

**Севастопольский национальный технический университет
Кафедра физики**

Доцент Леонтович А.Л., доцент Петренко Н.В.

Методическое пособие по физике

Механика. Молекулярная физика. Термодинамика.

**(для студентов 1 курса специальности «Кибернетика и вычислительная
техника»)**

(на правах рукописи)

Севастополь 2008

Лекция 1. Введение.

1.1. Предмет физики.

Физика – наука о формах материи (их иногда называют **первичными** или **общими**), которые входят в состав любых сложных материальных систем, о взаимодействиях этих форм материи и их движениях (изменениях). Понятие материи формировалось в длительном процессе развития философии и естественных наук. Кратко о материи можно сказать так: 1) **материя** – это то, что существует объективно (все сущее), т.е. независимо от чьего бы то ни было сознания или ощущений, и 2) материя копируется, отображается нашими ощущениями и, следовательно, познаваема. **Движение** (изменение) является способом существования материи. Структура материи реализуется в пространстве и времени, в закономерном расположении различных объектов (тел) вне друг друга, в закономерном следовании явлений друг за другом. Материя немыслима вне определенной координации её частей и процессов, вне времени и вне пространства. В свою очередь пространство и время неразрывно связаны с материей, являясь формами бытия материи. В философии пространство и время определены следующим образом: **пространство** – совокупность отношений, выражающих координацию сосуществующих объектов, - их расположение друг относительно друга и относительную величину (расстояния и ориентацию); **время** – совокупность отношений, выражающих координацию сменяющих друг друга состояний (явлений), их последовательность и длительность.

Физика старается дать описание, объяснение и предсказание явлений природы, исходя из определённых начальных положений. Причем, описание даётся в трехмерном пространстве и во времени. Объяснение заключается в формулировании физического закона, применимого к наблюдаемому и изучаемому явлению, и в установлении соотношения между причиной и следствием. Оно даётся в рамках теории, способной дать элементы предвидения. Описание и предсказание должны быть количественными; это основной признак точной науки. Но количество выражается и определяется только в результате измерений. Измерение физической величины сводится к сравнению её с другой однородной величиной, точно определённой и условно принятой за единицу для измерения всех таких же величин. Поэтому для пространственно – временных измерений необходимо перейти от философского определения пространства и времени к конкретно физическому (измеренческому), т.е. выраженных при помощи определённых физических объектов и процессов.

Так, основными единицами Международной системы единиц (СИ) являются метр, секунда, килограмм, ампер, кельвин, кандела, радиан, стерадиан.

Единица длины **метр** (м) есть длина, равная 1650763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p^{10}$ и $5d^3$ атома криптона – 86. **Секунда** (с) – интервал времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний, соответствующих резонансной частоте энергетического перехода между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия – 133. **Килограмм** (кг) – единица массы – представлен массой международного прототипа килограмма.

Физические эксперименты, в которых чувствительность (разрешение) играла определяющую роль, впервые начали проводиться в конце 18 в Г.Кавендишем и Ш.О.Кулоном. В их опытах измерялось ускорение по величине механического смещения (амплитуды колебаний). Позже физическая величина регистрировалась по изменению интервала времени (различию частот). Измерения с высоким разрешением малых механических смещений, малых ускорений и малых изменений частоты (интервалов времени) привели к открытию важнейших физических законов. Лучшее разрешение, достигнутое в «долазерную» эру, принадлежит Р.Джонсу и Дж.Ричардсу, которые зарегистрировали смещение 10^{-14} м при сдвиге изображения одной дифракционной решетки относительно другой решетки. Сразу после появления первых лазеров А.Джаван измерил смещение одного зеркала оптического резонатора Фабри – Перо относительно другого с разрешением 10^{-15} м.

1.2.Окружающий нас мир и фундаментальные взаимодействия.

Окружающий нас мир представляет собой четырехмерную пространственно-временную «сцену», на которой разыгрываются события разного масштаба. Элементы, выступающие на «сцене», - частицы-волны (фотоны, лептоны, мезоны, барионы, резонансы), атомы, молекулы, планеты, звезды, галактики. Они взаимодействуют друг с другом, взаимно превращаются друг в друга или изменяют состояния друг друга.

Согласно современным представлениям, существует только четыре, качественно различных, фундаментальных взаимодействий. Они-то и являются ответственными за всё многообразие свойств окружающего нас мира, временную «сцену», на которой разыгрываются события самого различного масштаба, ответственными за все происходящие в мире явления. По мере увеличения интенсивности взаимодействия они располагаются в следующем порядке: гравитационное, слабое, электромагнитное и сильное. Успешное создание теории электрослабого взаимодействия стимулировало попытки объединения электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий в рамках теории Великого объединения. Предпринимаются попытки объединения всех четырех типов взаимодействия в теории Всего сущего (ТВС). Далее рассмотрим кратко современные представления о природе фундаментальных взаимодействий.

1.2.1.Гравитационное взаимодействие.

Гравитационное взаимодействие универсально. В нем участвуют все виды материи, все объекты природы. Общепринятой классической (не квантовой) теорией гравитационного взаимодействия является эйнштейновская общая теория относительности (ОТО). Гравитация, в частности, определяет движение планет в звездных системах, играет важную роль в процессах, протекающих в звездах, управляет эволюцией Вселенной и т.п. Если же пренебречь всеми релятивистскими эффектами и ограничиться слабыми стационарными гравитационными полями, то ОТО сводится к ньютоновской теории тяготения, в которой гравитационное взаимодействие считают **дальнодействующим**.

Теоретические исследования показывают, что на квантовом уровне гравитационное взаимодействие переносится **гравитонами**. Частица испускает гравитон, а другая частица его поглощает. Обе частицы изменяют состояния движения. В результате возникает воздействие частиц друг на друга. Для оценки интенсивности взаимодействия вводят безразмерную константу связи. Для её получения используют фундаментальные постоянные G , $\hbar$, c и m_p . Тогда безразмерная константа связи гравитационного взаимодействия будет равна $\alpha_g = Gm_p^2/\hbar c \cong 10^{-39}$. Таким образом, эта константа имеет очень малую величину, поэтому для шкалы, принятой в физике высоких энергий, гравитационные силы пренебрежимо малы по сравнению с другими фундаментальными взаимодействиями.

Теоретически установлено, что гравитационные возмущения могут распространяться в виде гравитационных волн. Перспективы экспериментального обнаружения возможных источников гравитационных волн связывают с: 1) сливающимися двойными системами, состоящими из черных дыр звездных масс; 2) реликтовыми гравитационными волнами. При этом полагается, что сливающиеся черные дыры скорее всего будут зафиксированы первыми вступающими в строй наземными интерферометрами. Соответствующие оценки показывают, что первые интерферометры будут видеть 2 – 3 события в год от черных дыр с массами компонент в 10 -15 звездных масс при отношении сигнала к шуму, равном 3 в сети детекторов, состоящих из GEO, VIRGO и двух антенн LIGO. Что касается реликтовых гравитационных волн, то они могут быть открыты космическим интерферометром в диапазоне частот $2 \cdot 10^{-3} - 10^{-2}$ Гц при отношении сигнала к шуму тоже примерно равном трем.

1.2.2. Слабое взаимодействие.

Впервые слабые взаимодействия наблюдались при β - распаде атомных ядер. При очень высоких энергиях слабое взаимодействие описывается как обменное, при котором осуществляется обмен квантом, наделенным слабым зарядом и действующим между фермионами. Такие кванты были впервые обнаружены в 1983 г. на коллайдере в ЦЕРНе. Это заряженные бозоны $W^\pm$ и нейтральный бозон W^0 со спином 1 и массами, равными по порядку величины $100m_p$. Безразмерная константа слабого взаимодействия равна 10^{-5} . Видно, что это взаимодействие гораздо интенсивнее гравитационного.

Необходимость введения слабого взаимодействия обусловлена тем, что в природе происходят процессы, в которых электромагнитные и сильные распады запрещены законами сохранения. Слабое взаимодействие является короткодействующим. Экспериментально установлено, что характерный радиус его порядка 10^{-17} м, т.е. оно сосредоточено на расстояниях меньше размеров атомного ядра. Слабое взаимодействие связано не только с процессом β - распада, но и играет важную роль в термоядерных реакциях, ответственных за механизм выделения энергии в звездах.

1.2.3. Электромагнитное взаимодействие.

В электромагнитном взаимодействии участвуют все заряженные тела, все заряженные элементарные частицы. Возможно, это самое важное взаимодействие (по крайней мере, на уровне макромира), т.к. оно не только объединяет все электрические явления, но и обеспечивает силы, благодаря которым вещество на атомном и молекулярном уровне существует как целое. Классической теорией электромагнитного взаимодействия является максвелловская электродинамика. С точки зрения квантовой теории переносчиком электромагнитного взаимодействия является элементарная частица **фотон** – безмассовый бозон со спином 1. Заряженная частица испускает фотон, в силу чего состояние её движения изменяется. Другая частица поглощает фотон и также изменяет состояние своего движения. Для электромагнитных сил константа взаимодействия равна постоянной тонкой структуры: $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Легко заметить, что данная константа значительно превышает константы гравитационного и слабого взаимодействий.

С современной точки зрения электромагнитное и слабое взаимодействия представляют собой различные стороны единого электрослабого взаимодействия (теория Вайнберга – Салама – Глэшоу, объединяющая с единых позиций все аспекты электромагнитных и слабых взаимодействий). Характерная энергия объединения оценивается по порядку величины как 10^2 ГэВ. По этой причине они не проявляют в обычных физических явлениях своей единой сущности.

1.2.4. Сильное взаимодействие.

Сильное взаимодействие ответственно за устойчивость атомных ядер. Поскольку атомные ядра большинства химических элементов стабильны, то ясно, что взаимодействие, которое удерживает их от распада, должно быть достаточно сильным. Теория сильного взаимодействия аналогична электродинамике и называется квантовой хромодинамикой (**КХД**). Согласно этой теории частицы, участвующие в сильном взаимодействии и называемые **адронами**, состоят из элементарных частиц, получивших название **кварков**. Отличительной чертой кварк – кварковых взаимодействий является то, что с уменьшением расстояния между кварками их взаимодействие ослабевает. Поэтому для сильных взаимодействий рассматриваются две области: область, для которой радиус взаимодействия r больше размера нуклона r_N , и область, для которой $r < r_N$. В первом случае взаимодействие можно рассматривать как обмен **пионом** (квантом ядерного поля). В этом случае константа взаимодействия $g \cong 15$. Во втором случае происходит обмен **глюонами**, и величина константы взаимодействия не превышает единицу.

1.2. Физика и техника.

Физика является наиболее широкой теоретической основой техники; развитие физики приводит к появлению новых отраслей техники (радиоэлектроника, ядерная энергетика, автоматика и кибернетика и др.). Стимулируемое физикой развитие технических наук в свою очередь способствует созданию совершенно новых методов исследования, обуславливающих прогресс физики и смежных наук.

В этой связи кратко остановимся на перспективах создания, обработки, хранения и передачи информации. Незадолго до смерти Ампер написал «Очерк по философии наук» (1834), где, в частности, при классификации наук им была впервые указана (и названа) наука об управлении – **кибернетика**. В этой области знаний за последние 40 – 50 лет получены более чем впечатляющие результаты. Если новые результаты, полученные в процессе переосмысливания основополагающих идей квантовой механики – это теоретическая основа квантовой информации, то экспериментальной базой следует считать те разделы науки, которые связаны с изучением любых объектов, относящихся к квантовому миру.

Идея квантовых компьютеров впервые была высказана в работах Р.Фейнмана в середине 80-х гг. 20 в. Поводом для её обоснования явился вывод о том, что ресурсы памяти и быстродействия классических машин недостаточны для решения квантовых задач. В настоящее время вычислительная техника подошла к пределу своих возможностей по быстродействию компьютеров (1 ГГц) и размеру микросхем ($\approx 0,1$ мкм). Масштаб $\approx 10^{-7}$ м определяет границу применимости законов классической физики к расчету характеристик электронных приборов. При стремлении к дальнейшему увеличению быстродействия и уменьшению размеров мы попадаем в новый физический мир со своими законами. По мере приближения размеров твердотельных структур к нанометровой области, а это образования из единиц и десятков атомов, все больше проявляются квантово – волновые свойства электрона. С одной стороны, это приводит к нарушению работоспособности классических транзисторов, а с другой – открывает перспективы создания новых уникальных переключающих, запоминающих и усиливающих элементов для информационных систем. Поэтому для решения задач конструирования вычислительных устройств нового поколения – задач нанoeлектроники, зародившейся в конце 20 в., - требуются принципиально новые подходы. Таковыми являются, в частности, идеи, лежащие в основе квантовых компьютеров.

Квантовые компьютеры – физические устройства, выполняющие логические операции над квантовыми состояниями путем унитарных преобразований, не нарушающих квантовые суперпозиции в процессе вычислений. Схематично работа квантового компьютера может быть представлена как последовательность трех операций:

- 1) запись (приготовление) начального состояния;
- 2) вычисление (унитарное преобразование начальных состояний);
- 3) вывод результата (измерение, проецирование конечного состояния).

Для того, чтобы разобраться в физике создания и работы квантовых компьютеров, в вопросах квантовой криптографии и квантовой телепортации и т.п., студенту в относительно короткое время (3 – 4 семестра) предстоит усвоить фундаментальные положения классической (в том числе и релятивистской) и квантовой физики, а также математических наук (теории информации, дискретной математики и т.п.).

1.4. Математическое введение.

1.4.1. Принятые обозначения.

1.4.1.1. Обозначения координат и единичных векторов:

x, y, z - декартовы прямоугольные координаты;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы в декартовых прямоугольных координатах;

r, Θ, z - цилиндрические координаты;

$\vec{l}_r, \vec{l}_\Theta, \vec{k}$ - единичные векторы в цилиндрических координатах;

r, Θ, φ - сферические координаты;

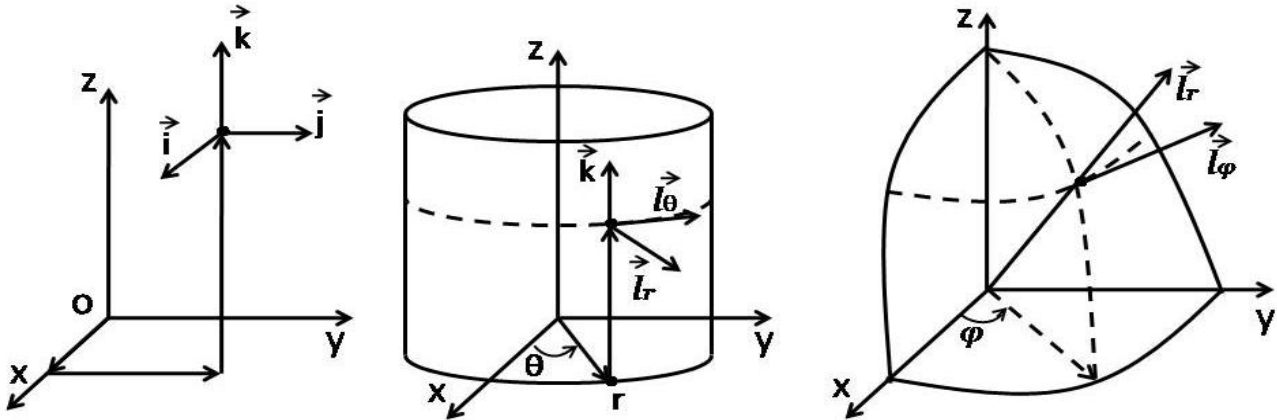


Рис. 1.1

$\vec{l}_r, \vec{l}_\Theta, \vec{l}_\varphi$ - единичные векторы в сферических координатах /рис.1.1/.

"Математический формализм оказывает совершенно удивительную услугу в деле описания сложных вещей, но он несколько не помогает в понимании реальных процессов". Макс Борн.

1.4.2. Векторы.

1.4.2.1. Некоторые формулы векторной алгебры.

Ниже имеются в виду векторы $\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z$, $\vec{B} = \vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z$ и $\vec{C} = \vec{i} C_x + \vec{j} C_y + \vec{k} C_z$, где $A_x, A_y, \dots$ - декартовы компоненты, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты.

Скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad 1.1$$

Векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$[\vec{A}, \vec{B}] \equiv \vec{A} \times \vec{B} = \vec{n}_0 AB \sin \alpha = \vec{i} (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j} (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k} (A_x B_y - A_y B_x) \quad 1.2$$

$\vec{n}_0$ - единичный вектор нормали к плоскости векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, причем $\vec{A}, \vec{B}$ и $\vec{n}_0$ образуют "правую тройку" векторов. В краткой записи:

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad 1.2 \text{ а}$$

Векторно-скалярное (смешанное) произведение векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$:

$$\vec{A} \cdot [\vec{B}, \vec{C}] = [\vec{A}, \vec{B}] \cdot \vec{C} = [\vec{C}, \vec{A}] \cdot \vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad 1.3$$

Двойное векторное произведение векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$:

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}) \quad 1.4$$

1.4.2.2. Операции векторного анализа.

В рассмотрение входят скалярные функции φ и векторные функции $\vec{A}$ как декартовых координат, так и криволинейных ортогональных координат q_1, q_2, q_3 (орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; метрические коэффициенты h_1, h_2, h_3), в частности, координат цилиндрических ($q_1 = r, q_2 = \Theta, q_3 = Z; \vec{i} = \vec{l}_r, \vec{j} = \vec{l}_\Theta, \vec{k} = \vec{k}; h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$) и сферических ($q_1 = r, q_2 = \Theta, q_3 = \varphi; \vec{i} = \vec{l}_r, \vec{j} = \vec{l}_\Theta, \vec{k} = \vec{l}_\varphi; h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \Theta$).

Градиент.

а) В декартовых координатах:

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad 1.5$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах :

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \vec{j} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \vec{k} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \quad 1.6$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{l}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{l}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad 1.7$$

г) В сферических координатах:

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \vec{l}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{l}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \vec{l}_\varphi \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \quad 1.8$$

Дивергенция.

а) В декартовых координатах:

$$\text{div } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad 1.9$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad 1.10$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad 1.11$$

г) В сферических координатах:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta \cdot A_\Theta) + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad 1.12$$

Скалярный оператор Лапласа $\nabla^2 \equiv \text{div} \cdot \text{grad}$.

а) В декартовых координатах:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi \equiv \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad 1.13$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right] \quad 1.14$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad 1.15$$

г) В сферических координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} \quad 1.16$$

Ротор.

А) В декартовых координатах:

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad 1.17$$

б) В произвольных, ортогональных криволинейных координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{i}}{h_2 h_3} & \frac{\vec{j}}{h_3 h_1} & \frac{\vec{k}}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad 1.18$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{l}_r}{r} & \vec{l}_\Theta & \frac{\vec{k}}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\Theta & A_z \end{vmatrix} \quad 1.19$$

г) В сферических координатах:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{l}_r}{r^2 \sin \Theta} & \frac{\vec{l}_\Theta}{r \sin \Theta} & \frac{\vec{l}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\Theta & r \sin \Theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad 1.20$$

1.4.2.3. Интегральные формулы векторного анализа.

Теорема Остроградского-Гаусса:
$$\int_V \vec{\nabla} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S} \quad 1.21$$

Теорема Грина:

$$1) \int_V \left(\vec{\nabla} \psi \vec{\nabla} \varphi + \psi \nabla^2 \varphi \right) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad 1.22$$

$$2) \int_V \left(\nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \right) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad 1.23$$

Теорема Стокса:
$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad 1.23a$$

Формула с объемным интегралом от $\text{rot } \vec{A}$:
$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{A} dV = \oint_S [d\vec{S}, \vec{A}] \quad 1.24$$

В записанных формулах $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$ ($\vec{n}_0$ - единичный вектор внешней нормали $\vec{n}$); $d\vec{l} = \vec{\tau}_0 dl$ ($\vec{\tau}_0$ - единичный вектор касательной).

1.2.4 Дифференциальные формулы векторного анализа.

$$\vec{\nabla} \varphi \psi = \varphi \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \varphi \quad 1.25$$

$$\vec{\nabla} \psi \vec{A} = \vec{A} \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \vec{A} \quad 1.26$$

$$\vec{\nabla} [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{B} \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad 1.27$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad 1.28$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad 1.29$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad 1.30$$

$$\vec{\nabla} \times \varphi \vec{A} = [\vec{\nabla} \varphi, \vec{A}] + \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad 1.31$$

$$\vec{\nabla} f(\xi) = f'(\xi) \vec{\nabla} \xi \quad 1.32$$

1.2.5. Уравнение силовых линий.

$$\frac{h_1 dq_1}{A_1} = \frac{h_2 dq_2}{A_2} = \frac{h_3 dq_3}{A_3} \quad 1.33$$

В частности, в декартовых координатах
$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad 1.34$$

1.3. Дельта - функция Дирака.

Дельта - функцией Дирака $\delta(x - x')$ называют особый математический объект, входящий в следующее соотношение:

$$\int_L f(x) \delta(x - x') dx = \begin{cases} 0, x' \notin L \\ f(x'), x' \in L \end{cases} \quad 1.35$$

где $f(x)$ - некоторая функция, рассматриваемая в обычном математическом анализе. Соотношение 1.35 принимают за определение дельта-функции.

Если интегрирование в 1.35 распространить на бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$, то результат будет $f(x')$.

В частности, из 1.35 при $f(x) = 1$ следует:

$$\int_L \delta(x - x') dx = \begin{cases} 0, x' \notin L \\ 1, x' \in L \end{cases} \quad 1.36$$

По существу соотношение 1.35 регламентирует и употребление дельта-функции. Обобщение дельта - функции на трехмерные области:

$$\int f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0, M(\vec{r}') \notin V \\ f(\vec{r}'), M(\vec{r}') \in V \end{cases}, \quad 1.37$$

в частности, при $f(\vec{r}) = 1$

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0, M(\vec{r}') \notin V \\ 1, M(\vec{r}') \in V \end{cases} \quad 1.38$$

Представление дельта - функции $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad 1.39$$

1.3.1. Примеры применения дельта-функции.

а) Представление плотности заряда $\rho(\vec{r})$ в случае точечного заряда q , расположенного в точке $P(\vec{r}')$: $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ 1.40

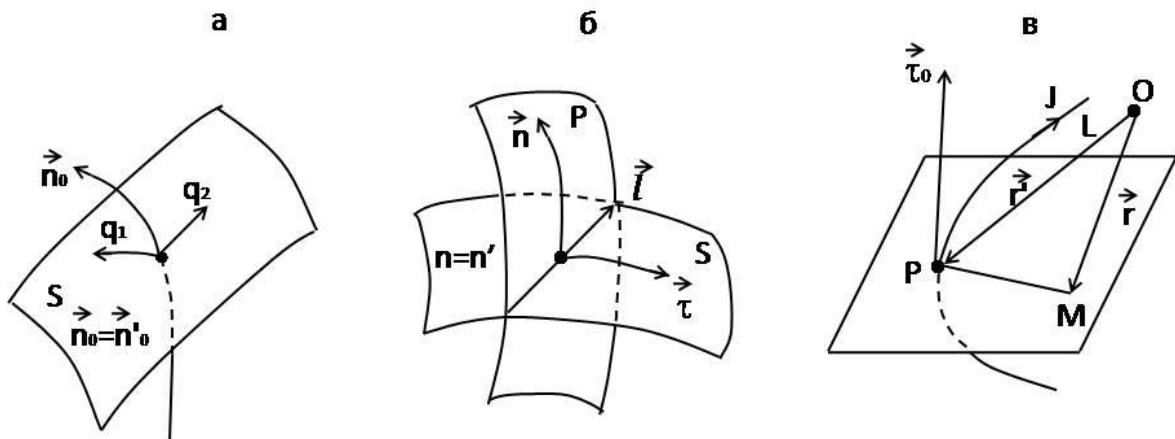


Рис. 2

б) Представление плотности заряда $\rho(\vec{r})$ в случае поверхности S , заряженной с плотностью $\sigma(q_1, q_2)$: $\rho(\vec{r}) = \sigma(q_1, q_2) \delta(n - n')$ 1.41

q_1, q_2 - координаты на S ; n - ортогональная к S координата, принимающая значение n' на S , рис. 2а/.

в) Представление плотности тока $\vec{j}(\vec{r})$ в случае поверхностного тока, распределенного на S с плотностью $\eta(q_1, q_2)$:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \eta(q_1, q_2) \delta(n - n') \quad 1.42$$

/рис.б/.

г) Представление плотности тока $\vec{j}(\vec{r})$ в случае тока I , проходящего по линии L (рис.2в)

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{\tau}_0 I \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad 1.43$$

где дельта-функция двумерная; соответственно этому точки $M(\vec{r})$ и $P(\vec{r}')$ (последняя лежит на L) при интегрировании остаются на к.-л. поверхности, пересекаемой током; орт $\vec{\tau}'$ указывает направление тока.

Лекция 2. Физические основы классической механики.

