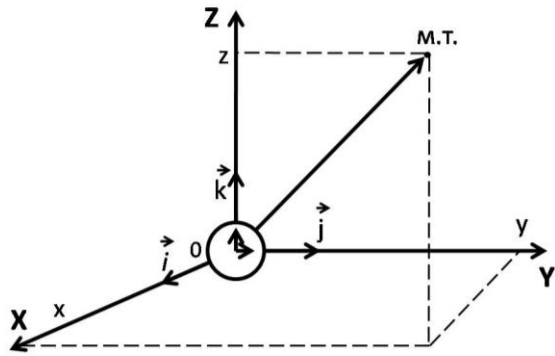


Рис. 2.1

систему координат, наприклад, декартову. Тоді положення матеріальної точки можна задати за допомогою радіуса-вектора $\mathbf{r}$ або задавши три числа x, y, z – декартові координати цієї точки:

$$\mathbf{r} = i x + j y + k z,$$

де i, j, k – орти осей x, y, z .

2.1.1. Швидкість і прискорення точки як похідна радіуса-вектора за часом.

Матеріальна точка при своєму русі описує деяку лінію, названу траєкторією. Залежно від форми траєкторії розрізняють прямолінійний рух, рух по окружності, криволінійний рух і т.п.

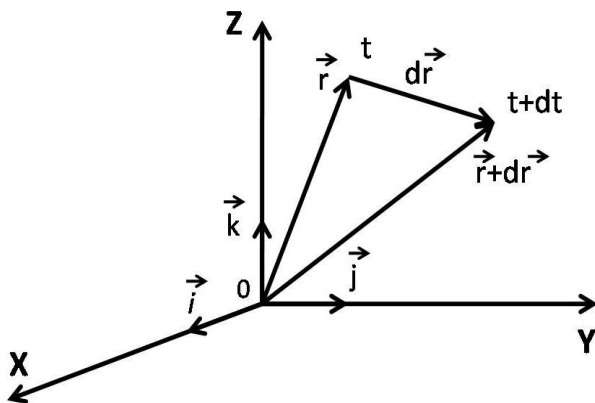


Рис. 2.2

Нехай у деякий момент часу t положення матеріальної точки описується радіусом – вектором $\mathbf{r}$, а в момент $t + dt$ – $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Вектор $d\mathbf{r}$ називається вектором переміщення (переміщенням) частинки. Розділивши це переміщення на dt , одержимо миттєву швидкість ($\mathbf{v}$) у даній крапці траєкторії:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \text{ (або, що те ж, } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}), \text{ або}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = i \dot{x} + j \dot{y} + k \dot{z}, \text{ де } v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}.$$

Швидкість тіла може змінюватися з часом. Швидкість зміни вектора $\mathbf{v}$, називають прискоренням $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt, \text{ або } \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}, \text{ або } \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}, \text{ або}$$

$$\mathbf{a} = i \ddot{x} + j \ddot{y} + k \ddot{z}, \text{ де } a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}.$$

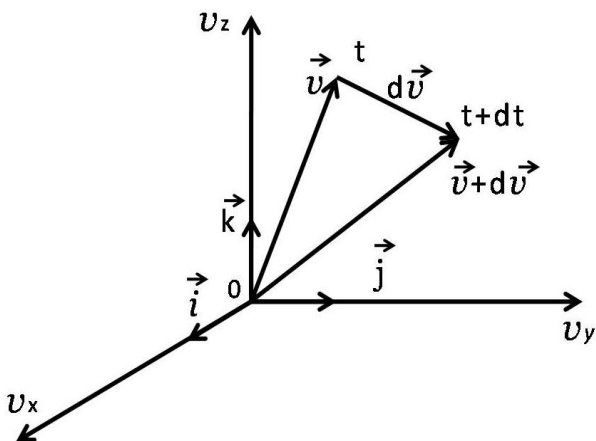


Рис. 2.3

2.1.2. Нормальне й тангенціальне прискорення. Радіус кривизни траєкторії.

Нехай частинка рухається зі змінною швидкістю уздовж плоскої криволінійної траєкторії. У дотичній площині, проведеної в довільній крапці

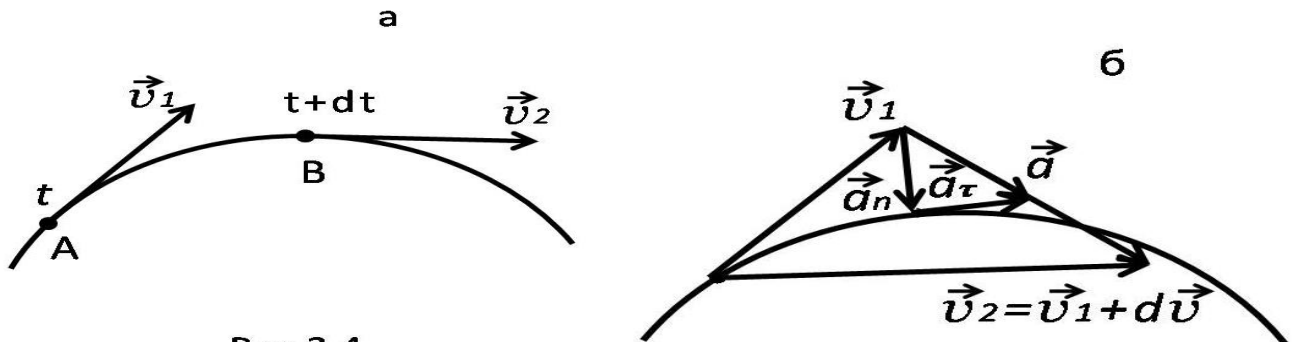


Рис.2.4

траєкторії, вектор прискорення $\mathbf{a}$ можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові $\mathbf{a}_n$ і $\mathbf{a}_t$: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$. Складова $\mathbf{a}_n$, спрямована уздовж головної нормалі до траєкторії, називається нормальним прискоренням, а складова $\mathbf{a}_t$, спрямована уздовж дотичній до траєкторії, називається дотичним (тангенціальним) прискоренням. Їхні чисельні значення рівні: $a_n = v^2/R$, $a_t = dv/dt$, так що $a = (a_n^2 + a_t^2)^{1/2}$, де v – чисельне значення швидкості, а R – радіус кривизни траєкторії. У випадку, якщо рівняння траєкторії частинки задане у вигляді функції $y(x)$, то як відомо з математики $R = [1 + (y')^2]^{3/2} / y''$. Якщо ж крива задана параметричними рівняннями $x(t)$ і $y(t)$, то $R = [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{3/2} / (\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})$.

2.1.3. Перетворення Галілея. Закон додавання швидкостей. Інваріантність прискорення.

Перетворення радіуса-вектора матеріальної точки (або її координат) і часу при переході від однієї ІСВ до іншої ІСВ, що рухається відносно першої з постійною швидкістю $\mathbf{v}_0$, здійснюється за допомогою закону перетворення Галілея:

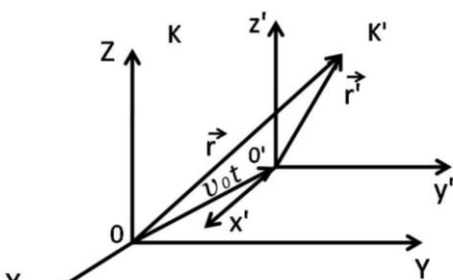


Рис.2.5

$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t'$, $t = t'$ або в проекціях на відповідні осі:

$$x = x' + v_{0x} t',$$

$$y = y', z = z', t = t'.$$

Беручи першу похідну від $\mathbf{r}$ по t , одержуємо закон додавання швидкостей:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{v}_0, \text{ або } \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \text{ Друга похідна дає: } \mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

або $a = \text{inv}$ (інваріант). Прискорення деякого тіла, заданого в одній ICB в усі інших ICB буде тим самим.

2.2. Динаміка матеріальної точки й поступового руху твердого тіла.

При поступовому русі всі крапки тіла описують однакові (при накладенні співпадаючі) траєкторії й мають у кожний момент часу однакові по чисельній величині й напрямку швидкості й прискорення. Тому вивчення руху твердого тіла в цьому випадку зводиться до вивчення руху матеріальної точки.

Динаміка поступального руху – розділ механіки, у якому вивчається рух твердого тіла (матеріальної точки) під дією прикладених до нього сил. Основне завдання динаміки поступального руху: знаючи діючі на тіло сили, характер накладених зв'язків і початкові умови, визначити закон руху тіла стосовно даної ICB, а також тиску, надавані тілом на зв'язки. Повинні бути відомі маса тіла й положення його центру мас. Для визначення закону руху тіла служать відповідні диференціальні рівняння, отримані як наслідки із загальних теорем динаміки. Ці диференціальні рівняння дозволяють також, якщо відомий закон руху тіла, визначити головний вектор діючих на нього зовнішніх сил. Число й вид диференціальних рівнянь руху залежать насамперед від характеру досліджуваного руху, який, у свою чергу, визначається видом накладених зв'язків, а для вільного тіла – діючими силами й початковими умовами. Класична механіка базується на трьох основних законах, підтверджуваних досвідом: законі інерції (перший закон Ньютона), законі руху (другий закон Ньютона) і законі рівності сил взаємодіючих двох тіл (третій закон Ньютона). Для узагальнення цих законів і їх практичного застосування введемо поняття системи й замкнутої (ізолюваної) системи. Системою матеріальних точок або тіл називається уявно виділена сукупність матеріальних точок або тіл, які в загальному випадку взаємодіють як один з одним, так і з тілами, не включеними до складу цієї системи. Механічну систему називають вільною, якщо всі вхідні в неї матеріальні точки або тіла можуть займати довільні положення в просторі й мати довільні швидкості. А якщо ні, то систему називають невільною. Обмеження, накладені на положення або рух розглянутої механічної системи в просторі, називають механічними зв'язками. Зв'язки називають внутрішніми, якщо вони не заважають системі вільно переміщатися після того, як вона раптово ствердіє. Усі інші зв'язки називають зовнішніми. Системи, підлеглі тільки внутрішнім зв'язкам, є вільними. Сукупність матеріальних точок або тіл, взаємодіючих один з одним і не взаємодіючих з навколишніми тілами, утворюють замкнену або ізолювану систему.

Для замкненої системи існує ряд величин, що не змінюються із часом: імпульс, момент імпульсу, повна енергія й ін. Установлення цих величин відіграє велику роль у механіці, тому що зміна такої величини може служити мірою взаємодії тіла (системи тіл) з навколишніми тілами або іншою системою.

2.2.1. Імпульс тіла. Маса. Центр мас.

Імпульс тіла – вектор пропорційний величині швидкості й за напрямком співпадаючий з напрямком вектора швидкості: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Імпульс системи N тіл дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх тіл: $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$, або $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i$. Для ізольованої системи $\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const}$. Нехай система

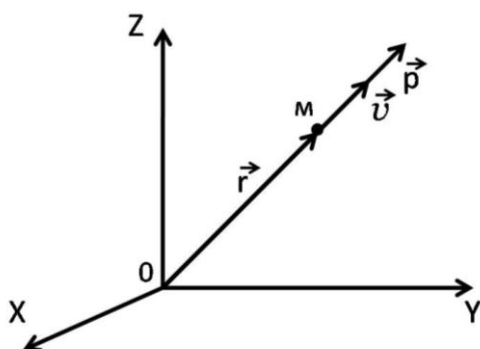


Рис. 2.6

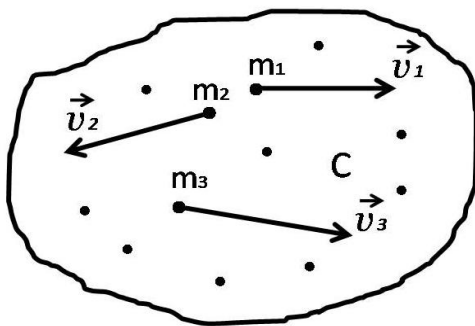


Рис. 2.7

складається із двох тіл $N=2$. Тоді маємо: $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'$, звідки $m_2/m_1 = -\Delta v_1/\Delta v_2$. Таким чином, відношення коефіцієнтів пропорційності імпульсів двох взаємодіючих тіл може бути визначене за виміром відносини змін швидкостей цих тіл. Якщо деяке тіло вибрати як еталон, наприклад $m_1 = 1$ кг (СІ), тоді інші коефіцієнти m будуть визначатися з розглянутого співвідношення в частках або цілих значеннях кілограма. Величину m називають масою тіла. Вона є мірою інерційних властивостей тіла.

Центром мас або центром інерції системи матеріальних точок (тіл) називається крапка $C(x_c, y_c, z_c)$, радіус-вектор $\mathbf{r}_c$ якої пов'язаний з масами m_i і радіус-векторами $\mathbf{r}_i$ усіх N крапок системи співвідношенням: $\mathbf{r}_c = \sum m_i \mathbf{r}_i / \sum m_i$.

Підкреслимо, що виконання закону збереження імпульсу (без зовнішнього впливу при переході тіла з одних точок простору в інші імпульс тіла зберігається) свідчить про однорідність простору, у якому відбувається рух тіла.

Як приклад застосування закону збереження імпульсу розглянемо реактивний рух ракети. Основні закономірності реактивного руху уперше досліджував К.Е.Ціолковський (1857 - 1935) і вказав на можливість використання ракет для освоєння космічного простору. Два предмети його відкриття не втратили свого значення дотепер: це 1) використання складової (тепер -

багатоступінчастої) ракети й 2) для досліджень космічного простору й польотів до інших планет використовувати проміжні станції (МКС).

Виведемо основне рівняння прямолінійного руху ракети. Паливо ракети – будь то порошок або суміш пального (спирту, бензину) і окиснювача (кисню, азотної кислоти) – має певний запас хімічної енергії на одиницю маси (порядку 5 МДж/кг для бездимного порошку й 10 МДж/кг для бензину з киснем). При згорянні ця хімічна енергія перетворюється в теплову енергію продуктів горіння. Потім продукти горіння витікають через сопло, при цьому їхня теплова енергія перетворюється в кінетичну енергію руху.

Нехай у початковий момент часу $t_0 = 0$ маса ракети разом з паливом буде M_0 і початкова швидкість ракети $v_0 = 0$. Нехай тепер з ракети виходить порція газу dm зі швидкістю u (для порошку $u \approx 2$ км/с). Потрібно знайти залежність швидкості руху ракети від швидкості витікання газів і маси ракети в початковий і розглянутий момент часу.

Закон збереження імпульсу у випадку ракети має вигляд: $M_0 v_0 = dm(u - u_0) + (M - dm)(v_0 + dv)$. Або, з урахуванням початкових умов: $0 = dm \cdot u + M \cdot dv$. Розділяючи змінні й інтегруючи це диференціальне рівняння, одержимо формулу Ціолковського: $v = u \cdot \ln(M_0/M)$. За допомогою цієї формули легко вирішується зворотне завдання: який повинна бути початкова маса M_0 ракети для того, щоб даній кінцевій масі M додати певну швидкість v : $M_0 = M \cdot \exp(v/u)$. Наприклад, оцінимо відношення M_0/M для досягнення 1, 2, і 3-й космічної швидкості. Для $v_1 = 8$ км/с повинне бути $M_0/M = e^4 \approx 54$; для $v_2 = 11,2$ км/с – $e^{5,6} \approx 270$ і для $v_3 = 16,4$ км/с – $e^{8,2} \approx 3640$. У випадку рідкого палива, коли $u = 3$ км/с відношення мас відповідно рівні 14,5; 42; 245.

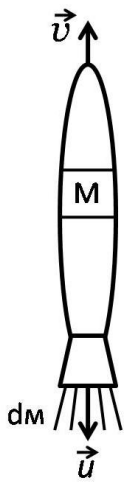


Рис. 2.8

2.2.2. Сила. Рівняння руху. Зовнішні й внутрішні сили.

При вільному русі тіла імпульс тіла зберігається. При взаємодії тіла з іншими тілами його імпульс змінюється. Мірою інтенсивності впливу на дане тіло з боку інших тіл (або полів) може служити зміна імпульсу в одиницю часу. Цю величину називають **силою F** – вектор, спрямований по лінії зміни імпульсу:

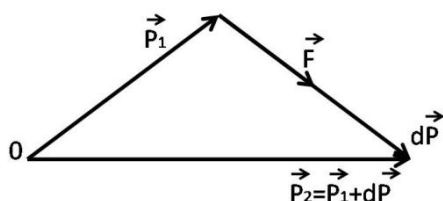


Рис. 2.9

$$dp/dt = F \text{ або } (\dot{p} = F).$$

Останнє рівняння, що встановлює зв'язок між зміною імпульсу й силою, називають диференціальним рівнянням руху тіла. У випадку, якщо маса тіла не змінюється при русі, це рівняння має вигляд 2-го закону Ньютона: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, або в проекціях на осі декартової системи координат:

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y, m\ddot{z} = F_z.$$

Для замкненої системи $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i = \text{const}$, тоді $\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = 0$ і $\sum_i^N \vec{F}_i = 0$. Геометрична сума сил, з якими взаємодіють тіла, що утворюють замкнену систему, дорівнює нулю. Для випадку $N=2$ маємо: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ і $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, тобто сила, з якої перше тіло діє на друге, рівна силі, з якої друге тіло діє на перше (третій закон Ньютона).

При впливі декількох тіл на дане виконується принцип незалежності дії сил: якщо на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то кожна з них надає точці прискорення, обумовлене 2-м законом Ньютона так, ніби інших сил не було.

2.3. Енергія як універсальна міра різних форм руху й взаємодії. Закон збереження енергії і його зв'язок з однорідністю часу. Закон збереження й перетворення енергії як прояв незнищування матерії і її руху.

Енергією називають загальну міру різних форм руху й взаємодії. Установлено, що всі форми руху перетворюються одна в іншу в строго певних кількісних відносинах; саме ця обставина й дозволила ввести поняття про енергію, тобто дозволила вимірювати різні форми руху й взаємодії єдиним заходом.

Відповідно до різних форм фізичних процесів говорять про різні види енергії: механічної, теплової, електричної, гравітаційної, ядерної і т.п.; ці розмежування мають трохи умовний характер. Енергія – скалярна величина. Енергія підкоряється закону збереження: при будь-яких процесах, що відбуваються в ізольованій системі, її повна енергія не змінюється. Цей закон впливає з однорідності часу, тобто незалежності законів руху тіла (системи тіл) від вибору початку відліку часу. Він свідчить про те, що рух матерії не створюється й не зникає: він може лише переходити з одних форм в інші.

Якщо система незамкнута, то зміна її енергії завдяки зовнішнім впливам чисельно дорівнює й протилежно за знаком алгебраїчній сумі змін енергії всіх зовнішніх тіл і полів, взаємодіючих із системою.

Можливі два якісно різні способи передачі руху і й відповідної йому енергії від одного макроскопічного тіла до іншого – у формі роботи й у формі теплоти

(шляхом теплообміну). Зміну енергії першим способом називають **роботою**, зробленої над цим тілом. Відповідно, зміну енергії тіла, здійснену другим способом, називають **кількістю теплоти**, наданої тілу.

Передача енергії у формі роботи проводиться в процесі силової взаємодії тіл. Тому можна говорити, що робота, чинена над розглянутим тілом, є не що інше, як робота сил, прикладених до цього тіла з боку всіх інших (зовнішніх) тіл, з якими воно взаємодіє. Робота, виконана над тілом, може піти на збільшення будь-якого виду енергії цього тіла.

Передача енергії шляхом теплообміну між тілами обумовлена відмінністю температур цих тіл і може здійснюватися як при безпосередньому контакті тіл – **теплопровідність і конвективний теплообмін**, так і шляхом випромінювання й поглинання електромагнітного випромінювання – **променевий теплообмін**. Енергія, одержувана тілом у формі тепла, може безпосередньо піти тільки на збільшення його внутрішньої енергії.

2.3.1. Робота сили і її вираз через криволінійний інтеграл.

Якщо на тіло в кожній точці простору діє сила **F**, то сукупність цих сил визначає **силове поле**.

Розглянемо рух матеріальної точки в силовім полі, у якому **F(r)**. Елементарна робота δA сили **F**, виконана при переміщенні $d\mathbf{r}$ матеріальної точки під дією цієї сили, дорівнює скалярному добутку **F** і $d\mathbf{r}$: $\delta A = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})$, або, у декартових координатах, $\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

Елементарна робота позначена через δA , а не dA , тому що в загальному випадку вона не є повним диференціалом, тобто криволінійний інтеграл від δA уздовж довільної замкненої траєкторії точки прикладання сили не дорівнює нулю, у той час як цей інтеграл від повного диференціала повинен бути тотожно дорівнювати нулю.

Якщо на матеріальну точку або абсолютно тверде тіло діє система сил **F₁, F₂, ..., F_n**, то чинена при цьому робота дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх сил системи. На кінцевій ділянці S траєкторії $A = \int_0^S \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Якщо **F** $\perp$ **dr**, то $\delta A = 0$.

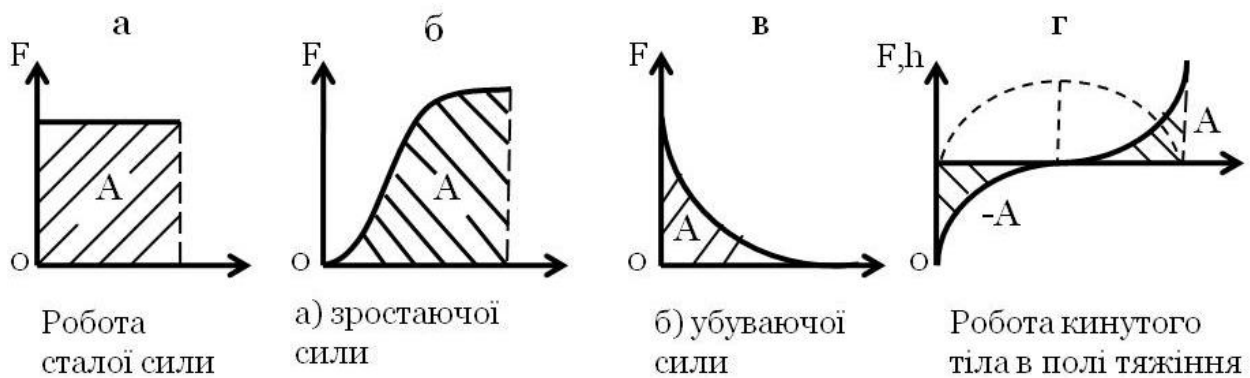


Рис. 2.10

Якщо у всіх точках поля, сили, що діють на тіло однакові, поле називають однорідним. Поле, що залишається постійним у часі, називають **стаціонарним**. Поле, що змінюється з часом, називають **нестаціонарним**. Якщо силове поле стаціонарно, то робота сил поля не залежить від форми шляху переміщення, а визначається тільки положеннями початкової й кінцевої точок переносу. Сили, що мають таку властивість, називають **консервативними**, а поле – **потенціальним**.

З незалежності роботи консервативних сил від шляху випливає, що робота таких сил на замкненому шляху дорівнює нулю: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Для виконання цієї умови необхідно й досить, щоб підінтегральний вираз (елементарна робота) був повним диференціалом деякої скалярної функції координат $U(x,y,z)$.

Потужністю P сили $\vec{F}$ називається фізична величина, що характеризує швидкість здійснення роботи цією силою й дорівнює відношенню елементарної роботи до проміжку часу, за який вона зроблена: $P = \delta A / dt = (\vec{F} \cdot \vec{v})$. У випадку довільного руху абсолютно твердого тіла результуюча потужність дорівнює алгебраїчній сумі потужностей усіх сил, що діють на тіло: $P = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i)$.

2.3.2. Кінетична енергія механічної системи і її зв'язок з роботою зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до системи.

Механічною енергією E називається енергія механічного руху й взаємодії тіл. Вона дорівнює сумі кінетичної E_k і потенційної U енергій: $E = E_k + U$. Для визначення кінетичної енергії розглянемо роботу, чинену силою $\vec{F}$ на шляху 1 – 2: $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot dv/dt \cdot \vec{v} \cdot dt$, звідки $A = \int_1^2 m \vec{v} \cdot d\vec{v}$ і $A = mv_2^2/2 - mv_1^2/2$. Таким чином, кінетична енергія матеріальної точки рівна: $E_k = mv^2/2$. Отже, робота результуючої всіх сил, що діють на точку, іде на збільшення кінетичної енергії матеріальної точки: $A = E_{k2} - E_{k1}$. Звідси випливає, що кінетична енергія має таку ж

розмірність, як і робота, і є мірою механічного руху тіла й вимірюється тією роботою, яку може виконати це тіло при його гальмуванні до повної зупинки.

Враховуючи, що $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, виразу для кінетичної енергії матеріальної точки можна надати вигляд: $E_k = p^2/2m$. Кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичних енергій усіх матеріальних точок, що входять до його складу, і виражається наступним інтегралом: $E_k = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV$.

2.3.3. Потенційна енергія матеріальної точки в зовнішньому силовім полі і її зв'язок із силою, що діє на матеріальну точку. Поняття про градієнт скалярної функції координат. Потенційна енергія системи.

Розглянемо рух м.т. у потенційнім полі. У потенційнім полі $U(x,y,z)$ величина U , рівна роботі з переміщення тіла із точки 1 у точку 2, узятій зі зворотним знаком, визначає **потенційну енергію** тіла в точці 2 стосовно точки 1: $U = -A_{12}$ або $dU = -dA$.

Отже, потенційною енергією називають частину енергії механічної системи, що залежить від конфігурації системи, тобто від взаємного розташування часток системи і їх положення в зовнішньому силовому полі. Її вимірюють тою роботою, яку виконують консервативні сили (зовнішні й внутрішні), що діють на всі частки системи, при переході від розглянутої конфігурації системи до такої, яку називають нульовою конфігурацією, і для якої потенційну енергію системи умовно вважають рівною нулю. Вибір нульової конфігурації, тобто початку відліку потенційної енергії, зовсім довільний, тому що в будь-якому досліді можна виміряти тільки зміну потенційної енергії, але не її абсолютне значення. У кожному конкретному завданні цей вибір проводиться так, щоб максимально спростити його розв'язок.

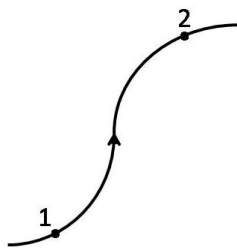


Рис. 2.11

Отже, $\delta A = -dU$, або $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$ і $\mathbf{F} = -(\partial U / \partial \mathbf{r})$, або $\mathbf{F} = -\nabla U$, або в декартовій системі координат:

$\mathbf{F} = -(\mathbf{i} \partial U / \partial x + \mathbf{j} \partial U / \partial y + \mathbf{k} \partial U / \partial z)$. Знак мінус показує, що сила, що діє на тіло, спрямована у напрямку убуття потенційної енергії тіла. Рівняння руху тіла в потенційному полі прийме вид: $d\vec{p} / dt = -\nabla U$.

Потенційна енергія системи $U = U^{\text{зовн}} + U^{\text{внутр}}$. Тут $U^{\text{зовн}}$ – зовнішня потенційна енергія системи, обумовлена дією на неї зовнішніх консервативних сил, прикладених з боку тіл, що не входять до складу системи, а $U^{\text{внутр}}$ – внутрішня потенційна енергія системи, обумовлена потенційними силами взаємодії між усіма її частинами. У загальному випадку внутрішня енергія

залежить від координат усіх N м.т., що входять до складу системи: $U^{\text{внутр}} = f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, $U^{\text{зовн}}$ може також залежати явно від часу: $U^{\text{зовн}} = f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t)$. Це пов'язане з тим, що зовнішні тіла, що діють на розглянуту систему, можуть рухатися відносно СВ (закон цього руху в кожному конкретному завданні припускають заданим).

Якщо F_i (зовн) = $F_i(r_i, t)$ – результуюча всіх зовнішніх консервативних сил, що діють на i -ту м.т. системи, то $dU^{\text{зовн}}/dt = \partial U^{\text{зовн}}/\partial t - \sum F_i \cdot v_i$.

У випадку стаціонарного зовнішнього силового поля $\partial U^{\text{зовн}}/\partial t = 0$ і $dU^{\text{зовн}} = - \sum (F_i \cdot v_i) dt$.

Внутрішня потенційна енергія системи дорівнює алгебраїчній сумі потенційних енергій U_{ik} взаємодії всіляких пар точок системи:

$$U^{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i}^N U_{ik} = 1/2 \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i}^N U_{ik}, \text{ де } U_{ik} = -\int (F_{ik} \cdot dr_{ik}) + \text{const} = -\int (F_{ki} \cdot dr_{ki}) + \text{const} = U_{ki}, \text{ де}$$

$r_{ik} = r_i - r_k$, $r_{ki} = r_k - r_i$ $F_{ik} = - F_{ki}$ – потенційні сили взаємодії i -й і k - й точок системи.

2.3.4. Закон збереження механічної енергії. Дисипація енергії.

Якщо тіло перебуває в полі консервативних сил, то зменшення його потенційної енергії свідчить про виконання роботи, що йде на збільшення кінетичної енергії тіла: $-dU = \delta A$, $\delta A = dE_k$, звідки $-dU = dE_k$ і $d(E_k + U) = 0$ звідки $E = E_k + U = \text{const}$. Повна механічна енергія тіла, на яке діють лише консервативні сили, залишається постійною. Узагальнюючи це положення на систему тіл, можна сказати, що механічна енергія консервативної системи зберігається незмінною в процесі руху системи. Цей результат називають законом збереження механічної енергії. Зокрема, він слушний для будь-якої замкненої системи тіл, сили взаємодії між якими консервативні. Якщо ці сили неконсервативні (наприклад, є сили тертя), то механічна енергія замкненої системи зменшується.

Система тіл називається **дисипативною**, якщо її механічна енергія із часом зменшується за рахунок перетворення в інші (не механічні) форми енергії (наприклад, у внутрішню енергію хаотичного руху часток, що становлять ці тіла). Цей процес зменшення механічної енергії системи називають **дисипацією енергії**.

2.3.5. Удар абсолютно непружних і пружних тіл.

Розглянемо абсолютно непружний удар двох тіл, що утворюють замкнену систему. Нехай маси тіл рівні m_1 і m_2 , а швидкості до зіткнення $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. У силу закону збереження сумарний імпульс тіл після удару повинен бути таким же, як і до удару: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$ і $\vec{u} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/(m_1 + m_2)$.

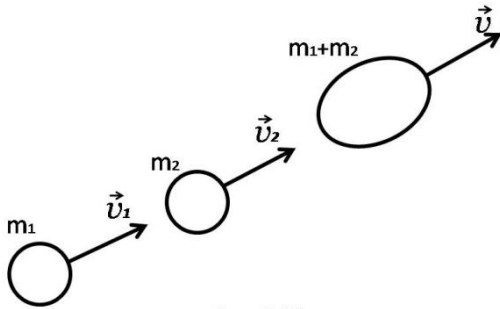


Рис. 2.12

Тепер розглянемо абсолютно пружне центральне зіткнення двох однорідних куль. Нехай маси куль m_1 і m_2 , а їх швидкості до удару $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Необхідно визначити швидкості куль $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ після удару. Оскільки система замкнена й тіла абсолютно пружні, то

зберігається не тільки імпульс тіл, але і їх кінетична енергія: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ і

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2.$$

Вирішуючи систему цих двох рівнянь, знайдемо:

$$u_1 = [2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1]/(m_1 + m_2), \quad u_2 = [2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2]/(m_1 + m_2).$$

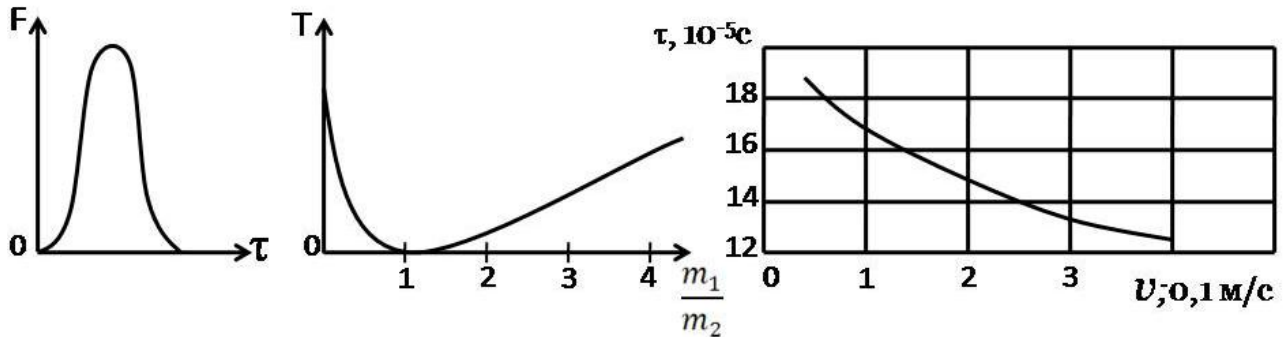


Рис. 2.13

Процес зіткнення можна розділити на дві фази. Протягом першої фази відбувається зближення тіл. Обое тіла виконують роботу проти сил реакції, їх загальна кінетична енергія зменшується, відносна швидкість також зменшується до нуля. Слідом за цим настає друга фаза: тіла починають віддалятися друг від друга, відновлюючи свою форму, при цьому сили реакції виконують позитивну роботу, кінетична енергія системи росте, відносна швидкість, переминовши знак, збільшується по абсолютній величині, нарешті, тіла віддаляються, і цим закінчується процес удару. Тривалість взаємодії вимірюється тисячними частками секунди. За цей час сила доходить до свого максимального значення, потім падає до нуля.

2.3.6. Границі руху.

Якщо рух м.т. обмежене рухом уздовж певної прямої (кривої), то він

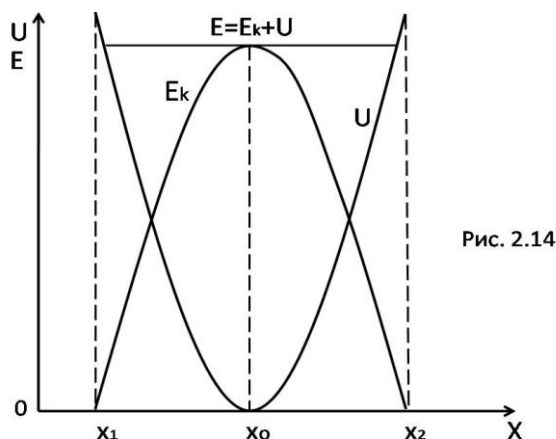


Рис. 2.14

називається **одномірним**, або рухом з одним ступенем свободи. Рух, при якому тіло залишається в кінцевій області простору, називається **фінітним** (рух планет, ШСЗ, коливальний рух і т.п.), якщо воно може віддалятися як завгодно далеко – **інфінітним**. Найчастіше розмір області «фінитності» залежить від повної енергії тіла E .