Механика изучает движения твердых тел, жидкостей и газов. Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел или их частей в пространстве. Рассматриваемые в механике взаимодействия представляют собой те действия тел друг на друга, результатом которых являются изменения движения этих тел или их деформации. Таким образом, основной задачей механики является: по заданным начальным значениям координат и импульсов всех частиц системы в начальный момент времени, используя уравнение движения, найти эти величины в любой последующий момент времени. Кроме того, любая другая характеристика тела (или системы тел) – энергия, момент импульса и т.п. выражается через координаты и импульсы. Самим Ньютоном законы механики были сформулированы в векторной форме. Все величины, с которыми имеет дело теория, – перемещения, скорости, импульсы, силы – рассматриваются как векторы. В дальнейшем благодаря трудам великих ученых 18 и 19 столетий Л.Эйлера, Ж.Лагранжа, П.Лапласа и особенно У.В.Гамильтона были полностью выявлены все физические и математические следствия теории Ньютона. Были найдены все возможные формулировки основных принципов классической механики, и им была придана исключительно общая и изящная математическая форма.

2.1. Механическое движение как простейшая форма движения материи. Кинематика материальной точки, движущейся со скоростью намного меньшей скорости света.

Простейшей формой движения материи является механическое движение, которое состоит в перемещении тел или их частей друг относительно друга. Движение всегда относительно. Отсюда следует, что для описания движения к.-л. тела необходимо указать, по отношению к каким другим телам происходит движение тела. Движение происходит как в пространстве (**П**), так и во времени (**В**). Поэтому для описания движения необходимо уметь измерять расстояния («линейки») и время («часы»).

Совокупность тел, которые условно считаются неподвижными, и по отношению к которым рассматривается движение других тел, и отсчитывающих время часов, образуют систему отсчета (**СО**). Число различных СО огромно и все они равноправны. Поэтому из всей совокупности различных СО необходимо

выбрать такие, по отношению к которым движение рассматриваемого тела описывалось бы наиболее просто.

Тело, находящееся настолько далеко от других тел, что оно не испытывает воздействия со стороны последних (или им можно пренебречь), называют свободно движущимся (СДТ). Если в качестве СО выбрать СДТ, то в такой СО движение других СДТ выглядит наиболее просто: оно происходит равномерно и прямолинейно (закон инерции Галилея). СО, связанную со СДТ, называют инерциальной системой отсчета (ИСО).

Для ИСО выполняется механический принцип относительности Галилея: все механические явления в различных ИСО протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная СО или движется равномерно и прямолинейно.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное. Поступательное – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе. При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Ось вращения может находиться вне тела.

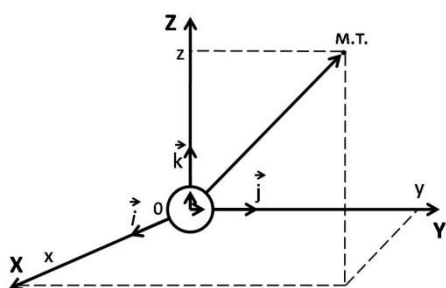


Рис. 2.1

Для того, чтобы описывать движение количественно, необходимо связать с СО к.-л. систему координат, например, декартову. Тогда положение материальной точки можно задать при помощи радиуса-вектора $\mathbf{r}$ или задав три числа x, y, z – декартовы координаты этой точки:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты осей x, y, z .

2.1.1. Скорость и ускорение точки как производная радиуса-вектора по времени.

Материальная точка при своём движении описывает некоторую линию, называемую траекторией. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, движение по окружности, криволинейное движение и т.п.

Пусть в некоторый момент времени t положение материальной точки описывается радиусом – вектором $\mathbf{r}$, а в момент $t + dt$ – $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Вектор $d\mathbf{r}$ называется вектором перемещения

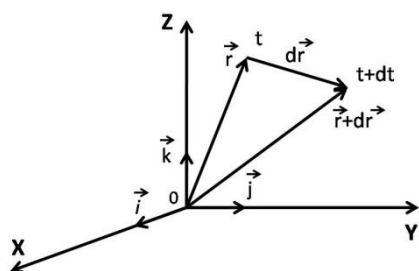


Рис. 2.2

(перемещением) частицы. Разделив это перемещение на dt , получим мгновенную скорость ($\mathbf{v}$) в данной точке траектории:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \text{ (или, что то же, } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}), \text{ или } \dot{\mathbf{r}} = \dot{i}x + \dot{j}y + \dot{k}z,$$

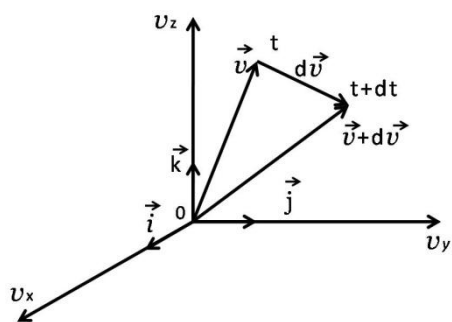


Рис. 2.3

где $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$.

Скорость частицы может изменяться со временем. Быстроту изменения вектора $\mathbf{v}$, называют ускорением $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt, \text{ или } \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}, \text{ или } \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}},$$

$$\text{или } \mathbf{a} = \mathbf{i} \ddot{x} + \mathbf{j} \ddot{y} + \mathbf{k} \ddot{z},$$

где $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$.

2.1.2. Нормальное и тангенциальное ускорения. Радиус кривизны траектории.

Пусть частица движется с переменной скоростью вдоль плоской криволинейной траектории.

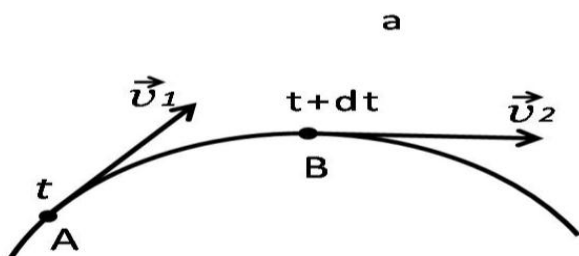
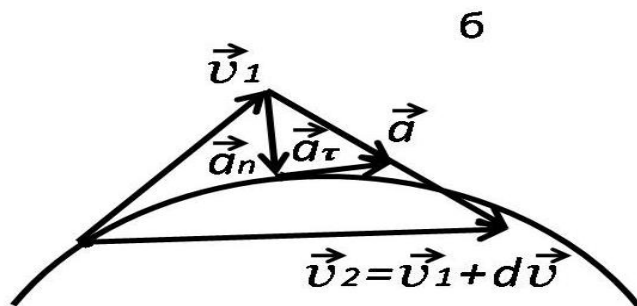


Рис. 2.4



В соприкасающейся плоскости, проведенной в произвольной точке траектории, вектор ускорения $\mathbf{a}$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие $\mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}_t$: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$. Составляющая $\mathbf{a}_n$, направленная вдоль главной нормали к траектории, называется нормальным ускорением, а составляющая $\mathbf{a}_t$, направленная вдоль касательной к траектории, называется касательным (тангенциальным) ускорением. Их численные значения ускорения равны:

$a_n = v^2/R$, $a_t = dv/dt$, так что $a = (a_n^2 + a_t^2)^{1/2}$, где v – численное значение скорости, а R – радиус кривизны траектории. В случае, если уравнение траектории частицы задано в виде функции $y(x)$, то как известно из математики $R = [1 + (y')^2]^{3/2} / y''$. Если же кривая задана параметрическими уравнениями $x(t)$ и $y(t)$, то $R = [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{3/2} / (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})$.

2.1.3. Преобразование Галилея. Закон сложения скоростей. Инвариантность ускорения.

Преобразование радиуса-вектора материальной точки (или её координат) и времени при переходе от одной ИСО к другой ИСО, движущейся относительно первой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$, осуществляется с помощью закона преобразования Галилея:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t, \quad t = t' \text{ или в проекциях на}$$

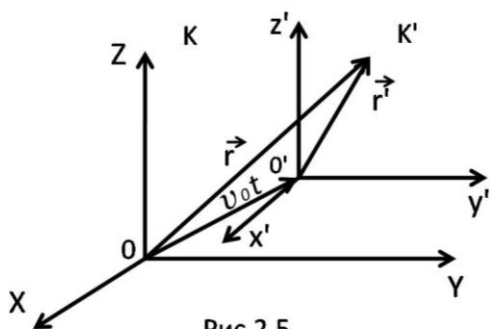


Рис. 2.5

соответствующие оси: $x = x' + v_{0x}t$, $y = y' + v_{0y}t$, $z = z' + v_{0z}t$, $t = t'$.

Беря первую производную от $\mathbf{r}$ по t , получаем закон сложения скоростей:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{v}_0, \text{ или}$$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$. Вторая производная даёт: $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ или $\mathbf{a} = \text{inv}$ (инвариант). Ускорение к.-л. тела, заданного в одной ИСО во всех других ИСО будет одним и тем же.

2.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твёрдого тела.

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по численной величине и направлению скорости и ускорения. Поэтому изучение движения твёрдого тела в этом случае сводится к изучению движения материальной точки.

Динамика поступательного движения – раздел механики, в котором изучается движение твёрдого тела (материальной точки) под действием приложенных к нему сил. Основная задача динамики поступательного движения: зная действующие на тело силы, характер наложенных связей и начальные условия, определить закон движения тела по отношению к данной ИСО, а также давления, оказываемые телом на связи. Должны быть известны масса тела и положение его центра масс. Для определения закона движения тела служат соответствующие дифференциальные уравнения, полученные как следствия из общих теорем динамики. Эти дифференциальные уравнения позволяют также, если известен закон движения тела, определить главный вектор действующих на него внешних сил. Число и вид дифференциальных уравнений движения зависят прежде всего от характера изучаемого движения, который, в свою очередь, определяется видом наложенных связей, а для свободного тела – действующими силами и начальными условиями. Классическая механика покоится на трёх основных законах, подтверждаемых опытом: законе инерции (первый закон Ньютона), законе движения (второй закон Ньютона) и законе равенства сил взаимодействующих двух тел (третий закон Ньютона). Для обобщения этих законов и их практического применения введем понятия системы и замкнутой (изолированной) системы.

Системой материальных точек или тел называется мысленно выделенная совокупность материальных точек или тел, которые в общем случае взаимодействуют как друг с другом, так и с телами, не включенными в состав этой системы. Механическую систему называют свободной, если все входящие в неё материальные точки или тела могут занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости. В противном случае систему называют несвободной. Ограничения, наложенные на положения или движение рассматриваемой механической системы в пространстве, называют механическими связями. Связи называют внутренними, если они не мешают системе свободно перемещаться после того, как она внезапно отвердеет. Все остальные связи называют внешними. Системы, подчиненные только внутренним связям, являются свободными. Совокупность материальных точек или тел,

взаимодействующих друг с другом и не взаимодействующих с окружающими телами, образуют замкнутую или изолированную систему.

Для замкнутой системы существует ряд величин, не изменяющихся с течением времени: импульс, момент импульса, полная энергия и др. Установление этих величин играет большую роль в механике, т.к. изменение такой величины может служить мерой взаимодействия тела (системы тел) с окружающими телами или другой системой.

2.2.1. Импульс тела. Масса. Центр масс.

Импульс тела – вектор пропорциональный величине скорости и по направлению совпадающий с направлением вектора скорости: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Импульс системы N тел равен геометрической сумме импульсов всех тел: $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$, или $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i$. Для изолированной системы $\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const}$. Пусть система

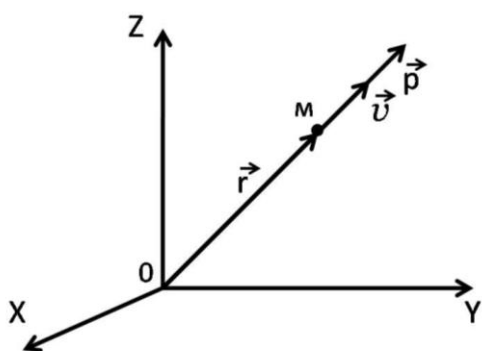


Рис. 2.6

состоит из двух тел $N=2$. Тогда имеем: $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'$, откуда $m_2/m_1 = -\Delta \mathbf{v}_1/\Delta \mathbf{v}_2$. Таким образом, отношение коэффициентов пропорциональности импульсов двух взаимодействующих тел может быть определено по измерению отношения изменений скоростей этих тел. Если к.-л. тело выбрать в качестве эталона, например $m_1 = 1$ кг (СИ), тогда другие коэффициенты m будут определяться из рассмотренного соотношения в долях или целых значениях килограмма. Величину m называют массой тела. Она является мерой инерционных свойств тела.

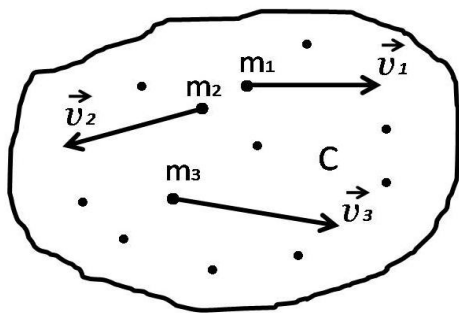


Рис. 2.7

Центром масс или центром инерции системы материальных точек (тел) называется точка $C(x_c, y_c, z_c)$, радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ которой связан с массами m_i и радиус-векторами $\mathbf{r}_i$ всех N точек системы соотношением: $\mathbf{r}_c = \sum m_i \mathbf{r}_i / \sum m_i$.

Подчеркнём, что выполнение закона сохранения импульса (без внешнего воздействия при переходе тела из одних точек пространства в другие импульс тела сохраняется) свидетельствует об однородности пространства, в котором происходит движение тела.

В качестве примера применения закона сохранения импульса рассмотрим реактивное движение ракеты. Основные закономерности реактивного движения впервые исследовал К.Э.Циолковский (1857 - 1935) и указал на возможность использования ракет для освоения космического пространства. Два предмета его открытия не потеряли своего значения до настоящего времени: это 1) использование составной (теперь - многоступенчатой) ракеты и 2) для исследований космического пространства и полётов к другим планетам использовать промежуточные станции (МКС).

Выведем основное уравнение прямолинейного движения ракеты. Топливо ракеты – будь то порох или смесь горючего (спирта, бензина) и окислителя (кислорода, азотной кислоты) – обладает определенным запасом химической энергии на единицу массы (порядка 5 МДж/кг для бездымного пороха и 10 МДж/кг для бензина с кислородом). При сгорании эта химическая энергия превращается в тепловую энергию продуктов горения. Затем продукты горения вытекают через сопло, при этом их тепловая энергия превращается в кинетическую энергию движения.

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ масса ракеты вместе с топливом будет M_0 и начальная скорость ракеты $v_0 = 0$. Пусть теперь из ракеты истекает порция газа dM со скоростью u (для пороха $u \approx 2$ км/с). Требуется найти зависимость скорости движения ракеты от скорости истечения газов и массы ракеты в начальный и рассматриваемый момент времени.

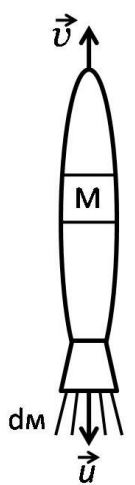


Рис. 2.8

Закон сохранения импульса в случае ракеты имеет вид: $M_0 v_0 = dM(u - u_0) + (M - dM)(v_0 + dv)$. Или, с учетом начальных условий: $0 = dM \cdot u + M \cdot dv$. Разделяя переменные и интегрируя это дифференциальное уравнение, получим формулу Циолковского: $v = u \cdot \ln(M_0/M)$. При помощи этой формулы легко решается обратная задача: какой должна быть начальная масса M_0 ракеты для того, чтобы данной конечной массе M придать определенную скорость v :

$M_0 = M \cdot \exp(v/u)$. Например, оценим отношение M_0/M для достижения 1, 2, и 3-й космической скорости.

Для $v_1 = 8$ км/с должно быть $M_0/M = e^4 \approx 54$;

для $v_2 = 11,2$ км/с – $e^{5,6} \approx 270$ и для $v_3 = 16,4$ км/с – $e^{8,2} \approx 3640$.

В случае жидкого топлива, когда $u = 3$ км/с отношение масс соответственно равны 14,5; 42; 245.

2.2.2. Сила. Уравнение движения. Внешние и внутренние силы.

При свободном движении тела импульс тела сохраняется. При

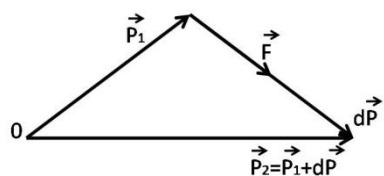


Рис. 2.9

взаимодействии тела с другими телами его импульс изменяется. Мерой интенсивности воздействия на данное тело со стороны других тел (или полей) может служить изменение импульса в единицу времени. Эта мера называется **силой** F – вектор, направленный по линии изменения импульса: $dp/dt = F$. ($\dot{p} = \vec{F}$).

Последнее уравнение, устанавливающее связь между изменением импульса и силой, называют дифференциальным уравнением движения тела. В случае, если масса тела не изменяется при движении, это уравнение имеет вид 2-го закона Ньютона:

$ma = F$, или в проекциях на оси декартовой системы координат: $m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$, $m\ddot{z} = F_z$.

Для замкнутой системы $p = \sum p_i = \text{const}$, тогда $\sum \dot{p}_i = 0$ и $\sum \vec{F}_i = 0$.

Геометрическая сумма сил, с которыми взаимодействуют тела, образующие

замкнутую систему, равна нулю. Для случая $N=2$ имеем: $F_1 + F_2 = 0$ и $F_1 = -F_2$, т.е. сила, с которой первое тело действует на второе, равна силе, с которой второе тело действует на первое (третий закон Ньютона).

При воздействии нескольких тел на данное выполняется принцип независимости действия сил: если на материальную точку одновременно действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке ускорение, определяемое 2-м законом Ньютона так, как если бы других сил не было.

2.3. Энергия как универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Закон сохранения энергии и его связь с однородностью времени. Закон сохранения и превращения энергии как проявление неуничтожимости материи и её движения.

Энергией называют общую меру различных форм движения и взаимодействия. Установлено, что все формы движения превращаются друг в друга в строго определенных количественных отношениях; именно это обстоятельство и позволило ввести понятие об энергии, т.е. позволило измерять различные формы движения и взаимодействия единой мерой.

В соответствии с различными формами физических процессов говорят о различных видах энергии: механической, тепловой, электрической, гравитационной, ядерной и т.д.; эти разграничения имеют несколько условный характер. Энергия – скалярная величина. Энергия подчиняется закону сохранения: при любых процессах, происходящих в изолированной системе, её полная энергия не изменяется. Этот закон вытекает из однородности времени, т.е. независимости законов движения тела (системы тел) от выбора начала отсчета времени. Он свидетельствует о том, что движение материи несотворимо и неуничтожимо: оно может лишь переходить из одних форм в другие.

Если система незамкнутая, то изменение её энергии благодаря внешним воздействиям численно равно и противоположно по знаку алгебраической сумме изменений энергии всех внешних тел и полей, взаимодействующих с системой.

Возможны два качественно различных способа передачи движения и соответствующей ему энергии от одного макроскопического тела к другому – в форме работы и в форме теплоты (путем теплообмена). Изменение энергии первым способом называют **работой**, совершенной над этим телом. Соответственно, изменение энергии тела, осуществлённое вторым способом, называют **количеством теплоты**, сообщенной телу.

Передача энергии в форме работы производится в процессе силового взаимодействия тел. Поэтому можно говорить, что работа, совершаемая над рассматриваемым телом, есть не что иное, как работа сил, приложенных к этому телу со стороны всех других (внешних) тел, с которыми оно взаимодействует. Работа, совершенная над телом, может пойти на увеличение любого вида энергии этого тела.

Передача энергии путём теплообмена между телами обусловлена различием температур этих тел и может осуществляться как при непосредственном контакте тел – **теплопроводность** и **конвективный теплообмен**, так и через посредство испускания и поглощения электромагнитного излучения – **лучистый**

теплообмен. Энергия, получаемая телом в форме тепла, может непосредственно пойти только на увеличение его внутренней энергии.

2.3.1. Работа силы и её выражение через криволинейный интеграл.

Если на тело в каждой точке пространства действует сила $\mathbf{F}$, то совокупность этих сил определяет **силовое поле**.

Рассмотрим движение материальной точки в силовом поле, в котором $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Элементарная работа δA силы $\mathbf{F}$, совершенная при перемещении $d\mathbf{r}$ материальной точки под действием этой силы, равна скалярному произведению $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{r}$: $\delta A = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})$, или, в декартовых координатах, $\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

Элементарная работа обозначена через δA , а не dA , т.к. в общем случае она не является полным дифференциалом, т.е. криволинейный интеграл от δA вдоль произвольной замкнутой траектории точки приложения силы не равен нулю, в то время как этот интеграл от полного дифференциала должен быть тождественно равен нулю.

Если на материальную точку или абсолютно твердое тело действует система сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, то совершаемая при этом работа равна алгебраической сумме работ всех сил системы. На конечном участке S траектории $A = \int_0^S \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Если $\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}$, то $\delta A = 0$.

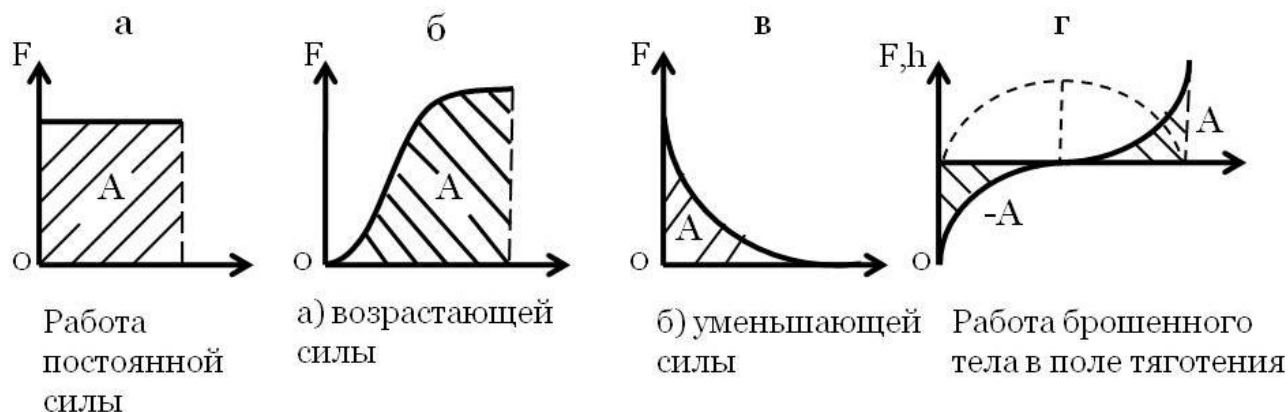


Рис. 2.10

Если во всех точках поля, силы, действующие на тело одинаковы, поле называют **однородным**. Поле, остающееся постоянным во времени, называют **стационарным**. Поле, изменяющееся со временем, называют **нестационарным**. Если силовое поле стационарно, то работа сил поля не зависит от формы пути перемещения, а определяется только положениями начальной и конечной точек переноса. Силы, обладающие таким свойством, называют **консервативными**, а поле – **потенциальным**.

Из независимости работы консервативных сил от пути вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение (элементарная работа) было полным дифференциалом некоторой скалярной функции координат $U(x, y, z)$.

Мощностью P силы $\mathbf{F}$ называется физическая величина, характеризующая быстроту совершения работы этой силой и равная отношению элементарной работы к промежутку времени, за который она совершена: $P = \delta A / dt = (\mathbf{F}; \mathbf{v})$. В случае произвольного движения абсолютно твердого тела результирующая мощность равна алгебраической сумме мощностей всех сил, действующих на тело: $P = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i; \mathbf{v}_i)$.

2.3.2. Кинетическая энергия механической системы и её связь с работой внешних и внутренних сил, приложенных к системе.

Механической энергией E называется энергия механического движения и взаимодействия тел. Она равна сумме кинетической E_k и потенциальной U энергий: $E = E_k + U$. Для определения кинетической энергии рассмотрим работу, совершаемую силой $\mathbf{F}$ на пути 1 – 2: $\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m d\mathbf{v}/dt \cdot \mathbf{v} dt$, откуда $A = m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$ и $A = mv_2^2/2 - mv_1^2/2$. Таким образом, кинетическая энергия материальной точки равна: $E_k = mv^2/2$. Итак, работа результирующей всех сил, действующих на точку, идет на приращение кинетической энергии материальной точки: $A = E_{k2} - E_{k1}$. Отсюда следует, что кинетическая энергия имеет такую же размерность, как и работа, и является мерой механического движения тела и измеряется той работой, которую может совершить это тело при его торможении до полной остановки.

Учитывая, что $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, выражению для кинетической энергии материальной точки можно придать вид: $E_k = p^2/2m$. Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, входящих в его состав, и выражается следующим интегралом: $E_k = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_v \rho v^2 dV$.

2.3.3. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле и её связь с силой, действующей на материальную точку. Понятие о градиенте скалярной функции координат. Потенциальная энергия системы.