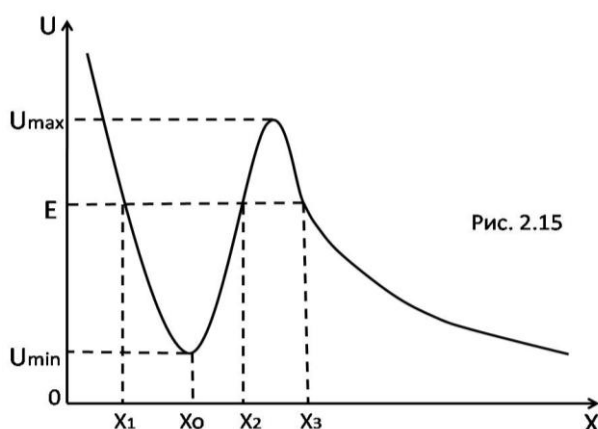


Рис. 2.15

Знаючи вид функції, якою задється потенційна енергія, можна зробити ряд висновків про характер руху тіла. Нехай $U(x)$ має вигляд, зазначений на малюнку 2.15.

Частка може робити рух або в межах від x_1 до x_2 , або від x_3 до нескінченності. В останньому випадку швидкість тіла на нескінченності визначається величиною: $v = 1/m \cdot \sqrt{2m(E - U_{\min})}$. В області $x < x_1$ і

$x_2 < x < x_3$ тіло проникнути не може, тому що потенційна енергія не може стати більше повної енергії (якби це трапилося, то кінетична енергія стала б негативною). Таким чином, область $x_2 < x < x_3$ являє собою **потенційний бар'єр**, через який тіло не може проникнути, маючи даний запас повної енергії. Величина $U_{\max} - E$ називається висотою потенційного бар'єра. Область $x_1 < x < x_2$ називають **потенційною ямою**. В області $x_1 < x < x_2$ рух-фінітний, в області $x > x_3$ – інфінітний.

Лекція 3. ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ.

«Можливо навіть, ми повинні створити зовсім нову механіку, яку ми лише смутно представляємо, механікові, де інерція зростала б зі швидкістю,

причому швидкість світла була б непереборною межею». (Poincare H. L'avenir de la Physique mathematique. - Janvier 1904. - V. 28, Ser. 2. - P. 302 - 324).

3.1. Вступ.

Фізика – наука про найбільш загальні властивості й формих руху матерії. Рух (зміна) є способом існування матерії. Структура матерії реалізується в просторі (П) і часі (Ч), у закономірнім розташуванні об'єктів (тіл) поза один одного, у закономірнім проходженні явищ один за одним. Матерія немислима поза певною координацією її частин і процесів, поза часом і поза простором. У свою чергу П і Ч нерозривно пов'язані з матерією, є формами буття матерії. У **філософії** П і Ч визначені в такий спосіб: **П** – *сукупність відносин, виражаючих координацію співіснуючих об'єктів, - їх розміщення одного відносно іншого і відносну величину (віддаль і орієнтацію)*. **Ч** – *сукупність відносин, виражаючих координацію, змінюючих один одного станів (явищ), - їх послідовність і тривалість*.

Фізичні теорії П і Ч не дають визначень П-Ч-ї термінології в тому розумінні, що не вводять цю термінологію вперше у вживання через інші терміни з відомим значенням. Вони припускають цю термінологію даної й формулюють методи встановлення П-Ч –х відносин предметів для різного роду випадків, зокрема для систем, що по-різному рухаються, для віддалених подій, для випадків, коли має значення швидкість поширення сигналів про події і т.д. Для цих цілей фізичні теорії здійснюють *експлікацію П-Ч* термінології.

У силу поділу праці, який склався в науці, проблеми дослідження П-Ч-х властивостей світу стали проблемами фізики. Фізика розбудовує відповідну теорію вимірів, що враховує швидкість сигналів про настання подій, переміщення подій і спостерігачів, взаємні переміщення подій і т.д.

Уже на рівні здорового глузду наступна обставина. П і Ч містять у собі щось таке, що заважає розглядати їх як емпіричні речі, які можна пощупати, стиснути, розтягти, зламати й т.п. П і Ч не є емпіричними об'єктами. Не можна окремо спостерігати емпіричні об'єкти і їх зміни, з одного боку, і П і Ч – з іншого. Безглуздо говорити про зміну, виникнення й зникнення П і Ч. Безглуздо говорити про швидкість Ч й т.п. Однак вираження «*зміна часу*», «*зворотній хід часу*» і т.д. міцно узвичаїлися й часто вживаються не тільки як літературні модифікації термінів, що позначають П-ч-й порядок об'єктів, П-Ч-і інтервали, ряди, структури й т.п., а буквально. Якщо, наприклад, висловлене твердження, що П-Ч у районі такої-то зірки скривлене, то це твердження ще рівно нічого не

значить, поки не сказано в якому змісті тут ужиті терміни «П» і «Ч». Якщо він (П) ужитий у змісті «місткість» всіх речей, а Ч – чиста *тривалість*, це твердження безглузде, тому що скривлений може бути лише якийсь ряд предметів щодо іншого ряду, а з погляду такого поняття П-Ч все це виключене. Виходить, термін «П» ужитий тут у змісті П – світ *усіх, або вибраних речей*, Ч – світ *усіх, або обраних, явищ*. Але в такому випадку нічого дивного в цьому немає.

Відносно Ч задамося питанням: « Чи можлива така ситуація, що в одному місці Всесвіту Ч іде інакше (швидше, повільніше), ніж в іншому?» Коротше кажучи, якщо космонавт повернувся на Землю через Т років після польоту, то він прожив рівно Т років за земним часом, як би він не відраховував час у своєму кораблі. Якщо він повернувся живим, то абсолютно ніякої заслуги фізичних теорій виміру часу в цьому немає. Питання про тривалість життя нічого спільного з питанням про вимір часу не має. І вже напевно не трапиться так, що космонавт, повернувшись на Землю, довідається, що його батьки ще не народилися.

3.2. Експлікація просторово-часових характеристик у фізиці.

Фізика намагається дати опис, пояснення й прогнозування явищ природи, виходячи з певних початкових положень. Причому, опис дається в тривимірному просторі (П) і в часі (Ч). Пояснення полягає у формулюванні фізичного закону, застосовного до спостережуваного й досліджуваного явища, і у встановленні співвідношення між причиною й наслідком. Воно дається в рамках теорії, здатної дати елементи передбачення. Опис і прогнозування повинні бути кількісними; це основна ознака точної науки. Але кількість виражається й визначається тільки в результаті вимірів. Вимір фізичної величини зводиться до порівняння її з іншою однорідною величиною, точно певної й умовно прийнятої за одиницю (*еталон*) для виміру всіх таких же величин. Тому для П-Ч-х вимірів необхідно перейти від філософського визначення П і Ч до конкретно-фізичного (вимірювального), тобто виражених за допомогою певних фізичних об'єктів (лінійки, годинник і т.п.) і процесів (*експлікація поняття*). Так, основними одиницями СІ є метр (м), секунда (с), кілограм (кг), радіан (рад), стерadian (стер), ампер (А).

1 м – довжина, рівна 1650763,73 довжин хвиль у вакуумі випромінювання, відповідного до переходу між рівнями $2p^{10}$ і $5d^3$ атома криптону-86. **1 с** – інтервал часу, протягом якого відбувається 9192631770 коливань, відповідних до резонансної частоти енергетичного переходу між

рівнями надтонкої структури основного стану атома цезію-133. **1 кг** – одиниця маси – представлений масою міжнародного прототипу кілограма.

Обмірювані П-Ч-і характеристики (довжини об'єктів, тривалості подій) і їх похідні (швидкості, прискорення) у різних ІСВ, що рухаються відносно один одного, будуть відрізнятися внаслідок ефекту Доплера від, обмірюваних в ІСВ, що умовно вважається нерухомою (власні значення довжини, тривалості, швидкості й т.п.). Визначення кінематичних і динамічних характеристик різних об'єктів і подій, заданих у я.-н. ІСВ, в інших ІСВ й становить основне завдання СТВ.

3.3. Постулати СТВ. Перетворення Пуанкаре – Лоренца.

Основу релятивістської механіки становить принцип відносності Пуанкаре-Ейнштейна. В 1904 р. у доповіді на Конгресі мистецтва й науки в Сент-Луїсі Пуанкаре серед основних принципів теоретичної фізики формулює принцип відносності, згідно з яким, за його словами, *«закони фізичних явищ повинні бути однакові для нерухомого спостерігача і для спостерігача, виконуючого рівномірний поступовий рух, так що ми не маємо й не можемо мати ніякого засобу визначати, знаходимось ми в подібному русі або ні»* (Poincare H. L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique //Bulletin des Sciences Mathématiques. – Janvier 1904. – V.28, ser.2. – P. 302 – 324; The Monist.- 1905.- V.XV,№ 1.). Аналогічне висловлення належить Ейнштейнові (Zur Elektrodynamik der bewegter Körper. Ann. Phys., 1905, 17, 891 - 921). Другим фундаментальним принципом фізики – *існування кінцевої максимальної швидкості переміщення об'єкту (передачі інформації)*. До речі, цей принцип про неможливість миттєвих переміщень впливає із чисто логічних міркувань – *не може один і той же об'єкт одночасово знаходитись в двох просторово розділених місцях*.

Таким чином, принцип відносності Пуанкаре – Ейнштейна можна сформулювати так: **1.** У будь-яких ІСВ всі фізичні явища протікають однаково (при однакових умовах). Інакше: ніякі фізичні експерименти (механічні, теплові, електромагнітні, ядерні і т.д.), проведені усередині лабораторії (ІСВ), не дозволяють установити, чи перебуває ця лабораторія в спокої або рухається рівномірно й прямолінійно. Інакше: форма всіх фізичних законів інваріантна для перетворення Пуанкаре–Лоренца (П-Л). **2.** Швидкість поширення світла у вакуумі не залежить від руху джерела (або приймача) світла й однакова у всіх напрямках. Інакше: швидкість світла (як і будь-яких безмасових часток) у вакуумі однакова у всіх ІСВ: **$c = \text{inv}$** ($c = 2,99792550 \cdot 10^8$ м/с).

Для виведення перетворень Пуанкаре – Лоренца (П-Л) скористаємося методом **к – коефіцієнтів** (фактично – ефектом Доплера).

Будемо вважати, що спостерігачі у всіх ІСВ мають однаковий набір годинників. Такий годинник наданий самою природою. Частоти спектральних ліній тотожних атомів (наприклад, атомів цезію-133) – завжди ті самі у всіх ІСВ, і їх можна використовувати в якості обладнання для відліку часу. Синхронізація таких годинників здійснюється шляхом обміну радіо- або світловими імпульсами. Для виміру відстаней використовується радіолокаційний (лазерний) метод. Усе, що тут необхідно, це фіксувати моменти посилки й приймання сигналів за допомогою відповідних радіотехнічних обладнань.

Основна ідея методу – розгляд одномірної сукупності інерціальних спостерігачів, що рухаються рівномірно уздовж деякої прямої (наприклад, променя світла) – осі **x**.

Розглянемо ІСВ1, умовно вважаємо нерухомою, щодо якої уздовж лінії їх з'єднуючої зі швидкістю **v** (в одиницях швидкості світла $\beta = v/c$). Можна вважати нерухомою ІСВ2, тоді ІСВ1 рухається відносно ІСВ2 з тією же швидкістю, але в протилежному напрямку. У момент, коли вони перебувають поруч, відбувається синхронізація їх годинників. Обмін сигналами відбувається систематично, так що положення ІСВ одної щодо іншої відомі.

Уведемо позначення: $t_1 - t_0 = \Delta t$ – проміжок часу між моментом синхронізації годинників t_0 і моментом посилки сигналу в момент часу t_1 спостерігачем ІСВ1; $t'_1 - t'_0 = \Delta t'$ – проміжок часу між прийманнями цих сигналів спостерігачем в ІСВ2; t_2 – момент приймання відзеркаленого сигналу спостерігачем в ІСВ1. Тоді $\Delta t' = k \Delta t$, а $t_2 - t_0 = k \Delta t'$. Для інерціальних спостерігачів коефіцієнт **k** не міняється згодом і не залежить від величини **t**. Та обставина, що фактор **k** однаковий при посилці сигналів від ІСВ1 до ІСВ2 і від ІСВ2 до ІСВ1, впливає безпосередньо із принципу відносності. Неважко бачити, що він визначається тільки відносною швидкістю ІСВ. Знайдемо $k = f(v)$.

Час, за який сигнал пройшов відстань від ІСВ1 до ІСВ2 і назад, буде $(t_2 - t_1)/2$, а відстань між ними буде $c(t_2 - t_1)/2 = c/2 [(t_2 - t_0) - (t_1 - t_0)] = c/2 (k\Delta t' - 1) = c/2 (k^2 - 1)\Delta t$. Цю ж відстань спостерігач 2 подолав зі швидкістю **v** за час $(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}(k^2 + 1)\Delta t$. Порівнюючи шляху $c/2 (k^2 - 1)\Delta t = v/2 (k^2 + 1)\Delta t$, одержуємо $v/c = \beta = (k^2 - 1) / (k^2 + 1)$, звідки фактор **k** буде дорівнювати:

$k = \sqrt{\frac{k+\beta}{k-\beta}}$. Знайдений коефіцієнт виражає релятивістський ефект Доплера.

Фізично це означає, що ідентичний синхронізований годинник показував однаковий час у всіх ІСВ (принцип відносності). Однак, якщо спектр

випромінювання цезію-133 посиляють із ICB2 (T_0), а приймають в ICB1 (T), то спектри власний і прийнятий, внаслідок ефекту Доплера, зміщені у відношенні k : $T = k T_0$, $\lambda = ct = c k T_0 = k \lambda_0$: при взаємнім віддаленні в довгохвильову частину спектра, а при зближенні – у короткохвильову, причому $k = \lambda / \lambda_0$ не залежить від частоти (довжини хвилі у вакуумі) і λ застосуємо до всіх спектральних ліній випромінювання. Звідси випливає, що координати x і час t підкоряються таким же співвідношенням: $x = k x_0$ і $t = k t_0$.

Використовуючи ефект Доплера (метод k - коефіцієнтів), можна одержати всі основні наслідки із принципу відносності П-Е, не прибігаючи до перетворень П-Л. Однак при розв'язку багатьох фізичних завдань більш звичний і зручний, особливо в динаміці, спосіб, заснований на координатному або векторному представленні фізичних величин. Тому, щоб показати еквівалентність цих двох методів, одержимо перетворення П-Л, використовуючи метод коефіцієнта k (ефект Доплера), а з них уже одержимо необхідні наслідки.

Позначимо, за традицією, ICB1 буквою K , а, що рухається ICB2 – K' ; відповідно координати й час x, t і x', t' . Обмін інформацією між ними здійснюється світловими або радіо – імпульсами, так що $t = x/c$, $t' = x'/c$. Тоді маємо: $x = k x' = x' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = x'(1+\beta) / \sqrt{1-\beta^2} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, аналогічно для часу: $t = k t' = t' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \times \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = t' \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = (t' + v/c t') / \sqrt{1-\beta^2} = (t' + v/c^2 x') / \sqrt{1-\beta^2}$.

У декартовій системі координат при русі K' зі швидкістю v відносно K уздовж осі x перетворення П-Л мають вигляд:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, y = y', z = z', t = [t' + (v/c^2)x'] / \sqrt{1-\beta^2}.$$

При зворотних перетвореннях у ДО' перед швидкістю v потрібно поміняти знак. Враховуючи, що ICB не обов'язково рухаються уздовж однієї осі, запишемо їх у векторній формі:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + (\mathbf{r}', \mathbf{v})\mathbf{v}/v^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) + \mathbf{v}t' / \sqrt{1-\beta^2} \quad \text{і}$$

$$t = [t' + (\mathbf{r}', \mathbf{v})v/c^2] / \sqrt{1-\beta^2}.$$

3.4. Інтервал між подіями і його інваріантність.

Чотиривимірним П називають уявний П 4-х вимірів, на осях якого відкладаються 3 координати x, y, z і час t . Будь-яка подія зображується крапкою в 4-мірному ПЧ (світова крапка). Руху деякої частинки у ПЧ відповідає світова лінія.

Якщо x_1, y_1, z_1, t_1 і x_2, y_2, z_2, t_2 – координати подій 1 і 2 в 4-мірному ПЧ, то величину S_{12} , рівну $S_{12} = \sqrt{[c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]}$ називають *інтервалом* між двома подіями. Інтервал між двома нескінченно близькими подіями $ds = \sqrt{(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)} = \sqrt{(c^2 - dl^2)}$. Шляхом перетворень П-Л легко показати, що $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2$, тобто $S_{12}^2 = \text{inv}$ – інваріант.

Поняття інтервалу дозволяє вивчати ПЧ-е співвідношення між подіями, установлювати причинно-наслідкові зв'язки між ними. Причинно-наслідковий зв'язок можливий лише між подіями, розділеними речовинними інтервалами ($ct > l$ і $S_{12}^2 = c^2 t^2 - l^2 > 0$). Такі інтервали називають *часоподібними*. Уявні інтервали ($ct < l$ і $S_{12}^2 < 0$) називають *просторовоподібними*.

3.5. Релятивістський закон додавання швидкостей.

Нехай ICB2 рухається відносно ICB1 зі швидкістю V . В ICB2 у тому ж напрямку рухається матеріальна точка зі швидкістю v' . З якою швидкістю v рухається м.т. відносно ICB1? З перетворень П-Л маємо: $dx/dt = (dx' + V dt') / (dt' + V/c^2 dx')$ $= (dx' / dt' + V) / (1 + V/c^2 dx' / dt')$ і остаточно маємо: $v = (v' + V) / (1 + Vv' / c^2)$. Векторну форму закону додавання швидкостей одержимо з $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$:

$\mathbf{v} = [\mathbf{V} + \mathbf{v}' \sqrt{(1 - \beta^2)} + 1/V^2 (1 - \sqrt{(1 - \beta^2)}) (\mathbf{v}', \mathbf{V}) \mathbf{V}] / [1 + (\mathbf{v}', \mathbf{V}) / c^2]$. Формула переходу від $\mathbf{v}$ до $\mathbf{v}'$ відрізняється від наведеної знаком при $\mathbf{V}$.

3.6. 4 – мірне представлення кінематики й динаміки СТО.

Математичні операції у ПЧ значно полегшуються, якщо ввести змінні: $x = x_1, y = x_2, z = x_3, ict = x_4, i = \sqrt{-1}$. Тоді світова крапка буде представлена чотирма координатами: x_1, x_2, x_3, x_4 , з яких одна, відповідна до часу, є уявною. Щоб коротше був запис, користуються позначенням координат світової крапки у вигляді x_i , де $i = 1, 2, 3, 4$. Подібно тому, як в 3- мірному просторі положення частинки щодо системи відліку визначається 3-мірним вектором, так у ПЧ користуються *чотиривимірним вектором* (4-вектор $\mathbf{x}_i$, 4-вектор швидкості $\mathbf{u}_i$, 4-вектор прискорення $\mathbf{w}_i$, 4-вектор імпульсу $\mathbf{p}_i$, 4-вектор електромагнітного потенціалу $\mathbf{A}_i$ і т.д.). Важливо відзначити, що всі 4-вектори утворюють групу Пуанкаре – Лоренца (ГПЛ) і форма їх перетворень однакова у ПЧ. Наприклад, $x_1 = (x'_1 - i v/c x'_4) / \sqrt{1 - \beta^2}$, $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$, $x_4 = (x'_4 + i v/c x'_1) / \sqrt{1 - \beta^2}$. Аналогічно $A_1 = (A'_1 - i v/c A'_4) / \sqrt{1 - \beta^2}$, $A_2 = A'_2$, $A_3 = A'_3$, $A_4 = (A'_4 + i v/c A'_1)$. За допомогою цих формул легко показати, що у ПЧ квадрат 4-вектора й скалярний добуток є інваріантним, тобто $A_i^2 = A_i'^2$, $A_i B_i = A'_i B'_i$, де $i = 1, 2, 3, 4$. Із цих формул випливає,

що просторові й тимчасові компоненти квадрата 4-вектора відносні, вони залежать від вибору ICD.

3.7. Швидкість світової крапки.

Подібно тому як у тривимірному просторі механіка визначає швидкість похідної радіус-вектора $\vec{r}$ за часом t , так у ПЧ швидкість світової крапки може бути визначена диференціюванням за власним часом τ 4-вектора $\vec{x} = \vec{e}_i x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), тобто 4-вектор швидкості можна записати у вигляді: $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{e}_i \frac{dx_i}{d\tau}$, або

в проекціях на осі координат ПЧ: $u_i = dx_i / d\tau$. Підставляючи $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ й $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ маємо:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \\ u_2 &= \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \\ u_3 &= \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dz}{dt} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \\ u_4 &= \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d(ict)}{dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} , \end{aligned}$$

де v_x, v_y, v_z є проекції швидкості $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ на декартові осі координат. Четвертий компонент 4-вектора u_i береться на вісь часу.

Перші три рівності запишемо у векторній формі:

$$(u_1, u_2, u_3) = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Знаходячи u_i^2 , можна показати, що

$$u_i^2 = -c^2 \text{ і } u_i'^2 = -c^2 \text{ звідки } u_i^2 = inv .$$

Відзначимо, що 4-вектор є часоподібним вектором.

3.8. Прискорення світової крапки.

Прискорення світової крапки визначається рівністю: $w_i = du_i / d\tau$. У векторній формі маємо:

$$(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\dot{\vec{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\vec{v} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta^2} \right)}{\left(-\beta^2 \right)^{3/2}} , \quad w_4 = \frac{i}{c} \frac{\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta^2} \right)}{\left(-\beta^2 \right)^{3/2}} .$$

Зводячи ці два вирази у квадрат і складаючи, одержимо: $w_i^2 = \frac{\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} \left[\dot{\vec{v}}^2 \right]}{\left(-\beta^2 \right)^3} > 0$. Звідки

впливає, що 4-вектор прискорення – просторовоподібний. Диференціюючи $u_i^2 = inv$ по τ , одержимо $u_i w_i = 0$, звідки впливає, що 4-вектори u_i і w_i взаємно перпендикулярні.

3.9. 4-вектор імпульсу вільної частинки.

4-вектор імпульсу p_i одержимо, множачи масу частинки (тіла) m на 4-вектор швидкості u_i . Враховуючи, що $u_i^2 = -c^2 = \text{inv}$ і $p_i^2 = -mc^2 = \text{inv}$, одержуємо, що маса m – скаляр, що не залежить від вибору системи відліку (не залежить від швидкості). Це ж твердження можна одержати безпосередньо з перетворень П-Л для компонентів p_i :

$$p_1 = \frac{p_1' - i \frac{v}{c} p_4'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; p_2 = p_2'; p_3 = p_3'; p_4 = \frac{p_4' + i \frac{v}{c} p_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$
 Підстановка компонентів p_i в p_i^2 дає:

$$p_i^2 = -m^2 c^2, i = 1, 2, 3, 4.$$

3.10. Кінетична й повна енергії тіла, що вільно рухається.

Нехай під дією сили, прикладеної в напрямку руху тіла, тіло починає рухатися. При цьому буде відбуватися робота $dA = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}$. Тут $\mathbf{F}_i = m \mathbf{w}_i$, $\mathbf{w}_i = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, тому що $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$, а $d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot dt$. Остаточно маємо: $dA = (m dv / dt) \cdot v \cdot dt / \sqrt{1 - \beta^2}$,

або $dA/mc^2 = (\beta \cdot d\beta) / (1 - \beta^2)^{3/2}$. Інтегрування дає: $A/mc^2 = \int_0^\beta \frac{\beta d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1$. Робота йде на надання тілу кінетичної енергії $E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$.

Далі $E_k + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = E$ – повна енергія тіла, що вільно рухається. Якщо тіло є у

покої $\beta = 0$, то енергія спокою $E_0 = mc^2$. У русі $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

3.11. Функція Гамильтона тіла, що вільно рухається.

Функція Гамильтона H виражає енергію тіла E , виражену через імпульс тіла $\mathbf{p}$. Зв'язок між $\mathbf{p}$ і E знайдемо, перетворивши часовий компонент 4-вектора імпульсу. Це той випадок, коли тіло спочиває в системі K' : $p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \beta^2}} = i \frac{E}{c}$.

Тепер запишемо p_i^2 у вигляді: $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = -m^2 c^2$, де $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p^2$, а $p_4^2 = -E^2 / c^2$, або $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$, звідки релятивістська функція Гамильтона для вільної частинки $H = \sqrt{(c^2 p^2 + m^2 c^4)}$ – рівняння Дірака. Для нерухомої частинки $E_0 = \pm mc^2$. Позитивні значення енергії спокою відносяться до частинки, а негативні – до античастинки.

Для фотона $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, де $E = h\nu$, $p = h\nu/c$. Підставляючи E і p у формулу Дірака, маємо: $(h\nu)^2 = (h\nu/c)^2 c^2 + m^2 c^4$, звідки $m_{\text{фотона}} = 0$. Фотон – безмасова частинка.

Поняття простору й часу у фізиці мають фундаментальні значення. В основі ньютонівської фізики лежить математичний винахід поняття евклідова простору й абсолютного часу. Однак тепер уже зрозуміло, що ототожнення фізичних простору й часу з евклідовим простором і абсолютним часом можна робити тільки приблизно й прийнятне не у всіх випадках життя.

Таким чином, базу, на якій була побудована спеціальна теорія відносності (СТВ), було відкриття кінцевої швидкості світла Олафом Ремером в 1675 г. за спостереженнями затмарення найближчого супутника Юпітера. Наступне після Ремера було важливе відкриття Джемсом Брадлеем в 1728 г. аберації. Бродлей знайшов, що положення зірки Дракона міняється протягом року й що ця зміна не є результатом паралакса, але обумовлене рухом Землі по орбіті й кінцевою швидкістю світла. І ще одне з найбільших відкриттів, про який ми говорили вище, - ефект Доплера. В 1842 р. Християн Доплер теоретично показав, що колір світла повинен залежати від відносної швидкості руху спостерігача й джерела.

Розглянемо ще деякі задачі СТВ.

3.12. Відносність одночасності подій.

Розглянемо дві події (запалювання лампочок), одночасні в ІСВ ДО. У K

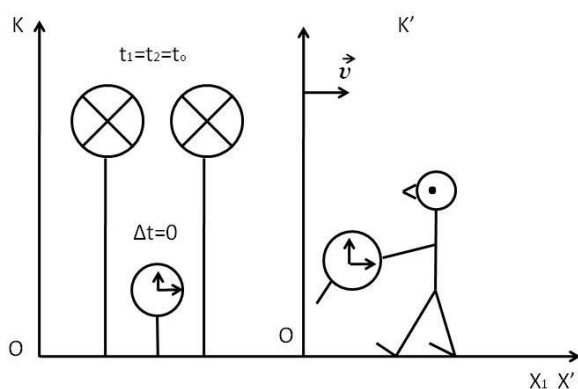


Рис. 3.1

маємо:
$$t'_1 = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$t'_2 = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{-\frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

3.6.

Таким чином, події, одночасні в K , не будуть одночасними в K' . Поняття одночасності втрачає зміст, якщо не зазначена K , у якій події одночасні, а це означає, що немає єдиного для всіх крапок простору абсолютного часу.

3.13. Відносність довжин у різних ІСВ.

Нехай довжина лінійки $x'_2 - x'_1 = l_0$ щодо системи K' , у якій вона покоїться. Визначимо довжину лінійки в системі K , стосовно якої K' рухається зі швидкістю $\vec{V}$.

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

При вимірі довжина лінійки максимальна в тій ІСВ, у якій вона покоїться.

3.14. Тривалість події в різних ІСВ. Парадокс годинників.

Час, відлічуваний по годинникові, що рухався разом із системою, називається її власним часом. У цій ІСВ (K') $ds = cd\tau'$. Нехай у K' у крапці з координатою x' в момент часу t'_1 загоряється лампочка, а в момент t'_2 - гасне, так що тривалість горіння $\Delta\tau' = t'_2 - t'_1$.

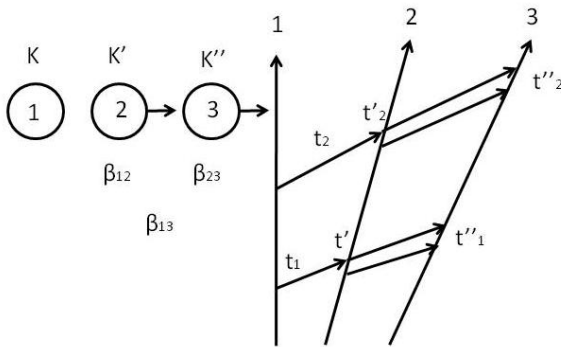


Рис. 3.2

Обчислимо тривалість цієї події в системі K . Власний час, відмічуваний спостерігачем, що рухається, завжди менше, ніж відповідний проміжок часу, відмічуваний нерухомим спостерігачем.

$$c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \Rightarrow dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \Delta\tau' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Отримане співвідношення було перевірено Айвсом в 1938 р. по зміні частоти спектральних ліній (внаслідок ефекту Доплера) атомів He, що рухалися зі швидкістю $1,8 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Для розгляду «парадокса часу» («парадокса близнюків») застосуємо метод коефіцієнтів k .

Спочатку одержимо деякі корисні співвідношення. Нехай маємо три коллинеарні спостерігача: 1, 2, 3. Спостерігач 1 спочиває, 2-й рухається відносно нього зі швидкістю β_{12} (в одиницях c), а 3-й – зі швидкістю β_{23} відносно 2-му. Коефіцієнти k для них відповідно будуть: k_{12}, k_{23}, k_{13} . Потрібно знайти співвідношення між коефіцієнтами k . Маємо: $t_2 - t_1 = \Delta t$, $t'_2 - t'_1 = k_{12} \Delta t$, $t''_2 - t''_1 = k_{23} (t'_2 - t'_1)$ або $t''_2 - t''_1 = k_{12} k_{23} \Delta t$, або $t''_2 - t''_1 = k_{13} \Delta t$, звідки $k_{13} = k_{12} k_{23}$. Отже, ми прийшли до простого результату: коефіцієнти k просто перемножуються (якщо виразити коефіцієнти k через відносні швидкості, то одержимо релятивістську формулу додавання швидкостей, але про це далі).

Розглянемо випадок, коли 1-й і 3-й спостерігачі спочивають. Тоді $\beta_{13} = 0$, $k_{13} = 1$ і $k_{12}k_{23} = 1$, звідки $k_{12} = 1/k_{23}$ й $\beta_{12} = -\beta_{23}$:

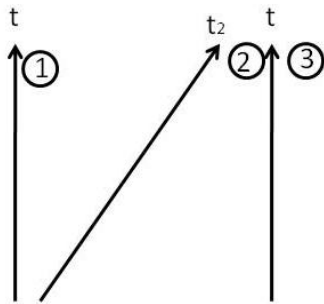


Рис. 3.3

- 1) Спостерігач 2 віддаляється від спостерігача 1 з такою ж відносною швидкістю, з якої він наближається до спостерігача 3.
- 2) Якщо для зв'язку спостерігачів, що взаємно віддаляються, застосовується коефіцієнт k , то для тих, що зближаються застосовується $1/k$. Як приклад можна навести ефект

Доплера в оптиці: $\lambda = cT$, $T = kT' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}T'$ і

$T_{\text{сб}} = T'/k = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}T'$. Таким чином, спектр випромінювання джерела, що

віддаляється, зміщується в червону область, а, що наближається - у фіолетову. По «червоному зсуву» спектральних ліній далеких галактик судять про швидкість їх розбігання.

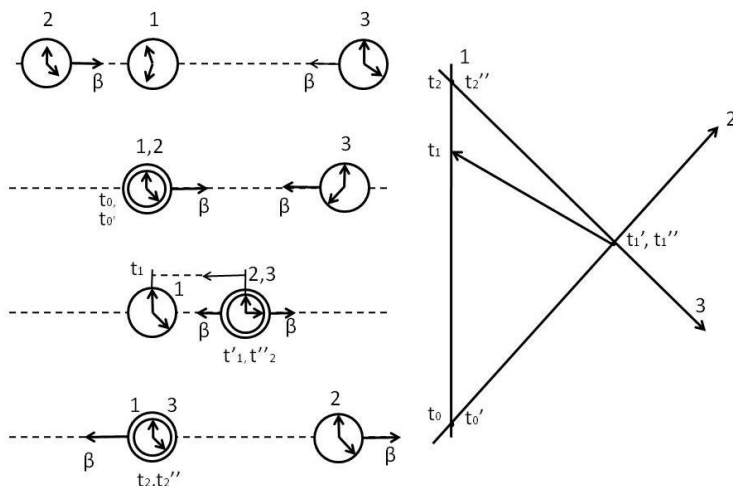


Рис. 3.4

Тепер займемося «парадоксом часу». Знову розглядаємо трьох колінеарних спостерігачів 1, 2 і 3. Нехай швидкості спостерігачів 2 і 3 відносно 1 рівні по величині, але протилежні по напрямкові: $|\beta_{12}| = |\beta_{13}|$. Тому, якщо для зв'язку 1 і 2 слід застосовувати коефіцієнт k , то для зв'язку 1 і 3 – коефіцієнт $1/k$.

Звірення годин і відліки часу робляться в моменти зустрічі 1 і 2 спостерігачів (t_0 і t'_0), 2 і 3 (t'_1 і t''_1), - про що посилають радіоімпульс 1-му, 3 і 1 (t_2 і t''_2). По годинникові нерухливого спостерігача 1 з моменту зустрічі з 2-м спостерігачем до зустрічі з 3-м пройшов час $t_2 - t_0 = \Delta t \Rightarrow$

$\Delta t = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) = k\Delta t' + \Delta t' \frac{1}{k} = (k + \frac{1}{k})\Delta t'$. По годинникові спостерігача, що

рухається, 2 від моменту зустрічі з 1-м до зустрічі з 3-м пройшов $t'_1 - t'_0 = \Delta t'$ час, а по годинникові спостерігача 3 від зустрічі з 2-м до зустрічі з 1-м пройшло таке ж $t''_2 - t''_1 = \Delta t'$ час внаслідок рівності їх швидкостей по $|\beta_{12}| = |\beta_{13}|$ модулю. Усього по годинникові спостерігачів, що рухаються, пройшов $2\Delta t'$ час. Порівняємо цей час

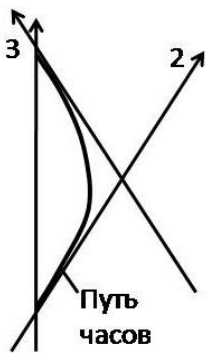


Рис. 3.5

із показаннями годинника нерухливого спостерігача. Так як $k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2 > 0$, то $(k + \frac{1}{k}) > 2$ й, отже, по годинникові нерухливого спостерігача пройде більше часу, ніж по годинникові, що рухався.

Виникає питання: «Звідки береться така асиметрія у вимірах при умовах, які видадуться зовсім симетричними? Чи не можна вибрати СВ так, щоб спостерігач 1 рухався, а 2 і 3 спочивали? Адже тоді нерівність зміниться на зворотню». Ні, не можна. Можна вибрати СВ так, що буде спочивати 2 спостерігач, а 1 і 3 – рухатися, або 3 – спочиває, а 1 і 2 рухаються, - завжди буде отриманий той самий результат: час по годинникові нерухливого спостерігача більше часу, показаний годинником, що рухався. Однак не можна добитися того, щоб одночасно спочивали й 2, і 3 у який-небудь ІСВ, тому що й 2, і 3 мають відносну швидкість. Таким чином, один часовий інтервал (самий короткий) завжди виходить у результаті спільних вимірів, зроблених двома інерційними спостерігачами; іншою же є виміром одного спостерігача. Отже, ніякої симетрії в цих вимірах немає.

Розглянемо, що буде, якщо користуватися одним годинником: у момент, коли другий спостерігач порівняє з першим, останній перекидає йому одні зі своїх годинників, потім другий перекидає його третьому, а той при зустрічі знову повертає його першому для звірення (уся ця процедура еквівалентна відправленню одного із близнюків у космічний політ, і потім його поверненню й порівнянню з віком брата). Чи будуть годинники показувати однаковий час? Ні. Годинник спостерігача 1 увесь час перебувають в ІСВ. Переданий годинник випробовував прискорення. Отже, цей годинник виявлявся в НІСВ. Чим крутіше звивається крива, що описує шлях годинників, тим менше час, за який переданий годинник змінював свою швидкість і тим більше випробовуване годинником прискорення. Принцип відносності ніколи не зтверджував, що неінерціальний рух еквівалентний інерціальному. Однакові годинники, незалежно від їхньої конструкції, будуть іти однаково у всіх ІСВ, згідно із принципом відносності. Конкретна конструкція приладів для відліку часу нічим не обмежується. Можна скористатися атомним годинником, пружинними, зміною поколінь кроликів, β -радіоактивним розпадом і т.п.

Але якщо ми прагнемо знати, як поведуться той або інший годинник у процесі прискорення, відповідь можна одержати лише в тому випадку, якщо ми дещо знаємо про обладнання годинника. Якщо, наприклад, наше обладнання

відраховує покоління кроликів, а прискорення настільки велике, що всі кролики гинуть, то обраний нами прилад для відліку часу просто перестає працювати. Звичайний і протиударний годинник по-різному поведуться при тому самому прискоренні. Відомі годинники, здатні винести дуже великі прискорення, наприклад радіоактивні ядра. Але й вони не можуть пережити занадто великого прискорення (наприклад, зіткнення із частками високих енергій). Виходить, для будь-якого обладнання, що відраховує час, - від кроликів до радіоактивних ядер – є граничне значення прискорення, при якому обладнання руйнується. А де трохи нижче цього граничного значення (де саме, залежить від конструкції годинника) перебуває граничне значення прискорення, вище якого годинник уже йшов невірно. Однак, звідки ж відомо, правильно йде годинник чи ні? Із принципу відносності випливає, що в ІСВ усі годинники ідуть однаково добре. Тому можна затверджувати наступне: якщо на діаграмі є скривлена ділянка шляху (а це свідчило, що мало місце прискорення), то в будь-який момент часу руху із прискоренням можна вказати інерціального спостерігача, що рухається, переміщається по дотичній до траєкторії дійсного руху з миттєвою швидкістю фактичного руху. Тепер можна прийняти те, що правильно йдуть годинники ті, які протягом спільного з інерціальним спостерігачем руху йдуть так само, як і годинник тієї ж конструкції інерціального спостерігача. Це звичайний геометричний спосіб випрямлення: коли ми вимірюємо довжину дуги, то визначаємо її як суму довжин прямолінійних відрізків, якими ми апроксимували криву. Та ж процедура використовується для виміру часу.

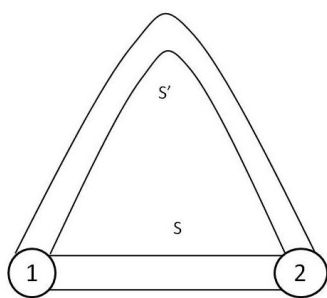


Рис. 3.6

Нерідко ставлять запитання: чому на відліку часу годинником інерціального й неінерціального спостерігачів позначається та обставина, що годинник неінерціального спостерігача прискорювався? Адже завжди можна зробити так, щоб прискорення відбувалося протягом дуже короткого часу. Однак у цих словах не більше здорового глузду, чому в наступному міркуванні. Проведемо на карті дві дороги, що з'єднують два міста (1 і 2). Дорога S – найкоротша, тому що вона пряма. Якщо додержуватися аргументів, що сумніваються в тому, що прискорення впливає на хід годинника, потрібно було сказати так: дорога S' по своїй довжині лише небагато відрізняється від дороги S , тому що вона «практично увесь час теж пряма». Зрозуміла помилка в міркуваннях? Дорога S' набагато довше S не тому, що довжина скривленої частини велика, а тому, що весь шлях скривлений у цілому. І годинник, що мав прискорення, показує менший час, ніж годинник, що перебував в інерціального

спостерігача, не тому, що вони більше або менший час прискорювалися, а тому, що при русі годин мало місце прискорення взагалі.

Лекція 4. Поняття про загальну теорію відносності (ЗТВ). Принцип еквівалентності. Астрофізика.

Закон тяжіння Ньютона $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm\vec{r}}{r^3}$ не може бути безпосередньо перенесений у СТВ, оскільки в останній усяка взаємодія може поширюватися лише з кінцевою швидкістю, яка не перевищує швидкості світла в порожнечі. Тим часом, згідно з наведеним рівнянням, при зміні положення одного з тіл миттєво міняється сила, що діє на друге тіло. Для побудови релятивістської теорії тяжіння виявився істотним «принцип еквівалентності», що встановлює аналогію між рухом тіл у гравітаційнім полі й вільним рухом тіл, спостережуваним у НІСВ. Згідно із принципом еквівалентності інертної й гравітаційної мас відношення гравітаційної маси M_{zp} (гравітаційний заряд), що визначає силу, що діє на тіло в гравітаційнім полі напруженості $\vec{g}$ ($\vec{F} = \vec{g}m_{zp}$), до інертної маси M_u , що зв'язує силу $\vec{F}$ й величину викликуваного нею прискорення $\vec{a}$ ($\vec{F} = \vec{a}m_u$), не залежить від властивостей і складу тіла. Тому прискорення пробного тіла в гравітаційнім полі визначається тільки напруженістю поля в крапці, де тіло перебуває: $\vec{a} = \vec{g} \cdot \frac{M_{zp}}{M_u}$ і при $M_{zp} = M_u$ $\vec{a} = \vec{g}$.

В 1915 р. при побудові ЗТВ Ейнштейн звернув увагу на ту обставину, що 1-й закон Ньютона, за допомогою якого введена представлення про ІСВ, не можна перевірити експериментально. Дійсно, для перевірки 1-го закону Ньютона про те, що тіло на яке не діють зовнішні сили, рухається рівномірно й прямолінійно, необхідно переконалися у відсутності сил. Можна послідовно позбутися сил зв'язку, сил тертя, електричного й магнітного полів і т.п., але тільки не від сил тяжіння. І отут Ейнштейн говорить: якщо ми не можемо позбутися тяжіння, будемо вважати, що тяжіння й інерція – це те саме. Адже й те, і інше діє на тіла однаково; сили, обумовлені обома явищами, пропорційні масам тіл. Відповідно до цього можна переформулювати перший закон Ньютона, підрозділивши його на дві частини: існує деякий стандартний рух тіл, що характеризується тим, що коли рух тіл відповідає цьому стандарту, на них не діють ніякі сили; друга частина ньютонівської формулювання затверджує, що такий стандартний рух являє

собою рух по прямої лінії з постійною швидкістю. Ейнштейн запропонував вилучити другу частину. У такий спосіб стандартний рух відбувається внаслідок інерції й тяжіння. Тільки в тому випадку, якщо тіло відхиляється від такого руху – вільного падіння, - можна говорити про дію сили; така сила є вже щось, що зміщує тіла з їхнього стандартного шляху, і тому це вже не тяжіння. Тяжіння – це зовсім не сила; тяжіння й інерція спільно становлять фон стандартного руху. Інакше, гравітація й інерція утворюють рейки, по яких рухається тіло під час відсутності сил. У системі відліку пов'язаної з падаючим вільно ліфтом, з ІСВ або з космічною лабораторією, що рухається по інерції в сонячній системі, усі закони фізики виглядають однаково. Тим самим здійсненні нові стандартні (інерційні) СВ – які вільно рухаються (по інерції або під дією тільки сили тяжіння). Такі СВ В.А. Фок назвав локально-інерціальними (обмеженими в просторі й у часі).

Якщо гравітаційне поле неоднорідне, то виключити його шляхом переходу до падаючої СВ відразу у всім просторі або в кінцевій, але не дуже малій області

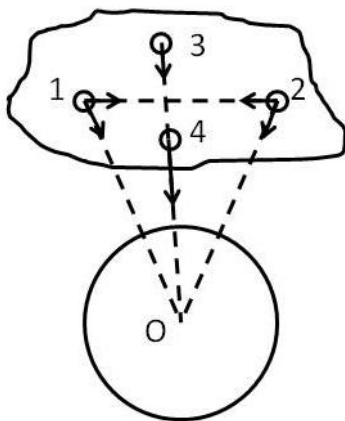


Рис. 4.1

не вдається. Дійсно, розглянемо, наприклад, відносний рух у гравітаційнім полі Землі двох часток, розташованих на відстані l друг від друга й падаючих по радіусу до її центру. При цьому частки 1 і 2 зближаються, прискорення їх щодо зближення рівно $\gamma \frac{Ml}{r^3}$. Частки 3 і 4 віддаляються друг від друга з

відносним прискоренням $2\gamma \frac{Ml}{r^3}$. Це означає, що при

русі протяжного тіла в неодноріднім полі в ньому виникають так звані приливні сили, що прагнуть його деформувати. Відносне приливне прискорення пари

крапок тіла пропорційно відстані між цими крапками й залежить від їхнього взаємного розташування. Тензорний коефіцієнт пропорційності характеризує ступінь неоднорідності гравітаційного поля й зветься тензором кривизни простору-часу. Вивчення відносного прискорення сусідніх часток тепер служить для опису гравітаційного поля що й може бути безпосередньо здійснене в релятивістській формі. Більше того, форма релятивістської теорії гравітації тепер установлена: вона повинна бути такою, щоб гравітація дозволяла відтворювати ті ж ефекти, що й інерція, оскільки вони розглядаються як єдина властивість.

Оскільки гравітаційна взаємодія універсальна й не існує «нейтральних» стосовно нього тіл, то виявляється неможливим у чисто гравітаційних експериментах виміряти напруженість гравітаційного поля. Подібні експерименти дозволяють визначити тільки відносні прискорення, тобто

кривизну простору-часу. П.-Ч. є плоским, якщо його кривизна всюди звертається в нуль. У випадку, якщо кривизна не дорівнює нулю, метрика не може бути плоскою.

Згідно з Ейнштейном, кривизна П.-Ч. пропорційна густині енергії – імпульсу речовини, що породжує гравітаційне поле. Відповідні рівняння, що дозволяють визначити метрику по заданому розподілі речовини й тим самим відновити геометрію П.-Ч., звуться рівняннями Ейнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi}{c^4} T_{ik}, \quad 4.1$$

де T_{ik} - тензор енергії-імпульсу матерії (включаючи електромагнітне поле), $R = g^{ik} R_{ik}$ - скалярна (інваріантна) величина, називана кривизною П.-Ч., R_{ik} - тензор кривизни, що виражається через частинні похідні метричного тензора g_{ik} по координатах П.-Ч.

У межі, коли гравітаційне поле слабе ($\varphi \ll c^2$) і рух джерела нерелятивістський, рівняння Ейнштейна зводяться до звичайного рівняння гравітаційного потенціалу (рівнянню Пуассона або рівнянню Лапласа) у теорії Ньютона. Тим самим передбачення теорії Ейнштейна для слабких гравітаційних полів носять характер малих виправлень $\approx \frac{\varphi}{c^2}$ до відомих результатів теорії Ньютона. Саме ці виправлення зазнають експериментальну перевірку. Результати всіх спостережень і експериментів по перевірці ЗТВ, включаючи такі, як вимір червоного зсуву й запізнювання світлових сигналів у гравітаційнім полі, вимір зрушення перигелію Меркурія й відхилення променів світла Сонцем, підтверджують цю теорію в області слабого поля, допускаючи відхилення від неї не більш декількох відсотків.

Найбільше радикально відрізняються висновки теорії Ейнштейна від ньютонівської теорії гравітації у випадку, коли гравітаційне поле не можна вважати слабким. Якісно новим у цьому випадку є передбачення ЗТВ можливості нетривіальних глобальних властивостей П.-Ч. Це стосується насамперед космології, коли розглядаються області простору й інтервали часу порядку радіуса кривизни П.-Ч.

Як приклад розглянемо рух пробного тіла й світла у вакуумі й сильнім полі тяжіння, створюваного сферичним тілом (зіркою). Розв'язок рівняння Ейнштейна для такого поля (розв'язок Шварцшильда) визначає геометричні властивості простору й темп перебігу часу поблизу тіла, що створює поле. Виявляється, що це поле завжди постійне (навіть, якщо речовина

центрального тіла робить радіальні рухи, залишаючись сферично симетричним) і залежить тільки від повної енергії тіла.

Вираз для чотиривимірного інтервалу в полі Шварцшильда має вигляд: $dS^2 = -(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + (1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r})c^2 dt^2$, 4.2

де $M = E/c^2$. У виразі для dS^2 є всі відомості про гравітаційне поле. Уточнимо, як користуватися цим виразом для фізичних висновків. Перші три доданки в сума дають узятий зі зворотним знаком квадрат відстані між нескінченно близькими крапками dl^2 , записаний у сферичній системі координат. Нерухомий спостерігач, що перебуває поблизу масивного тіла, може вимірювати відстані в малій околиці звичайним способом, уводячи декартові координати. У цих координатах $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Якщо вибрати $dz = r \cdot d\theta$, а $dy = r \cdot \sin \theta d\varphi$, то поза полем тяжіння в евклідовому просторі $dx = dr$. Поблизу масивного тіла, у полі Шварцшильда, як видно з рівняння для інтервалу

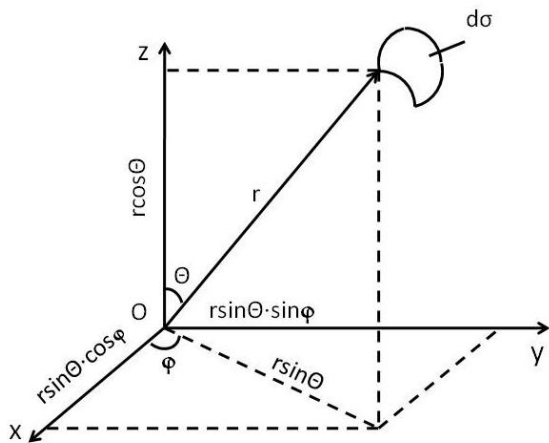


Рис. 4.2

$$dx = (1 - \frac{2\gamma M}{rc^2})^{-1/2} dr. \quad 4.3$$

Перед dr є множник, відмінний від одиниці, що відбиває факт неевклідовості геометрії простору. Останній доданок – помножений на c^2 квадрат проміжку часу τ , що тече в даній крапці:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}} \Delta t. \quad 4.4$$

Удаліні від тіла при $r \rightarrow \infty$ $\Delta\tau = \Delta t$.

Чим ближче крапка спостереження до тіла, що створює поле, тим повільніше йдуть годинники, тобто даному проміжку часу на нескінченності відповідає все менший проміжок часу $\Delta\tau$ (при цьому одночасність подій установлюється передачею світлових сигналів). При $r \rightarrow \frac{2\gamma M}{c^2}$ $\Delta\tau \rightarrow 0$.

Знайдемо силу тяжіння F , що діє в полі Шварцшильда на пробне тіло масою m , швидкість якого невелика ($v \ll c$). Ця сила, очевидно, рівна $F = m \frac{d^2 l}{d\tau^2}$.

Прискорення вільного падіння $\frac{d^2 l}{d\tau^2}$ для пробного тіла записується у вигляді:

$$\frac{d^2 l}{d\tau^2} = -\frac{\gamma M}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}}} \text{ і, отже, сила тяжіння } F = -\gamma \frac{Mm}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}}}. \quad 4.5$$

Видно, що при $r = r_g = \frac{2\gamma M}{c^2}$ сила тяжіння звертається в нескінченність. Ця особливість свідчить, що центральне тіло, якщо воно статичне, не може мати радіус менше r_g . Використовувана вище нерухлива недеформуєма сферична система координат застосовна також тільки при $r > r_g$. Цей критичний радіус r_g зветься гравітаційним, а сферу радіуса r_g називають сферою Шварцшильда. Помітимо, що нестатичне тіло може мати розміри менші гравітаційного радіуса.

На великій в порівнянні з r_g відстані поле Шварцшильда є звичайне поле тяжіння ньютонівської теорії. Розрахунки показують, що гравітаційний радіус Сонця 2,96 км, Землі – 0,886 см. Радіуси Землі й Сонця багато більше їх гравітаційних радіусів. Отже, поза Сонцем, Землею й інших зірок і планет гравітаційне поле з величезною точністю є поле Ньютона. Усередині речовини розв'язок Шварцшильда незастосовний.

Подивимось тепер, як будуть поширюватися промені світла, що рухаються по радіусу в сферичному полі тяжіння. Оскільки спостерігач може ввести координати, у яких $ds = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, то використовуючи принцип сталості (локального) швидкості світла, вимірюваної локальним спостерігачем ($v_{свema} = c$), одержуємо рівняння руху частки з нульовою масою (кванта) $ds = 0$. Таким чином, при $\varphi = const$ й $\theta = const$ маємо: $\frac{dr}{dt} = c(1 - \frac{2\gamma M}{rc^2})$. 4.6

Помітимо, що у вакуумі при $r \rightarrow r_g$ $\frac{dr}{dt} \rightarrow 0$. Це, очевидно зовсім не означає, що швидкість світла прагне до нуля. Швидкість, вимірювана спостерігачем, що перебуває поряд, є не $\frac{dr}{dt}$, а $\frac{dx}{d\tau}$, dx_i , $d\tau$ – нескінченно малі фізична відстань і час відповідно. Для світла завжди $\frac{dx}{d\tau} = c$.

Для далекого спостерігача швидкість променя світла по його годинникові $\epsilon \frac{dx}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}}$, тобто з його погляду промінь поблизу маси рухається повільніше. На цьому заснований запропонований наприкінці 1964 р. новий спосіб перевірки ЗТВ.

Пропонується робити радіолокаційні спостереження проходження Меркурія за Сонцем. У ньютонівській теорії зміна часу поширення радіосигналів туди й назад визначається тільки зміною відстані між Землею й Меркурієм і графічно зображується суцільною лінією на малюнку. Згідно ЗТВ, зменшення для далекого спостерігача швидкості сигналів поблизу Сонця приведе до додаткової зміни часу проходження радіопроменя (змінюється також і траєкторія променя на $11''75'''$ поблизу края сонячного диска, однак збільшення часу проходження

радіосигналу завдяки зміні величини траєкторії є величина більш високого порядку малості, ніж розглянутий ефект), що викличе появу додаткового підйому на графіку зміни часу проходження радіолокаційного сигналу. Величина додаткової зміни в оптимальному випадку порядку $2 \cdot 10^{-4} c$ й у принципі може бути виміряна. Правда, тут необхідно враховувати ще зміну швидкості радіосигналів у плазмі сонячної корони. Для виключення цього ефекту можна проводити вимір на різних частотах.

Оскільки для далекого спостерігача всі процеси в гравітаційнім полі

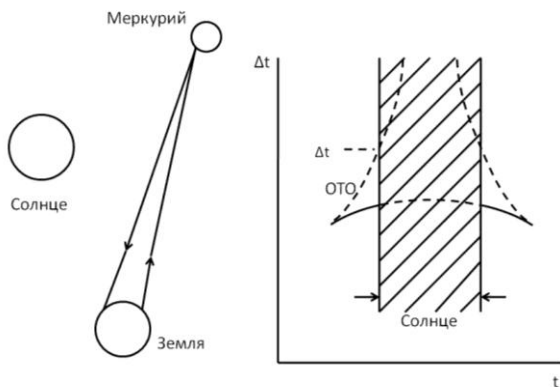


Рис. 4.3

протікають із уповільненням у $\sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}}$

раз, то, якщо гравітуюче тіло випромінює світло із частотою ω_0 , то частота світла, сприймана спостерігачем, визначається по

формулі: $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}}$ або

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad 4.7$$

Частота сигналу зменшується при виході його з поля тяжіння й збільшується при русі у зворотному напрямку. Відповідно до цього міняється й енергія кванта $E = \hbar\omega$. Описане явище називається гравітаційним червоним зсувом. Для спостерігача, що «перебуває на поверхні зірки», спектр випромінювання атомів виглядає точно так само, як і в лабораторії на Землі. Однак спектр тих же атомів зірки, спостережуваний із Землі, зрушає завдяки описаному явищу в червону сторону.

Якщо зірка віддаляється від Землі зі швидкістю v , то зміна частоти відбувається в результаті дії гравітаційного поля й ефекту Доплера:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad \text{або} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad 4.8$$

Для Сонця гравітаційний червоний зсув становить величину $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -2,1 \cdot 10^{-16}$.

У земних умовах це явище спостерігалось за допомогою ефекту Мессбауера, що дозволив спостерігати різницю частот γ -променів, що випускаються багатьма радіоактивними ізотопами ($Ir^{191}, W^{182}, Sn^{119}, Fe^{57}$) на різних висотах над рівнем моря. Точність методу Мессбауера дозволяє виявити різницю частот на висотах, що відрізняються на 10 – 20 м, незважаючи на незначну зміну потенціалу Φ в

цих межах. Спостереження підтвердили передвіщений ефект; досвід показав, що $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \cdot 10^{-16}$.

Повна енергія тіла в постійнім гравітаційнім полі виражається, як

$$E = \frac{m c^2 \sqrt{1 - 2\gamma M / rc^2}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad 4.9$$

Пророкування існування гравітаційних хвиль є, мабуть, одним з найважливіших висновків ВІД. Так, при лобовім падінні один на одного мас із нульовим моментом загальна кількість висвітленої енергії таких хвиль складе $\Delta\varepsilon = 0,02 \frac{c^2 m^2 M^2}{(m + M)^3}$, що рівно декільком відсоткам енергії спокою, тобто значно більше, ніж енергія ядерних реакцій.

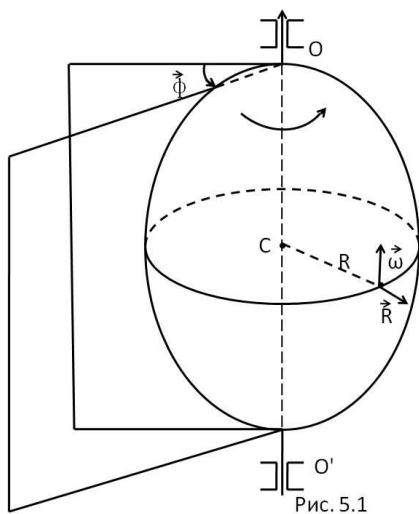
Роль сил тяжіння зростає зі збільшенням масштабу досліджуваних явищ, так що в астрономічних явищах ці сили будуть визначальними. Причому повна маса тіл у досліджуваній області простору повинна зростати, грубо говорячи, пропорційно її об'єму, тобто як куб радіуса. Тому в міру збільшення цієї області гравітаційний радіус зрештою стане порядку її розмірів. Це означає, що в космології, тобто для опису великих ділянок Всесвіту, необхідно користуватися ЗТВ.

Найпростіше припущення, яке розумно покласти в основу космологічної моделі, - припущення про однорідний у середньому розподілі речовини в просторі. У такім припущенні рівняння тяжіння були точно вирішені А.А. Фридманом. Існує два різні типи розв'язків: відкрита модель і замкнута модель. Характерна риса закритої моделі – замкнутість простору «самого в собі». Іншими словами, хоча тривимірний простір, зрозуміло, не має границь, його об'єм виявляється кінцевим. Найважливіша властивість обох моделей полягає в їхній нестационарності. Відстань між будь-якими слабковзаємодіючими тілами змінюється згодом, причому відносна швидкість цього руху тим більше, чим більше відстань між тілами (за законом Хаббла $V = H \cdot R$, де $H = 75 - 100 c^{-1}$ від Мпс, тобто галактики, що перебувають на відстані 1 мегапарсека, віддаляються друг від друга на 75 - 100 км за секунду, тобто на 2 – 3 млрд. км у рік). Це повинно привести до появи доплеровского зсуву ліній у спектрах далеких галактик. Таке явище дійсне спостерігається; лінії зміщені у бік менших частот (червоний зсув), що відповідає розширенню простору. Як і мабуть, зсув ліній зростає зі збільшенням відстані до джерела, причому відносний зсув частоти, у повній відповідності з теорією, однаково для всіх частот, включаючи радіодіапазон. Для вилучених об'єктів зсув досягає приблизно 50%. Оскільки

спостережуваний у цей час спектр випромінювання відбувся значно раніше, то, отже, швидкість відносного «розбігу» галактик раніше була більше. Немає ніяких сумнівів, що даємоє ЗТВ пояснення правильне. Це триумф теорії.

Знаючи з досвідів залежність величини червоного зсуву від відстані й середню густину маси в просторі, можна встановити, яка з космологічних моделей – відкрита або замкнута – ближче до дійсності. Точність експериментальних даних ще недостатня для такого вибору.

Лекція 5. Обертовий рух твердого тіла.



Тіло, що робить обертовий рух навколо деякої осі обертання, має один ступінь волі, і його положення щодо даної СВ визначається кутом повороту ϕ між нерухливою площиною й площиною, жорстко пов'язаною з тілом, проведеною через вісь обертання OO'' . Обертовий рух задається рівнянням $\phi(t)$.

5.1. Елементи кінематики обертового руху. Кутова швидкість і кутове прискорення, їх зв'язок з лінійними швидкостями й прискореннями крапок обертового тіла.

Далі будуть розглядатися, якщо не буде спеціального застереження, випадки руху тіл зі швидкостями $v \ll c$ (не механіка СТВ).

Основними кінематичними характеристиками обертового руху тіла є кутова швидкість і кутове прискорення. Кутовою швидкістю обертання твердого тіла (т.т.) називається вектор ω , який чисельно дорівнює першій похідній від кута повороту за часом, $\omega = d\phi/dt$ і $\omega = n d\phi/dt$ ($\omega = n \dot{\phi}$), і спрямований уздовж осі обертання таким чином, щоб з його кінця обертання тіла було видно, що воно відбуваються проти годинникової стрілки.

Лінійна швидкість v довільної крапки М обертового тіла визначається за формулою Ейлера: $v = [\omega, r]$, де r – радіус – вектор, проведений у крапку М з довільної крапки осі обертання. Чисельне значення v лінійної швидкості крапки

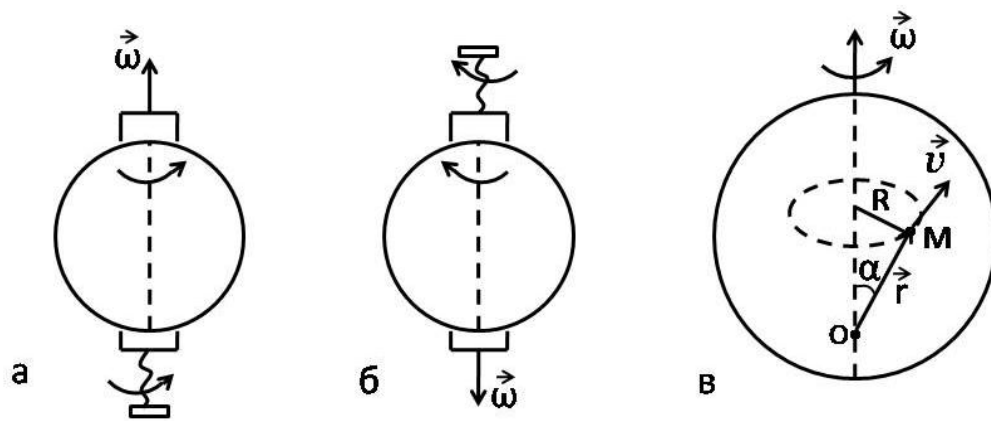


Рис. 5.2

М прямо пропорційно її відстані R від осі обертання: $v = \omega r \sin \alpha = \omega R$. Проекції v_x , v_y , v_z вектора $\mathbf{v}$ прямокутної декартової системи координат пов'язані із проекціями на ці осі векторів $\boldsymbol{\omega}$ і $\mathbf{r}$ наступними формулами: $v_x = \omega_y z - \omega_z y$, $v_y = \omega_z x - \omega_x z$, $v_z = \omega_x y - \omega_y x$. 5.1

Періодом обігу T тіла називається час, протягом якого тіло повертається навколо нерухливої осі обертання на кут $\phi = 2\pi$: $\int_0^T \omega dt = 2\pi$.

Кутовим прискоренням називають вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt = \mathbf{n} d^2\phi/dt^2$.

Лінійне прискорення довільної крапки обертального тіла дорівнює:

$$\mathbf{a} = d/dt[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]. \quad 5.2$$

Вектор $\mathbf{a}_{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$, спрямований перпендикулярно до площини, утвореної векторами $\boldsymbol{\varepsilon}$ і $\mathbf{r}$, називають обертальним прискоренням. Вектор $\mathbf{a}_{\text{ц}} = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$, перпендикулярний до осі обертання й спрямований від обраної крапки до осі, називають осецентровим прискоренням. У випадку обертання тіла навколо нерухливої осі вектори $\mathbf{a}_{\text{вр}}$ і $\mathbf{a}_{\text{ц}}$ тотожні відповідно дотичному (тангенціальному) і нормальному прискоренням:

$$\mathbf{a}_{\text{вр}} = \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_{\text{ц}} = \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}. \quad 5.3$$

Таким чином, швидкості й прискорення всіх крапок тіла пропорційні їхнім відстаням від осі обертання.

Теорія обертального руху має важливі застосування в небесній механіці, зовнішній балістиці, теорії гіроскопа, кінематиці й динаміці механізмів і машин і при розв'язку багатьох конкретних завдань у техніці.

Лекція 6. Динаміка обертового руху. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу і його зв'язок з ізотропністю простору. Момент сили. Рівняння динаміки обертового руху.

Ми бачили, що закон збереження імпульсу випливає із властивостей однорідності простору стосовно замкненої системи часток. Поряд з однорідністю, простір має також і властивість ізотропності – усі напрямки в ньому еквівалентні. Тому властивості замкненої системи не повинні мінятися при повороті всієї системи на довільний кут навколо довільної осі. Наслідком цієї

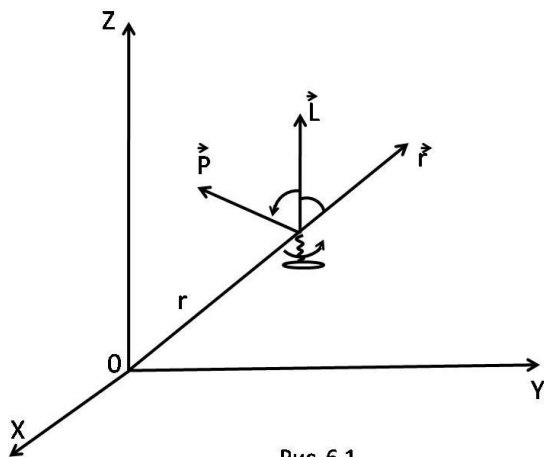


Рис. 6.1

умови є збереження для системи деякої векторної величини. Саме, існує вектор, що характеризує кожну матеріальну точку, такий, що сума всіх цих векторів для всіх матеріальних точок, що входять у замкнену систему, не залежить від часу. Цей вектор називається вектором моменту імпульсу.

Моментом імпульсу м.т. щодо деякої точки О (полюса) називається вектор $\vec{L}_i$, який дорівнює векторному добутку радіус – вектора $\vec{r}_i$ точки, проведеного з полюса, на її імпульс $\vec{p}_i$: $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$. Моментом імпульсу або кінетичним моментом системи матеріальних крапок щодо полюса називається вектор $\vec{L}$, який дорівнює геометричній сумі моментів імпульсів щодо того ж полюса всіх N крапок системи: $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$.