Рассмотрим движение м.т. в потенциальном поле. В потенциальном поле $U(x,y,z)$ величина U , равная работе по перемещению тела из точки 1 в точку 2, взятой с обратным знаком, определяет **потенциальную энергию** тела в точке 2 по отношению к точке 1: $U = -A_{12}$ или $dU = -dA$.

Итак, потенциальной энергией называют часть энергии механической системы, зависящую от конфигурации системы, т.е. от взаимного расположения частиц системы и их положения во внешнем силовом поле. Её измеряют той работой, которую совершают консервативные силы (внешние и внутренние), действующие на все частицы системы, при переходе от рассматриваемой конфигурации системы к такой, которую называют нулевой конфигурацией, и для которой потенциальную энергию системы условно считают равной нулю. Выбор нулевой конфигурации, т.е. начала отсчета потенциальной энергии, совершенно произволен, т.к. в любом опыте можно измерить только изменение потенциальной энергии, но не её абсолютное значение. В каждой конкретной задаче этот выбор производится так, чтобы максимально упростить её решение.

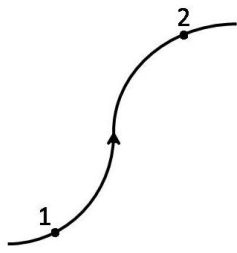


Рис. 2.11

Итак, $\delta A = -dU$, или $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$ и $\mathbf{F} = -(\partial U / \partial \mathbf{r}) \mathbf{n}$, или $\mathbf{F} = -\nabla U$, или в декартовой системе координат:

$\mathbf{F} = -(\mathbf{i} \partial U / \partial x + \mathbf{j} \partial U / \partial y + \mathbf{k} \partial U / \partial z)$. Знак минус показывает, что сила, действующая на тело, направлена в сторону убывания потенциальной энергии тела. Уравнение движения тела в потенциальном поле примет вид: $d\mathbf{p}/dt = -\nabla U$.

Потенциальная энергия системы $U = U^{\text{внешн}} + U^{\text{внутр}}$. Здесь $U^{\text{внешн}}$ – внешняя потенциальная энергия системы,

обусловленная действием на неё внешних

консервативных сил, приложенных со стороны тел, не входящих в состав системы, а $U^{\text{внутр}}$ – внутренняя потенциальная энергия системы, обусловленная потенциальными силами взаимодействия между всеми её частями. В общем случае внутренняя энергия зависит от координат всех N м.т., входящих в состав системы: $U^{\text{внутр}} = f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$, $U^{\text{внешн}}$ может также зависеть явно от времени: $U^{\text{внешн}} = f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t)$. Это связано с тем, что внешние тела, действующие на рассматриваемую систему, могут двигаться относительно СО (закон этого движения в каждой конкретной задаче предполагают заданным).

Если $\mathbf{F}_i$ (внешн) = $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, t)$ – результирующая всех внешних консервативных сил, действующих на i -тую м.т. системы, то $dU^{\text{внешн}}/dt = \partial U^{\text{внешн}}/\partial t - \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$. В случае стационарного внешнего силового поля $\partial U^{\text{внешн}}/\partial t = 0$ и $dU^{\text{внешн}} = -\sum (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i) dt$.

Внутренняя потенциальная энергия системы равна алгебраической сумме потенциальных энергий U_{ik} взаимодействия всевозможных пар точек системы:

$$U^{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i}^N U_{ik} = 1/2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N U_{ik}, \text{ где } U_{ik} = -\int (\mathbf{F}_{ik} \cdot d\mathbf{r}_{ik}) + \text{const} = -\int (\mathbf{F}_{ki} \cdot d\mathbf{r}_{ki}) + \text{const} = U_{ki},$$

где $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$ $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ – потенциальные силы взаимодействия i -й и k -й точек системы.

2.3.4. Закон сохранения механической энергии. Диссипация энергии.

Если тело находится в поле консервативных сил, то убыль его потенциальной энергии свидетельствует о выполнении работы, идущей на увеличение кинетической энергии тела: $-dU = \delta A$, $\delta A = dE_k$, откуда $-dU = dE_k$ и $d(E_k + U) = 0$ откуда $E = E_k + U = \text{const}$. Полная механическая энергия тела, на которое действуют лишь консервативные силы, остаётся постоянной. Обобщая это положение на систему тел, можно сказать, что механическая энергия консервативной системы сохраняется неизменной в процессе движения системы. Этот результат называют законом сохранения механической энергии. В частности, он справедлив для любой замкнутой системы тел, силы взаимодействия между которыми консервативны. Если эти силы неконсервативны (например, есть силы трения), то механическая энергия замкнутой системы уменьшается.

Система тел называется **диссипативной**, если её механическая энергия с течением времени уменьшается за счет преобразования в другие (не механические) формы энергии (например, во внутреннюю энергию хаотического

движения частиц, составляющих эти тела). Этот процесс уменьшения механической энергии системы называют **диссипацией энергии**.

2.3.5. Удар абсолютно неупругих и упругих тел.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел, образующих замкнутую систему. Пусть массы тел равны m_1 и m_2 , а скорости до столкновения $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. В силу закона сохранения суммарный импульс тел после удара должен быть таким же, как и до удара: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$ и $\vec{u} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/(m_1 + m_2)$.

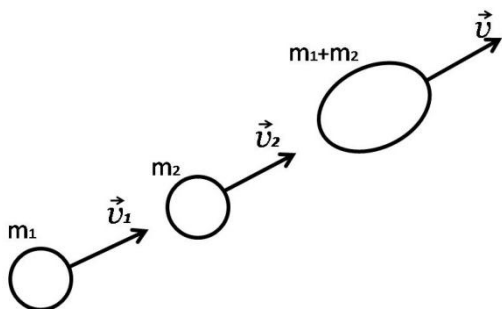


Рис. 2.12

Теперь рассмотрим абсолютно упругое центральное столкновение двух однородных шаров. Пусть массы шаров m_1 и m_2 , а их скорости до удара $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Необходимо определить скорости шаров $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ после удара. Поскольку система замкнута и тела абсолютно упругие, то сохраняется не только импульс тел, но и их кинетическая энергия: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ и $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$. Решая систему этих двух уравнений, найдем:

$\vec{u}_1 = [2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1]/(m_1 + m_2)$, $\vec{u}_2 = [2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2]/(m_1 + m_2)$.

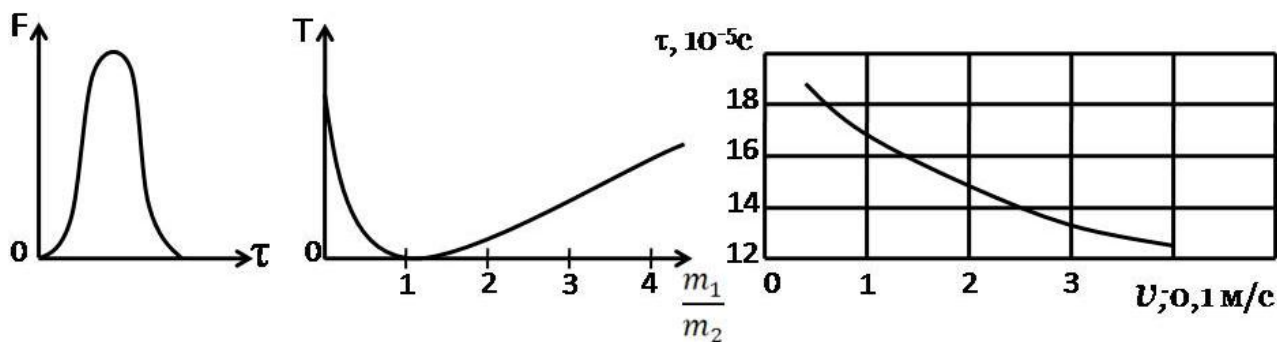


Рис. 2.13

Процесс столкновения можно разделить на две фазы. В течение первой фазы происходит сближение тел. Оба тела производят работу против сил реакции, их общая кинетическая энергия уменьшается, относительная скорость также уменьшается до нуля. Вслед за этим наступает вторая фаза: тела начинают удаляться друг от друга, восстанавливая свою форму, при этом силы реакции совершают положительную работу, кинетическая энергия системы растёт, относительная скорость, переменяв знак, увеличивается по абсолютной величине, наконец, тела отдаляются, и этим заканчивается процесс удара. Длительность взаимодействия измеряется тысячными долями секунды. За это время сила доходит до своего максимального значения, затем падает до нуля.

2.3.6. Границы движения.

Если движение м.т. ограничено движением вдоль определенной прямой

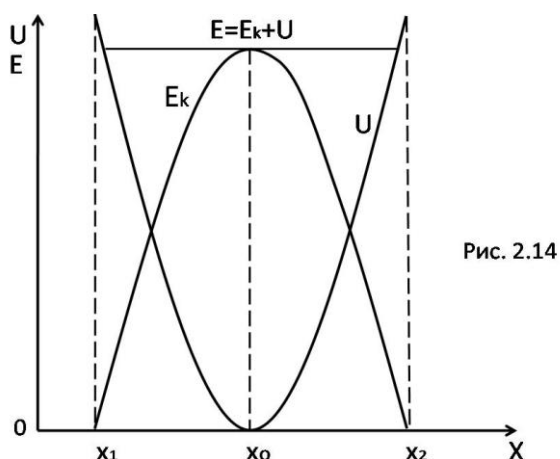


Рис. 2.14

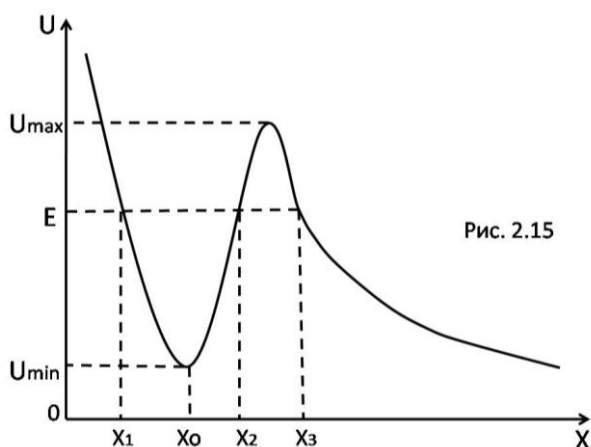


Рис. 2.15

(кривой), то оно называется **одномерным**, или движением с одной степенью свободы. Движение, при котором тело остаётся в конечной области пространства, называется **финитным** (движение планет, ИСЗ, колебательное движение и т.п.), если оно может удаляться сколь угодно далеко — **инфинитным**. Зачастую размер области «финитности» зависит от полной энергии тела E .

Зная вид функции, которой выражается потенциальная энергия, можно сделать ряд заключений о характере движения тела. Пусть $U(x)$ имеет вид, указанный на рисунке 2.15.

Частица может совершать движение либо в пределах от x_1 до x_2 , либо от x_3 до бесконечности. В последнем случае скорость тела на бесконечности определяется величиной:

$v = 1/m \sqrt{2m(E - U_{\min})}$. В области $x < x_1$ и $x_2 < x < x_3$ тело проникнуть не может, т.к. потенциальная энергия не может стать больше полной энергии (если бы это

случилось, то кинетическая энергия стала бы отрицательной). Таким образом, область $x_2 < x < x_3$ представляет собой **потенциальный барьер**, через который тело не может проникнуть, имея данный запас полной энергии. Величина $U_{\max} - E$ называется высотой потенциального барьера. Область $x_1 < x < x_2$ называют **потенциальной ямой**. В области $x_1 < x < x_2$ движение финитно, в области $x > x_3$ — инфинитно.

Лекция 3. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

«Возможно даже, мы должны создать совершенно новую механику, которую мы лишь смутно представляем, механику, где инерция возрастала бы со скоростью, причем скорость света являлась бы непреодолимым пределом». (Poincare H. L'avenir de la Physique mathematique. — Janvier 1904. — V. 28, Ser. 2. — P. 302 - 324).

3.1. Введение.

Физика — наука о наиболее общих свойствах и формах движения материи. Движение(изменение) является способом существования материи. Структура материи реализуется в пространстве (П) и времени (В), в закономерном расположении объектов (тел) вне друг друга, в закономерном следовании явлений друг за другом. Материя немыслима вне определённой

координации её частей и процессов, вне времени и вне пространства. В свою очередь П и В неразрывно связаны с материей, являются формами бытия материи. В философии П и В определены следующим образом: **П** – совокупность отношений, выражающих координацию сосуществующих объектов, – их расположение друг относительно друга и относительную величину (расстояния и ориентацию). **В** – совокупность отношений, выражающих координацию сменяющих друг друга состояний (явлений), – их последовательность и длительность.

Физические теории П и В не дают определений П-В-й терминологии в том смысле, что не вводят эту терминологию впервые в употребление через другие термины с известным значением. Они предполагают эту терминологию данной и формулируют методы установления П-В –х отношений предметов для различного рода случаев, в частности для различно движущихся систем, для удалённых событий, для случаев, когда имеет значение скорость распространения сигналов о событиях и т.д. Для этих целей физические теории осуществляют *экспликацию* П-В-й терминологии.

В силу разделения труда, сложившегося в науке, проблемы исследования П-В-х свойств мира стали проблемами физики. Физика развивает соответствующую теорию измерений, учитывающую скорость сигналов о наступлении событий, перемещение событий и наблюдателей, взаимные перемещения событий и т.д.

Уже на уровне здравого смысла является тривиальностью следующее обстоятельство. П и В заключают в себе что-то такое, что мешает рассматривать их как эмпирические вещи, которые можно пощупать, сжать, растянуть, сломать и т.п. П и В не являются эмпирическими объектами. Нельзя отдельно наблюдать эмпирические объекты и их изменения, с одной стороны, и П и В – с другой. Бессмысленно говорить об изменении, возникновении и исчезновении П и В. Бессмысленно говорить о скорости В и т.п. Однако выражения «*изменение времени*», «*обратный ход времени*» и т.д. прочно вошли в обиход и часто употребляются не только как литературные модификации терминов, обозначающих П-В-й порядок объектов, П-В-е интервалы, ряды, структуры и т.п., а буквально. Если, например, высказано утверждение, что П-В в районе такой-то звезды искривлено, то это утверждение ещё ровным счётом ничего не значит, пока не сказано в каком смысле здесь употреблены термины «П» и «В». Если он (П) употреблён в смысле *вместилище* всех вещей, а В – чистая *длительность*, это утверждение бессмысленно, ибо искривлён может быть лишь какой-то ряд предметов относительно другого ряда, а с точки зрения такого понятия П-В все это исключено. Значит, термин «П» употреблён здесь в смысле П – *мир всех, или избранных вещей*, В – *мир всех, или избранных, событий*. Но в таком случае ничего удивительного в этом нет.

Относительно В зададимся вопросом: «Возможна ли такая ситуация, что в одном месте мира В идёт иначе (быстрее, медленнее), чем в другом?» Короче говоря, если космонавт вернулся на Землю через Т лет после полёта, то он прожил ровно Т лет по земному времени, как бы он ни отсчитывал время в своём корабле. Если он вернулся живым, то абсолютно никакой заслуги физических

теорий измерения времени в этом нет. Вопрос о продолжительности жизни ничего общего с вопросом об измерении времени не имеет. И уж наверняка не случится так, что космонавт, вернувшись на Землю, узнает, что его родители ещё не родились.

3.2 Экспликация пространственно-временных характеристик в физике.

Физика старается дать описание, объяснение и предсказание явлений природы, исходя из определённых начальных положений. Причём, описание даётся в трёхмерном пространстве (П) и во времени (В). Объяснение заключается в формулировании физического закона, применимого к наблюдаемому и изучаемому явлению, и в установлении соотношения между причиной и следствием. Оно даётся в рамках теории, способной дать элементы предвидения. Описание и предсказания должны быть количественными; это основной признак точной науки. Но количество выражается и определяется только в результате измерений. Измерение физической величины сводится к сравнению её с другой однородной величиной, точно определённой и условно принятой за единицу (*эталон*) для измерения всех таких же величин. Поэтому для П-В-х измерений необходимо перейти от философского определения П и В к конкретно-физическому (измеренческому), т.е. выраженных при помощи определённых физических объектов (линейки, часы и т.п.) и процессов (*экспликация понятий*). Так, основными единицами СИ являются метр (м), секунда (с), килограмм (кг), радиан (рад), стерадиан (стер), ампер (А).

1м – длина, равная $1650763,73$ длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p^{10}$ и $5d^3$ атома криптона-86.

1с – интервал времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний, соответствующих резонансной частоте энергетического перехода между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия-133.

1 кг – единица массы – представлен массой международного прототипа килограмма.

Измеренные П-В-е характеристики (длины объектов, длительности событий) и их производные (скорости, ускорения) в различных ИСО, движущихся относительно друг друга, будут отличаться вследствие эффекта Доплера от, измеренных в ИСО, условно считающейся неподвижной (собственные значения длины, длительности, скорости и т.п.). Определение кинематических и динамических характеристик различных объектов и событий, заданных в к.-л. ИСО, в других ИСО и составляет основную задачу СТО.

3.3 Постулаты СТО. Преобразования Пуанкаре – Лоренца.

Основу релятивистской механики составляет принцип относительности Пуанкаре-Эйнштейна. В 1904 г. в докладе на Конгрессе искусства и науки в Сент-Луисе Пуанкаре среди основных принципов теоретической физики формулирует принцип относительности, согласно которому, по его словам, *«законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа*

*определять, находимся ли мы в подобном движении или нет» (Poincare H. L'etat actuel et l'avenir de la Physique mathematique //Bulletin des Sciences Mathematiques. – Janvier 1904. – V.28, ser.2. – P. 302 – 324; The Monist.- 1905.- V.XV, № 1.). Аналогичное высказывание принадлежит Эйнштейну (Zur Elektrodynamik der bewegter Körper. Ann. Phys., 1905, 17, 891 - 921). Вторым фундаментальным принципом физики – *существование конечной максимальной скорости перемещения объекта (передачи информации)*. Кстати, этот принцип о невозможности мгновенных перемещений вытекает из чисто логических соображений – *не может один и тот же объект одновременно находиться в двух пространственно разделённых местах*.*

Таким образом, принцип относительности Пуанкаре – Эйнштейна можно сформулировать так: **1.** В любых ИСО все физические явления протекают одинаково (при одинаковых условиях). Иначе: никакие физические эксперименты (механические, тепловые, электромагнитные, ядерные и т.д.), проводимые внутри лаборатории (ИСО), не позволяют установить, находится ли эта лаборатория в покое или движется равномерно и прямолинейно. Иначе: форма всех физических законов инвариантна для преобразования Пуанкаре–Лоренца (П-Л). **2.** Скорость распространения света в вакууме не зависит от движения источника (или приёмника) света и одинакова во всех направлениях. Иначе: скорость света (как и любых безмассовых частиц) в вакууме одинакова во всех ИСО: $c = \text{inv}$ ($c = 2,99792550 \cdot 10^8$ м/с).

Для вывода преобразований Пуанкаре – Лоренца (П-Л) воспользуемся методом **к – коэффициентов** (фактически – эффектом Доплера).

Будем считать, что наблюдатели во всех ИСО имеют одинаковый набор часов. Такие часы предоставлены самой природой. Частоты спектральных линий тождественных атомов (например, атомов цезия-133) – всегда одни и те же во всех ИСО, и их можно использовать в качестве устройства для отсчёта времени. Синхронизация таких часов осуществляется путём обмена радио- или световыми импульсами. Для измерения расстояний используется радиолокационный (лазерный) метод. Всё, что здесь необходимо, это фиксировать моменты послышки и приёма сигналов при помощи соответствующих радиотехнических устройств.

Основная идея метода – рассмотрение одномерной совокупности инерциальных наблюдателей, движущихся равномерно вдоль некоторой прямой (например, луча света) – оси x .

Рассмотрим ИСО1, условно считаемую неподвижной, относительно которой вдоль линии их соединяющей со скоростью v (в единицах скорости света $\beta = v/c$). Можно считать неподвижной ИСО2, тогда ИСО1 движется относительно ИСО1 с той же скоростью, но в противоположном направлении. В момент, когда они находятся рядом, происходит синхронизация их часов. Обмен сигналами происходит систематически, так что положения ИСО друг относительно друга известны.

Введем обозначения: $t_1 - t_0 = \Delta t$ – промежуток времени между моментом синхронизации часов t_0 и моментом послышки сигнала в момент времени t_1 наблюдателем ИСО1; $t'_1 - t'_0 = \Delta t'$ – промежуток времени между приёмами этих сигналов наблюдателем в ИСО2; t_2 – момент приёма отражённого сигнала

наблюдателем в ИСО1. Тогда $\Delta t' = k \Delta t$, а $t_2 - t_0 = k \Delta t'$. Для инерциальных наблюдателей коэффициент k не меняется со временем и не зависит от величины Δt . То обстоятельство, что фактор k одинаков при посылке сигналов от ИСО1 к ИСО2 и от ИСО2 к ИСО1, вытекает непосредственно из принципа относительности. Нетрудно видеть, что он определяется только относительной скоростью ИСО. Найдем $k = f(v)$.

Время, за которое сигнал прошёл расстояние от ИСО1 до ИСО2 и обратно, будет $(t_2 - t_1)/2$, а расстояние между ними будет $c(t_2 - t_1)/2 = c/2 [(t_2 - t_0) - (t_1 - t_0)] = c/2 (k\Delta t' - 1) = c/2 (k^2 - 1)\Delta t$. Это же расстояние наблюдатель 2 преодолел со скоростью v за время $(t_1 - t_0) + \frac{1}{2} (t_2 - t_1) = \frac{1}{2}(k^2 + 1)\Delta t$. Сравнивая пути $c/2 (k^2 - 1)\Delta t = v/2 (k^2 + 1)\Delta t$, получаем $v/c = \beta = (k^2 - 1) / (k^2 + 1)$, откуда фактор k будет равен: $k = \sqrt{\frac{k+\beta}{k-\beta}}$. Найденный коэффициент выражает релятивистский

эффект Доплера. Физически это означает, что идентичные синхронизированные часы показывают одинаковое время во всех ИСО (принцип относительности). Однако, если спектр излучения цезия-139 посылают из ИСО2 (T_0), а принимают в ИСО1 (T), то спектры собственный и принятый, вследствие эффекта Доплера, смещены в отношении k : $T = k T_0$, $\lambda = cT = c k T_0 = k \lambda_0$: при взаимном удалении в длинноволновую часть спектра, а при сближении – в коротковолновую, причём $k = \lambda / \lambda_0$ не зависит от частоты (длины волны в вакууме) и применим ко всем спектральным линиям излучения. Отсюда следует, что координаты x и время t подчиняются таким же соотношениям: $x = k x_0$ и $t = k t_0$.

Используя эффект Доплера (метод k - коэффициентов), можно получить все основные следствия из принципа относительности П-Э, не прибегая к преобразованиям П-Л. Однако при решении многих физических задач более привычен и удобен, особенно в динамике, способ, основанный на координатном или векторном представлении физических величин. Поэтому, чтобы показать эквивалентность этих двух методов, получим преобразования П-Л, используя метод коэффициента k (эффект Доплера), а из них уже получим необходимые следствия.

Обозначим, по традиции, ИСО1 буквой K , а движущуюся ИСО2 – K' ; соответственно координаты и время x, t и x', t' . Обмен информацией между ними осуществляется световыми или радио – импульсами, так что $t = x/c$, $t' = x'/c$. Тогда имеем: $x = k x' = x' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\beta}} = x'(1 + \beta) / \sqrt{1-\beta^2} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

аналогично для времени:

$$t = k t' = t' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \times \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\beta}} = t' \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = (t' + v/c t') / \sqrt{1-\beta^2} = (t' + v/c^2 x') / \sqrt{1-\beta^2}.$$

В декартовой системе координат при движении K' со скоростью v относительно K вдоль оси x преобразования П-Л имеют вид:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = [t' + (v/c^2)x'] / \sqrt{1-\beta^2}.$$

При обратных преобразованиях в K' перед скоростью v нужно поменять знак. Учитывая, что ИСО не обязательно движутся друг по отношению к вдоль одной оси, запишем их в векторной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + (\mathbf{r}', \mathbf{v}) \mathbf{v} / v^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) + \mathbf{v} t' / \sqrt{1-\beta^2} \quad \text{и} \quad t = [t' + (\mathbf{r}', \mathbf{v}) \mathbf{v} / c^2] / \sqrt{1-\beta^2}.$$

3.4. Интервал между событиями и его инвариантность.

Четырёхмерным ПВ называют воображаемое ПВ 4-х измерений, на осях которого откладываются 3 координаты x, y, z и время t . Любое событие изображается точкой в 4-мерном ПВ (*мировая точка*). Движению некоторой частицы в ПВ соответствует *мировая линия*.

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 – координаты событий 1 и 2 в 4-мерном ПВ, то величину S_{12} , равную $S_{12} = \sqrt{[c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]}$ называют *интервалом* между двумя событиями. Интервал между двумя бесконечно близкими событиями $dS = \sqrt{(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)} = \sqrt{(c^2 - dl^2)}$. Путем преобразований П-Л легко показать, что $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2$, т.е. $S_{12}^2 = \text{inv}$ – инвариант.

Понятие интервала позволяет изучать ПВ-е соотношения между событиями, устанавливать причинно-следственные связи между ними. Причинно-следственная связь возможна лишь между событиями, разделёнными вещественными интервалами ($ct > l$ и $S_{12}^2 = c^2 t^2 - l^2 > 0$). Такие интервалы называют *временнподобными*. Мнимые интервалы ($ct < l$ и $S_{12}^2 < 0$) называют *пространственноподобными*.

3.5. Релятивистский закон сложения скоростей.

Пусть ИСО2 движется относительно ИСО1 со скоростью V . В ИСО2 в том же направлении движется материальная точка со скоростью v' . С какой скоростью v движется м.т. относительно ИСО1? Из преобразований П-Л имеем: $dx/dt = (dx' + V dt') / (dt' + V/c^2 dx')$ $= (dx' / dt' + V) / (1 + V/c^2 dx' / dt')$ и окончательно имеем: $v = (v' + V) / (1 + Vv' / c^2)$. Векторную форму закона сложения скоростей получим из $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$: $\mathbf{v} = [\mathbf{V} + \mathbf{v}' \sqrt{(1 - \beta^2)} + 1/V^2 (1 - \sqrt{(1 - \beta^2)}) (\mathbf{v}', \mathbf{V}) \mathbf{V}] / [1 + (\mathbf{v}', \mathbf{V}) / c^2]$. Формула перехода от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{v}'$ отличается от приведенной знаком при V .

3.6. 4 – мерное представление кинематики и динамики СТО.

Математические операции в ПВ значительно облегчаются, если ввести переменные: $x = x_1, y = x_2, z = x_3, ict = x_4, i = \sqrt{-1}$. Тогда мировая точка будет представлена четырьмя координатами: x_1, x_2, x_3, x_4 , из которых одна, соответствующая времени, является мнимой. Чтобы короче была запись, пользуются обозначением координат мировой точки в виде x_i , где $i = 1, 2, 3, 4$. Подобно тому, как в 3- мерном пространстве положение частицы относительно системы отсчёта определяется 3-мерным вектором, так в ПВ пользуются *четырёхмерным вектором* (4-вектор $\mathbf{x}_i$, 4-вектор скорости $\mathbf{u}_i$, 4-вектор ускорения $\mathbf{w}_i$, 4-вектор импульса $\mathbf{p}_i$, 4-вектор электромагнитного потенциала $\mathbf{A}_i$ и т.д.).

Важно отметить, что все 4-векторы образуют группу Пуанкаре – Лоренца (ГПЛ) и форма их преобразований одинакова в ПВ. Например,

$$x_1 = (x'_1 - i v/c x'_4) / \sqrt{1-\beta^2}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = (x'_4 + i v/c x'_1) / \sqrt{1-\beta^2}.$$

$$\text{Аналогично } A_1 = (A'_1 - i v/c A'_4) / \sqrt{1-\beta^2}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_4 = (A'_4 + i v/c A'_1).$$

При помощи этих формул легко показать, что в ПВ квадрат 4-вектора и скалярное произведение являются инвариантами, т.е. $A_i^2 = A_i'^2$, $A_i B_i = A_i' B_i'$, где $i = 1,2,3,4$. Из этих формул следует, что пространственные и временные компоненты квадрата 4-вектора относительны, они зависят от выбора ИСО.

3.7. Скорость мировой точки.

Подобно тому как в трехмерном пространстве механика определяет скорость производной радиус-вектора $\vec{r}$ по времени t , так в ПВ скорость мировой точки может быть определена дифференцированием по собственному времени τ 4-вектора $\vec{x} = \vec{e}_i x_i$ ($i=1,2,3,4$), т.е. 4-вектор скорости можно записать в виде:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{e}_i \frac{dx_i}{d\tau}, \text{ или в проекциях на оси координат ПВ: } u_i = dx_i / d\tau. \text{ Подставляя}$$

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict \text{ и } d\tau = dt \sqrt{1-\beta^2} \text{ имеем:}$$

$$u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} ;$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} ;$$

$$u_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dz}{dt} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} ;$$

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d(ict)}{dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

где v_x, v_y, v_z есть проекции скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ на декартовы оси координат. Четвертая компонента 4-вектора u_i берется на ось времени.

Первые три равенства запишем в векторной форме:

$$(u_1, u_2, u_3) = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Находя u_i^2 , можно показать, что

$$u_i^2 = -c^2 \text{ и } u_i'^2 = -c^2 \text{ откуда } u_i^2 = inv.$$

Отметим, что 4-вектор является времениподобным вектором.

3.8. Ускорение мировой точки.

Ускорение мировой точки определяется равенством: $w_i = du_i / d\tau$. В векторной форме имеем: $(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\dot{\vec{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\vec{v} \left(\frac{d}{dt} \sqrt{1-\beta^2} \right)}{(-\beta^2 c^2)}$,

$$w_4 = \frac{i}{c} \frac{\left(\frac{d}{dt} \sqrt{1-\beta^2} \right)}{(-\beta^2 c^2)}.$$

Возводя эти два выражения в квадрат и складывая, получим:

$w_i^2 = \frac{\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} [\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}]^2}{(-\beta^2)^{3/2}} > 0$. Откуда следует, что 4-вектор ускорения – пространственноподобный. Дифференцируя $u_i^2 = \text{inv}$ по τ , получим $u_i w_i = 0$, откуда следует, что 4-векторы u_i и w_i взаимноперпендикулярны.

3.9. 4-вектор импульса свободной частицы.

4-вектор импульса p_i получим, умножая массу частицы (тела) m на 4-вектор скорости u_i . Учитывая, что $u_i^2 = -c^2 = \text{inv}$ и $p_i^2 = -mc^2 = \text{inv}$, получаем, что масса m – скаляр, не зависящий от выбора системы отсчёта (не зависит от скорости). Это же утверждение можно получить непосредственно из преобразований П-Л для компонент p_i :

$p_1 = \frac{p_1' - i \frac{v}{c} p_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}; p_2 = p_2'; p_3 = p_3'; p_4 = \frac{p_4' + i \frac{v}{c} p_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Подстановка компонент p_i в p_i^2 даёт:

$$p_i^2 = -m^2 c^2, i = 1, 2, 3, 4.$$

3.10. Кинетическая и полная энергии свободно движущегося тела.

Пусть под действием силы, приложенной в направлении движения тела, тело начинает двигаться. При этом будет совершаться работа $dA = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}$. Здесь $\mathbf{F}_i = m \mathbf{w}_i$, $w_i = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{(-\beta^2)^{3/2}}$, т.к. $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$, а $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$. Окончательно имеем: $dA = (m dv / dt) \cdot \mathbf{v} dt / (1 - \beta^2)^{3/2}$, или $dA/mc^2 = (\beta d\beta) / (1 - \beta^2)^{3/2}$. Интегрирование даёт:

$A/mc^2 = \int_0^\beta \frac{\beta d\beta}{(-\beta^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1$. Работа идет на сообщение телу кинетической энергии $E_k = m c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)$. Далее $E_k + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = E$ – полная энергия

свободно движущегося тела. Если тело покоится $\beta = 0$, то энергия покоя

$$E_0 = mc^2. \text{ В движении } E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

3.11. Функция Гамильтона свободно движущегося тела.

Функция Гамильтона H выражает энергию тела E , выраженную через импульс тела $\mathbf{p}$. Связь между $\mathbf{p}$ и E найдём, преобразовав временную компоненту 4-вектора импульса. Это тот случай, когда тело покоится в системе K' :

$p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}} = i \frac{E}{c}$. Теперь запишем p_i^2 в виде: $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = -m^2 c^2$, где

$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \mathbf{p}^2$, а $p_4^2 = -E^2 / c^2$, или $E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4$, откуда релятивистская функция Гамильтона для свободной частицы $H = \sqrt{(c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4)}$ – уравнение Дирака. Для покоящейся частицы $E_0 = \pm mc^2$. Положительные значения энергии покоя относятся к *частице*, а отрицательные – к *античастице*.

Для фотона $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, где $E = h\nu$, $p = h\nu/c$. Подставляя E и p в формулу Дирака, имеем: $(h\nu)^2 = (h\nu/c)^2 c^2 + m^2 c^4$, откуда $m_{\text{фотона}} = 0$. Фотон – безмассовая частица.

Понятия пространства и времени в физике имеют фундаментальное значение. В основе ньютоновской физики лежит математическое изобретение понятия евклидова пространства и абсолютного времени. Однако теперь уже понятно, что отождествление физических пространства и времени с евклидовым пространством и абсолютным временем можно делать только приближенно и приемлемо не во всех случаях жизни.

Таким образом, базой, на которой была построена специальная теория относительности (СТО), было открытие конечной скорости света Олафом Рёмером в 1675г. по наблюдениям затмения ближайшего спутника Юпитера. Следующее после Рёмера было важное открытие Джемсом Брадлеем в 1728г. абберрации. Брайлей нашел, что положение звезды γ Дракона меняется в течение года и что это изменение не является результатом параллакса, но обусловлено движением Земли по орбите и конечной скоростью света. И ещё одно из величайших открытий, о котором мы говорили выше, - эффект Доплера. В 1842г. Христиан Доплер теоретически показал, что цвет света должен зависеть от относительной скорости движения наблюдателя и источника.

Рассмотрим ещё некоторые задачи СТО.

3.12. Относительность одновременности событий.

Рассмотрим два события (зажигание лампочек), одновременные в ИСО К.

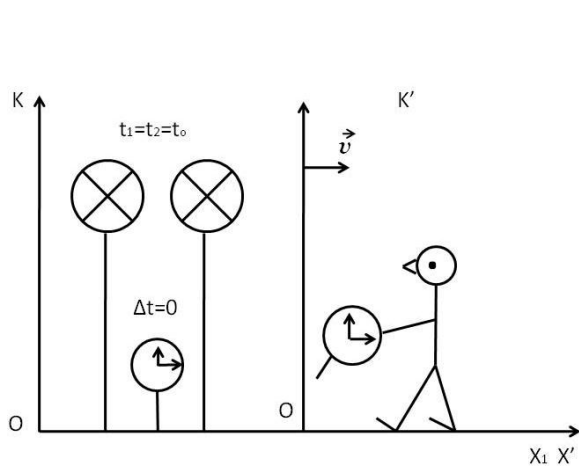


Рис. 3.1

С К' имеем:

$$t'_1 = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$t'_2 = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{-\frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 3.6.$$

Таким образом, события, одновременные в К, не будут одновременными в К'. Понятие одновременности теряет смысл, если не указана СО, в которой события одновременны, а это означает, что нет

единого для всех точек пространства абсолютного времени.

3.13. Относительность длин в различных ИСО.

Пусть длина линейки $x'_2 - x'_1 = l_0$ относительно системы К', в которой она покоится. Определим длину линейки в системе К, по отношению к которой К' движется со скоростью $\vec{V}$.

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

При измерении длина линейки максимальна в той СО, в которой она покоится.

3.14. Длительность события в различных СО. Парадокс часов.

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с системой, называется ее собственным временем. В этой СО (K') $ds = cdt'$. Пусть в СО K' в точке с координатой x' в момент времени t'_1

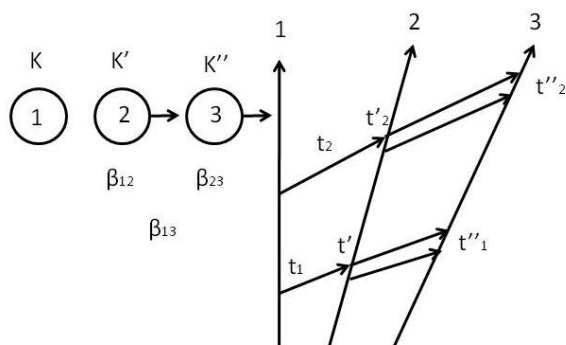


Рис. 3.2

загорается лампочка, а в момент t'_2 - гаснет, так что длительность горения $\Delta t' = t'_2 - t'_1$.

Вычислим длительность этого события в системе K . Собственное время, отмечаемое движущимся наблюдателем, всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени, отмечаемый неподвижным наблюдателем.

$$c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \Rightarrow dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Полученное соотношение было проверено Айвсом в 1938 г. по изменению частоты спектральных линий (вследствие эффекта Доплера) атомов Не, двигавшихся со скоростью $1,8 \cdot 10^6$ м/с. Для рассмотрения «парадокса часов» («парадокса близнецов») применим метод коэффициентов k . вначале получим некоторые полезные соотношения. Пусть имеем три коллинеарных наблюдателя: 1, 2, 3. Наблюдатель 1 покоится, 2-й движется по отношению к нему со скоростью β_{12} (в единицах c), а 3-й – со скоростью β_{23} по отношению ко 2-му. Коэффициенты k для них соответственно будут: k_{12}, k_{23}, k_{13} . Требуется найти соотношение между коэффициентами k . Имеем: $t_2 - t_1 = \Delta t$, $t'_2 - t'_1 = k_{12} \Delta t$, $t''_2 - t''_1 = k_{23}(t'_2 - t'_1)$ или $t''_2 - t''_1 = k_{12} k_{23} \Delta t$, или $t''_2 - t''_1 = k_{13} \Delta t$, откуда $k_{13} = k_{12} k_{23}$. Следовательно, мы пришли к простому результату: коэффициенты k просто перемножаются (если выразить коэффициенты k через относительные скорости, то получим релятивистскую формулу сложения скоростей, но об этом далее).

Рассмотрим случай, когда 1-й и 3-й наблюдатели покоятся. Тогда $\beta_{13} = 0$, $k_{13} = 1$ и $k_{12} k_{23} = 1$, откуда $k_{12} = 1/k_{23}$ и $\beta_{12} = -\beta_{23}$:

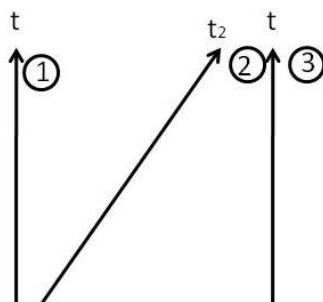


Рис. 3.3

1) Наблюдатель 2 удаляется от наблюдателя 1 с такой же относительной скоростью, с которой он приближается к наблюдателю 3.

2) Если для связи взаимно удаляющихся наблюдателей применяется коэффициент k , то для сближающихся применяется $1/k$.

В качестве примера можно привести эффект Доплера в оптике: $\lambda = cT$, $T = kT' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} T'$ и

$T_{c\sigma} = T' / k = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} T'$. Таким образом, спектр излучения удаляющегося источника смещается в красную область, а приближающегося - в фиолетовую. По

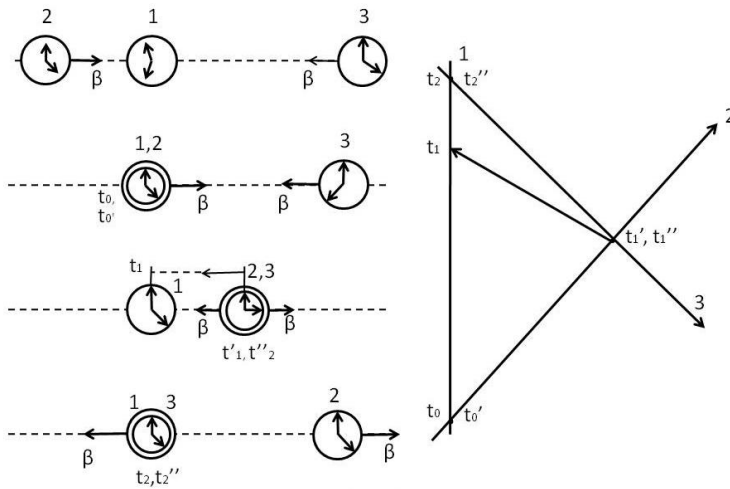


Рис. 3.4

«красному смещению» спектральных линий далеких галактик судят о скорости их разбегании.

Теперь займемся «парадоксом часов». Снова рассматриваем трех коллинеарных наблюдателей 1, 2 и 3. Пусть скорости наблюдателей 2 и 3 относительно 1 равны по величине, но противоположны по направлению: $|\beta_{12}| = |\beta_{13}|$. Поэтому, если для связи 1 и 2 следует применять коэффициент k , то для

связи 1 и 3 – коэффициент $1/k$.

Сверка часов и отсчеты времени делаются в моменты встречи 1 и 2 наблюдателей (t_0 и t'_0), 2 и 3 (t'_1 и t''_1), - о чем посылается радиоимпульс 1-му, 3 и 1 (t_2 и t''_2). По часам неподвижного наблюдателя 1 с момента встречи со 2-м наблюдателем до встречи с 3-м прошло время

$$t_2 - t_0 = \Delta t \Rightarrow \Delta t = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) = k\Delta t' + \Delta t' \frac{1}{k} = (k + \frac{1}{k})\Delta t'.$$

По часам движущегося наблюдателя 2 от момента встречи с 1-м до встречи с 3-м прошло время $t'_1 - t'_0 = \Delta t'$, а по часам наблюдателя 3 от встречи со 2-м до встречи с 1-м прошло такое же время $t''_2 - t''_1 = \Delta t'$ вследствие равенства их скоростей по модулю $|\beta_{12}| = |\beta_{13}|$. Всего по часам движущихся наблюдателей прошло время $2\Delta t'$. Сравним это время с

показаниями часов неподвижного наблюдателя. т.к.

$k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2 > 0$, то $(k + \frac{1}{k}) > 2$ и, следовательно, по часам неподвижного наблюдателя пройдет больше времени, чем по часам движущихся.

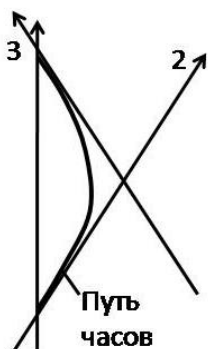


Рис. 3.5

Возникает вопрос: «Откуда берется такая асимметрия в измерениях при условиях, которые кажутся совершенно симметричными? Нельзя ли выбрать СО так, чтобы наблюдатель 1 двигался, а 2 и 3 покоились? Ведь тогда неравенство изменится на обратное». Нет, нельзя. Можно выбрать СО так, что будет покоиться 2 наблюдатель, а 1 и 3 –

двигаться, или 3 – покоится, а 1 и 2 движутся, - всегда будет получен один и тот же результат: время по часам неподвижного наблюдателя больше времени, показанного движущимися часами. Однако нельзя добиться того, чтобы одновременно покоились и 2, и 3 в какой-либо СО, потому что и 2, и 3 обладают

относительной скоростью. Таким образом, один временной интервал (самый короткий) всегда получается в результате совместных измерений, произведенных двумя инерциальными наблюдателями; другой же является измерением одного наблюдателя. Следовательно, никакой симметрии в этих измерениях нет.

Рассмотрим, что будет, если пользоваться одними часами: в момент, когда второй наблюдатель поравняется с первым, последний перебрасывает ему одни из своих часов, затем второй перебрасывает их третьему, а тот при встрече вновь возвращает их первому для сверки (вся эта процедура эквивалентна отправке одного из близнецов в космический полет, и затем его возвращению и сравнению с возрастом брата). Будут ли часы показывать одинаковое время? Нет. Часы наблюдателя 1 все время находятся в ИСО. Передаваемые часы испытывают ускорение. Следовательно, эти часы оказываются в НИСО. Чем круче изгибается кривая, описывающая путь часов, тем меньше время, за которое передаваемые часы изменяют свою скорость и тем больше испытываемое часами ускорение. Принцип относительности никогда не утверждал, что неинерциальное движение эквивалентно инерциальному. Одинаковые часы, независимо от их конструкции, будут идти одинаково во всех ИСО, согласно принципу относительности. Конкретная конструкция приборов для отсчета времени ничем не ограничивается. Можно воспользоваться атомными часами, пружинными, сменой поколений кроликов, β -радиоактивным распадом и т.п.

Но если мы хотим знать, как ведут себя те или иные часы в процессе ускорения, ответ можно получить лишь в том случае, если мы кое-что знаем об устройстве часов. Если, например, наше устройство отсчитывает поколения кроликов, а ускорение настолько велико, что все кролики погибают, то выбранный нами прибор для отсчета времени просто перестает работать. Обычные и противоударные часы по-разному ведут себя при одном и том же ускорении. Известны часы, способные вынести очень большие ускорения, например радиоактивные ядра. Но и они не могут пережить слишком большие ускорения (например, столкновения с частицами высоких энергий). Значит, для любого устройства, отсчитывающего время, - от кроликов до радиоактивных ядер - есть предельное значение ускорения, при котором устройство разрушается. А где-то чуть ниже этого предельного значения (где именно, зависит от конструкции часов) находится граничное значение ускорения, выше которого часы уже идут неверно. Однако, откуда же известно, правильно идут часы или нет? Из принципа относительности вытекает, что в ИСО все часы идут одинаково хорошо. Поэтому можно утверждать следующее: если на диаграмме есть искривленный участок пути (а это свидетельствовало, что имело место ускорение), то в любой момент времени движения с ускорением можно указать инерциально движущегося наблюдателя, перемещающегося по касательной к траектории истинного движения с мгновенной скоростью фактического движения. Теперь можно принять за правильно идущие часы те, которые в течение совместного с инерциальным наблюдателем движения идут так же, как и часы той же конструкции инерциального наблюдателя. Это обычный геометрический способ спрямления: когда мы измеряем длину дуги, то определяем ее как сумму длин прямолинейных отрезков, которыми мы

аппроксимировали кривую. Та же процедура используется для измерения времени.

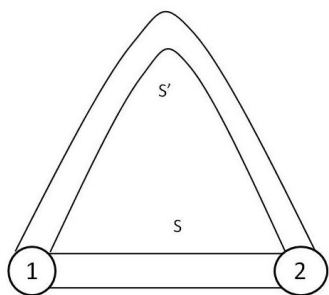


Рис. 3.6

Нередко задают вопрос: почему на отсчете времени часами инерциального и неинерциального наблюдателей сказывается то обстоятельство, что часы неинерциального наблюдателя ускорились? Ведь всегда можно сделать так, чтобы ускорение происходило в течение очень короткого времени. Однако в этих словах не больше здравого смысла, чем в следующем рассуждении. Проведем на карте две дороги, соединяющие два города (1 и 2). Дорога S – кратчайшая, потому что она прямая. Если следовать

аргументам сомневающимся в том, что ускорение влияет на ход часов, нужно было сказать так: дорога S' по своей длине лишь немного отличается от дороги S, потому что она «практически все время тоже прямая». Понятна ошибка в рассуждениях? Дорога S' намного длиннее S не потому, что длина искривленной части велика, а потому, что весь путь искривлен в целом. И часы, испытавшие ускорение, показывают меньшее время, чем часы, находившиеся у инерциального наблюдателя, не потому, что они большее или меньшее время ускорились, а потому, что при движении часов имело место ускорение вообще.

Лекция 4. Понятие об общей теории относительности (ОТО). Принцип эквивалентности. Астрофизика.

Закон тяготения Ньютона $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm\vec{r}}{r^3}$ не может быть непосредственно перенесен в СТО, поскольку в последней всякое взаимодействие может распространяться лишь с конечной скоростью, не превышающей скорости света в пустоте. Между тем, согласно приведенному уравнению, при изменении положения одного из тел мгновенно меняется сила, действующая на второе тело. Для построения релятивистской теории тяготения оказался существенным «принцип эквивалентности», устанавливающий аналогию между движением тел в гравитационном поле и свободным движением тел, наблюдаемым в ИСО. Согласно принципу эквивалентности инертной и гравитационной масс отношение гравитационной массы M_{gp} (гравитационный заряд), определяющей силу, действующую на тело в гравитационном поле напряженности $\vec{g}$ ($\vec{F} = \vec{g}m_{gp}$), к инертной массе M_u , связывающей силу $\vec{F}$ и величину вызываемого ею ускорения $\vec{a}$ ($\vec{F} = \vec{a}m_u$), не зависит от свойств и состава тела. Поэтому ускорение пробного тела в гравитационном поле определяется только напряженностью поля в точке, где тело находится: $\vec{a} = \vec{g} \cdot \frac{M_{gp}}{M_u}$ и при $M_{gp} = M_u$ $\vec{a} = \vec{g}$.