Моменти імпульсів Сонця й планет Сонячної системи щодо центру Сонця, виражені в одиницях 10^{41} кг·м²/с, рівні: Сонця – 6; сумарний Меркурій, Венери,

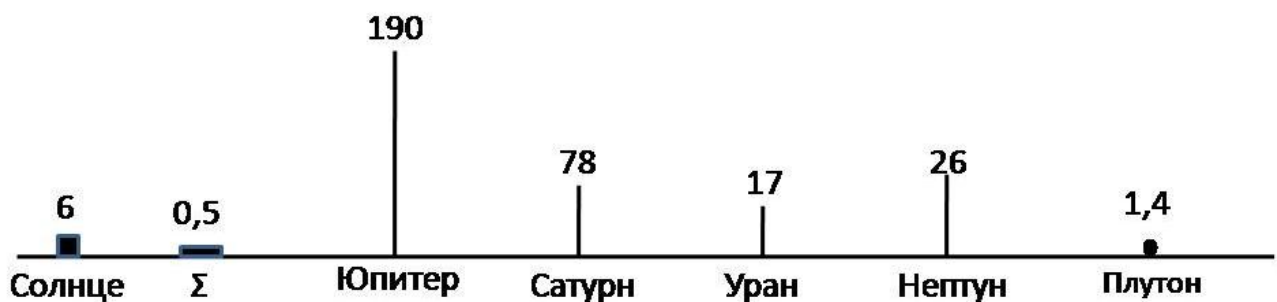


Рис. 6.2

Землі, Марса – 0,5; Юпітера – 190, Сатурна – 78, Урана – 17, Нептуна – 26, Плутона – 1,4. Внутрішній момент імпульсу елементарних часток, виражений в одиницях $\hbar = 1,0542 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, рівний: для фотона ± 1 , для електрона, нейтрино, мюона, нуклонів – $\pm \frac{1}{2}$, для піонів, каонів – 0.

Таким чином, якщо система ізольована, то $\mathbf{L} = \text{const}$, якщо ні, то $\mathbf{L}$ змінюється. Розглянемо зміну моменту імпульсу м.т. у часі: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, $d\mathbf{L}/dt = d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$. Перший доданок дорівнює нулю, тому що $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$. Тоді

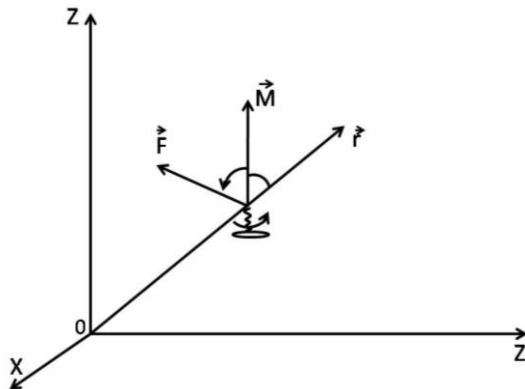


Рис. 6.3

$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Моментом $\mathbf{M}_i$ сили відносно точки O називають векторний добуток радіуса-вектора $\mathbf{r}_i$, проведеного із точки O в точку прикладання сили, на вектор сили $\mathbf{F}_i$: $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$. Проекціями M_{ix} , M_{iy} , M_{iz} вектора $\mathbf{M}$ на осі прямокутної декартової СК із центром у точці O пов'язані із проекціями на ці осі векторів $\mathbf{r}_i$ і $\mathbf{F}_i$ співвідношеннями:

$M_{ix} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy}$, $M_{iy} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz}$, $M_{iz} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$, де x_i , y_i , z_i – координати точки додатка сили $\mathbf{F}_i$. Моментом сили щодо осі називається скалярна величина, рівна проекції на дану вісь вектора моменту сили відносно к.-л. точки тієї ж осі.

Рівняння динаміки обертового руху м.т. має вигляд: $dL_i/dt = M_i$. Для системи матеріальних точок - $\sum_{i=1}^N \dot{L}_i = \sum_{i=1}^N \dot{M}_i$. Тут $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$ називається головним моментом системи N сил. Для замкненої системи $\mathbf{L} = \text{const}$ і $\sum_i M_i = 0$. Для будь-якої частки, що рухається в центральній полі $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, тому що $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$ у будь-якій точці траєкторії й $\mathbf{L} = \text{const}$.

6.1. Кінетична енергія обертового тіла. Момент інерції тіла щодо осі. Теорема Штейнера – Гюйгенса. Момент імпульсу абсолютно твердого тіла щодо нерухливої осі. Рівняння динаміки обертового руху твердого тіла щодо нерухливої осі.

Кінетична енергія тіла відносно нерухомого центру мас називається енергією обертового руху твердого тіла.

Для знаходження кінетичної енергії обертового руху твердого тіла розіб'ємо його на N елементів об'ємів Δv_i , маси яких m_i , причому, лінійні розміри $\sqrt[3]{\Delta v_i} \ll r_i$. Такі елементи об'ємів можна вважати матеріальними точками, кінетична енергія кожної з яких визначається за формулою $E_{ki} = \frac{1}{2}(m_i v_i^2)$. Кінетична енергія обертового тіла буде рівна: $E_k = \frac{1}{2} \sum_i^n (m_i v_i^2)$. Оскільки $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ і $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_i$, те одержуємо $v = \omega r$. Остаточно маємо: $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i^n (m_i r_i^2)$. Таким чином, для обчислення кінетичної енергії обертового твердого тіла

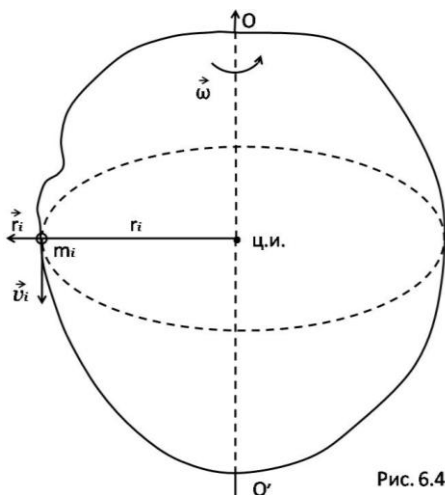


Рис. 6.4

необхідно вміти знаходити суму $\sum_i^N (m_i r_i^2)$. Величину $I_0 = \sum_i^N (m_i r_i^2)$ називають моментом інерції тіла щодо осі, що проходить через центр мас тіла. Він є мірою інертності тіла в обертотому русі навколо цієї осі. Тоді кінетична енергія тіла щодо осі, що проходить через центр інерції, запишеться: $E_{k0} = \frac{1}{2}(I_0 \omega^2)$.

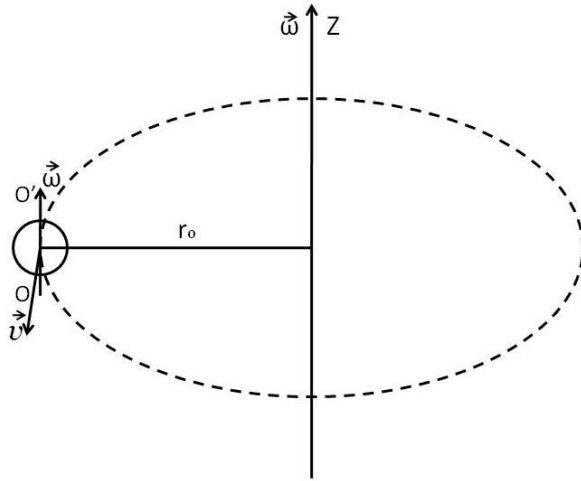


Рис. 6.5

Розглянемо тверде тіло, що обертається навколо осі Z, що не проходить через центр інерції тіла, з кутовою швидкістю ω і з такою ж кутовою швидкістю обертове навколо осі OO^1 інерції, що проходить через центр, тіла, паралельної осі Z. Його кінетична енергія буде дорівнювати сумі кінетичних енергій поступального й обертотого рухів: $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$. Враховуючи, що $v = \omega r$, одержуємо $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 (I_0 + m r_0^2)$, або $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$. Тут $I = I_0 + m r_0^2$ – момент інерції

тіла щодо осі, що не проходить через центр інерції тіла. Його значення визначається теоремою Штейнера – Гюйгенса: момент інерції I тіла щодо довільної осі Z дорівнює сумі моментів інерції I_0 цього тіла щодо осі OO^1 , паралельної осі Z і перетинаючої центр інерції тіла, і добутку маси m тіла на квадрат відстані r_0^2 між осями Z і OO^1 .

Знайдемо момент імпульсу L твердого тіла: $L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N r_i \times m_i v_i$, тому що $v_i = \omega \times r_i$, маємо: $L = \sum_{i=1}^N m_i r_i \times [\omega, r_i]$. Скориставшись векторною тотожністю: $A \times [B, C] = B(A, C) - C(A, B)$, для нашого випадку одержимо: $r_i \times [\omega, r_i] = \omega(r_i, r_i) - r_i(r_i, \omega)$, або, враховуючи, що $r_i \perp \omega$, маємо $L = \omega \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ і $L = I \omega$.

Рівняння обертотого руху твердого тіла прийме вид:

$I' d\omega/dt = M$, або $I \varepsilon = M$. При $M=0$ $I\omega = \text{const}$ – закон збереження обертального моменту.

6.1.1.Обчислення моменту інерції тіла щодо осі обертання.

Для обчислення моменту інерції тіла щодо осі обертання OO^1 застосовується загальна формула: $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ або в декартовій системі координат момент інерції щодо осі z (вісь обертання збігається з віссю z) дорівнює:

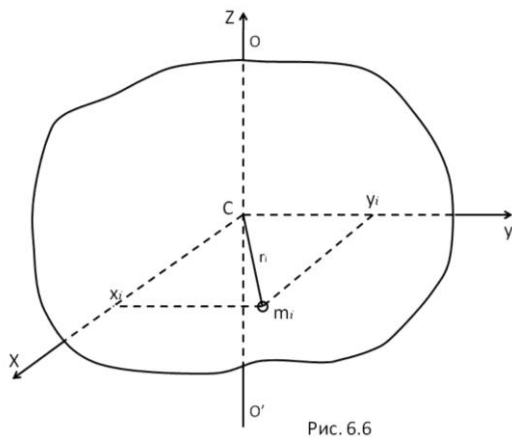


Рис. 6.6

$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$ або, переходячи до межі, маємо:

$$I = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dv$$

$I = \iiint (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$. Як приклад розглянемо формули обчислення моментів інерції тіл правильної геометричної форми. У всіх випадках вісь обертання збігається з віссю z:

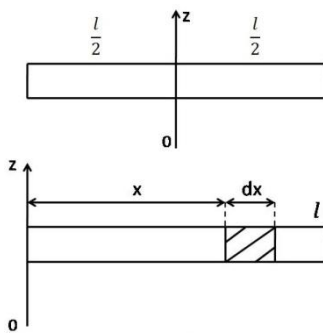


Рис. 6.7

1) Момент інерції тонкого однорідного стрижня довжиною l і масою m щодо осі z, що проходить через центр інерції стрижня:

$$I = 2 \int_0^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx$$

$I = 1/12 \cdot ml^2$. Якщо вісь z проходить через край стрижня,

$$\text{то } I = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = 1/3 \cdot ml^2.$$

2) Момент інерції порожнього циліндра з радіусами внутрішньої й зовнішньої

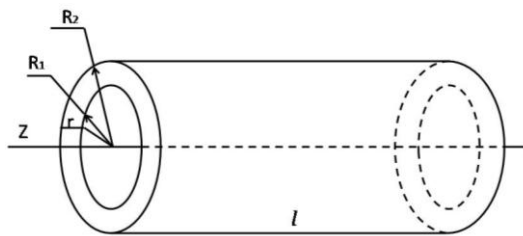


Рис. 6.8

поверхонь відповідно R_1 і R_2 щодо осі z, що збігається з віссю циліндра: $I = \int r^2 dm$, $m = \pi \rho l r^2$ і $dm = 2\pi \rho l r dr$,

$$\text{звідки } I = 2\pi \rho l \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho l (R_2^4 - R_1^4)$$

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2).$$



Рис. 6.9

3) Для сплошного циліндра $R_1=0$, $R_2=R$ і $I = \frac{1}{2} m R^2$.

Для тонкостінного порожнього циліндра $R_1 \approx R_2 = R$ і $I = m R^2$.

4) Момент інерції порожньої кулі з радіусами внутрішньої й зовнішньої поверхонь R_1 і R_2 щодо осі, що проходить через центр кулі: $I = \int (x^2 + y^2) dm$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Для кулі $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = r^2/3$. Тому можна прийняти $x^2 + y^2 = 2/3 \cdot r^2$ і

$$I = 2/3 \int r^2 dm. m = 4/3 \pi \rho r^3 \text{ і } dm = 4\pi \rho r^2 dr.$$

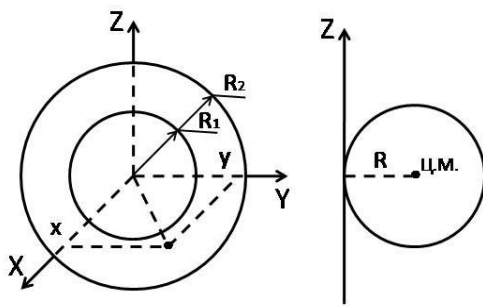


Рис. 6.10

$$I = \frac{8}{3} \pi \rho \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr = \frac{8}{15} \pi \rho (R_2^5 - R_1^5)$$

$I = \frac{2}{5} m (R_2^5 - R_1^5) / (R_2^3 - R_1^3)$. Для суцільної кулі $R_1=0$, $R_2=R$ і $I = \frac{2}{5} m r^2$. Для тонкостінної сфери $R_1 \approx R_2 = R$ і $I = \frac{2}{3} m r^2$.

5) Момент інерції суцільної кулі щодо осі z , дотичній до поверхні кулі: $I = I_0 + m r^2 = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2$ і $I = \frac{7}{5} m r^2$.

6.4. Гіроскоп.

Гіроскопом називають масивне симетричне тверде тіло, що обертається з великою швидкістю навколо осі симетрії – осі гіроскопа. Вісь гіроскопа є однією з головних осей інерції. Тому, якщо вона не повертається в просторі, момент імпульсу гіроскопа рівний $L = I\omega$, де

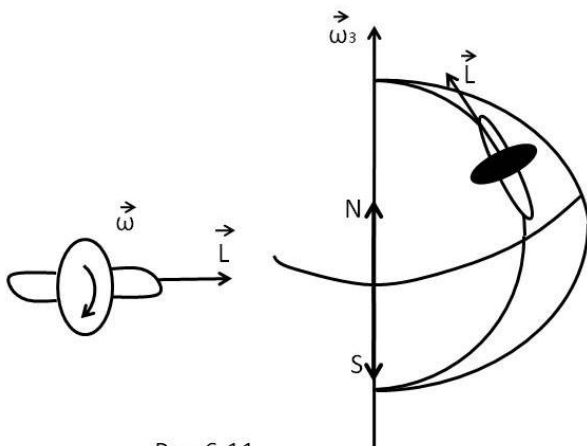


Рис.6.11

I – момент інерції гіроскопа щодо осі гіроскопа. Такий гіроскоп називають урівноваженим: $M = 0$ і $I\omega = \text{const}$.

Явище збереження моменту імпульсу врівноваженого гіроскопа покладене в основу приладу, названого гіроскопічним компасом. Гірокомпас являє собою гіроскоп, вісь якого може вільно повертатися в горизонтальній

площині. Вісь гіроскопа встановлюється в таке положення, при якому кут між віссю й віссю обертання Землі буде мінімальним. У цьому положенні вісь гіроскопа виявляється в меридіональному напрямку, і, отже, указує точно на північ. Гірокомпас вигідно відрізняється від компаса з магнітною стрілкою тим, що в його показання немає необхідності вносити виправлення на магнітне відмінювання й компенсувати впливу на стрілку розташованих поблизу її феромагнітних предметів.

Під дією моменту сил M момент імпульсу одержить за час dt збільшення $dL = M dt$, перпендикулярне до вектора L . При такому повороті осі гіроскопа кут α не змінюється. Вертикальна площина, що проходить через вісь гіроскопа, повернеться при цьому на кут $d\phi$. На такий же кут повернеться в горизонтальній площині вектор M .

A diagram of a rod of length l pivoted at point O . The rod makes an angle α with the vertical. A mass m is attached at a distance $ls \sin \alpha$ from the pivot. A force F acts vertically downwards from the mass. A moment M acts on the rod at the mass. The rod rotates with angular velocity ω and angular acceleration $d\omega/dt$. A dashed circle indicates the path of the mass.

гіроскопа буде повертатися навколо вертикальної осі, що проходить через крапку O , з кутовою швидкістю Ω , описуючи конус із кутом розчину, рівним 2α (при $\alpha = \pi/2$ конус вироджується в площину). Вектор L при цьому буде змінюватися тільки з напрямком, по величині він буде постійним, тому що елементарні збільшення dL увесь час будуть перпендикулярний до вектора L . Такий рух гіроскопа називають прецесією, а гіроскоп – неврівноваженим. Кутову швидкість прецесії Ω можна знайти зі співвідношення:
$$\mathbf{M} = \Omega \times \mathbf{L}.$$

Неврівноважені гіроскопи, як і врівноважені, знайшли широке технічне застосування. Наприклад, у геодезії при визначенні координат на місцевості, для керування польотом ракети й ін. Вивчення прецесії вектора моменту імпульсу заряджених і інших часток (спін), наприклад, електрона, у магнітному полі являє собою цікаве завдання, що має важливе значення для атомної фізики, для фізики твердого тіла, для хімії, біології й геології.

Аналіз фундаментальних сил (сил тяжіння або електричних сил) пов'язаний із цікавим і дуже важливим поняттям – полем. Нагадаємо, що в ньютонівській механіці завжди постулювалось, що все складається з тіл, взаємодіючих за конкретним законом. Із принципу відносності Галилея безпосередньо випливає, що взаємодія тіл поширюється в просторі миттєво, тобто якщо змінити стан одного тіла, то вже слідом за цим можна виявити хоча б дуже слабке у взаємодіючі з ним тілах, як би далеко вони не перебували. Через те, що швидкість поширення взаємодій тіл прийнята нескінченно великою, говорять, що в класичній механіці Ньютона має місце дальнодія. В 19 і початку 20 ст. поступово ставала ясною необхідність розгляду нових видів причинних факторів, тому що для формулювання законів електромагнетизму ньютонівська схема

взаємодії тіл не є достатньою. Однак виявилось можливим розглядати цю проблему, уводячи додатково до тіл нову сукупність сутностей – полів.

Щоб пояснити думку на прикладі, скажемо, електричної взаємодії, прийнемо, що в крапці А перебуває заряд Q , а в крапці В – заряд q . Сила, що діє між зарядами, рівна F . Щоб проаналізувати цю силу за допомогою поняття поля, ми говоримо, що заряд Q у крапці А створює в крапці В такі «умови», при яких заряд q , потрапляючи в В, «відчуває» дію сили: $F = qE$. Тут величина E є «умова», створена зарядом Q (безвідносно до того, чи є там заряд q чи ні), а F – відповідь, відгук заряду q на E . Тут E – вектор напруженості електричного поля. Аналогічно можна ввести енергетичну характеристику поля – потенціал, так що потенційна енергія U , якої буде мати заряд q у крапці В, рівний: $U = q\phi$. Зв'язок між E і ϕ аналогічний зв'язки між F і U : $E = -\nabla\phi$. У випадку тяжіння можна зробити те ж саме: $F = mg$, $U = m\phi$ і $g = -\nabla\phi$.

Реальність поля проявляється фізично в тому, що воно майже не залежить від об'єктів, що створюють його. Можна коливати заряд і вплив цього (поле) позначиться на відстані. Якщо коливання припиняться, у поле однаково будуть відчуватися сліди цих коливань, тому що взаємодія двох часток не відбувається миттєво. Тому слід говорити про взаємодію однієї частки з полем і про наступну взаємодію поля з іншою часткою.

Узагальнюючи сказане, можна визначити фізичне поле, як особливу форму матерії; системи з нескінченним числом ступенів волі. До фізичних полів відносять гравітаційні й електромагнітні поля, поле ядерних сил, а також хвильові (квантовані) поля, відповідні до різних частинок, наприклад, електронно-позитронне поле. Джерелами фізичного поля є частинки, наприклад, для електромагнітного поля – електрично заряджені частинки. Створювані частинками поля переносять (з кінцевою швидкістю) взаємодію між відповідними частинками. У квантовій теорії взаємодія обумовлена обміном квантами поля між частинками.

Сила, що діє на матеріальну точку, що рухається, або тіло, називається

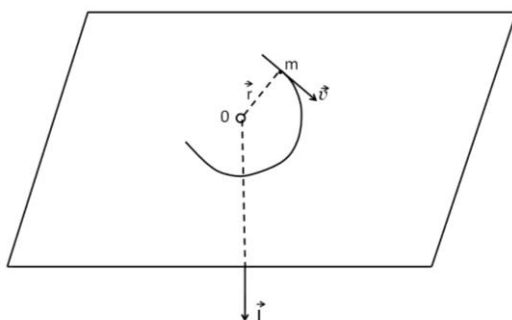


Рис. 7.1

центральною, якщо її лінія дії увесь час проходить через ту саму нерухливу крапку О, називану центром сили: $F = F'r/r$, де r – радіус-вектор, проведений із центру О в крапку дії сили F ; F – проекція сили на напрямок радіус – вектора.

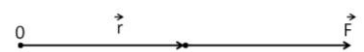


Рис. 7.2

Прикладами центральних сил є сили

тяжіння між матеріальними точками й сили електростатичної взаємодії між крапковими електростатичними зарядами, для яких сила взаємодії обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Поля, обумовлені таким характером діючих у них сил, називають центральними.

7.1. Рух тіл під дією центральних сил.

Закон Ньютона для сили всесвітнього тяжіння, що діє між двома матеріальними точками з масами M і m має вигляд:

$$\mathbf{F} = -G(Mm/r^3)\mathbf{r}, \text{ де } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н м}^2 \text{ кг}^{-2}.$$

Через $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ маємо $U(r) = -Gmm/r$. Потенційна енергія системи матеріальних крапок дорівнює сумі потенційних енергій усіх пар взаємодіючих тіл:

$$U = -G/2 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j / r_{ij}, \text{ де } i \neq j.$$

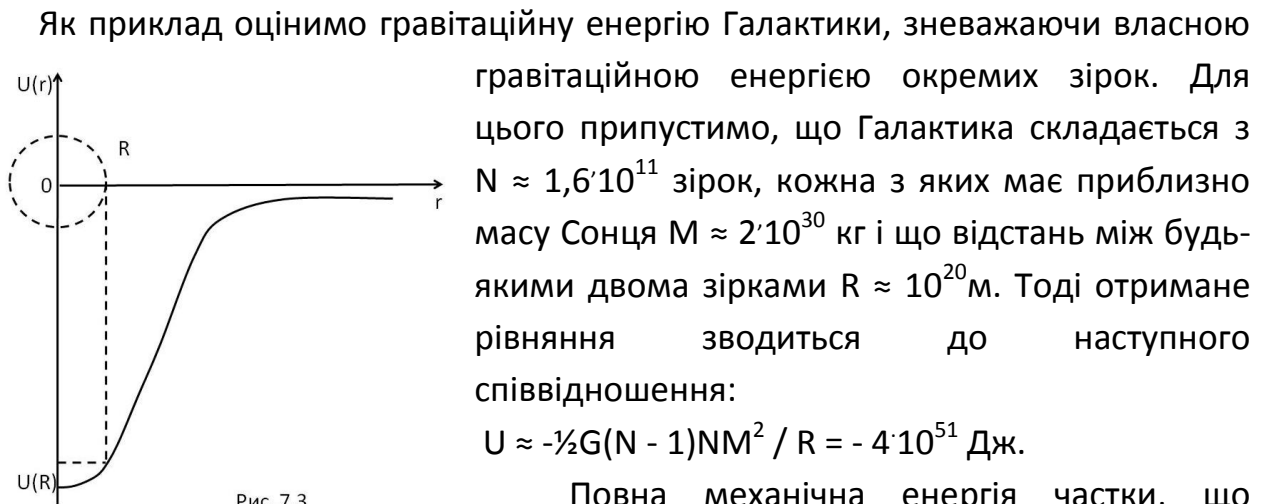


Рис. 7.3

Повна механічна енергія частки, що рухається в полі центральної сили, обернено пропорційної квадрату відстані, визначається виразом: $E = E_k + U$. У гравітаційнім полі - $E = \frac{1}{2}mv^2 - G_m m/r$.

Для тіла, що рухається під дією сили тяжіння, у будь-якій крапці траєкторії

$\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$, $\mathbf{M} = 0$ і $\mathbf{L} = \text{const}$. Аналіз залежності $U(r)$, E і L дозволяє встановити характер руху тіла в гравітаційнім полі.

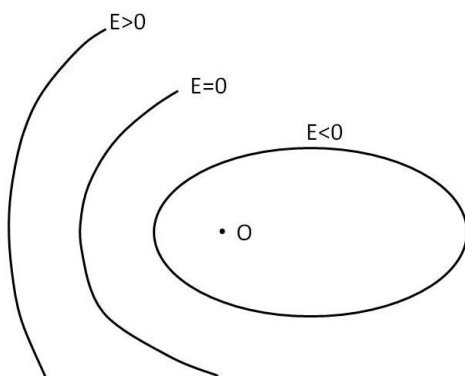


Рис. 7.4

Рух планет сонячної системи підкоряється трьома законами Кеплера:

Усі планети сонячної системи рухаються по

еліптичних орбітах, причому Сонце перебуває в одному з фокусів орбіти.

Відрізок, що з'єднує Сонце із планетою, описує рівні площі за рівні проміжки часу.

$$ds = \frac{1}{2} r \times dr \rightarrow ds = \frac{1}{2} r \times v dt, \rightarrow ds/dt = [r, p]/2m \rightarrow ds/dt = L/2m = \text{const.}$$

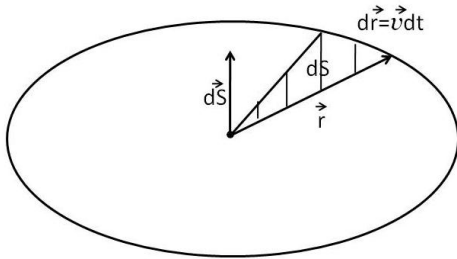


Рис. 7.5

Звідси випливає, що траєкторія планети – плоска крива.

Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться, як куби більших півосей еліпсів.

$$T = 2\pi r/v_1, \quad mv_{12}/r = Gmm/r^2 \rightarrow v_{12} = GM/r \rightarrow T^2 = (4\pi^2/GM)r^3.$$

Для створення космічних кораблів – штучних супутників Землі (ШСЗ) і апаратів, що досягають інші планети Сонячної системи, необхідне досягнення ними першої (v_1) і другої (v_2) космічних швидкостей. Уперше космічна швидкість v_1 була досягнуто 4 жовтня 1957 р. – 1-й успішний запуск ШСЗ (СРСР). 2 січня відправилася в політ космічна ракета, яка вийшла зі сфери земного тяжіння й стала першою штучною планетою Сонячної системи (СРСР). 12 квітня 1961 р. Ю.А.Гагарін зробив перший політ навколо Землі й успішно приземлився.

Перша й друга космічні швидкості легко розраховуються з наступних співвідношень: $v_1 = \sqrt{G \frac{M}{r}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с, з } E = \frac{1}{2} mv^2 -$

$$G'Mm/r = 0 \text{ одержуємо } v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{r}} = \sqrt{2} v_1 = 11,2 \text{ км/с.}$$

З наведених рівнянь випливає один важливий висновок, який буде використаний нами далі. Повна енергія тіла, що рухається навколо іншого під дією центральної сили притягання, є величина негативна й чисельно рівна кінетичної або половині потенційної енергії.

Повна енергія тіла, що рухається в центральнім полі, дорівнює сумі його кінетичних поступальної й обертальної енергій і потенційної енергії: $E = p^2/2m + L^2/2I + U$.

7.2. Теорема про віріал.

У теоретичній механіці був отриманий важливий висновок: неможливо стійка рівновага системи матеріальних точок (м.т.), взаємодіючих за законом зворотних квадратів (гравітаційні й електромагнітні взаємодії). Це означає, що в системі, де діють тільки сили, величина яких обернено пропорційна квадрату відстані між тілами, стан з кінетичною енергією, рівної нулю, не може бути

стійким. Цей висновок відноситься як до електронів в атомі, так і до атомів у зірці або до зірок у галактиці. З нього випливає, що навколишня нас матерія повинна у всіх своїх формах складатися з тіл, що рухаються, і тільки в якомусь середньому, відносному змісті ми можемо вважати певну її частину нерухливою.

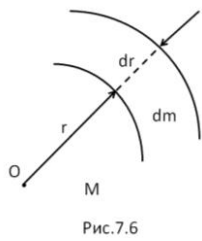
Застосування теореми про віріал дає можливість визначити середню (за великий проміжок часу) величину кінетичної енергії системи часток, що рухаються в обмеженій області простору під впливом сил, що діють за законом зворотних квадратів.

Ми вже показали, що середня кінетична енергія м.т., що робить просторово обмежений рух під дією сили притягання дорівнює половині її середньої потенційної енергії зі зворотним знаком (теорема про віріал). Це не означає, що кінетична й потенційна енергії м.т. у будь-який момент повинні бути зв'язані співвідношенням $\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$; твердження теореми ставиться тільки до середніх значень на тривалі періоди часу. Та ж теорема слухна й для будь-якого числа м.т., утримуваних усередині деякого обмеженого об'єму взаємними силами притягання, якщо навіть не всі маси цих крапок однакові і якщо деякі із сил є силами відштовхування (наприклад, у молекулі, або в кристалі, що представляють собою систему з позитивно й негативно заряджених часток). Таким чином, якщо частки залишаються необмежено довго усередині деякого обмеженого об'єму, можна затверджувати, що:

$$\langle \text{повна кінетична енергія} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \text{повна потенційна енергія} \rangle .$$

З теореми про віріал в її загальному виді випливає не тільки те, що м.т. повинні мати кінетичну енергію, але й те, що кінетична й потенційна енергії такої системи завжди порівнянні по величині. Навіть якщо частина м.т. у початковий момент не рухається, сили притягання зближають ці точки один з одним, збільшуючи значення як потенційної, так і кінетичної енергії доти, поки середня кінетична енергія не стане рівною зі зворотним знаком половині середньої потенційної енергії.

Теорема про віріал служить ключем до розуміння будови будь-якої речовини, у якій сили зчеплення обумовлені взаємодією часток за законом зворотніх квадратів. Середня відстань між атомами або атомними ядрами в типовій зірці, очевидно, завжди більше 10^{-12} м, тому що густина такої зірки не перевищує 10^{-4} кг/м³. Такі відстані занадто великі для сильних ядерних взаємодій, ефективних у межах 10^{-15} м; тому тільки сили гравітаційного притягання з'єднують зірку в єдине ціле.



Як приклад застосування теореми про віріал оцінимо величину середньої температури у середині Сонця. Власна гравітаційна енергія U_c однорідної зірки маси M_c і радіуса R_c може бути знайдена в такий спосіб: $dU = -G M_c dm / r$, $M = 4/3 \pi r^3 \rho$,

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \rightarrow U = -1/3 G (4\pi \rho)^2 \int_0^{R_c} r^4 dr \rightarrow U = -3/5 G (4/3 \pi R_c^3) 1/R_c$$

остаточно маємо $U_c = -3/5 G M_c^2 / R_c$. Середня кінетична енергія одного атома пропорційна абсолютній температурі T : $E_k = 3/2 kT$, де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/ К – постійна Больцмана. Сумарна кінетична енергія всіх атомів зірки рівна $3/2 NkT$. Звідки, використовуючи теорему про віріал, одержуємо: $3/2 NkT = -3/10 G M_c^2 / R_c \rightarrow \langle T \rangle = G M_c^{2/5} R_c / nk \rightarrow \langle T \rangle = G m_c m / 5 R_c k$, де $m = M_c / N = 3 \cdot 10^{-27}$ кг – середня маса одного атома (гелій, водень), $M_c = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R_c = 7 \cdot 10^8$ м. Тоді $\langle T \rangle = 10^7$ К. Ця температура відповідає енергії порядку 1 кєВ, достатньої для повної іонізації атомів з малим атомним номером. Але якщо атоми водню й гелію іонізовані, то загальне число часток треба збільшити, додавши до нього число вільних електронів. У цьому випадку середня температура виявиться в 2 – 3 рази нижче отриманої. Проте результат нашої оцінки близький до того, що виходить при більш обґрунтованих розрахунках середньої температури ядра Сонця.

Другий приклад. Стиск галактик.

Припустимо, що якась туманність складається із часток, між кожною парою яких діє сила тяжіння, і що ця система має значну кінетичну енергію, якимось розподілену між частками. При яких умовах туманність буде розширюватися або стискуватися або зберігати ті ж середні розміри?

Із закону збереження енергії маємо: $E = E_k + U = \text{const.}$ Характер зміни розмірів туманності залежить від співвідношення початкових абсолютних величин позитивної кінетичної енергії E_k і завжди негативної потенційної енергії U .

А) Якщо $E_k > |U|$, то $E > 0$ і туманність (або принаймні частина її) повинна необмежено розширюватися. Ця туманність розширюється, тому що а якщо ні, то при данім вихіднім положенні порушувалася б теорема про віріал.

Б) Якщо $E_k < |U|$, то $E < 0$ і сукупність часток, що утворюють туманність, не може необмежено розширюватися. При нескінченно більших відстанях між тілами потенційна енергія звертається в нуль і вся енергія системи стає кінетичною, тобто позитивною. Якщо в початковий момент повна енергія була негативною, то потенційна енергія не може звернутися в нуль відразу для всіх тіл, що входять у систему, хоча, залежно від початкових умов, деякі з них все-таки можуть вийти на нескінченно велику відстань. Слід очікувати, що таке

скупчення тіл повинне зберігати відому компактність, тому що для значень енергій, середніх за часом, повинна виконуватися теорема про віріал.

Третій приклад. **Наслідок втрат енергії на випромінювання.**

Нагріті тіла віддають енергію у формі електромагнітного випромінювання. При зниженні температури інтенсивність випромінювання зменшується, але не звертається в нуль, якщо не дорівнює нулю абсолютна температура. Однак газова туманність, що з'єднується воєдино силами гравітаційного тяжіння, не може досягти нульової температури. У дійсності, коли туманність випромінює енергію, її температура навіть зростає.