В 1915 г. при построении ОТО Эйнштейн обратил внимание на то обстоятельство, что 1-й закон Ньютона, при помощи которого введено представление об ИСО, нельзя проверить экспериментально. Действительно, для проверки 1-го закона Ньютона о том, что тело на которое не действуют внешние силы, движется равномерно и прямолинейно, необходимо убедиться в отсутствии

сил. Можно последовательно избавиться от сил связи, сил трения, электрического и магнитного полей и т.п., но только не от сил тяготения. И вот здесь Эйнштейн говорит: раз мы не можем избавиться от тяготения, будем считать, что тяготение и инерция – это одно и то же. Ведь и то, и другое действует на тела одинаково; силы, обусловленные обоими явлениями, пропорциональны массам тел. Соответственно этому можно переформулировать первый закон Ньютона, подразделив его на две части: существует некоторое стандартное движение тел, характеризующееся тем, что когда движение тел соответствует этому стандарту, на них не действуют никакие силы; вторая часть ньютоновской формулировки утверждает, что такое стандартное движение представляет собой движение по прямой линии с постоянной скоростью. Эйнштейн предложил опустить вторую часть. Таким образом стандартное движение происходит вследствие инерции и тяготения. Только в том случае, если тело отклоняется от такого движения – свободного падения, – можно говорить о действии силы; такая сила есть уже нечто, что смещает тела с их стандартного пути, и поэтому это уже не тяготение. Тяготение – это вовсе не сила; тяготение и инерция совместно составляют фон стандартного движения. Иначе, гравитация и инерция образуют рельсы, по которым движется тело в отсутствие сил. В системе отсчета связанной с падающим свободно лифтом, с ИСЗ или с космической лабораторией, движущейся по инерции в солнечной системе, все законы физики выглядят одинаково. Тем самым осуществимы новые стандартные (инерциальные) СО – свободно движущиеся (по инерции или под действием только силы тяготения). Такие СО В.А. Фок назвал локально-инерциальными (ограниченными в пространстве и во времени).

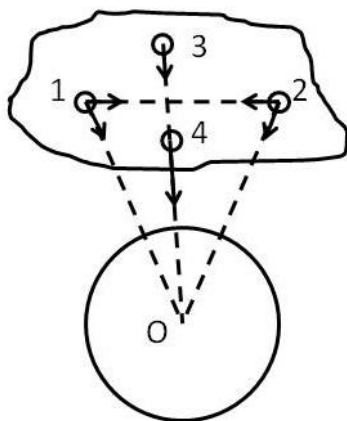


Рис. 4.1

Если гравитационное поле неоднородно, то исключить его путем перехода к падающей СО сразу во всем пространстве или в конечной, но не очень малой области не удастся. Действительно, рассмотрим, например, относительное движение в гравитационном поле Земли двух частиц, расположенных на расстоянии l друг от друга и падающих по радиусу к ее центру. При этом частицы 1 и 2 сближаются, ускорение их относительно сближения равно $\gamma \frac{Ml}{r^3}$. Частицы 3 и 4 удаляются друг от друга с относительным ускорением $2\gamma \frac{Ml}{r^3}$. Это означает, что при движении протяженного тела в неоднородном поле в нем возникают так называемые приливные силы, стремящиеся его деформировать. Относительное

приливное ускорение пары точек тела пропорционально расстоянию между этими точками и зависит от их взаимного расположения. Тензорный коэффициент пропорциональности характеризует степень неоднородности гравитационного поля и носит название тензора кривизны пространства-времени. Изучение относительного ускорения соседних частиц теперь служит для описания гравитационного поля что и может быть непосредственно осуществлено в

релятивистской форме. Более того, форма релятивистской теории гравитации теперь установлена: она должна быть такой, чтобы гравитация позволяла воспроизводить те же эффекты, что и инерция, поскольку они рассматриваются как единое свойство.

Поскольку гравитационное взаимодействие универсально и не существует «нейтральных по отношению к нему тел, то оказывается невозможным в чисто гравитационных экспериментах измерить напряженность гравитационного поля. Подобные эксперименты позволяют определить только относительные ускорения, т.е. кривизну пространства-времени. П.-В. является плоским, если его кривизна всюду обращается в нуль. В случае, если кривизна не равна нулю, метрика не может быть плоской.

Согласно Эйнштейну, кривизна П.-В. пропорциональна плотности энергии – импульса вещества, порождающего гравитационное поле. Соответствующие уравнения, позволяющие определить метрику по заданному распределению вещества и тем самым восстановить геометрию П.-В., носят название уравнений Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi}{c^4} T_{ik}, \quad 4.1$$

где T_{ik} - тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле), $R = g^{ik} R_{ik}$ - скалярная (инвариантная) величина, называемая кривизной П.-В., R_{ik} - тензор кривизны, выражаемый через частные производные метрического тензора g_{ik} по координатам П.-В.

В пределе, когда гравитационное поле слабое ($\varphi \ll c^2$) и движение источника нерелятивистское, уравнения Эйнштейна сводятся к обычному уравнению гравитационного потенциала (уравнению Пуассона или уравнению Лапласа) в теории Ньютона. Тем самым предсказания теории Эйнштейна для слабых гравитационных полей носят характер малых поправок $\approx \frac{\varphi}{c^2}$ к известным результатам теории Ньютона. Именно эти поправки подвергаются экспериментальной проверке. Результаты всех наблюдений и экспериментов по проверке ОТО, включая такие, как измерение красного смещения и запаздывания световых сигналов в гравитационном поле, измерение сдвига перигелия Меркурия и отклонение лучей света Солнцем, подтверждают эту теорию в области слабого поля, допуская отклонение от нее не более нескольких процентов.

Наиболее радикально отличаются предсказания теории Эйнштейна от ньютоновской теории гравитации в случае, когда гравитационное поле нельзя считать слабым. Качественно новым в этом случае является предсказание ОТО возможности нетривиальных глобальных свойств П.-В. это касается прежде всего космологии, когда рассматриваются области пространства и интервалы времени порядка радиуса кривизны П.-В.

В качестве примера рассмотрим движение пробного тела и света в вакууме и сильном поле тяготения, создаваемого сферическим телом (звездой). Решение уравнения Эйнштейна для такого поля (решение Шварцшильда) определяет геометрические свойства «линеек» и «темпы работы механизма часов» вблизи тела, создающего поле. Оказывается, что это поле всегда постоянно (даже, если

вещество центрального тела совершает радиальные движения, оставаясь сферически симметричным) и зависит только от полной энергии тела.

Выражение для четырехмерного интервала в поле Шварцшильда имеет вид:

$$dS^2 = -(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + (1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r})c^2 dt^2, \quad 4.2$$

где $M = E/c^2$. В выражении для dS^2 содержатся все сведения о гравитационном поле. Уточним, как пользоваться этим выражением для физических выводов. Первые три слагаемые в сумме дают взятый с обратным знаком квадрат расстояния между бесконечно близкими точками dl^2 , записанный в сферической системе координат. Неподвижный наблюдатель, находящийся вблизи массивного тела, может измерять расстояния в малой окрестности обычным способом, вводя декартовы координаты. В этих координатах $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Если выбрать $dz = r \cdot d\theta$, а $dy = r \cdot \sin \theta d\varphi$, то вне поля тяготения в евклидовом пространстве $dx = dr$. Вблизи массивного тела, в поле Шварцшильда, как видно из уравнения

$$dx = (1 - \frac{2\gamma M}{rc^2})^{-1/2} dr. \quad 4.3$$

Перед dr стоит множитель, отличный от единицы, что отражает факт неевклидовости геометрии пространства. Последнее слагаемое – помноженный на c^2 квадрат промежутка времени τ , текущего в данной точке:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}} \Delta t. \quad 4.4$$

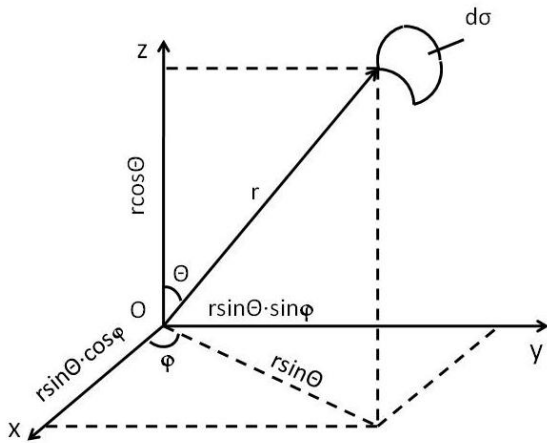


Рис. 4.2

Вдали от тела при $r \rightarrow \infty$ $\Delta\tau = \Delta t$. Чем ближе точка наблюдения к телу, создающему поле, тем медленнее идут часы, т.е. данному промежутку времени на бесконечности соответствует все меньший промежуток времени $\Delta\tau$ (при этом одновременность событий устанавливается передачей световых сигналов). При $r \rightarrow \frac{2\gamma M}{c^2}$ $\Delta\tau \rightarrow 0$.

Найдем силу тяготения F , действующую в поле Шварцшильда на пробное тело массой m , скорость которого невелика ($v \ll c$). Эта сила, очевидно, равна

$$F = m \frac{d^2 l}{d\tau^2}. \text{ Ускорение свободного падения } \frac{d^2 l}{d\tau^2} \text{ для пробного тела записывается в виде: } \frac{d^2 l}{d\tau^2} = -\frac{\gamma M}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}}} \text{ и, следовательно, сила тяготения } F = -\gamma \frac{Mm}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}}}. \quad 4.5$$

Видно, что при $r = r_g = \frac{2\gamma M}{c^2}$ сила тяготения обращается в бесконечность. Эта особенность свидетельствует, что центральное тело, если оно статическое, не может иметь радиус меньше r_g . Используемая выше неподвижная недеформируемая сферическая система координат применима также только при $r < r_g$. Этот критический радиус r_g носит название гравитационного, а сферу

радиуса r_g называют сферой Шварцшильда. Заметим, что нестатическое тело может иметь размеры меньше гравитационного радиуса.

На большом по сравнению с r_g расстоянии поле Шварцшильда есть обычное поле тяготения ньютоновской теории. Расчеты показывают, что гравитационный радиус Солнца 2,96 км, Земли – 0,886 см. радиусы Земли и Солнца много больше их гравитационных радиусов. Следовательно, вне Солнца, Земли и других звезд и планет гравитационное поле с огромной точностью есть поле Ньютона. Внутри вещества решение Шварцшильда неприменимо.

Посмотрим теперь, как будут распространяться лучи света, движущиеся по радиусу в сферическом поле тяготения. Поскольку наблюдатель может ввести координаты, в которых $ds = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, то используя принцип постоянства (локального) скорости света, измеряемой локальным наблюдателем ($v_{света} = c$), получаем уравнение движения частицы с нулевой массой (кванта) $ds = 0$. Таким образом, при $\varphi = const$ и $\theta = const$ имеем: $\frac{dr}{dt} = c(1 - \frac{2\gamma M}{rc^2})$. 4.6

Заметим, что в вакууме при $r \rightarrow r_g$ $\frac{dr}{dt} \rightarrow 0$. Это, очевидно вовсе не означает, что скорость света стремится к нулю. Скорость, измеряемая находящимся рядом наблюдателем, есть не $\frac{dr}{dt}$, а $\frac{dx}{d\tau}$, где dx и $d\tau$ - бесконечно малое физическое расстояние и время соответственно. Для света всегда $\frac{dx}{d\tau} = c$.

Для далекого наблюдателя скорость луча света по его часам есть $\frac{dx}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}}$, т.е. с его точки зрения луч вблизи массы движется медленнее. На этом основан предложенный в конце 1964 г. новый способ проверки ОТО.

Предлагается производить радиолокационные наблюдения прохождения Меркурия за Солнцем. В ньютоновской теории изменение времени распространения радиосигналов туда и обратно определяется только изменением расстояния между Землей и Меркурием и графически изображается сплошной линией на рисунке. Согласно ОТО, уменьшение для далекого наблюдателя скорости сигналов вблизи Солнца приведет к добавочному изменению времени прохождения радиолуча (изменяется также и траектория луча на $11''75''$ вблизи края солнечного диска, однако увеличение времени прохождения радиосигнала благодаря изменению величины траектории есть величина более высокого порядка малости, чем рассматриваемый эффект), что вызовет появление добавочного подъема на графике изменения времени прохождения радиолокационного сигнала. Величина добавочного изменения в оптимальном случае порядка $2 \cdot 10^{-4} c$ и в принципе может быть измерена. Правда, здесь необходимо учитывать еще изменение скорости радиосигналов в плазме солнечной короны. Для исключения этого эффекта можно проводить измерения на разных частотах.

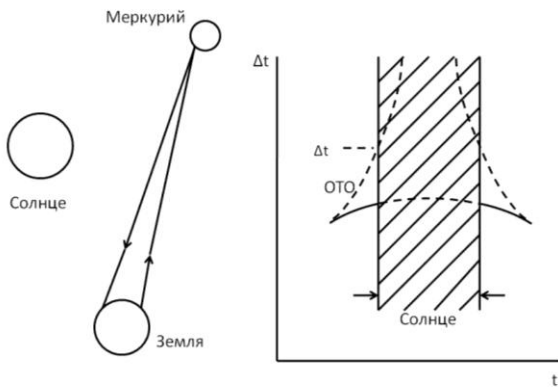


Рис. 4.3

Поскольку для далекого наблюдателя все процессы в гравитационном поле протекают с замедлением в $\sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}}$ раз, то, если гравитирующее тело испускает свет с частотой ω_0 , то частота света, воспринимаемая наблюдателем, определяется по формуле: $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}}$ или

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad 4.7$$

Частота сигнала уменьшается при выходе его из поля тяготения и увеличивается при движении в обратном направлении. Соответственно этому меняется и энергия кванта $E = \hbar\omega$. Описанное явление называется гравитационным красным смещением. Для наблюдателя, «находящегося на поверхности звезды», спектр испускания атомов выглядит точно так же, как и в лаборатории на Земле. Однако спектр тех же атомов звезды, наблюдаемый с Земли, сдвинут благодаря описанному явлению в красную сторону.

Если звезда удаляется от Земли со скоростью v , то изменение частоты происходит в результате действия гравитационного поля и эффекта Доплера:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{rc^2}} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad \text{или} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad 4.8$$

Для Солнца гравитационное красное смещение составляет величину $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -2,1 \cdot 10^{-16}$. В земных условиях это явление наблюдалось при помощи эффекта Мёссбауэра, позволившего наблюдать разность частот γ -лучей, испускаемых многими радиоактивными изотопами ($Ir^{191}, W^{182}, Sn^{119}, Fe^{57}$) на разных высотах над уровнем моря. Точность метода Мессбауэра позволяет обнаружить разность частот на высотах, отличающихся на 10 – 20 м, несмотря на ничтожное изменение потенциала Φ в этих пределах. Наблюдения подтвердили предсказанный эффект; опыт показал, что $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \cdot 10^{-16}$.

Полная энергия тела в постоянном гравитационном поле выражается, как

$$E = \frac{m c^2 \sqrt{1 - 2\gamma M / rc^2}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad 4.9$$

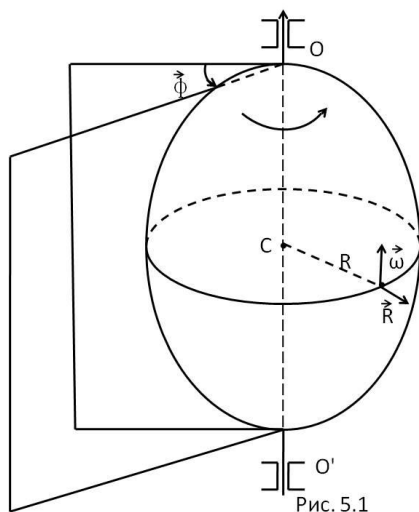
Предсказание существования гравитационных волн является, пожалуй, одним из самых важных предсказаний ОТО. Так, при лобовом падении друг на друга масс с нулевым моментом общее количество высвеченной энергии таких волн составит $\Delta\varepsilon = 0,02 \frac{c^2 m^2 M^2}{(m + M)^3}$, что равно нескольким процентам энергии покоя, т.е. значительно больше, чем энергия ядерных реакций.

Роль сил тяготения возрастает с увеличением масштаба изучаемых явлений, так что в астрономических явлениях эти силы будут определяющими. Причем

полная масса тел в изучаемой области пространства должна возрасти, грубо говоря, пропорционально ее объему, т.е. как куб радиуса. Поэтому по мере увеличения этой области гравитационный радиус в конце концов станет порядка ее размеров. Это означает, что в космологии, т.е. для описания больших участков Вселенной, необходимо пользоваться ОТО.

Простейшее предположение, которое разумно положить в основу космологической модели, - предположение об однородном в среднем распределении вещества в пространстве. В таком предположении уравнения тяготения были точно решены А.А. Фридманом. Существует два различных типа решений: открытая модель и закрытая модель. Характерная особенность закрытой модели – замкнутость пространства «самого в себе». Иными словами, хотя трехмерное пространство, разумеется, не имеет границ, его объем оказывается конечным. Самое важное свойство обеих моделей состоит в их нестационарности. Расстояние между любыми слабо взаимодействующими телами изменяется со временем, причем относительная скорость этого движения тем больше, чем больше расстояние между телами (по закону Хаббла $V = H \cdot R$, где $H = 75 - 100 \text{ с}^{-1}$ от Мпс, т.е. галактики, находящиеся на расстоянии 1 мегапарсека, удаляются друг от друга на 75 - 100 км за секунду, т.е. на 2 – 3 млрд. км в год). Это должно привести к появлению доплеровского смещения линий в спектрах далеких галактик. Такое явление действительно наблюдается; линии смещены в сторону меньших частот (красное смещение), что соответствует расширению пространства. Как и должно быть, смещение линий возрастает с увеличением расстояния до источника, причем относительное смещение частоты, в полном соответствии с теорией, одинаково для всех частот, включая радиодиапазон. Для удаленных объектов смещение достигает примерно 50%. Поскольку наблюдаемый в настоящее время спектр излучения произошёл значительно раньше, то, следовательно, скорость относительного «разбегания» галактик ранее была больше. Нет никаких сомнений, что данное ОТО объяснение правильно. Это триумф теории.

Зная из опытов зависимость величины красного смещения от расстояния и среднюю плотность массы в пространстве, можно установить, какая из космологических моделей – открытая или закрытая – ближе к действительности. Точность экспериментальных данных еще недостаточна для такого выбора.



Лекция 5. Вращательное движение твердого тела.

Тело, совершающее вращательное движение вокруг некоторой оси вращения, имеет одну степень свободы, и его положение относительно данной СО определяется углом поворота φ между неподвижной плоскостью и плоскостью, жестко связанной с телом, проведенной через ось вращения OO'' . Вращательное движение задается уравнением $\varphi(t)$.

5.1. Элементы кинематики вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейными скоростями и ускорениями точек вращающегося тела.

Далее будут рассматриваться, если не будет специально оговорено, случаи движения тел со скоростями $v \ll c$ (не механика СТО).

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела являются угловая скорость и угловое ускорение. Угловой скоростью вращения твердого тела (т.т.) называется вектор $\vec{\omega}$, численно равный первой производной от угла поворота по времени, $\omega = d\varphi/dt$ и $\vec{\omega} = \mathbf{n} d\varphi/dt$ ($\vec{\omega} = \mathbf{n}\dot{\varphi}$), и направленный вдоль оси вращения таким образом, чтобы из его конца вращение тела было видно происходящим против часовой стрелки.

Линейная скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки M вращающегося тела определяется по формуле Эйлера: $\mathbf{v} = [\vec{\omega}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{r}$ – радиус – вектор, проведенный в точку M из произвольной точки оси вращения. Численное значение v линейной скорости точки M прямо пропорционально её расстоянию R от оси вращения:

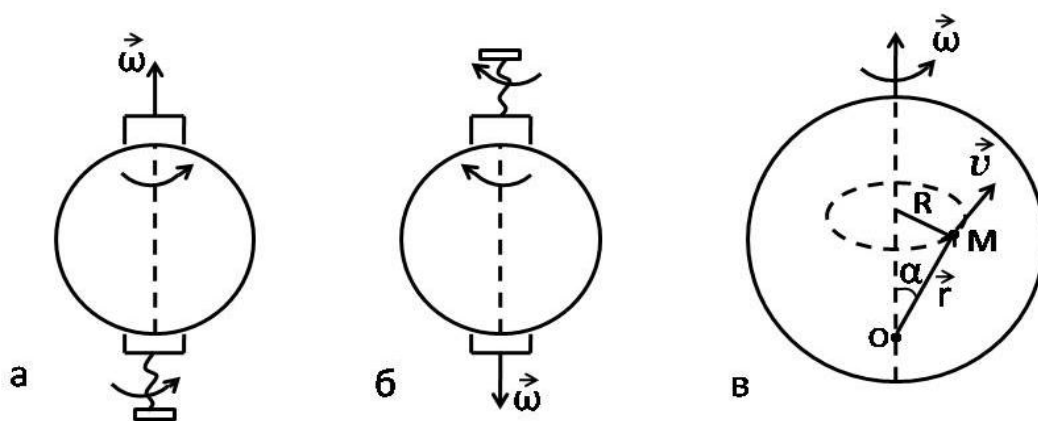


Рис. 5.2

$v = \omega r \sin \alpha = \omega R$. Проекции v_x, v_y, v_z вектора $\mathbf{v}$ прямоугольной декартовой системы координат связаны с проекциями на эти оси векторов $\vec{\omega}$ и $\mathbf{r}$ следующими формулами: $v_x = \omega_y z - \omega_z y, v_y = \omega_z x - \omega_x z, v_z = \omega_x y - \omega_y x$. 5.1

Периодом обращения T тела называется время, в течение которого тело поворачивается вокруг неподвижной оси вращения на угол $\varphi = 2\pi$: $\int_0^T \omega dt = 2\pi$.

Угловым ускорением называют вектор $\vec{\epsilon}$: $\vec{\epsilon} = d\vec{\omega}/dt = \mathbf{n} d^2\varphi/dt^2$.

Линейное ускорение произвольной точки вращающегося тела равно:

$$\mathbf{a} = d/dt[\vec{\omega}, \mathbf{r}] = \vec{\epsilon} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega}, \mathbf{r}]. \quad 5.2$$

Вектор $\mathbf{a}_{\text{вр}} = \vec{\epsilon} \times \mathbf{r}$, направленный перпендикулярно к плоскости, образуемой векторами $\vec{\epsilon}$ и $\mathbf{r}$, называют вращательным ускорением. Вектор $\mathbf{a}_{\text{ц}} = \vec{\omega} \times [\vec{\omega}, \mathbf{r}]$, перпендикулярный к оси вращения и направленный от выбранной точки к оси, называют осестремительным ускорением. В случае вращения тела вокруг неподвижной оси векторы $\mathbf{a}_{\text{вр}}$ и $\mathbf{a}_{\text{ц}}$ тождественны соответственно касательному (тангенциальному) и нормальному ускорениям:

$$\mathbf{a}_{вр} = \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_{ц} = \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}. \quad 5.3$$

Таким образом, скорости и ускорения всех точек тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

Теория вращательного движения имеет важные применения в небесной механике, внешней баллистике, теории гироскопа, кинематике и динамике механизмов и машин и при решении многих конкретных задач в технике.

Лекция 6. Динамика вращательного движения. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса и его связь с изотропностью пространства.

Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения.

Мы видели, что закон сохранения импульса следует из свойств однородности пространства по отношению к замкнутой системе частиц. Наряду с однородностью, пространство обладает также и свойством изотропности – все направления в нем эквивалентны. Поэтому свойства замкнутой системы не должны меняться при повороте всей системы на произвольный угол вокруг произвольной оси.

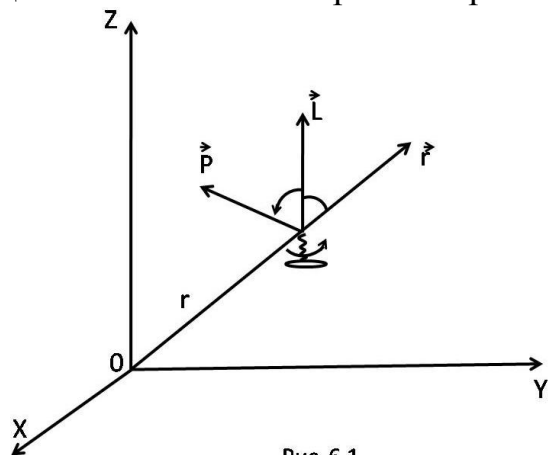


Рис. 6.1

Следствием этого условия является сохранение для системы некоторой векторной величины. Именно, существует вектор, характеризующий каждую материальную точку, такой, что сумма всех этих векторов для всех материальных точек, входящих в замкнутую систему, не зависит от времени. Этот вектор называется вектором момента импульса.

Моментом импульса м.т. относительно некоторой точки О (полюса) называется вектор $\mathbf{L}_i$, равный векторному произведению радиус – вектора $\mathbf{r}_i$ точки, проведенного из полюса, на её импульс $\mathbf{p}_i$: $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$. Моментом импульса или кинетическим моментом системы материальных точек относительно полюса называется вектор $\mathbf{L}$, равный геометрической сумме моментов импульсов относительно того же полюса всех N точек системы: $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$.

Моменты импульсов Солнца и планет Солнечной системы относительно центра Солнца, выраженные в единицах 10^{41} кг·м²/с, равны: Солнца – 6; суммарный Меркурия, Венеры, Земли, Марса – 0,5; Юпитера – 190, Сатурна – 78, Урана – 17, Нептуна – 26, Плутона – 1,4.