Цей парадоксально звучний висновок безпосередньо впливає з теореми про віріал й із закону рівномірного розподілу енергії по ступенях свободи. Отже маємо, $E = -\langle E_k \rangle$, $\langle E_k \rangle = 3/2 kTn \rightarrow T = -2/3 E/kn$. Зміна енергії на величину ΔE викликає зміну температури ΔT , рівну $\Delta T = -2/3 \Delta E/kn$. Якщо ΔE негативно через втрати енергії на випромінювання, то ΔT повинна бути позитивною. Далі, згідно з теоремою про віріал, при зменшенні E повинні зростати величини $\langle E_k \rangle$ і $|U|$. Збільшення $|U|$ означає, що підсилюється гравітаційна взаємодія часток, а це може відбутися тільки при стиску туманності. По тій же причині повинна збільшуватися кінетична енергія ШСЗ, коли через опір атмосфери зменшується висота його польоту над Землею.

Якщо енергія витрачається на випромінювання, то туманність поступово стискується й стає ще більш гарячою, тобто її середня температура зростає тим швидше, чим швидше вона випромінює енергію й при цьому стискується. Зрештою температура стає настільки високою, що можуть початися ядерні реакції синтезу. Коли головним джерелом енергії стають ядерні реакції, гравітаційний стиск зірки вповільнюється або зовсім припиняється, тому що збільшення тиску випромінювання протистоїть подальшому стиску зоряної речовини. Коли в результаті термоядерного синтезу більша частина водню Сонця перетворюється в гелій, знову почнеться стиск і відновиться процес поступового підвищення середньої температури усередині Сонця.

Лекція 8. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції.

Дотепер ми розглядали механічний рух тіла (або системи тіл) відносно ІСВ. У якості ІСВ застосовувалися нерухлива Земля, приміщення лабораторії або далекі зірки. У всіх ІСВ виконуються закони Ньютона. Визначення характеру руху тіла стосовно ІСВ зводилося до знаходження його координат і імпульсу в будь-який момент часу за відомим законом руху й заданим початковими і крайовими

умовам. Як відомо, розв'язок такого завдання про рух тіла в ІСВ виглядає найбільше просто. Однак, на практиці дуже часто виникає необхідність уміти вирішувати завдання на визначення характеру руху тіла стосовно неінерціальним системам відліку (НІСВ). Такі завдання виникають, наприклад, при прокладці залізничної колії в меридіональному напрямку, зміцненні берегів (при установці на них різних споруджень) рік, будівництві гребель, аеро- і морської навігації й т.п. У цих випадках Землю більш не можна приймати в якості ІСВ. Необхідно враховувати її добове обертання, а в деяких завданнях і обіг навколо Сонця. У принципі, завжди можна знайти ІСО (наприклад, зв'язану із зірками), стосовно їх описувати й рух поїздів по поверхні Землі, і рух ракет, ШСЗ, літаків, кораблів і ін. Однак, підкреслимо, практичний інтерес представляє опис руху цих об'єктів саме стосовно земної поверхні, тобто стосовно НІСВ.

Прискорення СВ, а також її обертання з кутовою швидкістю $\omega(t)$ ведуть до глибоких змін в остаточному результаті фізичних спостережень у порівнянні з такими ж, виконаними в ІСВ. Спостерігач, що має прискорення, зауважує появу нових сил. Їх називають «силами інерції». Деякі з них одержали, крім того, і особливі імена (відцентрова сила, сила Коріоліса). Уведення сил інерції дає можливість описувати рух тіл у будь-яких (як в ІСВ, так і в НІСВ) системах відліку за допомогою тих самих рівнянь руху. Однак слід чітко розуміти, що сили інерції не можна ставити в один ряд з такими силами, як пружні, гравітаційні сили й сили тертя, тобто силами, обумовленими впливом на тіло з боку інших тіл або полів. Сили інерції обумовлені властивостями тієї СВ, у якій розглядаються механічні явища. У цьому змісті їх можна назвати *фіктивними силами*.

Отже, нашим завданням є встановлення закону перетворення векторів при переході від ІСВ до НІСВ й установлення закону руху тіла в НІСВ.

Нехай маємо ІСВ K , яку умовно вважаємо нерухливою, і НІСВ K^* , яка

рухається щодо системи K зі швидкістю $\mathbf{v}_0(t)$ і обертається навколо деякої осі з кутовою швидкістю $\omega(t)$. Виразимо з зміну згодом деякого вектора $\mathbf{A}(t)$, якщо $d_i \mathbf{A}$ – зміна вектора $\mathbf{A}$ за час dt у системі K , $d\mathbf{A}$ – зміна того ж вектора $\mathbf{A}$ у системі K^* , то можна записати:

$$d_i \mathbf{A} = d\mathbf{A} + \mathbf{v}_{\text{вп}} dt; \text{ отже, } \frac{d_i \bar{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{A}}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{A}},$$

або $\dot{\bar{\mathbf{A}}}_i = \dot{\bar{\mathbf{A}}} + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{A}}$. Цей вираз слушний для

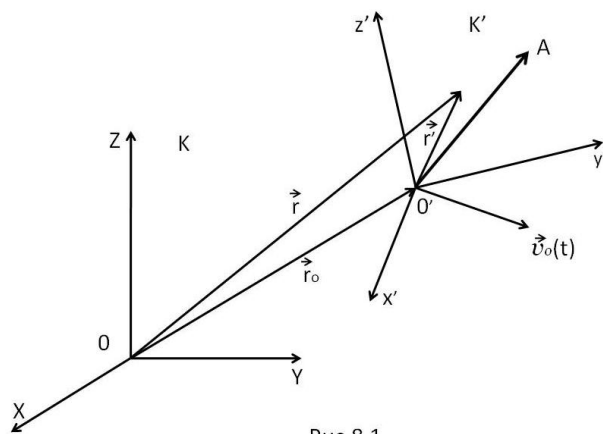


Рис.8.1

будь-якого вектора. Таким чином, для опису зміни деякого вектора, заданого в СВ K^* , у СВ K необхідно застосувати до нього оператор:

$$\frac{d_i \dots}{dt} = \frac{d \dots}{dt} + \vec{\omega} \times \dots$$

Нехай положення м.т. у K^* задане радіус-вектором $\vec{r}^*$. Обчислимо прискорення м.т. стосовно СВ K :

$$\ddot{\vec{r}}_i^* = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^* \right) \left(\vec{r}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}^* \right) = \ddot{\vec{r}}^* + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^* + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^* + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^*].$$

Тому що $\vec{r}^* = \vec{r} - \vec{r}_0$, то одержимо: $\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}^* + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^* + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^*] - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^*$.

Беручи до уваги, що $m\ddot{\vec{r}}^* = \vec{F}$, одержимо основний закон динаміки (рівняння руху) для НІСВ у вигляді:

$$m\ddot{\vec{r}}^* = \vec{F} + \vec{F}_{\text{уск}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{Кор}}.$$

Ми бачимо, що в рівняння руху, крім колишньої рівнодіючої сили $\vec{F}$, увійшли три нові сили – «*сили інерції*». Перша сила $\vec{F}_{\text{уск}}$ обумовлена прискоренням поступальним рухом СВ K^* , друга $\vec{F}_{\text{цб}}$ – відцентрова сила, що виникає в результаті обертання цієї системи, і третя – $\vec{F}_{\text{Кор}}$, називана силою Кориоліса, з'являється як наслідок відносної швидкості м.т. у СВ K^* : $\vec{F}_{\text{уск}} = -m\ddot{\vec{r}}_0$, $\vec{F}_{\text{цб}} = -m\vec{\omega} \times \vec{r}^* + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^*]$, $\vec{F}_{\text{Кор}} = -2m[\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}^*]$.

Якщо деяке тіло тверде пов'язане із СВ K^* , то спостерігач у цій системі не виявить руху тіла, а отже, і прискорення (прискорення буде дорівнює нулю й при рівномірному й прямолінійному русі тіла в системі K^*). Таким чином, сума діючих на тіло сил, сил зв'язку й сил інерції $\vec{F} + \vec{F}_{\text{уск}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{Кор}} = 0$. Система перебуває в рівновазі. Цей висновок становить зміст *принципу Даламбера*. Якщо в деякий момент часу до діючих на тіло сил і силам зв'язку приєднати всі *сили інерції*, то тіло буде перебувати як би в рівновазі. Завдяки принципу Даламбера завдання динаміки формально зводяться до статичних завдань (кінетостатичний метод).

Розглянемо тепер окремі випадки руху тіла в НІСВ.

8.1. Сили інерції.

Нехай спостерігач H перебуває в СВ K , а спостерігач H^* – у НІСВ K^* , здатної поступально рухатися щодо системи K . Перед H^* на ідеально гладкій поверхні стола ($\kappa_{\text{тр}}=0$) лежать тіла різної маси й форми (куля, кубик і т.п.). Одне з тіл прикріплене до стінки K^* пружиною (коефіцієнт пружності k). Нехай тепер у результаті впливу H система K^* почала рухатися стосовно K з прискоренням a вліво. При цьому всі тіла в K^* здобувають щодо неї прискорення $-a$ вправо. Закріплені в K^* тіла діють із силою $\vec{F}_n$ на зв'язки, розтягують пружину на величину

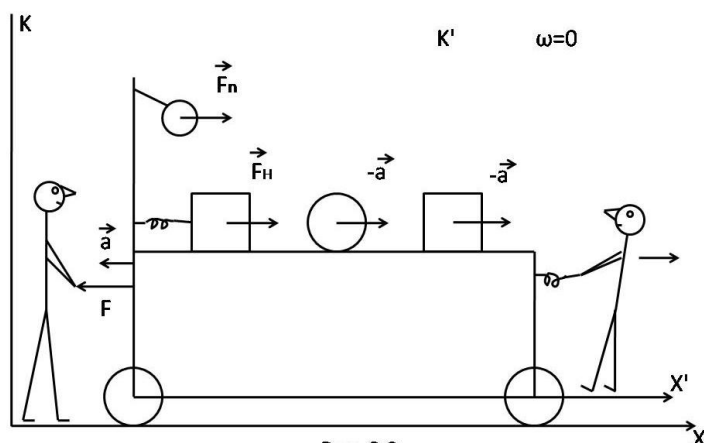


Рис. 8.2

$x = -(ma) / k$. Тепер перед нами два можливі способи опису спостережуваних явищ – з погляду спостерігача Н и спостерігача Н*.

З погляду спостерігача Н у ІСВ К:

Незакріплені тіла залишаються в спокої, тому що під час відсутності тертя ніяка

сила на них не діє. Закріплені стіл і тіла рухаються разом із системою К* із прискоренням a вліво.

З погляду спостерігача Н* у НІСВ К*:

Незакріплені тіла рухаються із прискоренням $-a$ (вправо). Отже, на них діють сили, пропорційні масам тіл і їх прискоренню: $F = -ma$. Така ж сила розтягує пружину на величину $x = -(ma) / k$. Тут при виборі знака «-» передбачається, що Н* знає про прискорення системи К* уліво (знає, що має справу із *силою інерції*). А якщо ні, то, він може припустити, що на всі тіла системи К* діє сила тяжіння, спрямована вправо, у результаті чого всі тіла здобувають однакове прискорення вправо. У випадку, якщо спостерігач знає про свій прискорений рух, він може визначити прискорення системи по величині розтягання пружини. Прилади, що діють на такому принципі називають *акселерометрами*.

8.2. Відцентрова сила.

Розглянемо окремий випадок, коли $\omega = \text{const}$, $\dot{r}_0 = 0$, $\vec{v}^* = \dot{r}^* = 0$, звідки сила $\vec{F}_{цб} = -m\vec{\omega} \times [\vec{r}, \vec{r}^*]$. Для спостерігача Н, що перебуває в спокої (наприклад, у крапці

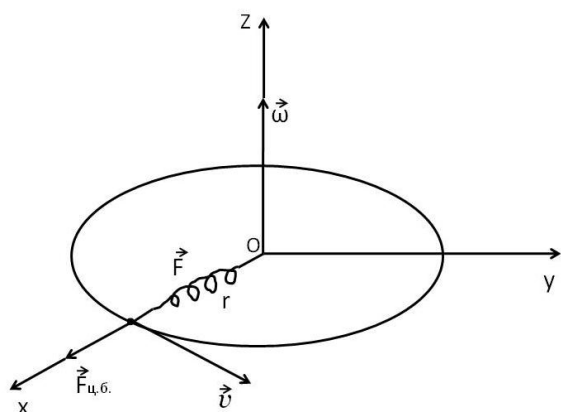


Рис. 8.3

О), рівняння руху по нормалі має вигляд: $(mv^2) / r = F$ або $mr\omega^2 = F$, де F – сила натягу пружини (доцентрова сила).

Для спостерігача Н*, що обертається разом із системою, тіло покоїться. Це можна формально пояснити тим, що крім сили натягу пружини на тіло діє *відцентрова сила інерції*, спрямована уздовж радіуса від центру диска: $F = -F_{цб}$, $F_{цб} = m\omega^2 r$.

Розглянемо деякі ефекти, пов'язані з добовим обертанням Землі щодо системи «нерухливих» зірок. Повний оборот Земля робить за 86164с. Отже, кутова швидкість обертання Землі $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$

рад/с. На всяке тіло, що спочиває на поверхні Землі, діє відцентрова сила, спрямована від осі обертання Землі NS.

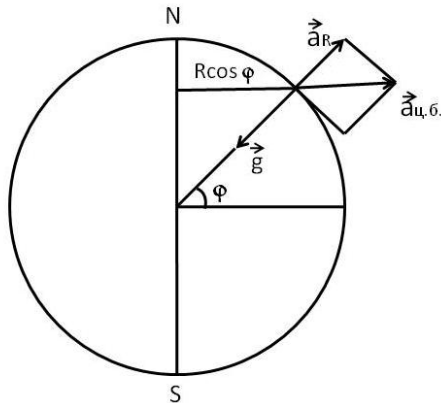


Рис. 8.4

Нехай тіло перебуває під географічною широтою φ . Тоді відцентрове прискорення приблизно дорівнює $a_{цб} = \omega^2 r = \omega^2 R \cos \varphi = 0,03 \cos^2 \varphi$ (м/с²) і прискорення вільного падіння на широті φ трохи менше, ніж було б тільки в результаті дії сили тяжіння: $g_\varphi = g_0 - 0,03 \cos^2 \varphi$ (м/с²).

Однак, відцентрова сила діє не тільки на тіла, що лежать на поверхні Землі. Насправді кожна частка Землі випробовує відцентрову силу, спрямовану назовні по радіусу кола широти. Сукупність усіх цих сил створює пружну деформацію тіла Землі. Земля злегка сплюснена: її полярна вісь NS приблизно на 1/300 коротше діаметра екватора. Внаслідок сплюснутості Землі залежність прискорення падіння від широти ще більше обчисленої. Спостереження привели до рівняння:

$g_\varphi = (9,832 - 0,052 \cos^2 \varphi)$ м/с². Так що годинники з маятником на екваторі відстають від таких же годинників на полюсі приблизно на 3,5 хв за добу.

Вищезгадане сплюснення наближенно 1/300 має місце для твердого тіла Землі. Набагато сильніше деформація її рідкої оболонки, океану, під дією відцентрової сили. Але ця деформація ніколи не спостерігається сама по собі. На неї накладає періодично мінливе протягом доби притягання води Сонцем і Місяцем. Накладення відцентрових сил і сил тяжіння дає складне явище припливу й відливу. Те ж саме відноситься й до нашої атмосфери, повітряного океану. Причому, на висоті повітряні приливні хвилі багато вищі, ніж водянні на поверхні моря.

8.3. Сила Коріоліса.

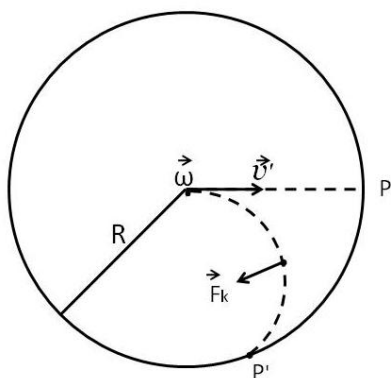


Рис. 8.5

$F_k = -2m\omega \times \mathbf{v}^*$. Розглянемо простий випадок, коли $\omega \perp \mathbf{v}^*$. Нехай тіло маси m рухається з початковою швидкістю $\mathbf{v}^*$ від центру до краю платформи, що обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = \text{const}$. Якби платформа не оберталася, то тіло потрапило б у крапку Р. У результаті обертання платформи й інерції тіла воно переміщалося б так, ніби на нього діяла б постійна

сила ($\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^*$), і в результаті попадає в точку P^* . Обчислимо відстань, на яку зміститься тіло під дією сили Коріоліса за час $t = R/v^*$: $PP^* = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2}(2m\omega v^*/m)(R/v)^2 = \omega R^2/v^*$. Результати вимірів збігаються із проробленими розрахунками.

Розглянемо ефекти, пов'язані з добовим обертанням Землі й переміщенням тіл по (або поблизу) поверхні Землі.

Нехай спостерігач перебуває в пункті з географічною широтою φ .

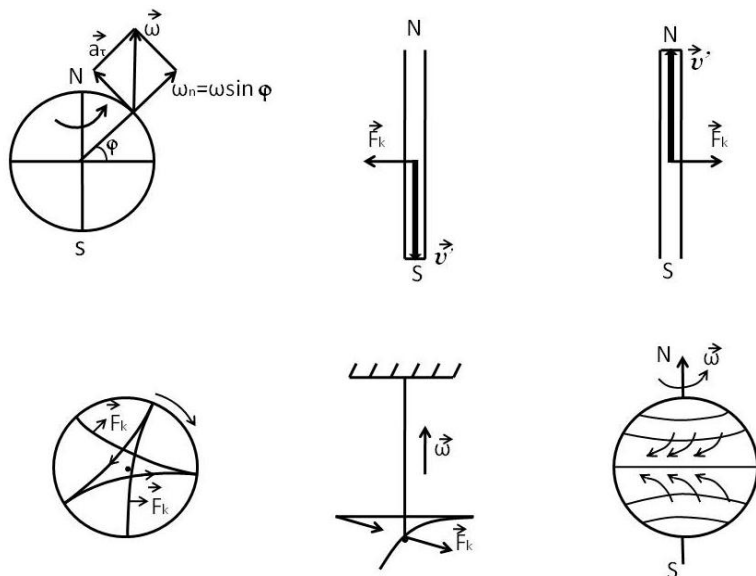


Рис. 8.6

НН позначає його площину обрію. У цьому пункті кутова швидкість обертання Землі ω розкладається на дві складові. Одна з них, паралельна радіусу Землі або схилу, - вертикальна складова: $\omega_{\perp} = \omega \sin \varphi$. Інша, паралельна горизонтальній площині, - горизонтальна складова: $\omega_{\tau} = \omega \cos \varphi$. Обидві складові кутової швидкості надають тілам, що рухаються, коріолісові

прискорення. Так, вертикальна складова в північній півкулі постійно приводить до відхилення тіл, що рухаються, вправо. Найбільш відомим прикладом є маятник Фуко, який пробігає розетку, що постійно викривляється вправо. Якщо дивитися з положення рівноваги маятника, то крайні крапки розетки переміщуються за 1 годину на кут $\alpha = (360^\circ/24) \sin \varphi$. Таким чином, спостереження за обертанням площини хитань маятника дають безпосередній доказ обертання Землі навколо своєї осі.

Неоднакове нагрівання земної атмосфери в екваторіальній і полярній зонах приводить до того, що атмосферне повітря тече із субтропічних областей високого тиску в екваторіальний пояс низького тиску. Цей потік у північній півкулі спрямований з північного сходу на південний захід. Таке походження північно-східного пасату, дуже важливого для мореплавання й авіації.

Снаряд, що летить, також зазнає відхилення, обумовлені коріолісовими силами інерції. При пострілі зі зброї, спрямованого на північ, снаряд буде відхилятися до сходу в північній півкулі й до заходу - у південному. При стрілянині уздовж меридіана на південь напрямки відхилення будуть протилежними. При стрілянині уздовж екватора сили Коріоліса будуть

притискати снаряд до Землі, якщо постріл зроблений у напрямку на захід, і піднімати його догори, якщо постріл зроблений у східному напрямку.

Під дією горизонтальної складової кутової швидкості падаючі тіла відхиляються до сходу від вертикалі. Наприклад, крапка падіння тіла, кинутого з висоти 300м на широті 45° відхиляється приблизно на 8 см.

До найважливіших застосувань сили Коріоліса відноситься гіроскопічний компас. На кораблях і літаках його роблять нечутливим до бортової й кильової хитавиці, а також до прискорень при розгоні, гальмуванні й скривленні шляху. Цього домагаються, монтуючи три гіроскопи, горизонтальні осі яких утворюють між собою кути по 120° та з довгими періодами цілком загасаючих прецесійних коливань (в ідеальному випадку $T=84\text{хв}$). Але й самі бездоганно сконструйовані гірокомпаси все-таки допускають похибку, яка залежить від напрямку й швидкості руху. Причина: усі кораблі переміщаються по великим колам земної кулі. Тому під час шляху вони мають кутову швидкість ω_2 , яка векторно складається з кутовою швидкістю обертання Землі ω_1 . Звідси вісь дзиги встановлюється не в площині меридіана, але в площині, у якій перебуває результуючий вектор кутової швидкості, складеної з ω_2 і ω_1 . Ця площина збігається з меридіональною лише в тому випадку, коли корабель іде уздовж екватора.

На закінчення ще раз підкреслимо, що сили інерції мають сенс і можуть бути введені тільки для спостерігача, пов'язаного з НІСВ.

Лекція 9. Елементи механіки рідин.

Паралельно з розвитком механіки часток і твердих тіл ішов розвиток механіки суцільних середовищ. Гази, рідини й тверді тіла в механіці суцільних середовищ розглядаються як безперервні.

Замість набору координат і імпульсу часток стан системи характеризується функціями координат і часу, що описують розподіл різних фізичних величин у просторі: густиною $\rho(\mathbf{r},t)$, тиском $p(\mathbf{r},t)$ і швидкістю $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. Відповідно для розв'язку гідродинамічних завдань слід задавати не кінцеве число початкових значень координат і імпульсів (або швидкостей), а початкові й граничні умови для безперервних функцій координат і часу, що характеризують стан середовища.

Однак, незважаючи на істотну зміну як фізичного змісту самих змінних, розглянутих у теорії, так і виду рівнянь, динамічний характер законів у механіці суцільних середовищ залишається непорушним. Функції ρ , p , $\mathbf{v}$ однозначного визначають стан системи в цей момент часу, а рівняння гідродинаміки ідеальної рідини дозволяють установити значення цих функцій у будь-який наступний

момент часу, якщо вони відомі в початковий момент. Однозначний характер залежностей між фізичними величинами, розглянутими в теорії, тут у наявності. А це, як вказувалося вище, - основна властивість динамічних законів.

В 19 ст. почала розвиватися гідродинаміка неідеальної, в'язкої рідини. Справа в тому, що усередині реальної рідини, що рухається (або газу) виникають сили тертя, зневажити якими в загальному випадку не можна. Одночасно між окремими ділянками середовища, що рухається, існує теплообмін. У результаті цих процесів відбувається дисипація енергії, що не враховується в рівняннях ідеальної рідини. Механіка суцільних середовищ перестає бути чистою механікою. При деяких умовах процеси немеханічної природи, теплові процеси, можуть стати істотними. Тому замкнену систему рівнянь, що описує в принципі поведінку суцільного середовища в загальному випадку, не можна побудувати на базі однієї механіки Ньютона. Лише після створення теорії тепла (термодинаміки) така система рівнянь була побудована.

Отже, *гідроаеромеханікою* називають розділ фізики, у якому вивчаються закони рівноваги й руху рідин і газів, а також взаємодія рідин, що рухаються, і газів з омиваними ними твердими тілами. У гідроаеромеханіці відволікаються від молекулярної будови рідин і газів, розглядаючи їх як суцільне середовище, неперервно розподілене в просторі. *Гідроаеростатикою* називають відділ гідроаеромеханіки, у якому розглядаються умови й закономірності рівноваги рідини й газу під дією прикладених до них сил. *Гідроаеродинамікою* називають відділ гідроаеромеханіки, у якому вивчаються закони руху рідини й газу під дією прикладених до них сил і їх взаємодії із твердими тілами.

Відмінною рисою рідин і газів у порівнянні із твердими тілами є їхня плинність, тобто мала опірність деформації зрушення. Відмінність між рідиною й газом полягає лише в характері залежності їх щільності від тиску, тобто в практичній нестисливості рідин і помітної стискальності газів.

У гідромеханіці для краплинних рідин і газів звичайно користуються єдиним терміном «*рідина*» (нестислива або стислива). *Нестисливою рідиною* називають краплинну рідину або газ, залежністю щільності якого від тиску в розглянутому завданні можна зневажити. *Стисливою рідиною* називають газ, залежністю щільності якого від тиску в розглянутому завданні зневажити не можна. *Ідеальною рідиною* називають рідину, у якій відсутнє внутрішнє тертя. *В'язкою рідиною* називають рідину, для якої явищем внутрішнього тертя зневажити не можна. *Баротропною рідиною* називають рідину, щільність якої залежить тільки від тиску.

9.1. Гідростатика.

Рідина перебуває в спокої, коли кожна складова її частка має швидкість, рівну нулю. У цьому випадку тиск залежить тільки від положення крапки усередині рідини $p = p(r)$. Тиск завжди діє перпендикулярно до розглянутого

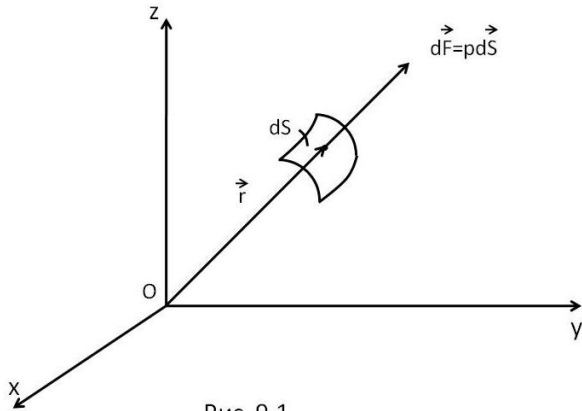


Рис. 9.1

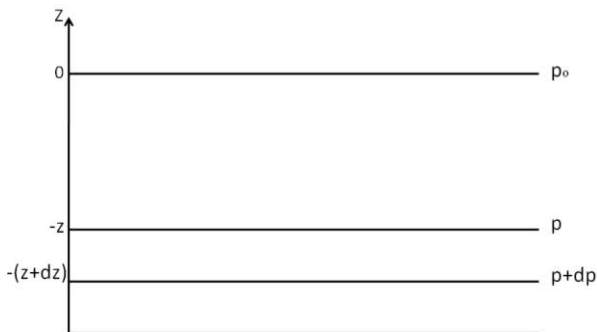


Рис.9.2

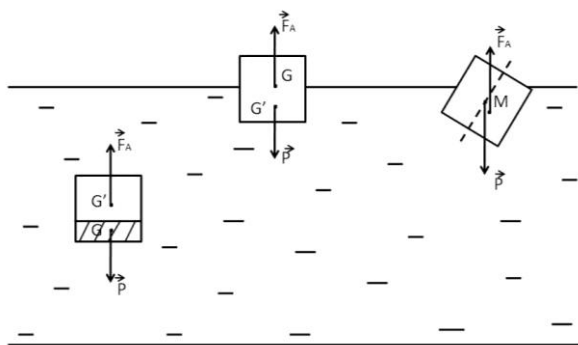


Рис. 9.3

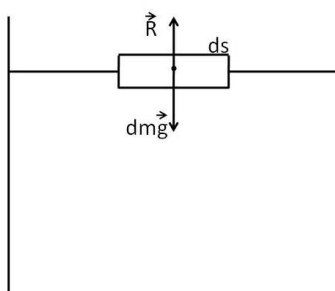


Рис.9.4

елемента поверхні й не залежить від її орієнтації. Інакше, тиск усередині рідини *ізотропний*. Одиниця тиску – паскаль ($\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$). Тиск, діючий на рідину в деякій її крапці (сила ваги при цьому не враховується), передається цією рідиною однаково у всіх напрямках (*закон Паскаля*). На цьому законі ґрунтується дія гідравлічного преса.

Нехай ρ – густина рідини. Тоді зміна тиску на висоті dz буде дорівнювати: $dp = -\rho g dz$ (знак «-» показує, що p зростає зі зменшенням z). Із цього співвідношення маємо: $p = -\rho g z + p_0$. Звідси безпосередньо впливає *закон Архімеда*: на занурене в рідину тіло діє виштовхувальна сила, чисельно рівна вазі рідини, витиснутої тілом, і прикладена в центрі ваги об'єму зануреної частини тіла. Сила Архімеда спрямована від більшого тиску до меншого. Цей закон є загальним; його можна застосовувати також і у випадку стисливої рідини. При цьому необхідно пам'ятати, що сила ваги прикладена до центру мас тіла, а сила Архімеда – до крапки G^* (центр зануреного об'єму). Якщо тіло однорідне й повністю занурене в рідину, то крапки центрів сили ваги й сили Архімеда збігаються; отже, момент сил, що діє на тіло, буде дорівнювати нулю. Якщо ж тіло неоднорідне, то можливі різні типи рівноваги. Для тіла, що перебуває в рівновазі усередині рідини, положення буде стійким, якщо центр ваги тіла G перебуває нижче крапки дії сили Архімеда G^* . Для тіла,

що плаває на поверхні рідини, положення буде стійким, якщо при невеликому нахилі тіла точка перетинання осі плавання й напрямку сили Архімеда (метацентр M) виявляється вище центру ваги G . Дійсно, у цьому випадку на виведене з рівноваги тіло починає діяти пара сил (P, F_A) , у результаті чого тіло, зробивши кілька коливань, знову вертається в положення рівноваги.

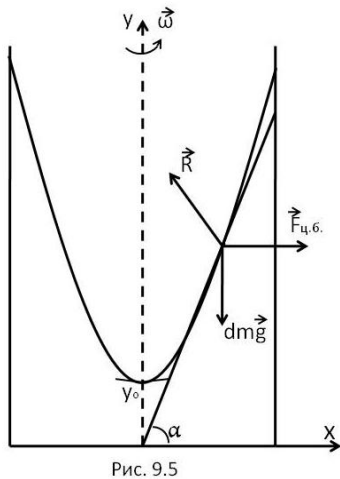


Рис. 9.5

У рідині при зрушенні шарів статичні сили опору не виникають. Тому елемент вільної поверхні перебуває в рівновазі, якщо рівнодіюча всіх зовнішніх діючих на тіло сил спрямована нормально до поверхні елемента. Наприклад, розглянемо поверхню рідини, що перебуває в рівновазі під дією сили ваги. На елемент поверхні ds діє сила ваги dmg і сила реакції R , яка її врівноважує. Поверхня ds , що перебуває під дією сили ваги, завжди горизонтальна. Розглянемо тепер поверхню рівномірно обертуючої рідини. Застосуємо принцип Даламбера.

Виберемо систему координат, пов'язану з рівномірно обертуючою циліндричною посудиною й візьмемо до уваги відцентрову силу $F_{ц.б.}$. Умові рівноваги в нашій СВ відповідає рівняння $dmg + F_{ц.б.} + R = 0$, або в проекціях на осі x і y : $dmx\omega^2 = R\sin\alpha$ і $dmg = R\cos\alpha$, $\tan\alpha = dy/dx = x\omega^2/g$, звідки $dy = \frac{\omega^2}{g}xdx$. У результаті інтегрування одержуємо $y = y_0 + (\omega^2/2g)x^2$ – рівняння параболи з вертикальною віссю. Отже, вільна поверхня рідини є параболоїдом обертання.

9.2. Гідродинаміка. Рівняння нерозривності. Рівняння Бернуллі.

По визначенню, *ідеальною рідиною* називають нестисливу рідину, яка не має в'язкості. Цьому випадку із задовільним наближенням відповідає значне число рідин і навіть газів (якщо їх швидкості набагато менше швидкості звуку і якщо виключаються області більших градієнтів швидкостей). У кінематиці рідин можливі два різні методи опису руху. Один з них, називаний методом Лагранжа, полягає в тому, що рух рідини задається шляхом вказівки залежності від часу координат усіх її часток: $x=F_1(a,b,c,t)$, $y=F_2(a,b,c,t)$, $z=F_3(a,b,c,t)$. Виключаючи із цих рівнянь час, можна одержати рівняння траєкторії частки. Однак, основним методом гідроаеродинаміки є метод Ейлера, який полягає в тому, що рух рідини визначається шляхом завдання поля швидкостей рідини в просторі й у кожний момент часу, тобто $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ і скалярним полем тиску $p = p(\mathbf{r},t)$. Швидкість однозначно визначається в кожній крапці потоку (*ламінальний плин*). Дійсно, стаціонарний потік являє собою рух розташованих поруч і ніде не пересічних

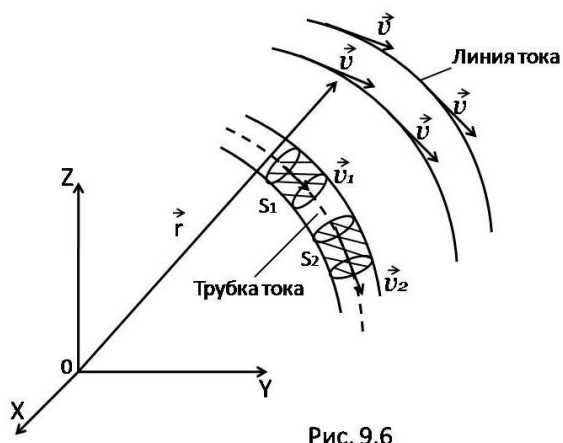


Рис. 9.6

струмків (тут *трубкою струму* називається поверхня, утворена *лініями струму* - лінія, дотична в кожній крапці якої в цей момент часу t збігається за напрямком з вектором швидкості, - проведеними через усі крапки малого замкненого контуру. Частина рідини, обмежена трубкою струму, називається *струмком*). Отже, швидкість у кожній крапці потоку має тільки одне значення й спрямована завжди по

дотичних до ліній струму, тому частки рідини, що перебувають у трубці струму, не можуть виходити за її межі.

Якщо швидкість залежить від часу, плин рідини називають *нестационарним*; якщо вона не залежить від часу, плин називають *стаціонарним*. У цьому випадку загальний вид ліній струму залишається незмінним.

Потоком рідини крізь нерухому поверхню S називається маса m рідини, що проходить крізь цю поверхню за одиницю часу:

$$\dot{m} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_S \rho v_n dS,$$

де $\vec{n}$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до елемента поверхні dS , v_n - проекція швидкості рідини на напрямок $\vec{n}$, $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ - вектор густини потоку рідини.

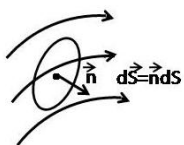


Рис. 9.7

Із закону збереження маси випливає, що збільшення маси усередині даного об'єму дорівнює масі, що надходить в одиницю часу в об'єм:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Скористаємося теоремою Гаусса, що дозволяє перейти від поверхневого інтеграла до об'ємного: $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} \cdot dV$ або $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = - \int_V \text{div} \cdot \vec{j} \cdot dV$, звідки

маємо: $\partial \rho / \partial t = - \text{div} \vec{j} = - \text{div} \rho \vec{v}$ і остаточно $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$. Це рівняння називають рівнянням *нерозривності* потоку.

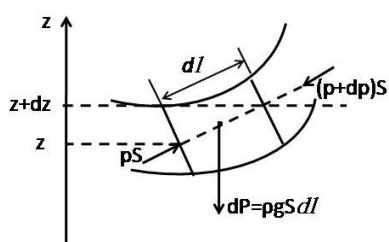


Рис. 9.8

Рівняння нерозривності для нестисливої рідини: $\nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$.

Основним завданням *гідроаеродинаміки* є знаходження полів швидкості, тиску й густини в рідині, що рухається під дією заданих зовнішніх сил. Найпростіший випадок такого завдання описується

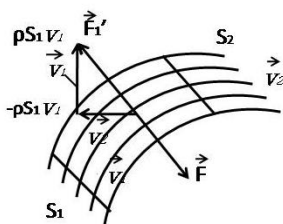
рівнянням Бернуллі. Рівняння Бернуллі безпосередньо випливає з рівняння Ньютона й з того факту, що в ідеальній рідині сила тиску завжди перпендикулярна до поверхні, на яку вона діє. Для напрямків уздовж ліній струму маємо $\mathbf{v} = \mathbf{v}(l)$ і $\rho = \rho(l)$; у межі, коли $dl \rightarrow 0$, $S_1 = S_2$ і $dm = \rho S dl$. У напрямку l єдиними силами, що викликають прискорення, виявляються $-dp \cos \alpha = -\rho g S dl \cos \alpha$, pS і $-(p+dp)S$. Заміняючи $\cos \alpha$ на (dz/dl) , одержуємо рівняння руху уздовж l у вигляді $\rho S dl (dv/dt) = -\rho g S dl (dz/dl) - S dp$, інакше $\rho \frac{dv}{dt} + \rho g \frac{dz}{dl} + \frac{dp}{dl} = 0$.

Оскільки $dv/dt = dv/dl \cdot dl/dt = v(dv/dl)$, маємо: $\frac{dp}{\rho} + v dv + g dz = 0$. Для випадку стисливої рідини ρ є функцією l і, інтегруючи почленно, можна записати:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const.}$$

Це рівняння називають *рівнянням Сен-Венана*.

Для ідеальної рідини ρ – постійна величина й інтегрування дає *рівняння Бернуллі*: $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{const}$. Рівняння Бернуллі є простим вираженням закону збереження енергії уздовж лінії струму (втрати енергії на тертя не враховуються): *повна енергія поточної рідини в одиниці об'єму, тобто сума*



гідростатичного тиску p , кінетичної енергії $\frac{1}{2} \rho v^2$ і потенційної енергії ρgh , уздовж трубки струму залишається постійною.

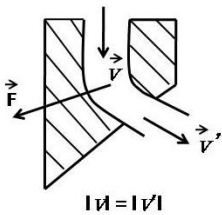


Рис. 9.9

Визначення скалярного поля тисків усередині складного потоку рідини часто виявляється неможливим. Тому не можна користуватися тисками при розрахунках сил, що діють на стінки труби або різні тіла в потоці. Однак до всього потоку закон збереження імпульсу можна застосовувати; це дозволяє безпосередньо визначати результуючу всіх сил, що діють на стінки й тіла в потоці.

Наприклад, для ідеальної рідини закон збереження імпульсу можна написати у вигляді $dp/dt = \mathbf{F} = -\mathbf{F}^*$. Повна зміна імпульсу рідини в одиницю часу дорівнює результуючій $\mathbf{F}$ усіх діючих на рідину сил ($\mathbf{F} = -\mathbf{F}^*$ – сила тиску рідини на стінки труби):

$$\mathbf{F} = dp/dt, \text{ або } \mathbf{F} = d/dt (m_2 \mathbf{v}_2 - m_1 \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 dm_2/dt - \mathbf{v}_1 dm_1/dt = \mathbf{v}_2 \rho S_2 v_2 - \mathbf{v}_1 \rho S_1 v_1 = \rho S_1 v_1 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

З рівняння безперервності випливає, що $S_1 v_1 = S_2 v_2$, тому $\mathbf{F}^* = \rho S_1 v_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$.

Розглянемо чисельний приклад. Нехай по трубі діаметром 20 см, вигнутої під кутом 120° , тече вода; її витрата $Q = 100$ л/с. Яка рівнодіюча всіх сил тиску на

стінку труби? Підставимо чисельні значення у формулу $F = \rho S(Q/S) |v^* - v| = 2\rho Q(Q/S) \cos 60^\circ = \rho Q^2/S \approx 320 \text{ Н}$.

9.3. В'язкість. Ламінарний і турбулентний режими плин у рідин.

В'язкість (внутрішнє тертя) – властивість газів, рідин і твердих тіл характеризує опір їх плин (для твердих тіл – розвитку залишкової деформації)

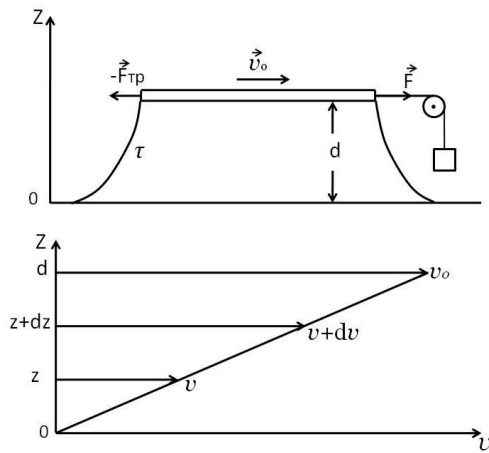


Рис.9.10

під дією зовнішніх сил. Кількісно в'язкість (коефіцієнт внутрішнього тертя η) визначається величиною дотичної сили, яка повинна бути прикладена до одиниці площини шару, що зрушується, щоб підтримати в цьому шарі ламінарний плин з постійною швидкістю щодо зрушення, рівній одиниці. Робота зовнішньої сили, що врівноважує грузлий опір і підтримуючої стаціонарний плин – *грузлий потік*, повністю переходить у тепло. Для грузлої

рідини передбачаються деякі граничні умови: а) у крапках поверхні нерухливої стінки швидкість рідини дорівнює нулю (умова прилипання); б) у крапках поверхні рухомої стінки швидкість рідини дорівнює швидкості відповідної крапки стінки. Розглянемо у зв'язку із цим простий випадок, коли рідина під дією капілярних сил прилипає до легкої пластини, яка рухається по її поверхні, захоплюючи за собою частину рідини. Швидкість у шарі прилиплої рідини міняється пропорційно величині z : $F/S = \tau = \eta(v_0/d)$. Якщо швидкість v міняється з відстанню z не за лінійним законом, то будемо мати:

$$F/S = \tau = \eta \cdot dv/dz, \text{ або } F_{\text{тр}} = -\eta \cdot dv/dz \cdot S.$$

Одиницею в'язкості в СІ служить така в'язкість, при якій градієнт швидкості з модулем, рівним одиниці (1м/с на 1м), приводить до виникнення сили внутрішнього тертя в 1 Н на 1 м² поверхні торкання шарів. Ця одиниця називається паскаль-секунда (Па·с). Відношення $\nu = \eta / \rho$ називають *кінематичною в'язкістю*. Вона вимірюється в стоксах (Ст).

Спостерігається два види плин рідини або газу: ламінарне й турбулентне. Потік називається *ламінарним*, якщо в ньому можна визначити лінії струму. Будь-яка частка рідини постійно залишається в одній і тій же трубці струму. Це означає, що лінії струму ніде не перетинаються, або, з математичної точки зору, що функція $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – однозначна (кожній крапці відповідає одна-єдина швидкість). А якщо ні, то говорять про *турбулентний плин*. Англійський учений Рейнольдс (1883 р.) установив, що характер плин залежить від значення безрозмірної величини: $Re = \rho l v / \eta$ або $Re = l v / \nu$, Re – число Рейнольдса. Тут v –

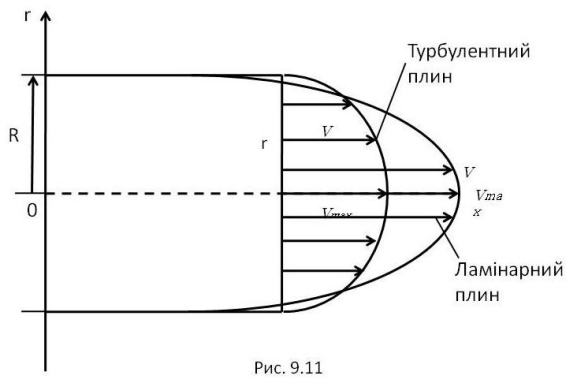


Рис. 9.11

характерна швидкість плин (середня по перетину труби), l – лінійний розмір об'єкта або границь потоку (сторона квадрата при квадратному перетині, діаметр при круглому перетині труби і т.д.). Число Рейнольдса може служити критерієм подоби для плин рідин (газів) у трубах, каналах і т.п. Характер їх плин в трубах

різних перетинів буде зовсім однаковий, якщо кожному плин відповідає те саме значення Re .

Як приклад розглянемо картину обтікання для випадку літака, що має крейсерську швидкість $v_c = 250$ км/год, користуючись моделлю зі зменшенням $1/2,5$, якщо досвід проводиться в повітрі. З рівності $Re_c = Re_m$ одержуємо $\rho l v_c / \eta = \rho l v_m / \eta$ звідки $v_m = L/l v_c = 2,5 \cdot 250 = 625$ км/ч.

Число Рейнольдса й відповідне значення швидкості, що характеризує перехід від ламінарного плин до турбулентного режиму, називають критичним: $Re_{кр} = \rho l v_{кр} / \eta$. Значення $Re_{кр}$ дозволяє визначити $v_{кр}$.

З досвідів по вивченню плин рідини по трубі із гладкими стінками виходить приблизна величина $Re_{кр} = 2300$.

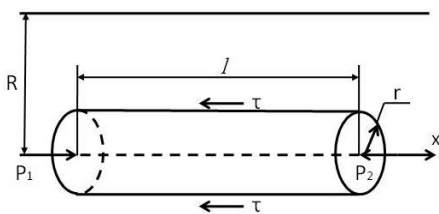


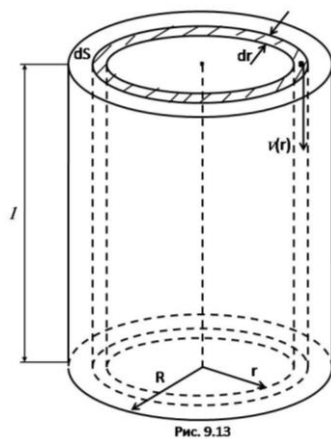
Рис. 9.12

Для середніх швидкостей виявляється, що якщо $Re < 2300$, то плин ламінарний, а якщо $Re > 2300$, то – турбулентний.

Наприклад, при подиху людини, при вдиху повітря проходить через ніздрі ($d \approx 1$ см) із середньою швидкістю порядку 2 м/с ($Q = 0,2$ л/с).

При 20°C для повітря $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\rho = 1$ кг/м³, звідки $Re \approx 1000 < Re = 2300$, тобто повітряні потоки при подиху виявляються ламінарними.

Уважаючи плин ламінарним, обчислимо потік рідини Q , тобто об'єм рідини, що протікає через поперечний переріз труби за одиницю часу. Розглянемо циліндричний елемент рідини, розташований по осі труби радіусом R . Припускаємо, що тиск уздовж вертикального переріза труби постійно. Якщо плин стаціонарний, то сума сил, що діють на цей елемент, дорівнює нулю. Зокрема по осі x будемо мати: $\pi r^2 p_1 - \pi r^2 p_2 - 2\pi r l \tau$. Для в'язкої рідини $\tau = -\eta \cdot dv/dr$; знак «-» показує, що швидкість рідини зменшується з віддаленням від осі. Тому рівняння здобуває вид: $r(p_1 - p_2) + 2\eta l \cdot dv/dr = 0$.



Звідси $dv = -r(p_1 - p_2)dr/2\eta l$ і $v = -r^2(p_1 - p_2)/4\eta l + C$. Значення постійної C визначають із умови, що близько стінок труби ($r=R$) швидкість дорівнює нулю.

Отже, розподіл швидкості по перетину визначається вираженням $v(r) = (p_1 - p_2) \cdot (R^2 - r^2)/4\eta l$. Таким чином, видно, що розподіл по швидкостях підкоряється параболічному закону. Як і слід було сподіватися, у цьому випадку швидкість максимальна уздовж осі труби: $v_{\text{макс}} = (p_1 - p_2)R^2/4\eta l$.

Підрахуємо загальну витрату рідини. Для рідкого стовпа витрата dq через елемент поперечного переріза ds дорівнює: $dq = vds = v2\pi r dr$; для всього перетину знаходимо:

$$Q = 2\pi(p_1 - p_2)/4\eta l \cdot \int_0^R (R^2 - r^2) dr, \text{ звідки } Q = \pi(p_1 - p_2)R^4/8\eta l. \text{ Ми одержали формулу}$$

Пуазейля: для ламінарного плину в'язкої рідини в циліндричній трубі витрата пропорційна R^4 і градієнту (перепаду) тиску $(p_1 - p_2)/l$. Це дуже важливе співвідношення, застосовне також і до газів при тисках порядку міліметрів ртутного стовпа, використовується у вакуумній техніці при розрахунках ступеня відкачки повітря.

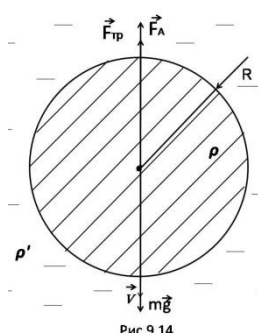
Визначаючи середню швидкість $\langle v \rangle = Q/S$, ми можемо написати вираз для перепаду тиску уздовж труби: $\Delta p = 8\eta l \langle v \rangle / R^2$.

Формула Пуазейля дає можливість вимірювати коефіцієнт в'язкості η рідини шляхом виміру перепаду тиску й витрати Q (віскозиметр Оствальда).

9.4. Рух тіл у рідинах і газах.

При невеликих швидкостях руху тіл у рідинах істотні тільки сили тертя, що залежать від в'язкості η . Причому, єдиними величинами, від яких залежать сили тертя, є в'язкість η , відносна швидкість v і радіус кулі R : $F_{\text{тр}} = f(\eta, v, R)$. Вид функції f можна визначити з міркувань розмірностей: $[F] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$, $[\eta] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, $[R] = \text{м}$, $[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$. Звідси знаходимо єдино можливий вид функції f : $F_{\text{тр}} = k\eta Rv$, де k – безрозмірний коефіцієнт, що залежить від форми тіла. Для сфери $k = 6\pi$. У результаті **одержуємо формулу**

Стокса: $F_{\text{тр}} = -6\pi\eta Rv$. Ця формула дає можливість визначити постійну швидкість падіння кулі в в'язкої рідини, на цьому заснований метод визначення η . Якщо швидкість постійна, то $F_{\text{тр}} = mg - F_A$, тому: $6\pi\eta Rv = 4/3 \pi R^3(\rho - \rho^*)g$.



Звідси $v = \frac{2}{9} \cdot (\rho - \rho^*) g R^2 / \eta$. Швидкість пропорційна R^2 . Це пояснює явища суспензій у газах і рідинах дуже маленьких часток (хмари, туман, аерозолі, гідрозолі). Спостереження за швидкістю падіння заряджених мікроскопічних крапельок масла в електричному полі лежить в основі одного з методів визначення елементарного електричного заряду (Міллікен).

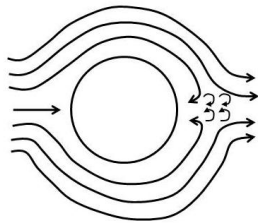


Рис. 9.15

Виникнення опору в турбулентному потоці пов'язане з роботою утвору вихрів за об'єктом. Цей опір має вигляд: $F_{\text{тр}} = C \cdot \rho l^2 v^2$, де l – лінійні розміри об'єкта. Опором, обумовленим

силами в'язкого тертя на поверхні тіла, можна зневажити. Наведений вираз можна представити в іншому виді, якщо замість l^2 увести у формулу міделевий перетин S (найбільший по площі перетин тіла, перпендикулярний потоку):

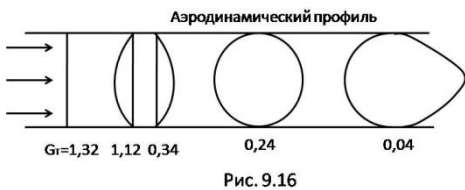


Рис. 9.16

$$F_{\text{тр}} = C_{\text{тр}} \rho v^2 S / 2.$$

Безрозмірний коефіцієнт $C_{\text{тр}}$ залежить від геометричної форми об'єкта й незначно міняється при зміні числа Рейнольдса. У відносно широких межах для даної геометричної форми об'єкта можна вважати значення $C_{\text{тр}}$ постійним. На мал. 9.16 представлені значення $C_{\text{тр}}$ деяких тіл обертання при $5000 < Re < 50000$. Для випадку аеродинамічного профілю вихровий опір так само малий, як і опір в'язкого тертя.

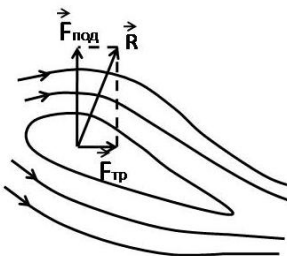


Рис. 9.17

Працями Н.Е.Жуковського (1847 - 1921) і його учня С.А.Чаплигіна покладений початок сучасній аеродинаміці.

Жуковський, зокрема, вивів формулу для визначення піднімальної сили крила літака, що є основою всіх аеродинамічних розрахунків літаків, знайшов оптимальний профіль для крила, що забезпечує достатню піднімальну силу при відносно малому аеродинамічному опорі.

Основи молекулярної фізики й термодинаміки

Лекція 10. Кінетична теорія газів.

10.1. Вступ. Основні поняття.

1. У геометрії вимірюється лише *одна* основна величина – *довжина*. У кінематиці до неї додається друга – *час*; у динаміці третя – *маса*. У вченні про теплоту додається четверта основна величина – *температура*.

2. У якості збірної назви для деякої кількості твердої речовини, рідини й газу використовують термін «*кількість речовини*». Кількість речовини тільки твердого тіла, або тільки рідини, або тільки газу, перебуває лише в *одній «фазі»*. Коли кількість речовини, наприклад води, складається з льоду, рідини й пари, то вона має три фази, якщо тільки з води й пари, - то дві фази і т.д.

3. Усі кількості речовини мають крім маси m , об'єм V , температуру T і перебувають під деяким тиском p . Величини p , V і T називають «*термічними параметрами стану*».

4. Усі кількості речовини складаються з атомів або молекул. Атоми й молекули характеризують *склад* речовини.

5. У всіх кількостях речовини є велика кількість часток. Так, наприклад, концентрація молекул кімнатного повітря становить $n = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. *Теорія теплоти має справу в остаточному підсумку з поведінкою величезного числа часток*. Поведінка кожної окремої частки її зовсім не цікавить. Для жодної з них окремо не можна вказати місце або величину й напрямок швидкості (координати й імпульси) у кожний момент часу. Не можна визначити температуру й тиск окремої молекули. Вимірювані тільки особливі параметри стану сукупності молекул.

6. Кожне тіло або кожна кількість речовини в 1 кіломоль незалежно від хімічного складу містить $N_0 = 6,02 \cdot 10^{26}$ молекул – *число Авогадро*.

7. Далі корисно зробити вказівки щодо вживання деяких слів: маса, об'єм, число молекул, енергія відносяться завжди тільки до кількостей речовини, тобто до обмежених твердих, рідких або газоподібних об'єктів. При цьому заради стислості часто вживають такі терміни: речовина, газ, рідина і т.д., замість: кількість речовини, кількість рідини й т.п., якщо це явно впливає з контексту. Це рідко призводить до неправильного розуміння.

8. Зміни температури викликають зміни: 1) розмірів тіл, 2) поглинання світла, 3) електричного опору металів, напівпровідників і т.д. Більшість усіх фізичних і хімічних явищ виявляє залежність від температури. Кожне із цих явищ може бути *основою для виміру температури* й для створення вимірювального приладу – термометра.

У повсякденнім житті, у науці й техніці використовують зміну об'єму *рідини*. Ртутний термометр із його стоградусною шкалою між температурою плавлення льоду і кипіння води, відомий кожному учню, вони застосовуються між $+ 800^{\circ}\text{C}$ і $- 30^{\circ}\text{C}$. Для більш низьких температур до $- 200^{\circ}\text{C}$ застосовують термометри, заповнені *пентаном*. Поряд з рідинними термометрами вживають переважно електричні термометри (термопар, термометри опору і т.д.). Для виміру високих температур важливе значення має оптичний метод виміру температур «*оптичним пірометром*».

9. Визначення поняття «*теплота*». Слово *теплота* вживають у двох різних значеннях. Здебільшого позначають їм не особливу форму енергії, як у випадку з потенційною, кінетичною, електричною й магнітною, але лише як особливий вид переходу енергії від однієї кількості речовини до іншої. Цей перехід обумовлений *при виключенні всяких допоміжних засобів* тільки різницею температур. Подібний перехід називають «*термічним*». Потім теплота була інтерпретована (Бекон – 1620 р., Гассенді, Ломоносов – 1741 р.) як результат руху часток, з яких складається речовина. Ці ідеї були розширені й уточнені Бернуллі (1738г.) і сторіччям пізніше доповнені Джоулем (1848) і Кренігом (1856г.). У такий спосіб термін *теплота* позначає *кінетичну частину внутрішньої енергії*. Сучасна кінетична теорія речовини була розвинена в другій половині 19 століття в працях Клаузіуса, Максвелла (1860 р.) і Больцмана (1871 р.) і знайшла найбільш закінчене вираження в працях Гіббса в кінці 19 століття.

10.2. Основи молекулярно – кінетичної теорії ідеального газу.

1). У макроскопічному об'ємі ідеального газу втримується велика кількість молекул. 2). Розміри молекул настільки малі в порівнянні із проміжками між ними, що в більшості випадків цими розмірами можна зневажити й розглядати молекули як матеріальні точки. 3). Молекули перебувають у стані безперервного руху, у результаті чого зустрічаються одна з однією і зі стінками тієї посудини, де перебуває газ. 4). Сили взаємодії між молекулами газу проявляються тільки при зіткненнях, тому від зіткнення до зіткнення кожна молекула рухається вільно. Закони руху молекул описуються законами класичної механіки. Зіткнення

молекул однією з іншою і зі стінками посудини, у якій перебуває газ, відбуваються за законами пружного удару.

У всіх існуючих в природі тілах відбувається постійний рух складових цієї тіла часток: поступальне, обертальне й коливальне. Характерною рисою цього руху є його *хаотичність*. Про цей рух говорять як про *тепловий* рух.

Для опису теплового руху часток, як деякої системи, застосовують різні методи. Наприклад, вивчення закономірності руху великих сукупностей електронів, атомів, молекул, фотонів і т.п. становить предмет *статистичної фізики*. Властивості середніх макроскопічних величин, що визначають стан тіла, становить предмет *термодинаміки*.

10.3. Визначення термодинамічного стану. Параметри стану.

У загальному випадку **системою** називають *сукупність певного числа різних речовин*, кількості яких можуть бути або постійними, або змінними (якщо в системі відбуваються хімічні реакції); ці речовини можуть перебувати в різних *фазах*: газової, рідкої й твердої. Система, у якій можливі різні процеси, вивчається у *взаємодії* із зовнішнім середовищем.

Стан системи визначається чисельними значеннями деяких змінних величин, які характеризують її й називаються *параметрами стану*. Ми вже називали найпоширеніші: тиск p , об'єм V , і температура T . У різних випадках параметрами стану можуть бути й інші величини: намагніченість J , вектор поляризації P , напруженість електричного E або магнітного поля H і т.п.

Тиск. Завдяки тепловому руху часток газу вони діють на стінки вміщуючої їх посудини. Молекули газу, зустрічаючись зі стінками посудини, передають їм деякий імпульс, зміною імпульсу в одиницю часу визначають діючу на тіло силу й, тим самим, тиск.

Температуру визначають середньою кінетичною енергією молекули: $\langle E_k \rangle = i/2 kT$, де i – число ступенів свободи молекули, k – постійна Больцмана.

Відзначимо, що кількість теплоти Q , а також робота A не є характеристиками стану системи. Це величини, які характеризують *обмін* системи із зовнішнім середовищем (їх взаємодія).

Поряд з параметрами стану системи вводяться інші величини, які також характеризують її стан і міняються зі зміною стану, інакше кажучи є функціями стану. Функції стану дають більш повні відомості про систему. Вони залежать тільки від стану й не залежать від того шляху, за яким система прийшла в цей стан. Найбільш важливими функціями стану є *внутрішня енергія* U і ентропія S .

10.4. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу.

Рівняння стану ідеального газу.

Нехай в об'ємі $V = \ell^3$ перебуває N молекул. $dp/dt = F_x = 2p_x z$, де $z = v_x / 2\ell$ - число зіткнень молекули зі стінкою за 1 с, 2ℓ - шлях від однієї стінки до іншої і назад.

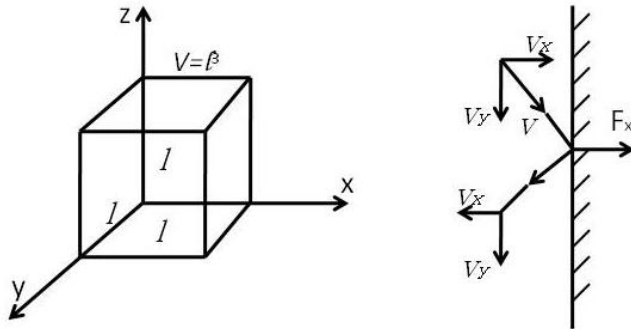


Рис. 10.1

Отже, $F_x = p_x v_x / \ell = m v_x^2 / \ell$. Величина повної сили, що діє на всі 6 стінки посудини в результаті ударів усіх N молекул, рівна $6p\ell^2$, а з іншого боку вона рівна:

$$6p\ell^2 = \sum_{i=1}^N \frac{2m}{\ell} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{2Nm}{\ell} \langle v^2 \rangle,$$

або $p = (1/3) \cdot (N/\ell^3) \cdot m \langle v^2 \rangle = (2/3)(N/V) \langle E_k \rangle$ і остаточно $p = (2/3)n \langle E_k \rangle$ - *основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу*.

По визначенню температури $\langle E_k \rangle = (i/2)kT$, тому, якщо $i = 3$ - для одноатомного газу, то $p = nkT$. Враховуючи, що $n = N/V$, $k = R/N_0$, $m = m_1 \cdot N$ і $M = m_1 \cdot N_0$, підставимо ці значення у вираз для p і одержимо *рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва - Клапейрона)*: $pV = (m/M)RT$.

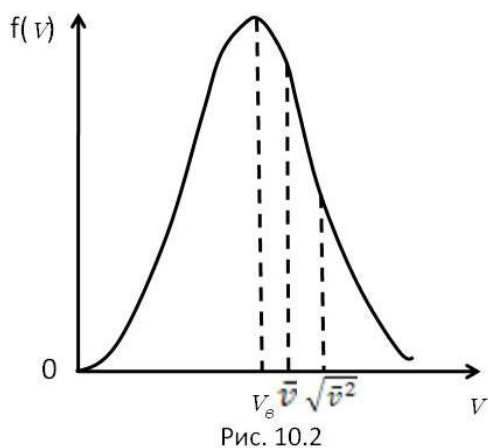
Для суміші газів виконується закон Дальтона:

$m/M = pV/RT$, $m/M = m_1/M_1 + m_2/M_2 + m_3/M_3 + \dots$, $pV/RT = p_1V/RT + p_2V/RT + \dots$, звідки одержуємо закон Дальтона: $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$. Враховуючи, що $m = m_1 + m_2 + \dots$, одержимо рівняння для визначення молярної маси суміші газів: $M = (m_1 + m_2 + \dots) / (m_1/M_1 + m_2/M_2 + \dots)$.

10.5. Закон Максвелла для розподілу молекул по швидкостях.

Хаотичний рух великої кількості молекул газу системи в стані статистичної рівноваги дозволяє використовувати закони статистичної механіки (кінетичної теорії газів). Імовірність $dW(\mathbf{v})$ того, що швидкості мікрочастинок лежать в інтервалах від $\mathbf{v}$ до $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, дається формулою:

$dW(\mathbf{v}) = (m_1/2\pi kT)^{3/2} \cdot \exp\{-m_1(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT\} dv_x dv_y dv_z$. Проінтегрувавши цю формулу в усіх напрямках, можна одержати розподіл імовірностей для абсолютних величин швидкостей: $dW(v) = 4\pi(m_1/2\pi kT)^{3/2} \cdot \exp(-m_1 v^2/2kT) \cdot v^2 dv$ (мал.10.2), де $v = \sqrt{v^2}$. Середнє число часток $dn(v)$ зі швидкостями, що лежать в

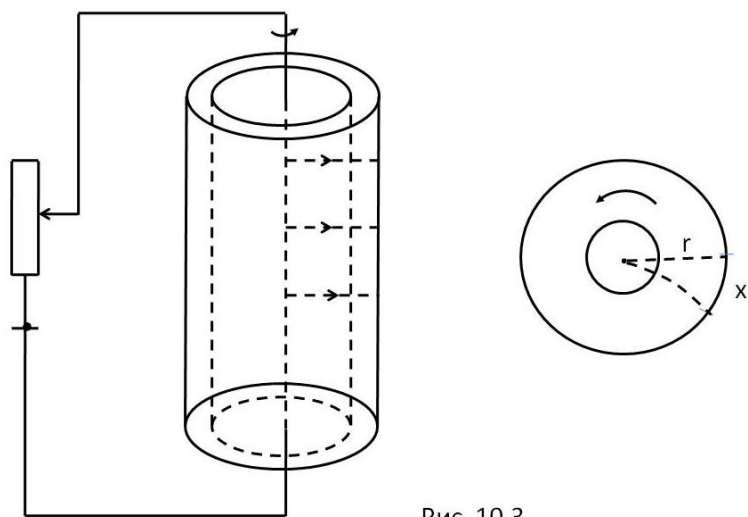


інтервалах від v до $v+dv$, рівно $dn(v) = NdW(v)$, де N – повне число часток. Розподіл Максвелла дає для найбільш імовірної швидкості (з $dW(v_B)/dv = 0$) значення $v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}}$, для середньої арифметичної швидкості $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}}$ і для середньої квадратичної швидкості молекул $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}}$. Видно, що $v_B < \langle v \rangle < \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

10.5.1. Дослід Штерна.

Випар рідини, електронів нагрітими тілами й інші досліди показують, що швидкості молекул, і взагалі мікрочастинок, неоднакові, причому закон їх розподілу по швидкостях відповідає розподілу Максвелла.

Пряма експериментальна перевірка цього закону була проведена Штерном (1920 р.) і Ламмером (1929 р.). Схема досвіду представлена на мал. 10.3. Тут випробуванням газом служили пари срібла, які виходили при випарі шару срібла, нанесеного на платиновий дріт, що нагрівається електричним струмом. Дріт містився в ретельно відкачаній посудині, щоб атоми паркового срібла безперешкодно розліталися. Для одержання вузького пучка на шляху



атомів срібла розташовувалася перешкода із щілиною, через яку атоми попадали на латунну пластинку, яка перебувала при кімнатній температурі, і осаджувалися на ній у вигляді вузької смужки (зображення щілини). Спеціальним обладнанням увесь прилад приводився у швидке обертання навколо осі, паралельної

площини пластинки, внаслідок чого змінювалося місце влучення атомів на пластинці: поки вони пролетіли шлях r від щілини до пластинки, пластинка зміщувалася. Зсув росте з кутовою швидкістю ω приладу й зменшується з ростом

швидкості v атомів. Знаючи ω і r , можна визначити v . Тому що v має всілякі значення, смужка розмивається, причому щільність осаду в данім місці пропорційна числу атомів певної швидкості; найбільша щільність відповідає найбільш імовірній швидкості, яка й визначалася в досвіді Штерна. Згода теорії й експерименту гарна. ($F = -2m[\omega, v]$, $x = \frac{1}{2} \cdot F/m \cdot t^2 = \omega r^2/v$).

10.6. Закон Больцмана для розподілу часток у зовнішньому потенційнім полі. Барометрична формула.