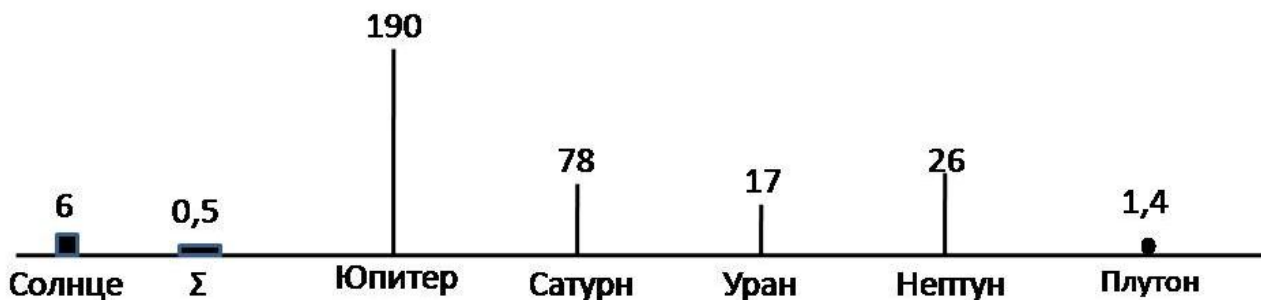


Рис. 6.2

Урана – 17, Нептуна – 26, Плутона – 1,4. Внутренний момент импульса элементарных частиц, выраженный в единицах $\hbar = 1,0542 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, равен: для фотона ± 1 , для электрона, нейтрино, мюона, нуклонов – $\pm \frac{1}{2}$, для пионов, каонов – 0.

Таким образом, если система изолированная, то $\mathbf{L} = \text{const}$, если нет, то $\mathbf{L}$ изменяется. Рассмотрим изменение момента импульса м.т. во времени: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, $d\mathbf{L}/dt = d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$. Первое слагаемое равно нулю, т.к. $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$. Тогда

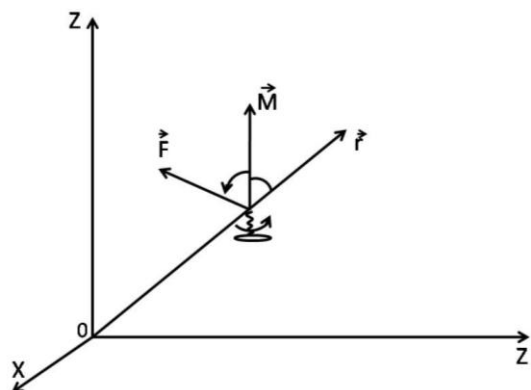


Рис. 6.3

$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Моментом $\mathbf{M}_i$ силы относительно точки O называют векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}_i$, проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы $\mathbf{F}_i$: $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$. Проекциями M_{ix} , M_{iy} , M_{iz} вектора $\mathbf{M}$ на оси прямоугольной декартовой СК с центром в точке O связаны с проекциями на эти оси векторов $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{F}_i$ соотношениями:

$M_{ix} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy}$, $M_{iy} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz}$, $M_{iz} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$, где x_i , y_i , z_i – координаты точки приложения силы $\mathbf{F}_i$. Моментом силы

относительно оси называется скалярная величина, равная проекции на данную ось вектора момента силы относительно к.-л. точки той же оси.

Уравнение динамики вращательного движения м.т. имеет вид: $d\mathbf{L}_i/dt = \mathbf{M}_i$.

Для системы материальных точек – $\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{L}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i$. Здесь $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$ называется

главным моментом системы N сил. Для замкнутой системы $\mathbf{L} = \text{const}$ и $\sum_i \mathbf{M}_i = 0$. Для любой частицы, движущейся в центральном поле $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, т.к. $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$ в любой точке траектории и $\mathbf{L} = \text{const}$.

6.1. Кинетическая энергия вращающегося тела. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Штейнера – Гюйгенса. Момент импульса абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Кинетическая энергия тела относительно покоящегося центра масс называется энергией вращательного движения твердого тела.

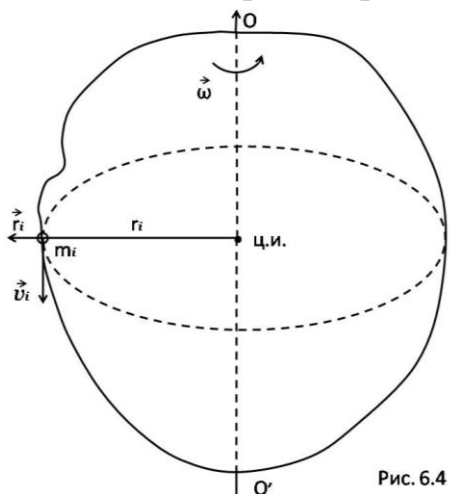


Рис. 6.4

Для нахождения кинетической энергии вращательного движения твердого тела разобьём его на N элементов объёмов ΔV_i , массы которых m_i , причём, линейные размеры $\Delta V_i \ll r_i$. Такие элементы объёмов можно считать материальными точками, кинетическая энергия каждой из которых определяется по формуле $E_{ki} = \frac{1}{2}(m_i v_i^2)$. Кинетическая энергия вращающегося тела будет равна: $E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_i v_i^2)$. Поскольку $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ и $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_i$, то получаем $v = \omega r$. Окончательно имеем: $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N (m_i r_i^2)$. Таким образом, для вычисления

кинетической энергии вращающегося твердого тела необходимо уметь находить сумму $\sum_i^N (m_i r_i^2)$. Величину $I_0 = \sum_i^N (m_i r_i^2)$ называют моментом инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела. Он является мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси. Тогда кинетическая энергия тела относительно оси, проходящей через центр инерции, запишется: $E_{k0} = \frac{1}{2}(I_0 \omega^2)$.

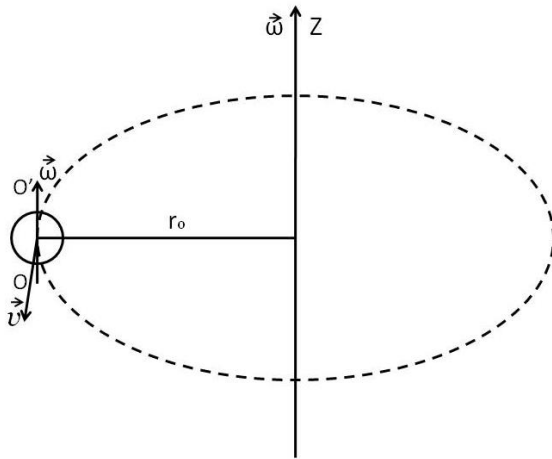


Рис. 6.5

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг оси Z, не проходящей через центр инерции тела, с угловой скоростью ω и с такой же угловой скоростью вращающееся вокруг оси OO^1 , проходящей через центр инерции тела, параллельной оси Z. Его кинетическая энергия будет равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений: $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$. Учитывая, что $v = \omega r$, получаем $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 (I_0 + m r_0^2)$, или $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$. Здесь $I = I_0 + m r_0^2$ – момент инерции тела относительно оси, не проходящей через центр инерции тела. Его значение

определяется теоремой Штейнера – Гюйгенса: момент инерции I тела относительно произвольной оси Z равен сумме моментов инерции I_0 этого тела относительно оси OO^1 , параллельной оси Z и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния r_0^2 между осями Z и OO^1 .

Найдем момент импульса $\mathbf{L}$ твёрдого тела: $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$, т.к. $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, имеем: $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]$. Воспользовавшись векторным тождеством: $\mathbf{A} \times [\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, для нашего случая получим:

$\mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega})$, или, учитывая, что $\mathbf{r}_i \perp \boldsymbol{\omega}$, имеем $\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ и $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$.

Уравнение вращательного движения твёрдого тела примет вид:

$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{M}$, или $I \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}$. При $\mathbf{M}=0$ $I \boldsymbol{\omega} = \text{const}$ – закон сохранения вращательного момента.

6.1.1. Вычисление момента инерции тела относительно оси вращения.

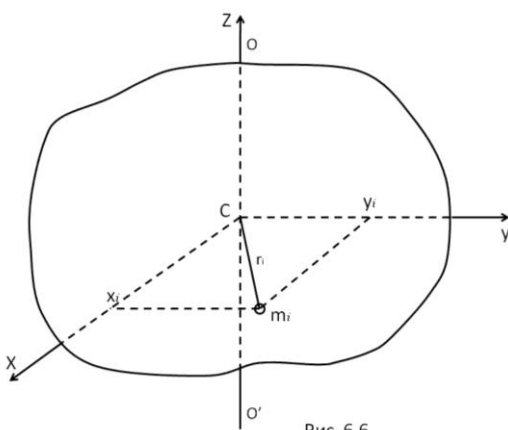


Рис. 6.6

Для вычисления момента инерции тела относительно оси вращения OO^1 применяется общая формула: $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ или в декартовой системе координат момент инерции относительно оси z (ось вращения совпадает с осью z) равен: $I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$ или, переходя к пределу, имеем: $I = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dV$ и

$I = \iiint (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$. В качестве примера рассмотрим формулы вычисления моментов инерции тел правильной геометрической формы. Во всех случаях ось вращения совпадает с осью z :

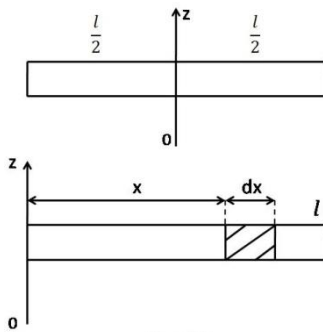


Рис.6.7

1) Момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси z , проходящей через центр инерции стержня: $I = 2 \int_0^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx$ и

$$I = 1/12 \cdot ml^2. \text{ Если ось } z \text{ проходит через край стержня, то}$$

$$I = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = 1/3 ml^2.$$

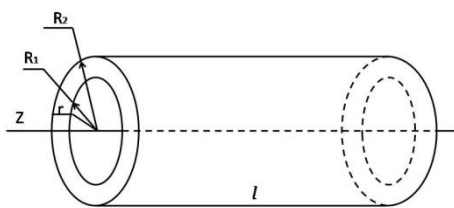


Рис. 6.8

2) Момент инерции полого цилиндра с радиусами внутренней и внешней поверхностей соответственно R_1 и R_2 относительно оси z , совпадающей с осью цилиндра: $I = \int r^2 dm$, $m = \pi l (R_2^2 - R_1^2)$ и $dm = 2\pi l r dr$, откуда

$$I = 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{1}{2} \pi l (R_2^4 - R_1^4) \text{ и}$$

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2).$$

3) Для сплошного цилиндра $R_1=0$, $R_2=R$ и $I = \frac{1}{2} m R^2$. Для тонкостенного полого цилиндра $R_1 \approx R_2 = R$ и $I = m R^2$.



Рис. 6.9

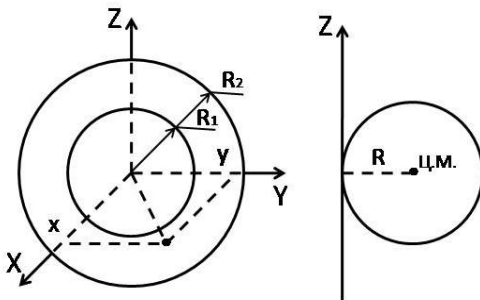


Рис. 6.10

4) Момент инерции полого шара с радиусами внутренней и внешней поверхностей R_1 и R_2 относительно оси, проходящей через центр шара:

$$I = \int (x^2 + y^2) dm, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \text{ Для шара } \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = r^2/3. \text{ Поэтому можно принять } x^2 + y^2 = 2/3 r^2 \text{ и } I = 2/3 \int r^2 dm. m = 4/3 \pi r^3 \text{ и } dm = 4\pi r^2 dr. I = 8/3 \pi \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr = 8/15 \pi (R_2^5 - R_1^5)$$

$$\text{и } I = (2/5) m (R_2^5 - R_1^5) / (R_2^3 - R_1^3). \text{ Для сплошного}$$

шара $R_1=0$, $R_2=R$ и $I=2/5 m R^2$. Для тонкостенной сферы $R_1 \approx R_2 = R$ и $I = (2/3) m R^2$.

5) Момент инерции сплошного шара относительно оси z , касательной к поверхности шара: $I = I_0 + m R^2 = (2/5) m R^2 + m R^2$ и $I = (7/5) m R^2$.

6.4. Гироскоп.

Гироскопом называют массивное симметричное твёрдое тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии – оси гироскопа. Ось гироскопа является одной из главных осей инерции. Поэтому, если она не поворачивается в пространстве, момент импульса гироскопа равен $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$, где I – момент инерции гироскопа относительно оси гироскопа. Такой гироскоп называют уравновешенным: $\mathbf{M} = 0$ и $I \boldsymbol{\omega} = \text{const}$.

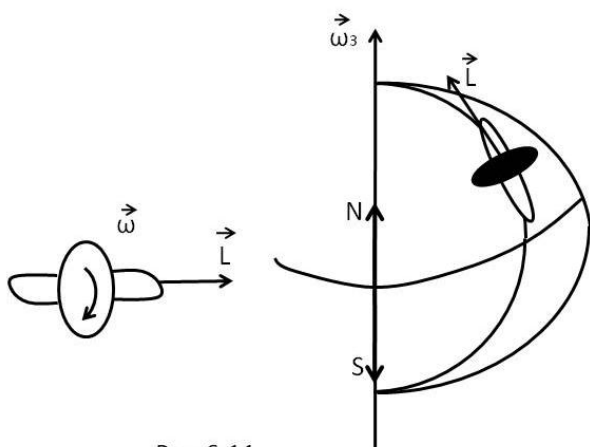


Рис.6.11

Явление сохранения момента импульса уравновешенного гироскопа положено в основу прибора, называемого гироскопическим компасом. Гироскоп представляет собой гироскоп, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Ось гироскопа устанавливается в такое положение, при котором угол между осью и осью вращения Земли будет минимальным. В этом положении ось гироскопа оказывается в меридиональном

направлении, и, следовательно, указывает точно на север. Гироскоп выгодно отличается от компаса с магнитной стрелкой тем, что в его показания нет необходимости вносить поправки на магнитное склонение и компенсировать воздействия на стрелку расположенных вблизи неё ферромагнитных предметов.

Под действием момента сил $\mathbf{M}$ момент импульса получит за время dt приращение $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$, перпендикулярное к вектору $\mathbf{L}$. При таком повороте оси гироскопа угол α не изменяется. Вертикальная плоскость, проходящая через ось гироскопа, повернется при этом на угол $d\phi$. На такой же угол повернётся в горизонтальной плоскости вектор $\mathbf{M}$.

В результате через промежуток времени dt будет иметь место такое же взаимное расположение векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$, как и в начальный момент времени. В

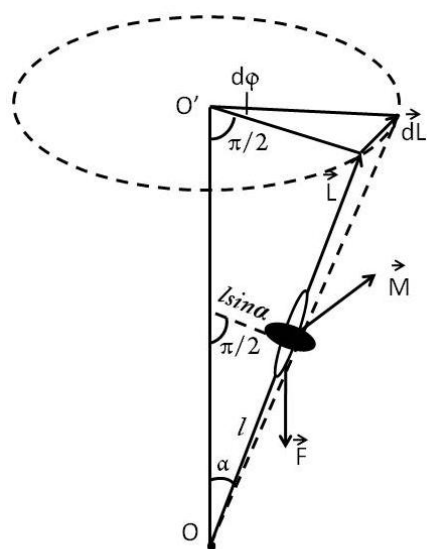


Рис.6.12

итоге ось гироскопа будет поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O , с угловой скоростью Ω , описывая конус с углом раствора, равным 2α (при $\alpha = \pi/2$ конус вырождается в плоскость). Вектор $\mathbf{L}$ при этом будет изменяться только по направлению, по величине он будет постоянным, т.к. элементарные приращения $d\mathbf{L}$ всё время будут перпендикулярны к вектору $\mathbf{L}$. Такое движение гироскопа называют прецессией, а гироскоп – неуравновешенным. Угловую скорость прецессии Ω можно найти из соотношения: $\mathbf{M} = \Omega \times \mathbf{L}$.

Вектор $\mathbf{M}_r = -\mathbf{M}$ называют гироскопическим моментом. Он приложен к внешнему телу, вызывающему прецессию гироскопа с угловой

скоростью Ω .

Неуравновешенные гироскопы, как и уравновешенные, нашли широкое техническое применение. Например, в геодезии при определении координат на местности, для управления полётом ракеты и др. Изучение прецессии вектора момента импульса заряженных и других частиц (спина), например, электрона, в магнитном поле представляет собой интересную задачу, имеющую важное

значение для атомной физики, для физики твёрдого тела, для химии, биологии и геологии.

Лекция 7. Поле центральных сил. Силовая и энергетическая характеристики поля.

Анализ фундаментальных сил (сил тяготения или электрических сил) связан с интересным и очень важным понятием – полем. Напомним, что в ньютоновской механике всегда постулировалось, что всё состоит из тел, взаимодействующих по конкретному закону. Из принципа относительности Галилея непосредственно следует, что взаимодействие тел распространяется в пространстве мгновенно, т.е. если изменить состояние одного тела, то уже вслед за этим можно обнаружить хотя бы очень слабое во взаимодействующих с ним телах, как бы далеко они ни находились. Ввиду того, что скорость распространения взаимодействий тел принимается бесконечно большой, говорят, что в классической механике Ньютона имеет место дальное действие. В 19 и начале 20 вв постепенно становилась ясной необходимость рассмотрения новых видов причинных факторов, т.к. для формулирования законов электромагнетизма ньютоновская схема взаимодействия тел не является достаточной. Однако оказалось возможным рассматривать эту проблему, вводя дополнительно к телам новую совокупность сущностей – полей.

Чтобы пояснить мысль на примере, скажем, электрического взаимодействия, примем, что в точке А находится заряд Q , а в точке В – заряд q . Сила, действующая между зарядами, равна F . Чтобы проанализировать эту силу при помощи понятия поля, мы говорим, что заряд Q в точке А создаёт в точке В такие «условия», при которых заряд q , попадая в В, «ощущает» действие силы: $F = qE$. Здесь величина E есть «условие», созданное зарядом Q (безотносительно к тому, есть ли там заряд q или нет), а F – ответ, отклик заряда q на E . Здесь E – вектор напряжённости электрического поля. Аналогично можно ввести энергетическую характеристику поля – потенциал, так что потенциальная энергия U , которой будет обладать заряд q в точке В, равен: $U = q\phi$. Связь между E и ϕ аналогична связи между F и U : $E = -\nabla\phi$. В случае тяготения можно сделать то же самое: $F = mg$, $U = m\phi$ и $g = -\nabla\phi$.

Реальность поля проявляется физически в том, что оно почти не зависит от объектов, создающих его. Можно колебать заряд и влияние этого (поле) скажется на расстоянии. Если колебания прекратятся, в поле всё равно будут ощущаться следы этих колебаний, потому что взаимодействие двух частиц не происходит мгновенно. Поэтому следует говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.

Обобщая сказанное, можно определить физическое поле, как особую форму материи; системы с бесконечным числом степеней свободы. К физическим полям относятся гравитационные и электромагнитные поля, поле ядерных сил, а также волновые (квантованные) поля, соответствующие различным частицам, например, электронно-позитронное поле. Источниками физического поля являются частицы, например, для электромагнитного поля – электрически заряженные частицы.

Создаваемые частицами поля переносят (с конечной скоростью) взаимодействие между соответствующими частицами. В квантовой теории взаимодействие обусловлено обменом квантами поля между частицами.

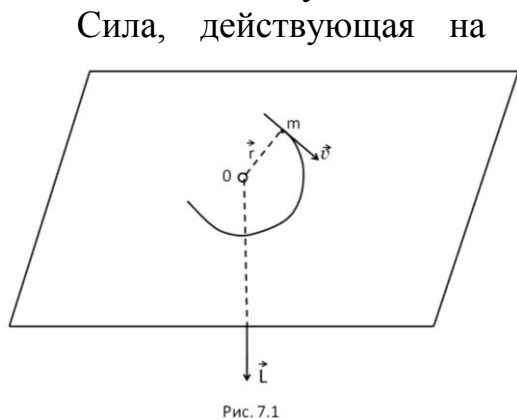


Рис. 7.1

Сила, действующая на движущуюся материальную точку или тело, называется центральной, если её линия действия всё время проходит через одну и ту же неподвижную точку O, называемую центром силы: $\mathbf{F} = F\mathbf{r}/r$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра O в точку приложения силы $\mathbf{F}$; F – проекция силы на направление радиус – вектора.



Рис.7.2

Примерами центральных сил являются силы тяготения между материальными точками и силы электростатического взаимодействия между точечными электростатическими зарядами, для которых сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Поля, определяемые таким характером действующих в них сил, называют центральными.

7.1. Движение тел под действием центральных сил.

Закон Ньютона для силы всемирного тяготения, действующей между двумя материальными точками с массами M и m имеет вид: $\mathbf{F} = -G(Mm/r^3)\mathbf{r}$, где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н м}^2 \text{ кг}^{-2}$.

Ввиду $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ имеем $U(r) = -GMm/r$. Потенциальная энергия системы материальных точек равна сумме потенциальных энергий $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N$ всех пар взаимодействующих тел:

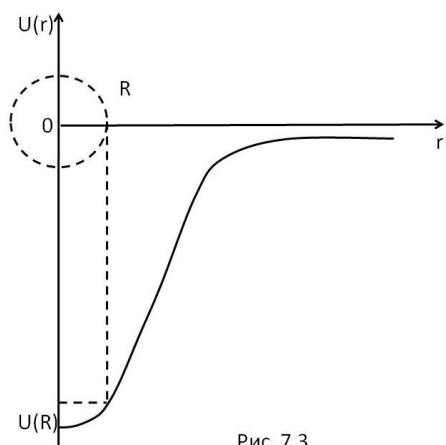


Рис. 7.3

$$U = -G/2 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j / r_{ij}, \text{ где } i \neq j.$$

В качестве примера оценим гравитационную энергию Галактики, пренебрегая собственной гравитационной энергией отдельных звёзд. Для этого предположим, что Галактика состоит из $N \approx 1,6 \cdot 10^{11}$ звёзд, каждая из которых имеет примерно массу Солнца $M \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ и что расстояние между любыми двумя звёздами $R \approx 10^{20} \text{ м}$. Тогда полученное уравнение сводится к следующему соотношению:

$$U \approx -\frac{1}{2}G(N-1)NM^2/R = -4 \cdot 10^{51} \text{ Дж}.$$

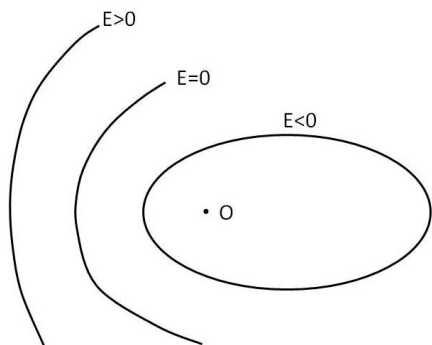


Рис. 7.4

Полная механическая энергия частицы, движущейся в поле центральной силы, обратно пропорциональна квадрату расстояния, определяется выражением: $E = E_k + U$.

В гравитационном поле - $E = \frac{1}{2}mv^2 - GMm/r$.

Для тела, движущегося под действием силы тяготения, в любой точке траектории $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$, $\mathbf{M} = 0$ и

$L = \text{const.}$ Анализ зависимости $U(r)$, E и L позволяет установить характер движения тела в гравитационном поле. При $E_1 < 0$ траекторией тела будет эллипс, при

$E_2 = 0$ – парабола и при $E_3 > 0$ – гипербола.

Движение планет солнечной системы подчиняется трём законам Кеплера:

Все планеты солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов орбиты.

Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, описывает равные площади за равные промежутки времени.

$$dS = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \rightarrow dS = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dt, \rightarrow dS/dt = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]/2m \rightarrow dS/dt = L/2m = \text{const.}$$

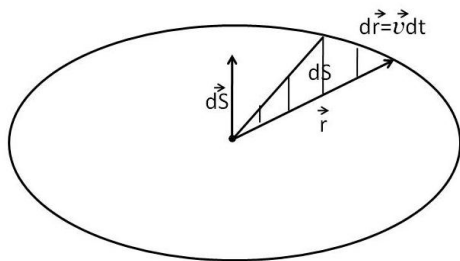


Рис. 7.5

Отсюда следует, что траектория планеты – плоская кривая.

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей эллипсов.

$$T = 2\pi r/v_1, \quad m v_1^2/r = G M m/r^2 \rightarrow v_{12} = G M/r \rightarrow T^2 = (4\pi^2/GM) r^3.$$

Для создания космических кораблей – искусственных спутников Земли (ИСЗ) и аппаратов, достигающих другие планеты Солнечной системы, необходимо достижение ими первой (v_1) и второй (v_2) космических скоростей. Впервые космическая скорость v_1 была достигнута 4 октября 1957 г. – 1-й успешный запуск ИСЗ (СССР). 2 января отправилась в полёт космическая ракета, которая вышла из сферы земного притяжения и стала первой искусственной планетой Солнечной системы (СССР). 12 апреля 1961г. Ю.А.Гагарин совершил первый полёт вокруг Земли и успешно приземлился.