Розглянемо ідеальний газ у силовім полі (мал. 10.4). Тому що на молекули газу діють зовнішні сили, то тиск газу буде мінятися від крапки до крапки. Нехай силове поле діє уздовж осі z . Різниця тисків, що діють на майданчики 1 і 2 дорівнює сумарній силі, що діє на частки газу, укладені в об'ємі паралелепіпеда з підставою S і висотою dz . Ця сила рівна $FnSdz$, де F – сила, що діє на одну молекулу в крапці з координатою z . Тому: $dp = nfdz$, $F = -dU/dz$,

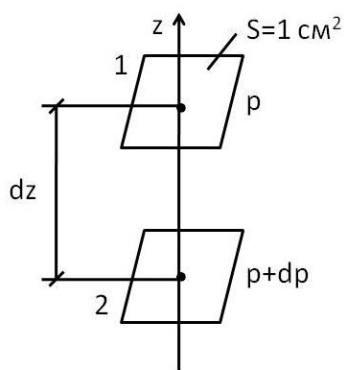


Рис. 10.4

$dp = -ndz \cdot du/dz = -n \cdot du$, але $p = nkT$ і при $T = \text{const}$
 $dp = kTdn$ і $kTdn = -ndU$. Розділяючи змінні й інтегруючи,
 одержимо: $\int \frac{dn}{n} = -\frac{1}{kT} \int dU$, $\ln n = -U/kT + \text{const}$, при $U = 0$
 $n = n_0$. У такий спосіб одержуємо *формулу Больцмана*:
 $n = n_0 \cdot \exp(-U/kT)$. Враховуючи, що $p = nkT$,
 $p = p_0 \cdot \exp(-U/kT)$.

У випадку поля тяжіння поблизу земної поверхні потенційна енергія молекули на висоті $z = h$ $U = mgh$ і
 $p = p_0 \cdot \exp(-mgh/kT)$, або $p = p_0 \cdot \exp(-Mgh/RT)$ – *барометрична формула*.
 Застосовність барометричної формули обмежена, тому що атмосфера в дійсності не перебуває в тепловій рівновазі і її температура міняється з висотою.

10.7. Розподіл енергії по ступенях свободи.

Співвідношення $mv^2/2 = 3/2 (kT)$ служить підставою для механічної інтерпретації температури. Внаслідок ізотропності швидкостей природньо вважати, що $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, звідси, враховуючи $3\langle E_{\text{кx}} \rangle = 3/2(kT)$, одержимо, що на кожний ступінь свободи системи, яка перебуває в тепловій рівновазі, доводиться в середньому енергія, рівна $\frac{1}{2}kT$.

Цей результат слушний не тільки для газів. Больцман показав його застосовність до більшості систем, що перебувають у тепловій рівновазі.

Лекція 11. Явища переносу в термодинамічно нерівноважних системах.

Переходячи до вивчення явищ переносу в газах, необхідно попередньо зупинитися на характері взаємодії молекул газу. Що значить «молекули зустрічаються»? – Під *зіткненням* будемо розуміти тільки ті випадки, коли молекули проходять настільки близько друг від друга, що взаємодія істотно міняє їхній рух, тобто швидкості молекул суттєво змінюються по величині або за напрямком.

11.1. Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул.

Зіткнення в газі відбуваються зовсім безладно. Тому й шлях, проходимий молекулою між випробовуваними нею двома послідовними зіткненнями, може бути самим різним. Середнє його значення при дуже великій кількості зіткнень z

називають *середньою довжиною вільного пробігу*: $\langle \lambda \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i}{z}$. Цю величину

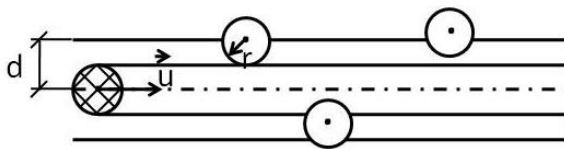


Рис. 11.1

можна визначити в такий спосіб. Уважаємо, що всі молекули, крім однієї, покояться (мал. 11.1). Швидкість цієї однієї молекули рівна відносній середній швидкості $\langle u \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$ - у результаті розподілу по швидкостям. $d = 2r$ – радіус

сфери молекулярної дії. За 1 с молекула переміщується на відстань $\langle u \rangle$. Усі нерухливі молекули, центри яких перебувають усередині циліндра з підставою радіуса $d=2r$, входять у сферу дії молекули, що рухається, тобто зустрічаються з нею. Перетин циліндра $\sigma = \pi d^2$ – *ефективний перетин*. Число зіткнень z за 1 с дорівнює числу нерухливих молекул, центри яких виявляються усередині циліндра: $z = \sigma \langle u \rangle n$. За 1 с молекула проходить шлях $\langle v \rangle$ і звершує z зіткнень.

Отже, $\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{z} = \frac{\langle v \rangle}{\sigma \langle u \rangle n}$, або $\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$.

Для 1 моля ідеального газу $pV = RT$, $n = N/V = p/kT$, тоді $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma p} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$.

Середня довжина вільного пробігу визначає такі властивості газів, як *дифузія, в'язкість і теплопровідність*.

11.2. Дифузія.

Якщо концентрація деякої речовини, що утворює систему, різна в різних її місцях, то завдяки тепловому руху молекул і їх перемішуванню із часом, речовина переходить із місць із більшої в місця з меншою концентрацією доти, поки сполука речовини не стане однаковою по всім його об'ємі. Цей процес називають *дифузією*.

Для простоти припустимо, що концентрація речовини C міняється тільки уздовж одного напрямку, наприклад осі x . Кількість речовини, що переходить в одиницю часу через перпендикулярну осі x поверхню одиничної площі називають *дифузійним потоком* j . Будемо вважати потік позитивним, якщо він спрямований по осі x і негативним, якщо проти.

З іншого боку, речовина переходить із місць із більшої в місця з меншою концентрацією. Тому знак потоку буде зворотним знаку похідній dn/dx (градієнт): $j = -D \cdot dC/dx$. D – *коефіцієнт дифузії*.

Потік j можна визначити будь-яким чином: як *вагова кількість розчиненої речовини*, що проходить через одиничний майданчик за 1с; як *число молекул* цієї речовини й т.п. При цьому треба аналогічним образом визначати концентрацію C : як *вагова кількість* ($C=\rho$) або як *число молекул в одиниці об'єму* ($C=n$). Тоді коефіцієнт дифузії D не буде залежати від способу визначення потоку й концентрації ($[D]=m^2/c$).

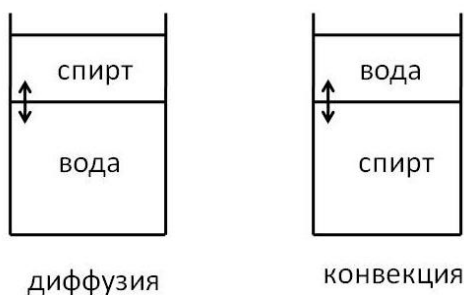


Рис. 11.2

Під дією поля сил ваги (мал.11.2) може відбуватися вирівнювання сполуки середовища, що супроводжується її рухом – *конвекція*. Конвекція призводить до вирівнювання сполуки набагато швидше, ніж дифузія.

Використовуючи поняття про середню довжину вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$, можна визначити порядок величини коефіцієнта дифузії в газах і з'ясувати характер його залежності від стану газу.

Розглянемо суміш двох газів при $p=\text{const}$ і сполуці, що змінюється уздовж осі x . Будемо розглядати один з газів (газ 1) у суміші.

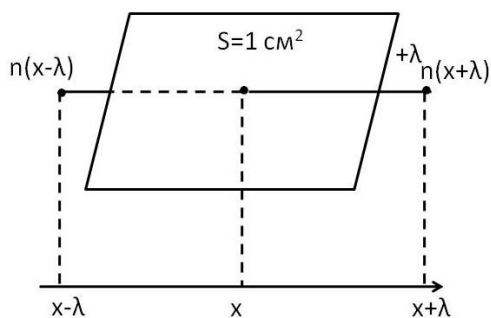


Рис. 11.3

Нехай n – концентрація його молекул і $n = f(x)$. Дифузійний потік j являє собою надлишок числа молекул, що проходять за 1 с у напрямку осі x через перпендикулярний їй одиничний майданчик, над числом молекул, що проходять через цей же майданчик у протилежному напрямку (мал. 11.3). Число молекул, що проходять в 1 с через одиницю площі,

пропорційне $n\langle v \rangle$ (зліва праворуч), n – концентрація в тому місці, де молекули випробували своє останнє зіткнення; для молекул, що рухаються в протилежному напрямку треба взяти значення n на відстані $\langle \lambda \rangle$ праворуч від майданчика. Отже дифузійний потік дається різницею: $j \sim \langle v \rangle n(x - \lambda) - \langle v \rangle n(x + \lambda)$. Тому що $\langle \lambda \rangle$ – мала величина, то різниця $n(x - \lambda) - n(x + \lambda)$ можна замінити на $-\lambda \cdot dn/dx$. Таким чином, $j \sim -\langle v \rangle \langle \lambda \rangle dn/dx$; порівнюючи з $j = -D \cdot dn/dx$, одержуємо $D \sim \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$. Враховуючи, що $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}$,

одержимо $D \sim vkT/\sigma p$, σ – перетин зіткнення. Точний облік характеру взаємодії молекул із застосуванням методів статистичної механіки призводить до: $D = 1/3 \cdot \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$ і $\Delta M = -D(dp/dx) \cdot \Delta S \cdot \Delta t$.

11.3. Внутрішнє тертя (в'язкість).

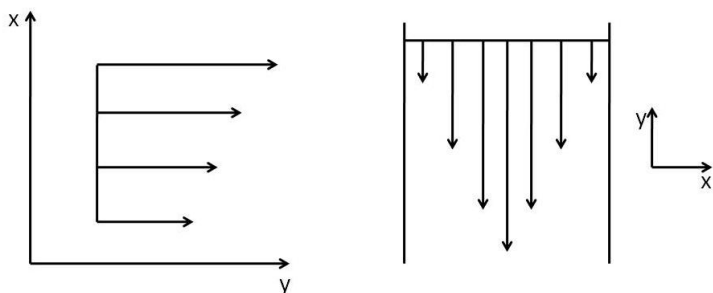


Рис. 11.4

Рис. 11.4. Розглянемо потік рідини (або газу), швидкість плин у якого різна в різних місцях. Такий стан не є рівноважним і в рідині (газі) будуть відбуватися процеси, що прагнуть вирівняти швидкість

плину. Ці процеси називають *внутрішнім тертям*, або *в'язкістю*. При внутрішньому терті завдяки тепловому руху молекул відбувається передача імпульсу від більш швидких ділянок до менш швидких. Аналогічно дифузійному потоку введемо поняття *потоку імпульсу* Π : це – повний імпульс, який переноситься в 1с у позитивному напрямку осі x через одиничний майданчик, перпендикулярний осі x : $\Pi = -\eta \cdot dv_y/dx$, де η – коефіцієнт в'язкості. $[\Pi] = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с})/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) = \text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}^2$. $[\eta] = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}) = \text{Па} \cdot \text{с}$. Коефіцієнт в'язкості визначає

швидкість передачі імпульсу з одного місця потоку в інше. Швидкість же дорівнює імпульсу, діленому на масу. Тому швидкість вирівнювання швидкості потоку буде визначатися величиною η / ρ ; $v = \eta / \rho$ – кінематична в'язкість. $[\nu] = \text{м}^2/\text{с} = [D]$. Тому $v = (1/3) \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$, $\eta = \rho \cdot v$ і, остаточно,

$$\eta = (1/3) \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho.$$

Повний імпульс, переданий від шару до шару, буде $\Delta P = -\eta \cdot (dv_y/dx) \Delta S \Delta t$. Зміна імпульсу згодом – сила тертя між поверхнями ΔS шарів рідини (газу), що протікають друг повз друга: $F = -\eta \cdot (dv_y/dx) \cdot \Delta S$.

11.4. Теплопровідність.

Рівняння теплопровідності можна записати аналогічно рівнянню дифузії: *потік тепла* q – *кількість тепла, що проходить в одиницю часу через одиничний майданчик, перпендикулярний осі x*: $q = -K \cdot dT/dx$. Тут K – коефіцієнт теплопровідності. $[q] = \text{Дж}/\text{м}^2\text{с}$, тоді $[K] = \text{Дж}/\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К} = (\text{кг} \cdot \text{м})/(\text{с}^2 \text{К})$. Таким чином, теплопровідність являє собою «дифузію енергії», причому роль коефіцієнта дифузії відіграє коефіцієнт «температуропровідності» χ , який можна визначити так: K – визначає швидкість передачі тепла від більш нагрітих до менш нагрітих ділянок. Але зміна температури тіла дорівнює кількості отриманого їм тепла, діленому на теплоємність. Тому швидкість вирівнювання температур у різних місцях визначається коефіцієнтом теплопровідності, діленим на теплоємність одиниці об'єму тіла: $\chi = K/\rho C_p$. $[\chi] = \text{м}^2/\text{с}$. Так що можна записати:

$\chi = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$, а $K = 1/3 \cdot \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho C_p$, або, враховуючи, що $C = c \cdot M$, а $\rho/M = \rho/RT$, і, крім того, враховуючи $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}$, $K = 1/3 \cdot \frac{\langle v \rangle C_p}{\sqrt{2} N_0 \sigma}$ і, тому що $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то й $K \sim \sqrt{T}$. (У дійсності K з температурою росте швидше, тому що з ростом температури росте C_p і зменшується σ).

Кількість тепла, переданого при теплопровідності, ($Q = -K(dT/dx) \Delta S \Delta t$).

Таким чином, усі три розглянуті явища: дифузія, в'язкість і теплопровідність - мають однаковий механізм.

Випишемо окремо формули, що описують процеси переносу: $D = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$, $\eta = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \rho$, $K = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \rho \cdot c$;

$\Delta M = -D \cdot dp/dx \cdot \Delta S \cdot \Delta t$, $F = -\eta \cdot dv_y/dx \cdot \Delta S$, $\Delta Q = -q \cdot dT/dx \cdot \Delta S \cdot \Delta t$.

Лекція 12. Перший закон термодинаміки.

12.1. Прямі й зворотні, оборотні й необоротні процеси.

У попередніх лекціях було дане пояснення багатьох гарне відомих властивостей газів (і рідин) з погляду уяв про рух і зіткнення молекул. Однак, як вказувалося, різні властивості систем можуть бути описані також за допомогою принципів термодинаміки, яка не розглядає молекулярної будови макроскопічних систем, але проте висновки її добре узгоджуються з дослідними даними.

У молекулярно-кінетичній теорії газів газ розглядається як єдина система з дуже великої кількості часток, з яких кожна підкоряється законам механіки. За допомогою найпростіших механічних законів кінетична теорія газів пояснила багато теплових властивостей газів, наприклад, розширення при нагріванні, пружність, дифузію, в'язкість, теплопровідність і т.п. Таким же шляхом був установлений зв'язок між температурою й середньою кінетичною енергією молекул.

Поведінка окремої молекули газу описується законами механіки, тому природно вважати, що й властивості газу, як збори безлічі молекул, повинні підкорятись тим же законам. Однак цей погляд невірний. Насамперед помітимо, що всі чисто механічні процеси завжди *оборотні*, тобто в механіці немає місця для *необоротності*. Механічні явища строго симетричні (оборотні) стосовно минулого й майбутнього; досить звернути початкові умови, як даний механічний процес піде у зворотному напрямку. Приклад – камінь ($\uparrow\downarrow$), кінострічка і т.п.

Парадокс Лошмидта (1876г.) (мал. 12.1) показав, що процес $A \rightarrow B \rightarrow A$ термодинамічно необоротний. Інший приклад необоротного процесу «яйце $\rightarrow$ яєчня $\rightarrow$ яйце» і т.п.

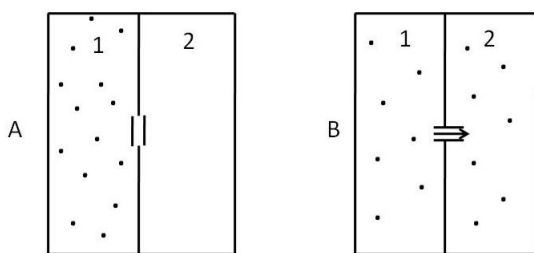


Рис. 12.1

Таким чином, наведені міркування показують, що кінетична теорія газів, побудована на принципах механіки, не в змозі пояснити необоротності й тому неминуче знаходиться у протирічч з термодинамікою. Далі буде показано як розрішується конфлікт між механікою, кінетичною теорією газів і термодинамікою на основі найбільш загальних уявлень про два види закономірностей у природі.

12.2. Принцип еквівалентності тепла й роботи.

Принцип еквівалентності *тепла й роботи* затверджує: якщо розглядати систему, здатну обмінюватися роботою або теплотою з навколишнім її середовищем, а наприкінці досвіду, повертається в первісний стан, то *відношення кількості тепла й роботи, якими система обмінюється із середовищем, завжди залишається постійним* – $A = J \cdot Q$, або в СІ $A = Q$ (Майєр – 1842 і Джоуль – 1843 р.). Принцип еквівалентності тепла й роботи є частковим випадком більш загального закону збереження енергії.

Однак сам закон збереження енергії, незважаючи на гадану ясність і простоту, у дійсності не можна вважати ні простим ні ясним. Цей закон виражає сталість суми трьох доданків: кінетичної енергії, потенційної енергії, що залежить від положення тіла, і внутрішньої енергії у формі тепловій, електричній або хімічній. При цьому, як указує Пуанкаре («Гіпотеза й наука», 1903 р.), таке вираження закону не представляло б утруднень, якби між зазначеними доданками можна було провести строгу відмінність, тобто перший доданок залежав тільки від швидкості, другий не залежав б від швидкості й внутрішнього стану тіл, а третє залежало б тільки від внутрішнього стану тіл. Насправді це не так, тому що, наприклад, у випадку наелектризованих тіл їх електростатична енергія залежить і від стану тіл, і від їхнього положення в просторі: якщо тіла ще й рухаються, то їх електродинамічна енергія залежить уже не тільки від стану тіл і їх положення в просторі, але й від їхніх швидкостей і т.д.

Разом з тим, теплова й механічна форми енергії в достатньому ступені роздільні й незалежні друг від друга, щоб можна було застосовувати закон збереження енергії. Звідси випливає, що в теорії теплових машин принцип еквівалентності теплоти й роботи можна застосовувати без усяких обмежень.

12.3. Внутрішня енергія. Перший закон термодинаміки.

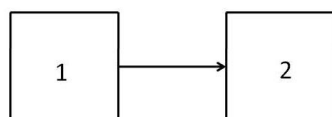


Рис. 12.2

Припустимо, що система переходить зі стану 1 у стан 2, відмінний від стану 1 (мал.12.2). Під час перетворення $1 \rightarrow 2$ система одержує кількість тепла Q і виконує роботу A . Ясно, що обидві ці величини не залежать друг від друга й знати стани 1 і 2 недостатньо, щоб визначити величини Q і A . Однак за допомогою принципу еквівалентності можна показати, що величина $Q - A$ повністю визначається початковим і кінцевим станами й не залежить від еволюції системи між цими станами.

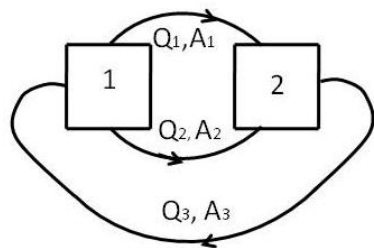


Рис. 12.3

Насправді, припустимо, що система переходить зі стану 1 у стан 2 різними шляхами, причому величини Q і A ухвалюють відповідно значення Q_1, A_1 і Q_2, A_2 . Оскільки ми розглядаємо тут тільки переміщення системи в просторі й зміни її температури, завжди можна змусити систему повернутися у свій вихідний стан. Припустимо, що повернення зі стану 2 у стан 1 (мал. 12.3) відбувається в обох випадках однаковим чином, причому відповідні величини тепла й роботи рівні Q_3 і A_3 . Таким чином, одержуємо два цикли перетворень, для кожного з яких слушне співвідношення

$Q = A$: $A_1 + A_3 = Q_1 + Q_3$, $A_2 + A_3 = Q_2 + Q_3$. Віднімаючи з першого рівняння друге, одержуємо $A_1 - A_2 = Q_1 - Q_2$ і після перетворення остаточно одержуємо:

$Q_1 - A_1 = Q_2 - A_2$. При різних переходах $1 \rightarrow 2$ величина $Q - A$ зберігається. Ця величина, отже, представляє зміну деякої функції стану, яка називається внутрішньою енергією системи U . Отже по визначенню $U_2 - U_1 = Q - A$, або в диференціальній формі: $\delta Q = dU + \delta A$ — перший закон термодинаміки: *теплота, надана системі, витрачається на збільшення внутрішньої енергії системи й на роботу, чинену системою над зовнішнім середовищем.*

Відмінності в записі (δQ , δA і dU) малих величин теплоти й роботи й зміни внутрішньої енергії мають аж ніяк не формальний характер, а виражають глибокі фізичні відмінності цих величин. Справа в тому, що внутрішня енергія системи є однозначною функцією її стану. Звідси випливає, що при здійсненні системою довільного процесу, у результаті якого вона знову вертається у вихідний стан, повна зміна внутрішньої енергії системи дорівнює нулю: $\oint dU = 0$. У той же час, ні робота, ні теплота не є функціями стану й тому δQ і δA не є повними диференціалами.

Окремі випадки першого закону термодинаміки:

1. Адіабатичний процес - $dQ = 0$, $dA = -dU$;
2. Ізохоричний процес - $V = \text{const}$, $dA = 0$, $dQ = dU$;
3. Ізобаричний процес - $p = \text{const}$, $dA = pdV$, $dQ = dU + pdV$;
4. Ізотермічний процес - $T = \text{const}$, $dU = 0$, $dQ = dA$.

12.4. Теплоємність і її залежність від виду процесу.

Звичайно *теплоємністю* називають кількість теплоти, яку необхідно *затратити* для зміни температури тіла на 1 K. Теплоємність, віднесена до одиниці кількості речовини, називають *питомою* (до 1 кг речовини – *масовою*), віднесена до моля – *мольною* (*молярною, або молекулярною*), до одиниці об'єму – *об'ємною*. Відповідно одиницями виміру теплоємності служать: Дж/К, Дж/кгК, Дж/мольК, Дж/м³ К і позасистемна одиниця кал/моль·град.

Оскільки Q не є функцією стану тіла, а залежить від характеру процесу, у результаті якого тіло перейшло в новий стан, то й теплоємність $C = dQ/dT$ визначається цим процесом.

12.4.1. Молярна й питома теплоємності газів при постійному об'ємі.

Оскільки $V = \text{const}$, $\delta Q = dU$, $C_V = (\delta Q/dT)_V = (dU/dT)$. Для ідеального газу $U = (i/2) \cdot RT$ і молярна теплоємність $C_V = (i/2)R$.

Питома теплоємність $c_V = C_V/M = (i/2) \cdot (R/M)$.

12.4.2. Молярна й питома теплоємності газів при постійному тиску.

$p = \text{const}$, $\delta Q = dU + p \cdot dV$. Для 1 моля ідеального газу $pV = RT$, звідки

$\delta Q = (i/2)RdT + RdT$ і $C_p = (i/2) \cdot R + R = ((i+2)/2) \cdot R$, тобто $C_p = C_V + R$ - рівняння Майєра.

Питома теплоємність $c_p = C_p/M = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M}$.

Відношення $C_p/C_V = \frac{i+2}{i} = \gamma$ - *постійна адіабати*.

Для одноатомних молекул $i = 3$, $\gamma = 5/3 \approx 1,7$, для двохатомних молекул $i = 5$ і $\gamma = 1,4$. Для твердих тіл $i = 6$, $\gamma = 8/6 \approx 1,3$, $C_V = 3R$ – закон Дюлонга й Пті.

12.5. Застосування першого закону термодинаміки.

12.5.1. Ізохоричний процес.

$V = \text{const}$, ($A = 0$, $dQ = dU$, $pV = (m/M)(RT$, $p/T = \text{const}$).

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу можна розрахувати за формулою:

$U_2 - U_1 = (m/M) \cdot C_v \cdot (T_2 - T_1)$, або $\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$. Помітимо, що ця формула

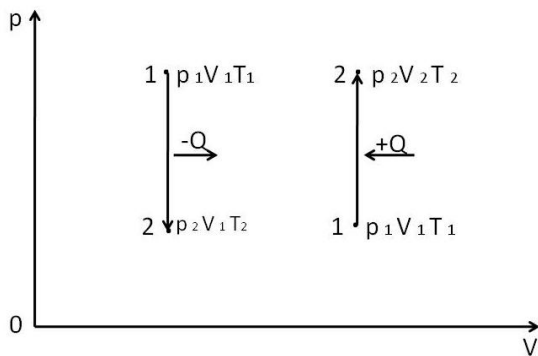
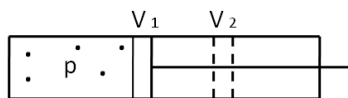


Рис. 12.4

застосовна для всіх без винятку процесів, тому що внутрішня енергія ідеального газу залежить тільки від температури й змінюється прямо пропорційно зміні температури. Теплообмін з навколишнім середовищем $\Delta Q = m \cdot c_v \cdot \Delta T$ (мал. 12.4).

12.5.2. Ізобаричний процес. Робота при ізобаричному процесі.



$p = \text{const}$, $pV = (\frac{m}{M}) \cdot RT$, отже, $\frac{V}{T} = \text{const}$. Зміна

внутрішньої енергії розраховують за формулою

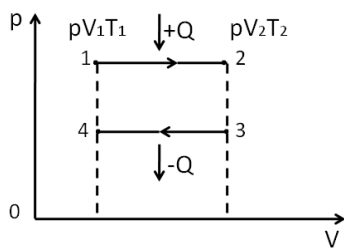


Рис. 12.5

$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$. Зовнішню роботу обчислюють так (мал.

12.5): $\delta A = p \cdot dV$, $\Delta A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \rightarrow \Delta A = p \cdot \Delta V$, або

$\Delta A = \frac{m}{M} R \Delta T$. Теплообмін з навколишнім

середовищем: $\Delta Q = \frac{m}{M} C_p \cdot \Delta T$, або $\Delta Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T$.

12.5.3. Ізотермічний процес. Робота при ізотермічному процесі.

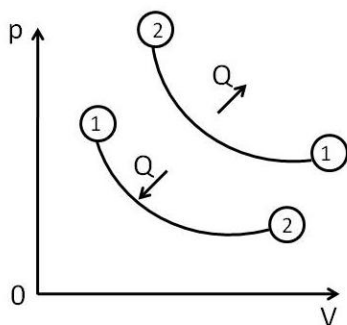


Рис. 12.6

$T = \text{const}$, $pV = \text{const}$, $dU = 0$, $U_1 = U_2$. Мал. 12.6.

Робота $\delta A = p \cdot dV$ $A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$, $p = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{V} \cdot T$,

$A = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$, або $A = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$ і

$A = \frac{m}{M} RT \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$. Теплообмін між газом і навколишнім

середовищем визначають із рівності $Q = A$ і

$$Q = \frac{m}{M} \cdot RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

12.5.4. Адіабатичний процес. Робота при адіабатичному процесі.

$$\delta Q = 0, dU = \frac{m}{M} C_v dT, \delta A = p \cdot dV,$$

$$\delta A = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}, \quad \frac{m}{M} C_v dT + \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = 0, \quad \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} = 0, \quad d\left(\ln T + \frac{R}{C_v} \ln V + \text{const}\right) = 0,$$

$$\ln T + \frac{R}{C_v} \ln V = \text{const}, \quad \ln TV^{\frac{R}{C_v}} = \text{const}, \quad \text{отже, } TV^{\frac{R}{C_v}} = \text{const}, \quad \text{або, враховуючи рівняння}$$

Майера $C_p - C_v = R$, одержимо $TV^{\frac{C_p - C_v}{C_v}} = TV^{\gamma-1} = \text{const}$, або $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ (1).

Враховуючи, що $pVT^{\gamma-1} = \frac{m}{M} RT \cdot \text{const}$, одержимо $pV^{\gamma} = \text{const}$, або $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$.

Аналогічно $Tr^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$. Ці три рівняння: $pV^{\gamma} = \text{const}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, $Tr^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$ називають *рівняннями Пуассона*.

Робота $A = U_1 - U_2 = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} \cdot R (T_1 - T_2) = \frac{i}{2} \left(\frac{m}{M} RT_1 - \frac{m}{M} RT_2 \right) = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$, або, тому що $i/2 = 1/[(i+2)/i - 1]$, $\gamma = (i+2)/i$, то $i/2 = 1/(\gamma-1)$ і $A = 1/(\gamma-1) \cdot (p_1 V_1 - p_2 V_2)$.

12.5.5. Політропний процес.

Узагальненням розглянутих ізопроцесів, що відбуваються в ідеальних газах, є *політропний процес*, термодинамічно описуваний рівнянням $pV^n = \text{const}$, де n – показник ступеня *політропи*: $n = 0$ – процес ізобаричний, $n = 1$ – ізотермічний, $n = \gamma$ – адіабатичний і $n = \pm\infty$ – изохоричний. Тоді теплоємність визначають як $C = (n-\gamma)R/(n-1)(\gamma-1)$, а робота $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]$.

Лекція 13. Другий закон термодинаміки.

13.1. Оборотні й необоротні процеси.

Другий початок термодинаміки (принцип Карно) не суперечить принципу еквівалентності тепла й роботи, але додає до нього деякі обмеження, оскільки воно уточнює умови, при яких робота може бути отримана за рахунок еквівалентного тепла. Перший початок указує, що в різних процесах енергія зберігається, однак не вказує напрямку, у якому відбувається еволюція системи.

Формулювання другого початку, що уточнює напрямок і характер еволюції системи, не настільки просте як першого. Його застосування вимагає чіткого розмежування оборотних і необоротних процесів (в ізольованій системі).

Ми вже розглянули кілька прикладів необоротних процесів (яйце – яєчня – яйце), додамо до них ще наступні: вибух, процеси, що супроводжуються механічним тертям, тому що в них частина енергії перетворюється в тепло

(наприклад, обертання рідини в нерухливій посудині приводить до нагрівання рідини; зворотне явище, при яким деяка кількість тепла спонтанно перетворювалася б у роботу не спостерігалось, - дотепер не спостерігалось, щоб рідина, що перебуває у посудині, почала обертатися за рахунок тепла, що втримується в ній, і в результаті почала охолоджуватися).

Оборотні процеси, як показує їхня назва, можуть протікати й у зворотньому напрямку, утворюючи замкнений цикл. Умови, що ставляться до властивостей процесів, що утворюють цикл, полягають у вимозі їх оборотності. Це вираження припускає, що мова йде тільки про можливість пройти розглянутий цикл перетворень у зворотньому напрямку. Ця можливість, яку Монтейль назвав «повертаємостю», дійсно необхідна, але аж ніяк не достатня. Треба, щоб у процесі перетворень система проходила через послідовність станів, нескінченно близьких стану рівноваги. Іншими словами, нескінченно мала зміна зовнішніх умов досить для того, щоб перевести систему з даного рівноважного стану в інший рівноважний стан, причому, напрямок цього переходу визначається спричиненою його зміною. Якщо ця зміна викликана джерелом тепла, то умова оборотності вимагає, щоб температура джерела нескінченно мало відрізнялася від температури системи, з якої відбувається теплообмін. Аналогічно, якщо зміна стосується агента механічної природи (наприклад, сили, що діє на поршень), то умова оборотності вимагає відсутності всякого тертя. При виконанні цих двох умов розглянуте перетворення може бути повторене в обох напрямках нескінченне число раз, причому кількість переданого тепла й зробленої роботи будуть мати те саме абсолютне значення. Після повернення системи в початковий стан повна кількість переданого тепла й зробленої роботи дорівнюють нулю.

Якщо прямий процес $1 \rightarrow 2$ (необоротний) можна доповнити оборотним процесом $2 \rightarrow 1$ до замкнутого циклу (мал. 13.1), то вивчення процесу $2 \rightarrow 1$ (в ізольованих системах) дозволяє одержати відомості, що відбувається в системі при процесі $1 \rightarrow 2$, які й вислизають від прямих термодинамічних досліджень.

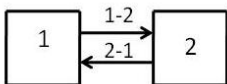


Рис. 13.1

Другий початок термодинаміки розглядає перетворення тепла в механічну роботу (енергію) в ідеальній машині (тобто машині без тертя), яка діє по періодичному замкнутому циклу. Його можна сформулювати так: *неможливо за допомогою періодично діючої машини повністю перетворити в механічну роботу всю теплоту, що втримується в одному тепловому резервуарі при одній температурі (термостаті).*

13.2. Теплові машини. Цикл Карно.

Машина Карно є ідеальною й працює по оборотному циклу. Робочим тілом у ній є ідеальний газ. К.к.д. теплової машини підраховують за формулою

$\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H}$. Таким чином, із усієї теплоти Q_H , переданій системі нагрівачем,

тільки частина ηQ_H перетворюється в механічну роботу, друга ж частина $Q_X = (1-\eta)Q_H$ розсіюється, тобто передається холодильнику. Розглянемо роботу такої машини (мал.13.2).

1→2 – ізотермічне розширення: $A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$, $Q_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$.

2→3 – адіабатичне розширення: $A_{23} = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)$, $Q_{23} = 0$.

3→4 – ізотермічний стиск: $A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$, $Q_{34} = - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$.

4→1 – адіабатичний стиск: $A_{41} = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$, $Q_{41} = 0$.