Первая и вторая космические скорости легко рассчитываются из следующих соотношений:

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{r}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с, из}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G M m/r = 0 \text{ получаем } v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{r}} = \sqrt{2} v_1 = 11,2 \text{ км/с.}$$

Из приведенных уравнений следует один важный вывод, который будет использован нами далее. Полная энергия тела, движущегося вокруг другого под действием центральной силы притяжения, есть величина отрицательная и численно равна кинетической или половине потенциальной энергии.

Полная энергия тела, движущегося в центральном поле, равна сумме его кинетических поступательной и вращательной энергий и потенциальной энергии: $E = p^2 / 2m + L^2 / 2I + U$.

7.2. Теорема о вириале.

В теоретической механике был получен важный вывод: невозможно устойчивое равновесие системы материальных точек (м.т.), взаимодействующих по закону обратных квадратов (гравитационные и электромагнитные взаимодействия). Это означает, что в системе, где действуют только силы, величина которых обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами,

состояние с кинетической энергией, равной нулю, не может быть устойчивым. Этот вывод относится как к электронам в атоме, так и к атомам в звезде или к звёздам в галактике. Из него следует, что окружающая нас материя должна во всех своих формах состоять из движущихся тел и только в каком-то среднем, относительном смысле мы можем считать определённую её часть неподвижной.

Применение теоремы о вириале даёт возможность определить среднюю (за большой промежуток времени) величину кинетической энергии системы частиц, движущихся в ограниченной области пространства под влиянием сил, действующих по закону обратных квадратов.

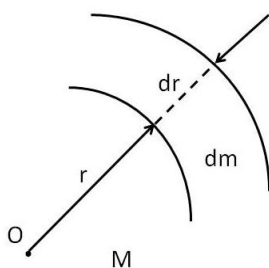
Мы уже показали, что средняя кинетическая энергия м.т., совершающей пространственно ограниченное движение под действием силы притяжения равна половине её средней потенциальной энергии с обратным знаком (теорема о вириале). Это не означает, что кинетическая и потенциальная энергии м.т. в любой момент должны быть связаны соотношением $\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$; утверждение теоремы относится только к средним значениям на длительные периоды времени. Та же теорема справедлива и для любого числа м.т., удерживаемых внутри некоторого ограниченного объёма взаимными силами притяжения, если даже не все массы этих точек одинаковы и если некоторые из сил являются силами отталкивания (например, в молекуле, или в кристалле, представляющих собой систему из положительно и отрицательно заряженных частиц). Таким образом, если частицы остаются неограниченно долго внутри некоторого ограниченного объёма, можно утверждать, что:

$$\langle \text{полная кинетическая энергия} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \text{полная потенциальная энергия} \rangle .$$

Из теоремы о вириале в её общем виде следует не только то, что м.т. должны иметь кинетическую энергию, но и то, что кинетическая и потенциальная энергии такой системы всегда сравнимы по величине. Даже если часть м.т. в начальный момент не движется, силы притяжения сближают эти точки друг с другом, увеличивая значение как потенциальной, так и кинетической энергии до тех пор, пока средняя кинетическая энергия не станет равной с обратным знаком половине средней потенциальной энергии.

Теорема о вириале служит ключом к пониманию строения любого вещества, в котором силы сцепления обусловлены взаимодействием частиц по закону обратных квадратов. Среднее расстояние между атомами или атомными ядрами в типичной звезде, по-видимому, всегда больше 10^{-12} м, т.к. плотность такой звезды не превышает 10^{-4} кг/м³. Такие расстояния слишком велики для сильных ядерных взаимодействий, эффективных в пределах 10^{-15} м; поэтому только силы гравитационного притяжения соединяют звезду в единое целое.

В качестве примера применения теоремы о вириале оценим величину средней температуры внутри Солнца. Собственная гравитационная энергия U_C однородной звезды массы M_C и радиуса R_C может быть найдена следующим образом:



$$dU = -G M' dm / r, \quad M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho,$$

Рис.7.6

$$dm = 4\pi r^2 \rho dm \rightarrow U = -1/3 G (4\pi \rho)^2 \int_0^R r^4 dr \rightarrow U = -3/5 G (4/3 \pi \rho R^3) 1/R \text{ и окончательно}$$

имеем $U_C = -3/5 G M_C^2/R_C$. Средняя кинетическая энергия одного атома пропорциональна абсолютной температуре T : $E_k = 3/2 kT$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Суммарная кинетическая энергия всех атомов звезды равна $3/2 NkT$. Откуда, используя теорему о вириале, получаем:

$3/2 NkT = -3/10 G M_C^2/R_C \rightarrow \langle T \rangle = GM_C^2/5R_C Nk \rightarrow \langle T \rangle = GM_C m/5R_C k$, где $m = M_C/N = 3 \cdot 10^{-27}$ кг – средняя масса одного атома (гелий, водород), $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R_C = 7 \cdot 10^8$ м. Тогда $\langle T \rangle = 10^7$ К. Эта температура соответствует энергии порядка 1 кэВ, достаточной для полной ионизации атомов с малым атомным номером. Но если атомы водорода и гелия ионизированы, то общее число частиц надо увеличить, прибавив к нему число свободных электронов. В этом случае средняя температура окажется в 2 – 3 раза ниже полученной. Тем не менее результат нашей оценки близок к тому, что получается при более обоснованных расчётах средней температуры ядра Солнца.

Второй пример. Сжатие галактик.

Предположим, что какая-то туманность состоит из частиц, между каждой парой которых действует сила тяготения, и что эта система обладает значительной кинетической энергией, как-то распределённой между частицами. При каких условиях туманность будет расширяться или сжиматься или сохранять те же средние размеры?

Из закона сохранения энергии имеем: $E = E_k + U = \text{const.}$ Характер изменения размеров туманности зависит от соотношения начальных абсолютных величин положительной кинетической энергии E_k и всегда отрицательной потенциальной энергии U .

А) Если $E_k > |U|$, то $E > 0$ и туманность (или по крайней мере часть её) должна неограниченно расширяться. Эта туманность расширяется, потому что в противном случае при данном исходном положении нарушалась бы теорема о вириале.

Б) Если $E_k < |U|$, то $E < 0$ и совокупность частиц, образующих туманность, не может неограниченно расширяться. При бесконечно больших расстояниях между телами потенциальная энергия обращается в нуль и вся энергия системы становится кинетической, т.е. положительной. Если в начальный момент полная энергия была отрицательной, то потенциальная энергия не может обратиться в нуль сразу для всех тел, входящих в систему, хотя, в зависимости от начальных условий, некоторые из них всё же могут удалиться на бесконечно большое расстояние. Следует ожидать, что такое скопление тел должно сохранять известную компактность, потому что для значений энергий, средних по времени, должна выполняться теорема о вириале.

Третий пример. Следствие потерь энергии на излучение.

Нагретые тела отдают энергию в форме электромагнитного излучения. При понижении температуры интенсивность излучения уменьшается, но не обращается в нуль, если не равна нулю абсолютная температура. Однако газовая туманность, соединяемая воедино силами гравитационного притяжения, не может

достигнуть нулевой температуры. В действительности, когда туманность излучает энергию, её температура даже возрастает.

Этот парадоксально звучащий вывод непосредственно следует из теоремы о вириале и из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. Итак имеем, $E = -\langle E_k \rangle$, $\langle E_k \rangle = 3/2 kTN \rightarrow T = -2/3 E/kN$. Изменение энергии на величину ΔE вызывает изменение температуры ΔT , равное $\Delta T = -2/3 \Delta E/kN$. Если ΔE отрицательно из-за потерь энергии на излучение, то ΔT должно быть положительным. Далее, согласно теореме о вириале, при уменьшении E должны возрасти величины $\langle E_k \rangle$ и $I < U > I$. Увеличение $I < U > I$ означает, что усиливается гравитационное взаимодействие частиц, а это может произойти только при сжатии туманности. По той же причине должна увеличиваться кинетическая энергия ИСЗ, когда из-за сопротивления атмосферы уменьшается высота его полёта над Землёй.

Если энергия затрачивается на излучение, то туманность постепенно сжимается и становится ещё более горячей, т.е. её средняя температура возрастает тем быстрее, чем быстрее она излучает энергию и при этом сжимается. В конце концов температура становится настолько высокой, что могут начаться ядерные реакции синтеза. Когда главным источником энергии становятся ядерные реакции, гравитационное сжатие звезды замедляется или совсем прекращается, потому что увеличение давления излучения противостоит дальнейшему сжатию звёздного вещества. Когда в результате термоядерного синтеза большая часть водорода Солнца превратится в гелий, опять начнётся сжатие и возобновится процесс постепенного повышения средней температуры внутри Солнца.

Лекция 8. Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции.

До сих пор мы рассматривали механическое движение тела (или системы тел) относительно ИСО. В качестве ИСО применялись неподвижная Земля, помещение лаборатории или далёкие звёзды. Во всех ИСО выполняются законы Ньютона. Определение характера движения тела по отношению к ИСО сводилось к нахождению его координат и импульса в любой момент времени по известному закону движения и заданным начальным и краевым условиям. Как известно, решение такой задачи о движении тела в ИСО выглядит наиболее просто. Однако, на практике очень часто возникает необходимость уметь решать задачи на определение характера движения тела по отношению к неинерциальным системам отсчёта (НИСО). Такие задачи возникают, например, при прокладке железнодорожного пути в меридиональном направлении, укреплении берегов (при установке на них различных сооружений) рек, строительстве плотин, аэро- и морской навигации и т.п. В этих случаях Землю более нельзя принимать в качестве ИСО. Необходимо учитывать её суточное вращение, а в некоторых задачах и обращение вокруг Солнца. В принципе, всегда можно найти ИСО (например, связанную со звёздами), по отношению к описывать и движение поездов по поверхности Земли, и движение ракет, ИСЗ, самолётов, кораблей и др. Однако, подчеркнём, практический интерес представляет описание движения

этих объектов именно по отношению к земной поверхности, т.е. по отношению к НИСО.

Ускорение СО, а также её вращение с угловой скоростью $\omega(t)$ ведут к глубоким изменениям в окончательном результате физических наблюдений по сравнению с такими же, выполненными в ИСО. Имеющий ускорение наблюдатель замечает появление новых сил. Их называют «силами инерции». Некоторые из них получили, кроме того, и особые имена (центробежная сила, сила Кориолиса). Введение сил инерции даёт возможность описывать движение тел в любых (как в ИСО, так и в НИСО) системах отсчёта с помощью одних и тех же уравнений движения. Однако следует отчётливо понимать, что силы инерции нельзя ставить в один ряд с такими силами, как упругие, гравитационные силы и силы трения, т.е. силами, обусловленными воздействием на тело со стороны других тел или полей. Силы инерции обусловлены свойствами той СО, в которой рассматриваются механические явления. В этом смысле их можно назвать *фиктивными силами*.

Итак, нашей задачей является установление закона преобразования векторов при переходе от ИСО к НИСО и установление закона движения тела в НИСО.

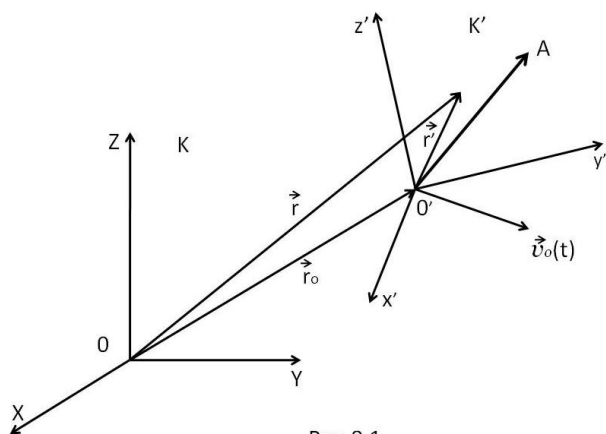


Рис.8.1

Пусть имеем ИСО K , которую условно считаем неподвижной, и НИСО K^* , которая движется относительно системы K со скоростью $v_0(t)$ вращается относительно некоторой оси с угловой скоростью $\omega(t)$. Выразим изменение со временем некоторого вектора $A(t)$, если $d_i A$ – изменение вектора A за время dt в системе K , dA – изменение того же вектора A в системе K^* , то можно записать: $d_i A = dA + v_{вр} dt$;

следовательно, $\frac{d_i \vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$, или $\dot{\vec{A}}_i = \dot{\vec{A}} + \vec{\omega} \times \vec{A}$. Это выражение справедливо для любого вектора. Таким образом, для описания изменения к.-л. вектора, заданного в СО K^* , в СО K необходимо применить к нему оператор:

$$\frac{d_i \dots}{dt} = \frac{d \dots}{dt} + \vec{\omega} \times \dots$$

Пусть положение м.т. в K^* задано радиус-вектором $\vec{r}^*$. Вычислим ускорение м.т. по отношению к СО K : $\ddot{\vec{r}}_i^* = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega} \right) \left(\vec{r}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}^* \right) = \ddot{\vec{r}}^* + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^* + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^* + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^*]$. Так как $\vec{r}^* = \vec{r} - \vec{r}_0$, то получим:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}^* + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^* + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^*] + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^*.$$

Принимая во внимание, что $m\ddot{\vec{r}}^* = \vec{F}$, получим основной закон динамики (уравнение движения) для НИСО в виде:

$$m\ddot{\vec{r}}^* = \vec{F} + \vec{F}_{уск} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{Кор}.$$

Мы видим, что в уравнение движения, кроме прежней равнодействующей силы $\vec{F}$, вошли три новые силы – «силы инерции». Первая сила $\vec{F}_{уск}$ обусловлена

ускоренным поступательным движением СО К*, вторая $\vec{F}_{цб}$ - центробежная сила, возникающая в результате вращения этой системы, и третья $-\vec{F}_{Кор}$, называемая силой Кориолиса, появляется как следствие относительной скорости м.т. в СО К*:

$$\vec{F}_{уск} = -m\ddot{\vec{r}}_0, \quad \vec{F}_{цб} = -m\vec{\omega} \times \vec{r}^* + \vec{\omega} \times [\vec{r}, \vec{r}^*], \quad \vec{F}_{Кор} = -2m[\vec{r}, \dot{\vec{r}}^*].$$

Если некоторое тело жёстко связано с СО К*, то наблюдатель в этой системе не обнаружит движения тела, а следовательно, и ускорения (ускорение будет равно нулю и при равномерном и прямолинейном движении тела в системе К*). Таким образом, сумма действующих на тело сил, сил связи и сил инерции $\vec{F} + \vec{F}_{уск} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{Кор} = 0$. Система находится в равновесии. Этот вывод составляет содержание *принципа Даламбера*. Если в некоторый момент времени к действующим на тело силам и силам связи присоединить все *силы инерции*, то тело будет находиться как бы в равновесии. Благодаря принципу Даламбера задачи динамики формально сводятся к статическим задачам (кинетостатический метод).

Рассмотрим теперь частные случаи движения тела в НИСО.

8.1. Силы инерции.

Пусть наблюдатель Н находится в ИСО К, а наблюдатель Н* - в НИСО К*, способной поступательно двигаться относительно системы К. Перед Н* на идеально гладкой поверхности стола ($\kappa_{тр}=0$) лежат тела различной массы и формы (шар, кубик и т.п.). Одно из тел прикреплено к стенке К* пружиной (коэффициент упругости k). Пусть теперь в результате воздействия Н система К* начала

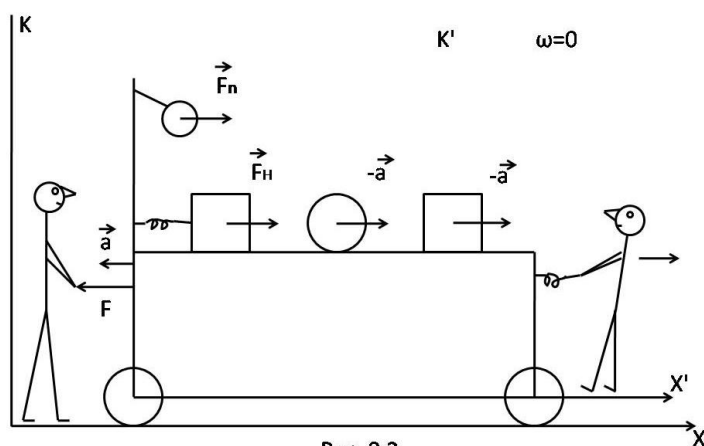


Рис. 8.2

двигаться по отношению к К с ускорением **a** влево. При этом все тела в К* приобретают относительно неё ускорение **-a** вправо. Закреплённые в К* тела действуют с силой **F_n** на связи, растягивают пружину на величину $x = -(ma) / k$. Теперь перед нами два возможных способа описания наблюдаемых явлений – с точки зрения наблюдателя Н и наблюдателя Н*.

С точки зрения наблюдателя Н в ИСО К:

Незакреплённые тела остаются в покое, т.к. в отсутствие трения никакая сила на них не действует. Закреплённые стол и тела движутся вместе с системой К* с ускорением **a** влево.

С точки зрения наблюдателя Н* в НИСО К*:

Незакреплённые тела движутся с ускорением **-a** (вправо). Следовательно, на них действуют силы, пропорциональные массам тел и их ускорению: **F = -ma**. Такая же сила растягивает пружину на величину $x = -(ma) / k$. Здесь при выборе знака «-» предполагается, что Н* знает об ускорении системы К* влево (знает, что имеет дело с *силой инерции*). В противном случае, он может предположить, что на

все тела системы K^* действует сила тяготения, направленная вправо, в результате чего все тела приобретают одинаковое ускорение вправо. В случае, если наблюдатель знает о своём ускоренном движении, он может определить ускорение системы по величине растяжения пружины. Приборы, действующие на таком принципе называют *акселерометрами*.

8.2. Центробежная сила.

Рассмотрим частный случай, когда $\omega = \text{const}$, $\dot{r}_0 = 0, \vec{v}^* = \dot{\vec{r}}^* = 0$, откуда сила

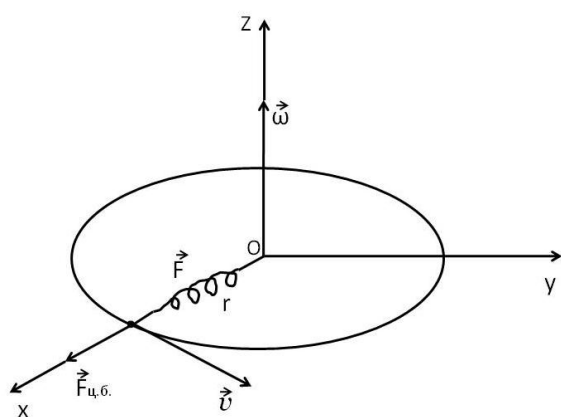


Рис. 8.3

$\vec{F}_{цб} = -m\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^*]$. Для наблюдателя Н, находящегося в покое (например, в точке О), уравнение движения по нормали имеет вид: $(mv^2) / r = F$ или $mr\omega^2 = F$, где F – сила натяжения пружины (центростремительная сила).

Для наблюдателя Н*, вращающегося вместе с системой, тело покоится. Это можно формально объяснить тем, что кроме силы натяжения пружины на тело действует *центробежная сила инерции*, направленная

вдоль радиуса от центра диска:

$$\vec{F} = -\vec{F}_{цб}, \quad \vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{r}.$$

Рассмотрим некоторые эффекты, связанные с суточным вращением Земли относительно системы «неподвижных» звёзд. Полный оборот Земля делает за 86164с. Следовательно, угловая скорость вращения Земли $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ рад/с. На всякое тело, покоящееся на поверхности Земли, действует центробежная сила, направленная от оси вращения Земли NS.

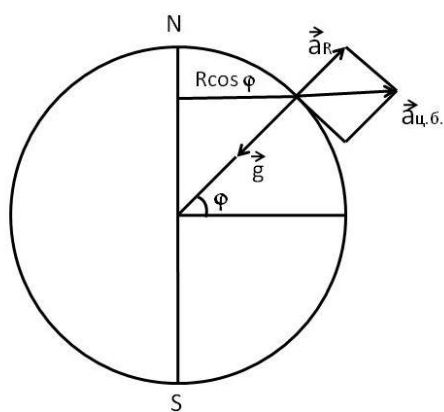


Рис. 8.4

Пусть тело находится под географической широтой φ . Тогда центробежное ускорение приблизительно равно

$a_{цб} = \omega^2 r = \omega^2 R \cos \varphi = 0,03 \cos^2 \varphi$ (м/с²) и ускорение свободного падения на широте φ несколько меньше, чем было бы только в результате действия силы тяготения:

$$g_\varphi = g_0 - 0,03 \cos^2 \varphi \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Однако, центробежная сила действует не только на тела, лежащие на поверхности Земли.

На самом деле каждая частица Земли испытывает центробежную силу, направленную наружу по радиусу круга широты. Совокупность всех этих сил создает упругую деформацию тела Земли. Земля слегка сплюснута: её полярная ось NS приблизительно на 1/300 короче диаметра экватора. Вследствие сплюснутости Земли зависимость ускорения падения от широты ещё больше вычисленной. Наблюдения привели к уравнению:

$g_\varphi = (9,832 - 0,052 \cos^2 \varphi)$ м/с². Так что часы с маятником на экваторе отстают от таких же часов на полюсе приблизительно на 3,5 мин за сутки.

Вышеупомянутое сплющивание примерно 1/300 имеет место для твёрдого тела Земли. Гораздо сильнее деформация её жидкой оболочки, океана, под действием центробежной силы. Но эта деформация никогда не наблюдается сама по себе. На неё налагается периодически изменяющееся в течение суток притяжение воды Солнцем и Луной. Наложение центробежных сил и сил тяготения даёт сложное явление прилива и отлива. То же самое относится и к нашей атмосфере, воздушному океану. Причём, на высоте воздушные приливные волны много выше, чем водяные на поверхности моря.

8.3. Сила Кориолиса.

$F_K = -2m\omega \times v^*$. Рассмотрим простой случай, когда $\omega \perp v^*$. Пусть тело массы m движется с начальной скоростью v^* от центра к краю платформы, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Если бы платформа не вращалась, то тело попало бы в точку P . В результате вращения платформы и инерции тела оно перемещалось бы так, как если бы на него действовала бы постоянная сила ($F = -2m\omega \times v^*$), и в результате попадает в точку P^* . Вычислим расстояние, на которое сместится тело под действием силы Кориолиса за время $t = R/v^*$:

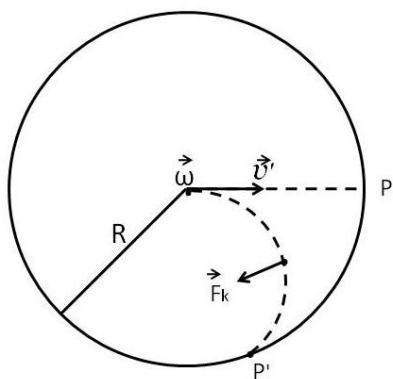


Рис. 8.5

$$PP^* = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} (2m\omega v^*/m)(R/v)^2 = \omega R^2/v^*.$$

Результаты измерений совпадают с проделанным расчётом.

Рассмотрим эффекты, связанные с суточным вращением Земли и перемещением тел по (или вблизи) поверхности Земли.

Пусть наблюдатель находится в пункте с географической широтой ϕ . НН

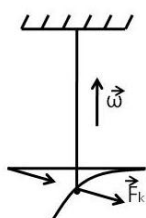
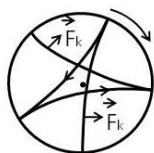
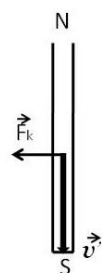
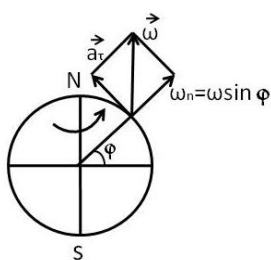


Рис. 8.6

обозначает его плоскость горизонта. В этом пункте угловая скорость вращения Земли ω раскладывается на две составляющие. Одна из них, параллельная радиусу Земли или отвесу, - вертикальная составляющая: $\omega_{\perp} = \omega \sin \phi$. Другая, параллельная горизонтальной плоскости, - горизонтальная составляющая: $\omega_{\tau} = \omega \cos \phi$. Обе составляющие угловой скорости сообщают движущимся телам кориолисовы ускорения. Так,

вертикальная составляющая в северном полушарии постоянно приводит к отклонению движущихся тел вправо. Наиболее известным примером является маятник Фуко, который пробегает постоянно искривляющуюся вправо розетку. Если смотреть из положения равновесия маятника, то крайние точки розетки

перемещаются за 1 час на угол $\alpha = (360^\circ/24)\sin\varphi$. Таким образом, наблюдения за вращением плоскости качаний маятника дают непосредственное доказательство вращения Земли вокруг своей оси.

Неодинаковое нагревание земной атмосферы в экваториальной и полярной зонах приводит к тому, что атмосферный воздух течёт из субтропических областей высокого давления в экваториальный пояс низкого давления. Этот поток в северном полушарии направлен с северо-востока на юго-запад. Таково происхождение северо-восточного пассата, столь важного для мореплавания и авиации.