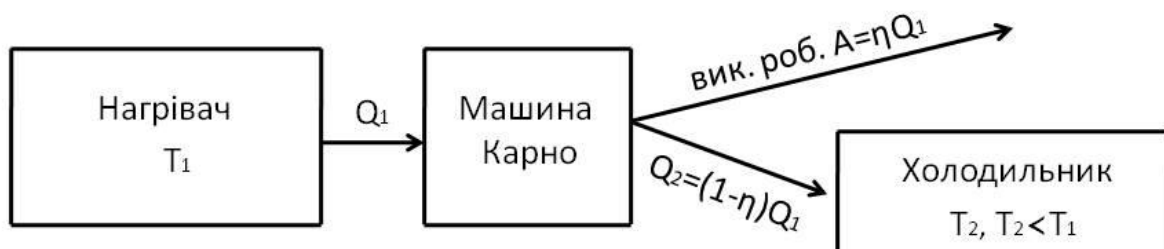
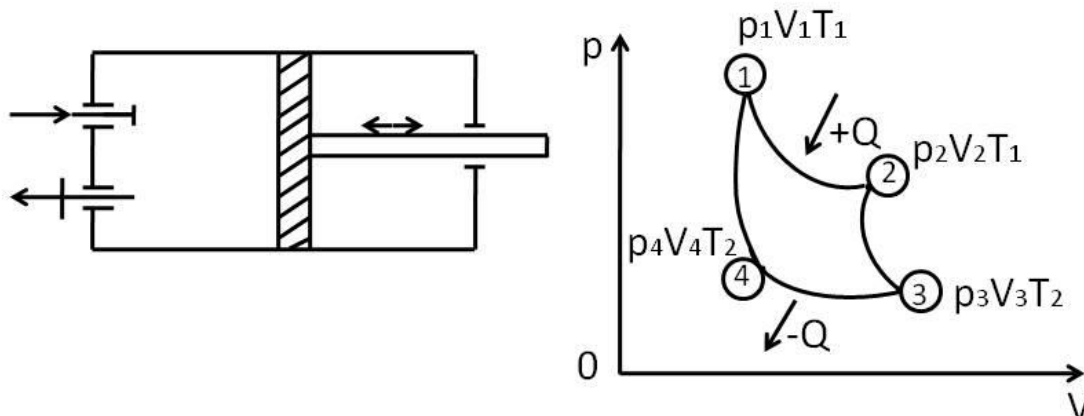


Рис. 13.2

Для двох адіабатичних процесів рівняння Пуассона мають вигляд:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}, \text{ звідки, після розподілу, маємо: } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \text{ Чинена}$$

робота $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$ і $A = \frac{m}{M} R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$, отримане тепло

$$Q_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \eta = \frac{A}{Q_{12}}, \text{ звідки к.к.д. машини Карно } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Отже, $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, звідки $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ й сума наведених $(\frac{Q}{T})$ теплот $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$.

13.3. Нерівність Клаузиуса.

Наявність сил тертя приводить до необоротності. У цьому випадку $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, звідки $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$. У загальному випадку: $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$.

Таким чином, між крапками 1 і 3 величина Q/T потерпає ту саму зміну при русі по шляху $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ або по шляху $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$. Коли робоче тіло описує повний цикл, тобто після ряду оборотних перетворень воно вертається у вихідний стан, повна зміна величини Q/T дорівнює нулю. Для реальних же процесів (з тертям) сума наведених теплот не дорівнює нулю: $\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$.

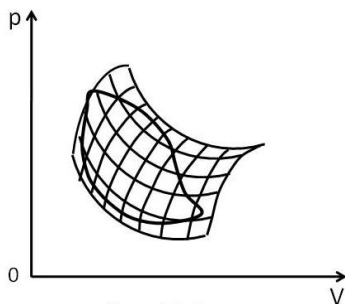


Рис. 13.3

Розглянемо докладніше оборотний цикл: усі оборотні кругові цикли, чинені деякою системою можна представити у вигляді суми нескінченно малих циклів Карно, для кожного з яких слушне співвідношення: $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$. Тоді виявляється достатнім записати це співвідношення для якогось з елементарних циклів, а потім просумувати по всіх циклах: $\sum Q/T = 0$, або в межі

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \text{ (мал. 13.3).}$$

Отриманий результат показує, що $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ не залежить від шляху інтегрування (послідовності проміжних станів). Величину S , отриману з точністю до адитивної сталої з рівняння $dS = dQ/T$, називають ентропією. $[S] = \text{Дж/К}$. $s = S/m$ – питома ентропія. $[s] = \text{Дж/кгК}$ – розмірність питомої теплоємності. Однак, порівнюючи визначення $C = dQ/dT$ і $S = \int \frac{dQ}{T}$, приходимо до висновків:

1. У даному стані робочого тіла *теплоємність* має цілком певне значення, якщо зазначений спосіб передачі тепла робочому тілу. *Ентропія* також є функцією стану, але її значення не залежить від зміни робочого тіла поблизу заданого стану. Отже, саме теплоємність величина змінна, а ентропія – величина статична. Але що дуже важливо, ентропія на противагу теплоємності відома тільки з точністю до аддитивної сталої.

2. У визначення теплоємності температура входить у диференціальній формі й вибір шкали виміру температури ($^{\circ}\text{C}$ або K) не позначиться на значенні теплоємності. Не так для ентропії, тобто ентропія – величина, рівна енергії, віднесеної до одиниці абсолютної температури.

Таким чином, зміна ентропії при переході системи $1 \rightarrow 2$ $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_{об}}{T}$. Для необоротного процесу $\int_1^2 \frac{dQ_{необр}}{T} < 0$ й, таким чином, не має певного значення.

Сполуча необоротного процесу оборотним приводить до:

$\int \frac{dQ_{необр}}{T} = \int_1^2 \frac{dQ_{необр}}{T} + \int_2^1 \frac{dQ_{об}}{T}$, або $\int_1^2 \frac{dQ_{необр}}{T} + S_1 - S_2 < 0$ й $\int_1^2 \frac{dQ_{необр}}{T} < S_2 - S_1$. Для ізолюваної системи $dQ_{необр} = 0$, тоді при $1 \rightarrow 2$ $\Delta S = S_2 - S_1 > 0$. В ізолюваній системі, наданій самої собі, процеси завжди відбуваються в напрямку збільшення ентропії. Стан рівноваги характеризується максимумом ентропії, $dS=0$. Для адіабатичного процесу $dQ=0$, $S = \text{const}$ – *изоентропійний процес*.

13.4. Статистична інтерпретація ентропії.

Парадокс Лошмидта привів Больцмана до імовірнісного трактування ентропії. Було встановлене співвідношення між ентропією системи й імовірністю даного стану системи.

Кількісною характеристикою теплового стану тіла, що описує його прагнення переходити в інші стани, є *число мікроскопічних способів, яким цей стан може бути здійсненим*. Це число називають *статистичною вагою стану, або термодинамічною ймовірністю (або «кратністю виродження») Ω* .

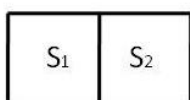


Рис. 13.4

Нехай система складається із двох підсистем, що майже не залежать друг від друга (мал. 13.4). Тоді ентропія всієї системи S дорівнює сумі ентропій обох підсистем: $S = S_1 + S_2$. Число способів

Ω , яким може здійснюватися стан системи, дорівнює добутку чисел способів Ω_1 і Ω_2 , якими можуть бути здійснені стани кожної із цих підсистем окремо: $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$. Отже, ми допустили, що ентропія є функцією ймовірності: $S = F(\Omega)$, тоді маємо: $F(\Omega) = F(\Omega_1 \Omega_2) = F(\Omega_1) + F(\Omega_2)$. Для знаходження виду невідомої функції F диференціюємо це вираження спочатку по Ω_1 , а потім по Ω_2 : $\Omega_2 \cdot F'(\Omega_1 \Omega_2) = F'(\Omega_1)$, $\Omega_1 \cdot F'(\Omega_1 \Omega_2) = F'(\Omega_2) \rightarrow \Omega_2 / \Omega_1 = F'(\Omega_1) / F'(\Omega_2)$, звідки одержуємо $\Omega_1 F'(\Omega_1) = \Omega_2 F'(\Omega_2)$, або $\Omega \cdot F'(\Omega) = k$, тобто $\Omega \cdot dF(\Omega)/d\Omega = k$. Розділяючи змінні й інтегруючи, одержимо: $dF(\Omega) = k \cdot d\Omega/\Omega$, $F(\Omega) = k \cdot \ln \Omega + \text{const}$. Звідси з точністю до постійної одержуємо *формулу Больцмана для ентропії*: $S = k \ln \Omega$ - ентропія системи пропорційна логарифму термодинамічної ймовірності.

13.5. Основне рівняння термодинаміки.

З першого й другого законів термодинаміки $\delta Q = dU + \delta A$ і $dS = \delta Q/T$ одержуємо: $TdS = dU + \delta A$, $TdS = dU + pdV$, тому що $dU = (\partial U/\partial T)_V \cdot dT + (\partial U/\partial V)_T \cdot dV$, то $TdS = (\partial U/\partial T)_V \cdot dT + [p + (\partial U/\partial V)_T] \cdot dV$, звідки $(\partial S/\partial T)_V = C_V/T$ і *основне рівняння має вигляд*: $(\partial S/\partial V)_T = \frac{1}{T} [p + (\partial U/\partial V)_T]$.

13.6. Термодинамічні потенціали.

Термодинамічні потенціали – певні функції незалежних макроскопічних параметрів, що повністю задають термодинамічний стан системи. Знаючи термодинамічні потенціали (ТП) як функцію деякого повного набору параметрів, можна диференціюванням і інтегруванням обчислити не тільки всі інші параметри, але й будь-які макроскопічні характеристики системи, відбуваючихся в ній термодинамічних процесів.

Використання ТП – основа всіх розрахунків у сучасній термодинаміці. Для кожного повного набору незалежних параметрів існує свій «природний» ТП, обчислення за допомогою якого проводяться найбільше просто. Так, вибору в якості незалежних змінних ентропії S , об'єму V , числа часток N і узагальнених координат x_i відповідає ТП, називаний *внутрішньою енергією* $U(S, V, N, x)$; вибору T, V, N, x – *вільна енергія* $F(T, V, N, x)$. ТП у змінних T, p, N, x називають *термодинамічним потенціалом Гіббса* $G(T, p, N, x)$, а в змінних S, p, N, x – *ентальпією* $H(S, p, N, x)$. Часто використовують ТП у змінних T, V, x і хімічного потенціалу μ , $\Omega, T, V, x, (\mu)$.

Ці ТП зв'язано один з одним наступними співвідношеннями:

$U =$	$F + TS$	$H - pV$
$F = U - TS$		$H - TS - pV$
$H = U + pV$	$F + TS + pV$	
$G = U - TS + pV$	$F + pV$	$H - TS$
$\Omega = U - TS - \mu N$	$F - \mu N$	$H - TS - \mu N$
$U = G + TS - pV$	$\Omega + TS + \mu N$	
$F = G - pV$	$\Omega + \mu N$	
$H = G + TS$	$\Omega + TS + \mu N$	
$G =$	$\Omega + pV + \mu N$	
$\Omega = G - pV - \mu N.$		

Лекція 14. Реальні гази й пари.

14.1. Рівняння Ван-Дер-Ваальса.

При низьких тисках і високих температурах стан газу описують рівнянням Менделєєва – Клапейрона з достатнім ступенем точності. Однак, при підвищенні тиску й зниженні температури газу, останній можна перевести в рідкий й далі у твердий стан. Це показує, що не у всіх випадках можна зневажати взаємодією між молекулами, а також власним об'ємом молекул, тому що зневага ними приводить до нескінченно більших тисків при стиску газу. Поправки на тиск і об'єм молекул у формулу Менделєєва – Клапейрона $pV = (m/M)(RT)$ увів Ван-Дер-Ваальс:

1. Об'єм газу, не зайнятий молекулами, рівний $V - b$ (для 1 моля $b = 4NV_0$).
2. Вплив сил зчеплення в середньому дорівнює нулю для молекул, що перебувають у глибині газу. Для молекули, центр якої перебуває в граничному шарі газу товщиною, рівної радіусу сфери молекулярної дії, є асиметрія сил, результатом чого є внутрішній тиск (особливо виражений у рідин). Розглянемо граничний шар рідини (газу) (мал. 14.1):

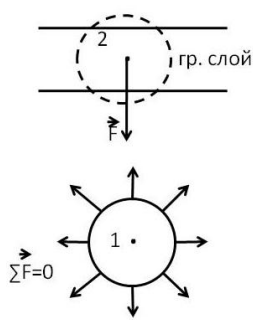


Рис. 14.1

а) Складова сили, що діє на молекули й спрямована усередину, пропорційна числу сусідніх молекул, тобто густині $\rho \sim 1/V$.

б) Внутрішній тиск дорівнює сумі сил, що діють на одиницю площі поверхневого шару, яка також $\sim \rho \sim 1/V$. Отже, $p_{\text{вн}} = a/V^2$, де a – постійна, пов'язана із силами Ван-Дер-Ваальса. Тоді рівняння Ван-Дер-Ваальса для 1 моля запишеться:

$$(p + a/V^2) \cdot (V - b) = RT. \text{ Для будь-якої кількості газу } (p + (\frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2})) \cdot (V - \frac{m}{M} b) = \frac{m}{M} RT).$$

14.2. Ізотерми Ван-Дер-Ваальса й ізотерми Ендрюса.

Для дослідження поведінки 1 моля реального газу розв'яжемо рівняння стану відносно V : $V^3 - (b + RT/p)V^2 + (a/p)V - ab/p = 0$. При заданих p і T це рівняння третього ступеня відносно V (мал. 14.2).

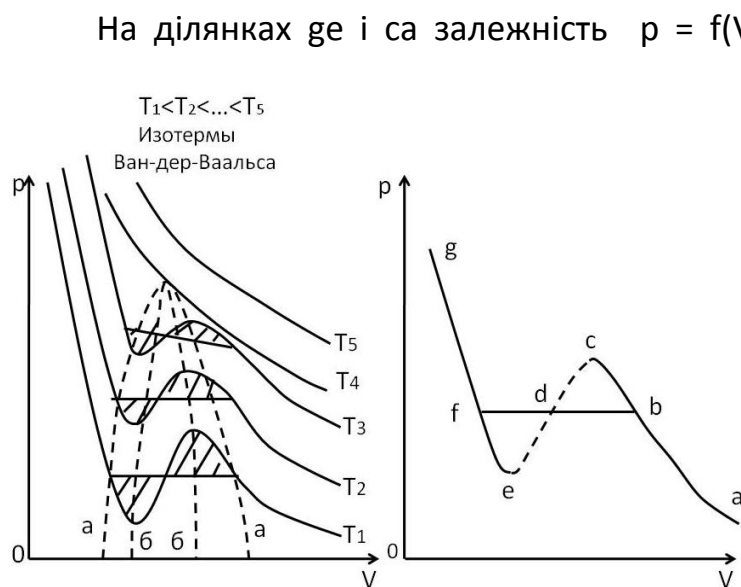


Рис. 14.2

На ділянках ge і ca залежність $p = f(V)$ має нормальний характер: тиск зменшується при збільшенні об'єму. Ділянка es відповідає неприродному стану, коли стиск речовини приводив би до зменшення тиску. Очевидно, що такі стани взагалі не можуть здійснюватися в природі. Наявність нездійсненої ділянки es ізотерми означає, що при поступовій зміні об'єму речовина не може увесь час залишатися у вигляді однорідного

середовища; у деякий момент часу повинна настати стрибкоподібна зміна стану й розпадання речовини на дві фази. Іншими словами дійсна ізотерма буде мати вигляд ламаної лінії $abfg$ (ізотерма Ендрюса). Частина її ab – відповідає газоподібному стану, а частина fg – рідкому,

bf – двофазний стан. Причому, можна показати, що $S_{bcd} = S_{def}$.

Що стосується bc і ef , те вони відповідають метастабільним станам – переохолодженій парі й перегрітій («розтягнутої») рідини.

При підвищенні температури прямолінійна ділянка ізотерми зменшується й при критичній температурі стягається в крапку (К). Тут а – крива фазової рівноваги, б – крива, що обмежує область, у якій нерозділена на фази речовина не може існувати навіть у метастабільному стані.

14.3. Критичні параметри й константи Ван-Дер-Ваальса.

У критичній крапці $(dp/dV)_T = 0$. У цій крапці $p = p_k$, $V = V_k$, $T = T_k$. Критичні значення p_k , V_k , T_k можна зв'язати з параметрами а і б. При $T = T_k$, $p = p_k$ усі три корені рівняння Ван-Дер-Ваальса $V^3 - (b + RT_k/p_k)V^2 + (a/p_k)V - ab/p_k = 0$ однакові й рівні V_k . Тому це рівняння повинне бути тотожним рівнянню

$(V - V_k)^3 = V^3 - 3V^2V_k + 3VV_k^2 - V_k^3 = 0$, Порівняння коефіцієнтів при однакових ступенях V дає: $b + RT_k/p_k = 3V_k$, $a/p_k = 3V_k^2$, $ab/p_k = 3V_k^3$. Вирішуючи їх щодо критичних параметрів, одержимо: $V_k = 3b$, $p_k = a/27b^2$, $T_k = 8a/27Rb$.

Якщо в якості одиниць для p, V і T вибрати їхні критичні значення, то рівняння стану реального газу стає однаковим для всіх речовин.

$p^* = p/p_k$, $T^* = T/T_k$, $V^* = V/V_k \rightarrow (p^* + 3/V^{*2}) \cdot (3V^* - 1) = 8T^*$ - закон відповідних станів.

14.4. Внутрішня енергія реального газу. Адіабатичне розширення газу в порожнечу. Ефект Джоуля – Томсона.

Припустимо, що для реального газу як і раніше застосовна теорема про рівномірний розподіл енергії по ступенях свободи. Для одного моля $E_k = (i/2)RT = C_V T$. Вираз для потенційної енергії взаємодії молекул знайдемо в такий спосіб: при розширенні газу від V_1 до V_2 внутрішньомолекулярний тиск $p_{вн} = a/V^2$ виконує роботу $A = \int_{V_1}^{V_2} p_{вн} dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}$. Тому що робота внутрішніх сил дорівнює зміні потенційної енергії системи, то $-(a/V)$ – вираження для потенційної енергії одного моля газу: $U = C_V T - a/V$.

Розглянемо адіабатичне розширення газу, при яким газ зовнішньої роботи не робить (розширення у вакуум): $Q = (U_2 - U_1) + A$, $Q = 0$, $A = 0$, $U_2 = U_1$ – застосовне й для ідеального й для реального газів. Але для ідеального газу рівність $U_2 - U_1 = 0$ означає $T_1 = T_2$, для реального ж газу $U_1 = C_V T_1 - a/V_1$, $U_2 = C_V T_2 - a/V_2$ і рівність $U_1 = U_2$ приводить до $T_1 - T_2 = (a/C_V) \cdot (1/V_1 - 1/V_2)$ і при розширенні $V_2 > V_1$, то $T_1 > T_2 \rightarrow$ реальний газ при розширенні охолоджується. Це

охолодження пояснюється тим, що частина кінетичної енергії теплового руху молекул переходить при розширенні в потенційну енергію їх взаємодії.

Зміна температури при розширенні реального газу через пористу перегородку називають ефектом Джоуля–Томсона (мал. 14.3).

$$Q = (U_2 - U_1) + A = 0, \rightarrow U_2 - U_1 + (A_2 - A_1) = 0 \rightarrow U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2,$$

$$pV = RT - a/V + bp + ab/V^2 \text{ і остаточно:}$$

$$(C_V + R) \cdot (T_1 - T_2) = 2a(1/V_1 - 1/V_2) - b(p_1 - p_2) - ab(1/V_1^2 - 1/V_2^2).$$

Знак $T_1 - T_2$ залежить від співвідношення між позитивними й негативними

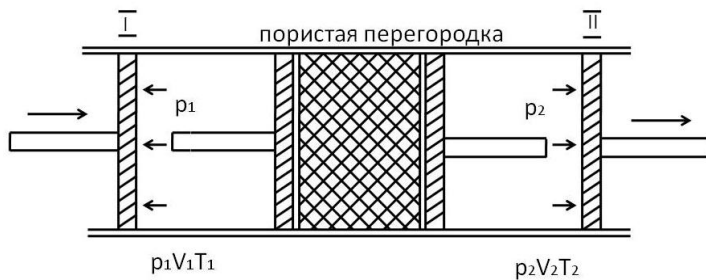


Рис.14.3

величинами в правій частині цього виразу. Розглянемо два граничні випадки:

1. Допустимо, що в газі величина a дуже мала, а b – велика, тобто сили взаємодії між молекулами дуже слабкі, але розміри самих молекул великі: $(C_V + R) \cdot (T_1 - T_2) \cong -b(p_1 - p_2)$, тому що $p_2 < p_1$, то $T_2 > T_1$, тобто при таких розширенні газ *нагрівається*.
2. Допустимо, що в іншого газу величина b мала, а a – велика, тоді: $(C_V + R) \cdot (T_1 - T_2) \cong 2a(1/V_1 - 1/V_2)$ тому що $V_2 > V_1$, то $T_1 > T_2$, тобто газ *охолоджується*.

Ефект Джоуля – Томсона використовують для охолодження й скраплення газів (табл.14.1).

Таблица

Вещество	$10^{-6}a, \frac{\text{ат} \cdot \text{см}^3}{\text{гмоль}}$	$b, \frac{\text{см}^3}{\text{гмоль}}$	$t_k, ^\circ\text{C}$	$P_k, \text{ атм}$	$V_k, \text{ см}^3$
N ₂	1,35	39,6	-147	33,5	90,3
O ₂	1,36	31,9	-119	50,8	79,9
CO ₂	3,61	42,8	+31	73	98,2
H ₂ O	5,47	30,5	+347	218	55

14.5. Температура атмосфери високо над рівнем моря

Основною причиною зміни температури є конвекція в тропосфері – безперервне перемішування повітря з нижчих шарів у вищі й з вищих у нижчі. При переході повітря з нижчих шарів у вищі він розширюється. Тому що повітря є поганий провідник тепла, то процес розширення – адіабатичний.

Зміна тиску p з висотою z має вигляд:

$$dp = -\rho g dz, \quad pV = \frac{m}{\mu} RT \rightarrow \rho = \frac{pM}{RT} \rightarrow dp = -\frac{gMp}{RT} dz$$

З рівняння Пуассона

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const} \rightarrow T = \text{const} \cdot p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow \ln T = \ln \text{const} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln p \rightarrow \frac{dT}{T} =$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} \rightarrow \frac{p}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{dT} \rightarrow$$

$$p = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gM}{R} \frac{dp}{dT} dz \rightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gM}{R} \rightarrow$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1,4-1}{1,4} \cdot \frac{9,8 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31} \rightarrow \frac{dT}{dz} = -9,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{м}}, \text{ або}$$

$$\frac{dT}{dz} = -9,8 \frac{\text{K}}{\text{км}}$$

У дійсності ця величина трохи більше, ніж спостережуване середнє значення, тому що ми зневажили конденсацією водяної пари.

14.6. Особливості газоподібного, рідкого й твердого станів речовини

Правило фаз Гіббса затверджує: система, що полягає з f фаз і n незалежних компонентів, має ступінь мінливості (або число ступенів волі) ν , рівну $\nu = 2+n-f$. Нехай система складено із суміші трьох різних фаз одної речовини: твердої, рідкої й газоподібної, наприклад, лід, вода й водяна пара. Ми маємо один компонент і три фази: $n=1, f=3$, тоді $\nu = 0$. Це значить, що немає ніякої свободи вибору: три фази можуть одночасно існувати тільки при певних значеннях температури й тиску (T_n, p_n – потрійна крапка) (мал.). Потрійна крапка води (А) перебуває при $T_n=0,0075^\circ\text{C}$ и $p_n=0,00602$ атм. Тому що тиск у потрійній крапці менше атмосферного, то горизонтальна лінія $p=1$ атм (пунктирна лінія на діаграмі) перетинає три області: лід (Т), рідина (Р) й пар (П).

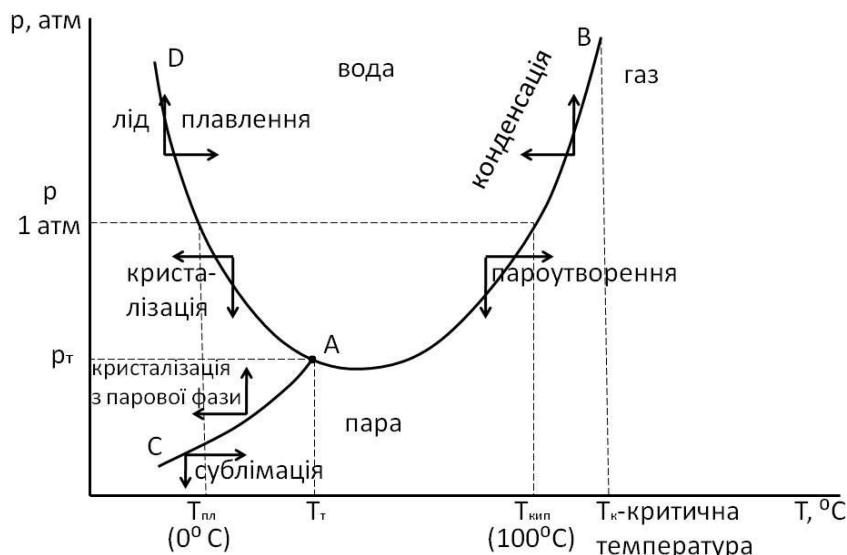


Рис.14.4

AD- крива фазової рівноваги вода-лід; AB- крива фазової рівноваги вода-пар; AC- крива фазової рівноваги лід-пар.

Лекція 15. Рідини.

15.1. Поверхневий натяг.

Поверхневі ефекти, обумовлені міжмолекулярними силами зчеплення, у рідин проявляються в набагато більшому ступені, ніж в газів. Наявність у тіл вільної поверхні приводить до поверхневих або капілярних явищам.

Строго говорячи, усяке тіло перебуває не у вакуумі, а в деякому іншому середовищі, наприклад, атмосфері. Тому слід говорити не просто про поверхню тіл, а про поверхню розділу двох середовищ.

Поверхневий натяг викликає утворення крапель рідини й прагне додати їм опуклу або навіть сферичну форму, якщо об'єм крапель настільки малий, що дія інших сил (вага, електричні сили) є незначною в порівнянні з дією поверхневого шару. У випадку тонких рідких плівок (наприклад, мильні бульки), які в перетині являють собою як би дві з'єднані між собою поверхні, переважними є поверхневі сили. Вони й визначають рівноважну форму плівки (разом із силами зовнішнього тиску). Енергія молекул усередині й у поверхневому шарі рідини різні (мал. 15.1). Різниця між енергією всіх молекул (обох середовищ) поблизу поверхні розділу й тою енергією, яку ці молекули мали б, якби вони перебували усередині тіла, називають *поверхневою енергією*.

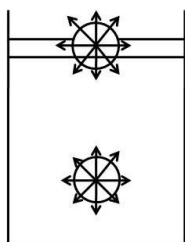


Рис. 15.1

Поверхнева енергія пропорційна площі S поверхні розтягнута: $U = \sigma S$, де σ - коефіцієнт поверхневого натягу. Він залежить від природи дотичних середовищ і від їхнього стану.

Як відомо з механіки, сили діють завжди так, щоб привести тіло в стан з найменшою енергією. Звідси випливає, що, тому що поверхнева енергія прагне прийняти найменше можливе значення, то коефіцієнт σ завжди позитивний. А якщо ні, то дотичні середовища не могли б існувати в роздільному виді – їх поверхні розділу прагнули б необмежено збільшуватися, тобто обидві середовища прагнули б взаємно перемішатися.

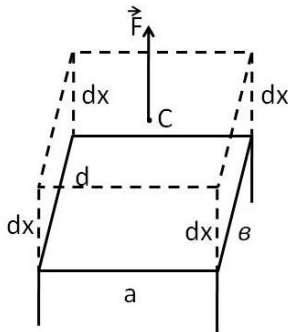


Рис. 15.2

Розглянемо ряд перетворень (мал. 15.2): $F = -dU/dx$, $dA = dU$, $dU = \sigma \cdot dS$, $-Fdx = \sigma dS$, $F = -\sigma \cdot dS/dx$, $ds = (a+b+c+d) \cdot dx$, $(a+b+c+d) = \ell \rightarrow F = -\sigma \cdot \ell$. Таким чином, на лінію, що обмежує поверхню тіла (або деяку ділянку цієї поверхні), діють сили, спрямовані перпендикулярно цієї лінії по дотичній до поверхні, у середину тіла. Сила, віднесена до одиниці довжини, дорівнює коефіцієнту поверхневого натягу σ . $[\sigma] = \text{Дж/м}^2 = \text{Н/м}$.

15.2. Рідинні плівки. Формула Лапласа.

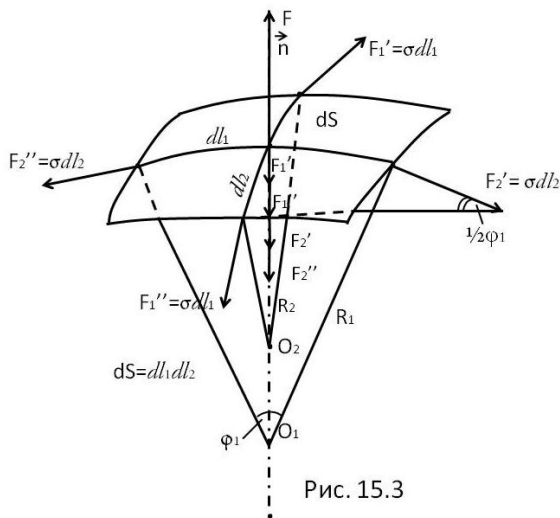


Рис. 15.3

Розглянемо елемент поверхні dS рідини, що перебуває в рівновазі. Припустимо, що тиск по обидві сторони ds різні. У цьому випадку рівновага буде тільки тоді, коли сили тиску, що діють на dS , урівноважуються силами поверхневого натягу, які діють на границю елемента dS (мал. 15.3). $F = F'_{1n} + F''_{1n} + F'''_{2n}$. $F'_{2n} = \sigma \cdot d\ell_2 \cdot \sin \phi_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot d\ell_2 \cdot \phi_1 = F''_{2n}$, $F'_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot d\ell_2 \cdot d\ell_1 / R_1 = F''_{2n}$, $F'_{1n} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot d\ell_1 \cdot d\ell_2 / R_2 = F''_{1n}$ і

$\Delta p \cdot ds = 2F_1 + 2F_2$, $\Delta p \cdot d\ell_1 \cdot d\ell_2 = \sigma \cdot d\ell_2 \cdot d\ell_1 / R_1 + \sigma \cdot d\ell_1 \cdot d\ell_2 / R_2 \rightarrow \Delta p = \sigma \cdot (1/R_1 + 1/R_2)$ – формула Лапласа. У випадку сферичної форми краплі рідини $R_1 = R_2 = R$ і

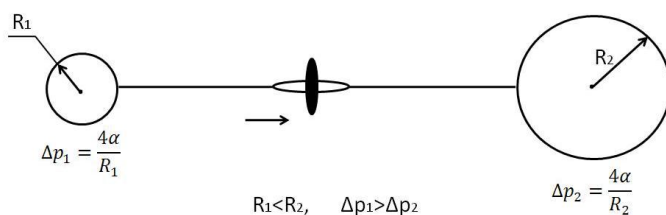


Рис. 15.4

$\Delta p = 2\sigma/R$. Якщо рідка плівка утворює порожню сферу (мильна булька), то $\Delta p = 4\sigma/R$. При сполучі двох мильних бульок менша булька буде зменшуватися, а більша – збільшуватися в розмірах (мал. 15.4).

15.3. Капілярні явища.

Капілярними називають явища, що відбуваються на границі розділу різних речовин: твердих, рідких і газоподібних.

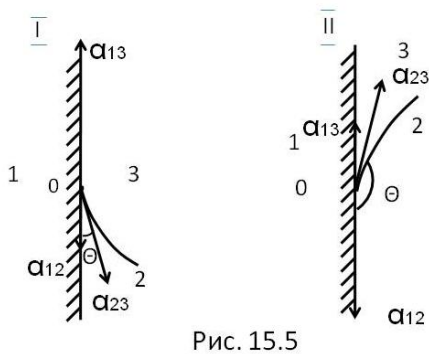


Рис. 15.5

Розглянемо капілярні явища на границі трьох середовищ (мал. 15.5): 1 – тверда фаза, 2 – рідка, 3 – газоподібна. До лінії зіткнення трьох середовищ разом (О – лінія, перпендикулярна площині креслення) прикладено три сили поверхневого натягу, кожна з яких спрямована по дотичній усередину поверхні зіткнення відповідних двох середовищ. По величині вони, віднесені до одиниці

довжини, рівні відповідно σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} . Кут між поверхнею й твердою стінкою називають *крайовим кутом* θ . Поверхня рідини встановлюється так, щоб рівнодіюча σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} не мала складової уздовж стінки посудини (перпендикулярна складова знищується опором стінки). Таким чином, умови рівноваги біля стінки запишуться:

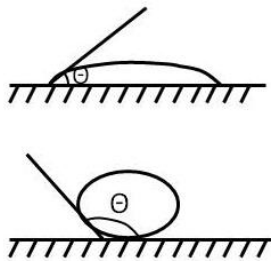


Рис. 15.6

$\sigma_{13} = \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta$, $\rightarrow \cos \theta = (\sigma_{13} - \sigma_{12}) / \sigma_{23}$. Якщо $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, то $\cos \theta > 0$, $\angle \theta$ - гострий, - *змочування*, $\sigma_{13} < \sigma_{12}$, $\cos \theta < 0$, $\angle \theta$ - тупий, не змочує (мал. 15.6). $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| \leq \sigma_{23}$.

Раніше було зазначено, що в стані рівноваги тиску дотичних тіл повинні бути однаковими. У дійсності це твердження слухне лише остільки, оскільки зневажають капілярними явищами. При обліку поверхневого натягу тиску в дотичних середовищах, загалом кажучи, виявляються різними.

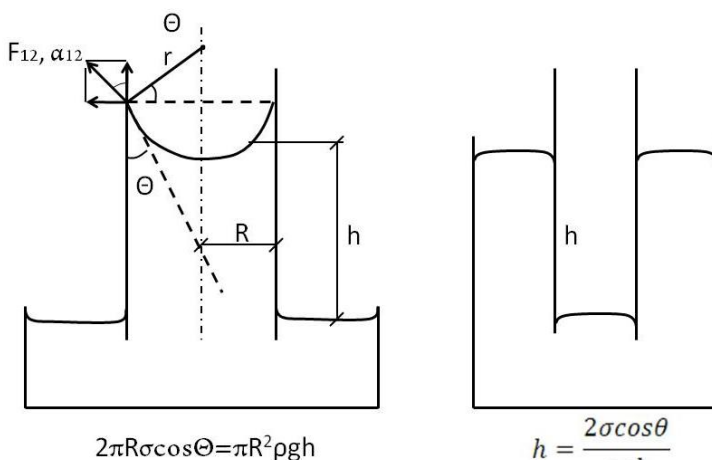


Рис. 15.7

Виведемо формулу для висоти підняття (опускання) рідини в капілярі циліндричної форми (мал. 15.7).

$$2\pi R\sigma \cdot \cos \theta = \pi R^2 \rho g h \rightarrow (2\sigma \cos \theta) / \rho g r.$$

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g h}$$