Летающий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции. При выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу – в южном. При стрельбе вдоль меридиана на юг направления отклонения будут противоположными. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в направлении на запад, и поднимать его кверху, если выстрел произведен в восточном направлении.

Под действием горизонтальной составляющей угловой скорости падающие тела отклоняются к востоку от вертикали. Например, точка падения тела, брошенного с высоты 300м на широте 45° отклоняется приблизительно на 8см.

К числу важнейших применений силы Кориолиса относится гироскопический компас. На кораблях и самолётах его делают нечувствительным к бортовой и килевой качке, а также к ускорениям при разгоне, торможении и искривлении пути. Этого добиваются, монтируя три гироскопа, горизонтальные оси которых образуют между собой углы по 120° и с долгими периодами вполне затухающих прецессионных колебаний (в идеальном случае $T=84\text{мин}$). Но и самые безупречно сконструированные гироскопы всё же допускают погрешность, зависящую от направления и скорости движения. Причина: все корабли перемещаются по большому кругу земного шара. Поэтому во время пути они имеют угловую скорость ω_2 , которая векторно складывается с угловой скоростью вращения Земли ω_1 . Отсюда ось волчка устанавливается не в плоскости меридиана, но в плоскости, в которой находится результирующий вектор угловой скорости, составленной из ω_2 и ω_1 . Эта плоскость совпадает с меридиональной лишь в том случае, когда корабль идет вдоль экватора.

В заключение ещё раз подчеркнём, что силы инерции имеют смысл и могут быть введены только для наблюдателя, связанного с НИСО.

Лекция 9. Элементы механики жидкостей.

Параллельно с развитием механики частиц и твёрдых тел шло развитие механики сплошных сред. Газы, жидкости и твёрдые тела в механике сплошных сред рассматриваются как непрерывные.

Вместо набора координат и импульса частиц состояние системы характеризуется функциями координат и времени, описывающими распределение различных физических величин в пространстве: плотностью $\rho(\mathbf{r},t)$, давлением $p(\mathbf{r},t)$ и скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. Соответственно для решения гидродинамических задач следует задавать не конечное число начальных значений координат и импульсов

(или скоростей), а начальные и граничные условия для непрерывных функций координат и времени, характеризующих состояние среды.

Однако, несмотря на существенное изменение как физического смысла самих переменных, рассматриваемых в теории, так и вида уравнений, динамический характер законов в механике сплошных сред остаётся неизменным. Функции ρ , p , $\mathbf{v}$ однозначно определяют состояние системы в данный момент времени, а уравнения гидродинамики идеальной жидкости позволяют установить значение этих функций в любой последующий момент времени, если они известны в начальный момент. Однозначный характер зависимостей между физическими величинами, рассматриваемыми в теории, здесь налицо. А это, как указывалось выше, - основное свойство динамических законов.

В 19в начала развиваться гидродинамика неидеальной, вязкой жидкости. Дело в том, что внутри реальной движущейся жидкости (или газа) возникают силы трения, пренебречь которыми в общем случае нельзя. Одновременно между отдельными участками движущейся среды существует теплообмен. В результате этих процессов происходит диссипация энергии, не учитываемая в уравнениях идеальной жидкости. Механика сплошных сред перестаёт быть чистой механикой. При некоторых условиях процессы немеханической природы, тепловые процессы, могут стать существенными. Поэтому замкнутую систему уравнений, описывающую в принципе поведение сплошной среды в общем случае, нельзя построить на базе одной механики Ньютона. Лишь после создания теории тепла (термодинамики) такая система уравнений была построена.

Итак, *гидроаэромеханикой* называют раздел физики, в котором изучаются законы равновесия и движения жидкостей и газов, а также взаимодействие движущихся жидкостей и газов с омываемыми ими твёрдыми телами. В гидроаэромеханике отвлекаются от молекулярного строения жидкостей и газов, рассматривая их как сплошную среду, непрерывно распределённую в пространстве. *Гидроаэростатикой* называют отдел гидроаэромеханики, в котором рассматриваются условия и закономерности равновесия жидкости и газа под действием приложенных к ним сил. *Гидроаэродинамикой* называют отдел гидроаэромеханики, в котором изучаются законы движения жидкости и газа под действием приложенных к ним сил и их взаимодействия с твёрдыми телами.

Отличительной особенностью жидкостей и газов по сравнению с твёрдыми телами является их текучесть, т.е. малая сопротивляемость деформации сдвига. Различие между жидкостью и газом заключается лишь в характере зависимости их плотности от давления, т.е. в практической несжимаемости жидкостей и заметной сжимаемости газов.

В гидромеханике для капельных жидкостей и газов обычно пользуются единым термином «*жидкость*» (несжимаемая или сжимаемая). *Несжимаемой жидкостью* называют капельную жидкость или газ, зависимостью плотности которого от давления в рассматриваемой задаче можно пренебречь. *Сжимаемой жидкостью* называют газ, зависимостью плотности которого от давления в рассматриваемой задаче пренебречь нельзя. *Идеальной жидкостью* называют жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение. *Вязкой жидкостью* называют жидкость, для которой явлением внутреннего трения пренебрегать

нельзя. *Баротропной жидкостью* называют жидкость, плотность которой зависит только от давления.

9.1. Гидростатика.

Жидкость находится в покое, когда каждая составляющая её частица имеет скорость, равную нулю. В этом случае давление зависит только от положения

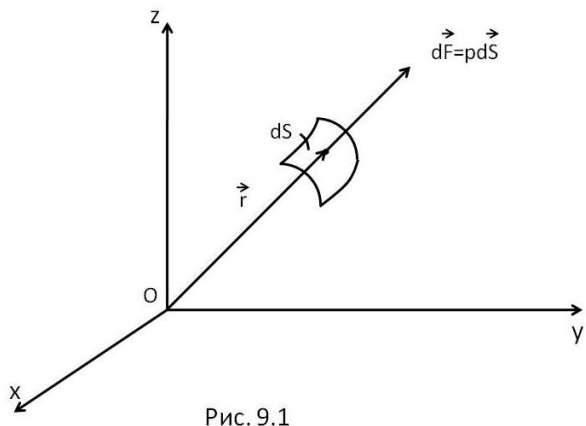


Рис. 9.1

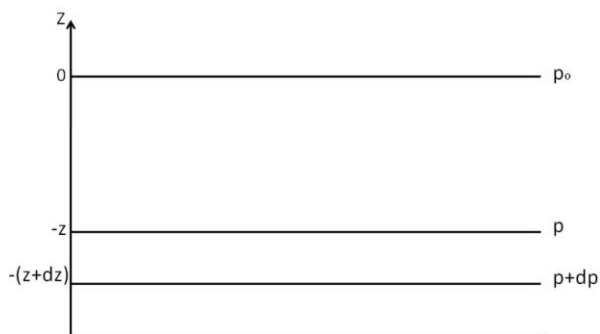


Рис. 9.2

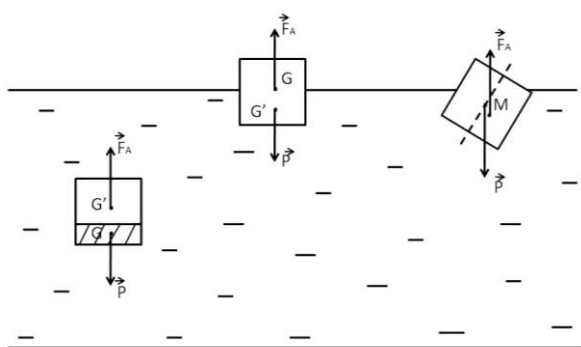


Рис. 9.3

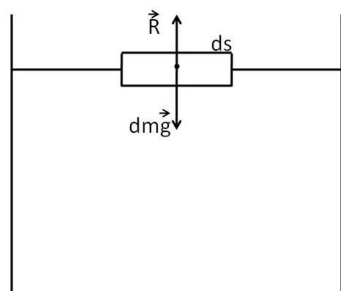


Рис. 9.4

точки внутри жидкости $p = p(\mathbf{r})$. Давление всегда действует перпендикулярно к рассматриваемому элементу поверхности и не зависит от её ориентации. Иначе, давление внутри жидкости *изотропно*. Единица давления – паскаль ($\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$). Давление, оказываемое на жидкость в к.-н. её точке (сила тяжести при этом не учитывается), передаётся этой жидкостью одинаково во всех направлениях (*закон Паскаля*). На этом законе основывается действие гидравлического пресса.

Пусть ρ – плотность жидкости. Тогда изменение давления на высоте dz будет равно: $dp = -\rho g dz$ (знак «-» показывает, что p возрастает с уменьшением z). Из этого соотношения имеем: $p = -\rho g z + p_0$. Отсюда непосредственно следует *закон Архимеда*: на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, численно равная весу жидкости, вытесненной телом, и приложена в центре тяжести объёма погруженной части тела. Сила Архимеда направлена от большего давления к меньшему. Этот закон является общим; его можно применять также и в случае сжимаемой жидкости. При этом необходимо помнить, что сила тяжести приложена к центру масс тела, а сила Архимеда – к точке G^* (центр объёма).

Если тело однородно и полностью погружено в жидкость, то точки приложения силы тяжести и силы Архимеда совпадают; следовательно, момент сил, действующих на тело, будет равен нулю. Если же тело неоднородно, то возможны различные типы равновесия. Для тела, находящегося в равновесии внутри жидкости, положение будет устойчивым, если центр тяжести тела G находится ниже точки приложения силы Архимеда G^* . Для тела, плавающего на поверхности жидкости,

положение будет устойчивым, если при небольшом наклоне тела точка пересечения оси плавания и направления силы Архимеда (метацентр М) оказывается выше центра тяжести G. Действительно, в этом случае на выведенное из равновесия тело начинает действовать пара сил ($\mathbf{P}, \mathbf{F}_A$), в результате чего тело, совершив несколько колебаний, снова возвращается в положение равновесия.

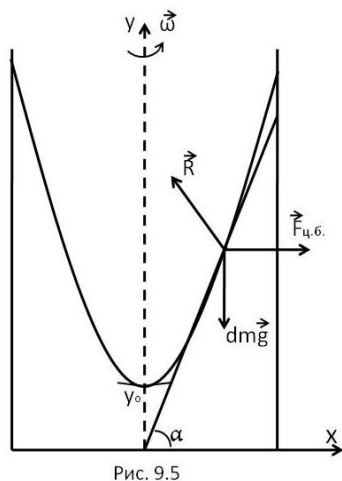


Рис. 9.5

В жидкостях при сдвиге слоёв статические силы сопротивления не возникают. Поэтому элемент свободной поверхности находится в равновесии, если равнодействующая всех внешних действующих на тело сил направлена нормально к поверхности элемента. Например, рассмотрим поверхность жидкости, находящейся в равновесии под действием силы тяжести. На элемент поверхности dS действует сила тяжести $dm\vec{g}$ и сила реакции $\mathbf{R}$, которая её уравнивает. Поверхность dS , находящаяся под действием силы тяжести, всегда горизонтальна. Рассмотрим теперь поверхность равномерно вращающейся жидкости. Применим принцип Даламбера. Выберем систему

координат, связанную с равномерно вращающимся цилиндрическим сосудом и примем во внимание центробежную силу $\mathbf{F}_{цб}$. Условию равновесия в нашей СО отвечает уравнение $dm\vec{g} + \mathbf{F}_{цб} + \mathbf{R} = 0$, или в проекциях на оси x и y :

$$dmx\omega^2 = R\sin\alpha \text{ и } dm\vec{g} = R\cos\alpha, \text{ tg}\alpha = dy/dx = x\omega^2/g, \text{ откуда } dy = \frac{\omega^2}{g}xdx.$$

В результате интегрирования получаем $y = y_0 + (\omega^2/2g)x^2$ – уравнение параболы с вертикальной осью. Следовательно, свободная поверхность жидкости является параболоидом вращения.

9.2. Гидродинамика. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.

По определению, *идеальной жидкостью* называют несжимаемую и не имеющую вязкости жидкость. Этому случаю с удовлетворительным приближением отвечает значительное число жидкостей и даже газов (если их скорости намного меньше скорости звука и если исключаются области больших градиентов скоростей). В кинематике жидкостей возможны два различных метода описания движения. Один из них, называемый методом Лагранжа, состоит в том,

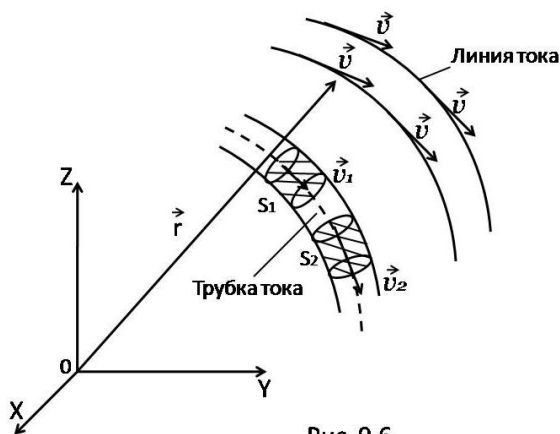


Рис. 9.6

что движение жидкости задаётся путём указания зависимости от времени координат всех её частиц: $x=F_1(a,b,c,t)$, $y=F_2(a,b,c,t)$, $z=F_3(a,b,c,t)$. Исключая из этих уравнений время, можно получить уравнение траектории частицы. Однако, основным методом гидроаэродинамики является метод Эйлера, который заключается в том, что движение жидкости определяется путём задания поля скоростей жидкости в пространстве и в каждый момент времени,

т.е. $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ и скалярным полем давления $p = p(\mathbf{r}, t)$. Скорость однозначно определяется в каждой точке потока (*ламинарное течение*). Действительно, стационарный поток представляет собой движение расположенных рядом и нигде не пересекающихся *струек* (здесь *трубкой тока* называется поверхность, образованная *линиями тока*, - линия, касательная в каждой точке которой в данный момент времени t совпадает по направлению с вектором скорости, - проведенными через все точки малого замкнутого контура. Часть жидкости, ограниченная трубкой тока, называется *струйкой*). Следовательно, скорость в каждой точке потока имеет только одно значение и направлена всегда по касательным к линиям тока, поэтому частицы жидкости, находящиеся в трубке тока, не могут выходить за её пределы.

Если скорость зависит от времени, течение жидкости называют *нестационарным*; если она не зависит от времени, течение называют *стационарным*. В этом случае общий вид линий тока остаётся неизменным.

Потоком жидкости сквозь неподвижную поверхность S называется масса $\dot{m}$ жидкости, проходящей сквозь эту поверхность за единицу времени:

$$\dot{m} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_S \rho v_n dS,$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности dS , v_n - проекция скорости жидкости на направление $\vec{n}$, $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ - вектор плотности потока жидкости.

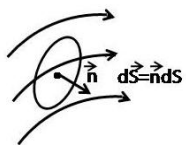


Рис. 9.7

Из закона сохранения массы следует, что увеличение массы внутри данного объёма равно массе, поступающей в единицу времени в объём:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Воспользуемся теоремой Гаусса, позволяющей перейти от поверхностного интеграла к объёмному: $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} \cdot dV$ или $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = - \int_V \text{div} \cdot \vec{j} \cdot dV$, откуда

имеем: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div} \vec{j} = - \text{div} \rho \mathbf{v}$ и окончательно $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$. Это уравнение называют уравнением *неразрывности* потока.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости: $\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$.

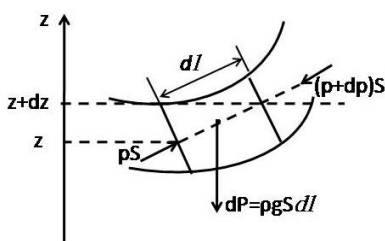


Рис. 9.8

Основной задачей гидроаэродинамики является нахождение полей скорости, давления и плотности в жидкости, движущейся под действием заданных внешних сил. Простейший случай такой задачи описывается уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли непосредственно следует из уравнения Ньютона и из того факта, что в идеальной жидкости сила давления всегда перпендикулярна к поверхности, на которую она действует.

Для направлений вдоль линий тока имеем $\mathbf{v} = \mathbf{v}(l)$ и $\rho = \rho(l)$; в пределе, когда $dl \rightarrow 0$, $S_1 = S_2$ и $dm = \rho S dl$. В направлении l единственными силами, вызывающими ускорение, оказываются $-dP \cos \alpha = -\rho g S dl \cos \alpha$, pS и $-(p+dp)$. Заменяя $\cos \alpha$ на (dz/dl) , получаем уравнение движения вдоль l в виде

$\rho S dl (dv/dt) = -\rho g S dl (dz/dl) - S dp$, иначе $\rho \frac{dv}{dt} + \rho g \frac{dz}{dl} + \frac{dp}{dl} = 0$. Поскольку

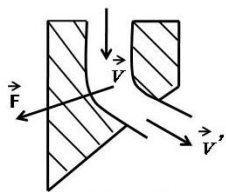
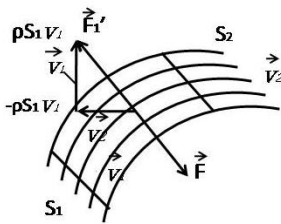
$dv/dt = dv/dl \cdot dl/dt = v(dv/dl)$, имеем: $\frac{dp}{\rho} + v dv + g dz = 0$. Для случая сжимаемой

жидкости ρ является функцией l и, интегрируя почленно, можно записать:

$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z = \text{const.}$ Это уравнение называют *уравнением Сен-Венана*.

Для идеальной жидкости ρ – постоянная величина и интегрирование даёт *уравнение Бернулли*: $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const.}$ Уравнение Бернулли является простым выражением закона сохранения энергии вдоль линии тока (потери энергии на трение не учитываются): *полная энергия текущей жидкости в единице*

объёма, т.е. сумма гидростатического давления p , кинетической энергии $\frac{1}{2} \rho v^2$ и потенциальной энергии $\rho g h$, вдоль трубки тока остаётся постоянной.



$I v = I v'$

Рис. 9.9

Определение скалярного поля давлений внутри сложного потока жидкости часто оказывается невозможным. Поэтому нельзя пользоваться давлениями при расчётах сил, действующих на стенки трубы или различные тела в потоке. Однако ко всему потоку закон сохранения импульса можно применять; это позволяет непосредственно определять результирующую всех сил, действующих на стенки и тела в потоке. Например, для идеальной жидкости закон сохранения импульса можно написать в виде $dp/dt = F = -F^*$. Полное изменение импульса жидкости в единицу времени равно

результирующей F всех действующих на жидкость сил ($F = -F^*$ – сила давления жидкости на стенки трубы): $F = dp/dt$, или

$F = d/dt (m_2 v_2 - m_1 v_1) = v_2 dm_2/dt - v_1 dm_1/dt = v_2 \rho S_2 v_2 - v_1 \rho S_1 v_1 = \rho S_1 v_1 (v_2 - v_1)$. Из уравнения непрерывности следует, что $S_1 v_1 = S_2 v_2$, поэтому $F^* = \rho S_1 v_1 (v_1 - v_2)$.

Рассмотрим численный пример. Пусть по трубе диаметром 20 см, изогнутой под углом 120° , течёт вода; её расход $Q = 100$ л/с. Какова равнодействующая всех сил давления на стенку трубы? Подставим численные значения в формулу $F = \rho S (Q/S) I v^* - v I = 2 \rho Q (Q/S) \cos 60^\circ = \rho Q^2 / S \approx 320$ Н.

9.3. Вязкость. Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей.

Вязкость (внутреннее трение) – свойство газов, жидкостей и твёрдых тел, характеризующее сопротивление их течению (для твёрдых тел – развитию остаточной деформации) под действием внешних сил. Количественно вязкость (коэффициент внутреннего трения η) определяется величиной касательной силы, которая должна быть приложена к единице плоскости сдвигаемого слоя, чтобы поддержать в этом слое *ламинарное течение* с постоянной скоростью относительно сдвига, равной единице. Работа внешней силы, уравнивающей вязкое сопротивление и поддерживающей стационарное течение – *вязкий поток*, полностью переходит в тепло. Для вязкой жидкости предполагаются некоторые граничные условия: а) в точках поверхности неподвижной стенки скорость

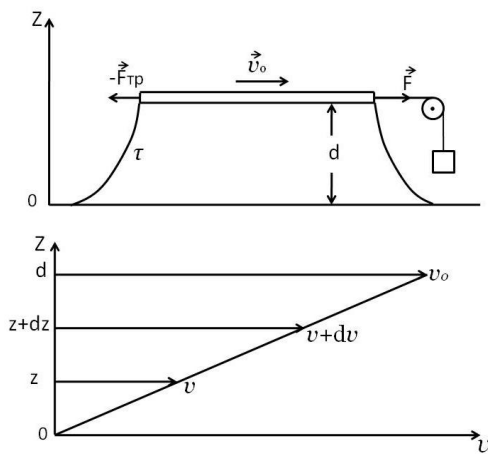


Рис.9.10

жидкости равна нулю (условие прилипания); б) в точках поверхности движущейся стенки скорость жидкости равна скорости соответствующей точки стенки. Рассмотрим в связи с этим простой случай, когда жидкость под действием капиллярных сил прилипает к лёгкой пластине, которая движется по её поверхности, увлекая за собой часть жидкости. Скорость в слое прилипшей жидкости меняется пропорционально величине z : $F/S = \tau = \eta(v_0/d)$. Если скорость v меняется с расстоянием z не по линейному закону, то будем иметь: $F/S = \tau = \eta \cdot dv/dz$, или

$$F_{тр} = - \eta \cdot dv/dz \cdot S.$$

Единицей вязкости в СИ служит такая вязкость, при которой градиент скорости с модулем, равным единице (1 м/с на 1 м), приводит к возникновению силы внутреннего трения в 1 Н на 1 м^2 поверхности касания слоёв. Эта единица называется паскаль-секунда ($\text{Па} \cdot \text{с}$). Отношение $\nu = \eta / \rho$ называют *кинематической вязкостью*. Она измеряется в стоксах (Ст).

Наблюдается два вида течения жидкости или газа: ламинарное и турбулентное. Поток называется *ламинарным*, если в нём можно определить линии тока. Любая частица жидкости постоянно остаётся в одной и той же трубке тока. Это означает, что линии тока нигде не пересекаются, или, с математической точки зрения, что функция $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – однозначна (каждой точке соответствует одна-единственная скорость). В противном случае говорят о *турбулентном течении*. Английский учёный Рейнольдс (1883 г) установил, что характер течения

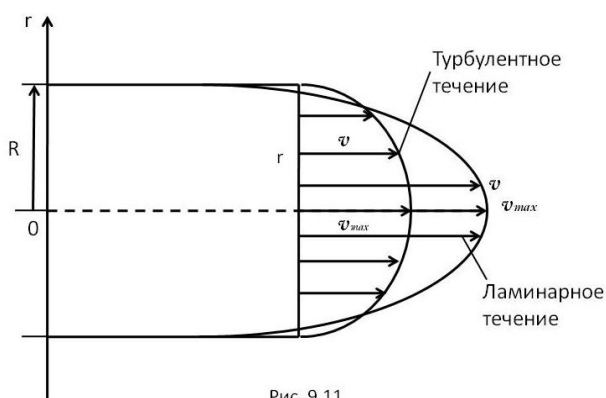


Рис. 9.11

зависит от значения безразмерной величины: $Re = \rho l v / \eta$ или $Re = l v / \nu$, Re – число Рейнольдса. Здесь v – характерная скорость течения (средняя по сечению трубы), l – линейный размер объекта или границ потока (сторона квадрата при квадратном сечении, диаметр при круглом сечении трубы и т.д.). Число Рейнольдса может служить критерием подобия для течения жидкостей (газов) в трубах, каналах и т.п. Характер их

течения в трубах разных сечений будет совершенно одинаков, если каждому течению соответствует одно и то же значение Re .

В качестве примера рассмотрим картину обтекания для случая самолёта, имеющего крейсерскую скорость $v_c = 250\text{ км/ч}$, пользуясь моделью с уменьшением $1 / 2,5$, если опыт проводится в воздухе. Из равенства $Re_c = Re_m$ получаем $\rho L v_c / \eta = \rho l v_m / \eta$ откуда $v_m = L/l v_c = 2,5 \cdot 250 = 625\text{ км/ч}$.

Число Рейнольдса и соответствующее значение скорости, характеризующее переход от ламинарного течения к турбулентному режиму, называют критическим: $Re_{кр} = \rho l v_{кр} / \eta$. Значение $Re_{кр}$ позволяет определить $v_{кр}$.

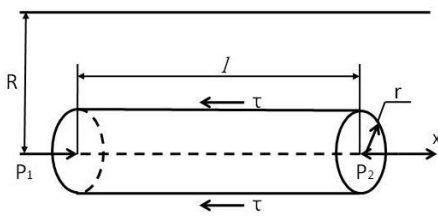


Рис. 9.12

Из опытов по изучению течения жидкости по трубе с гладкими стенками получается приближительная величина $Re_{кр} = 2300$.

Для средних скоростей оказывается, что если $Re < 2300$, то течение ламинарное, а если $Re > 2300$, то – турбулентное.

Например, при дыхании человека, при вдохе воздух проходит через ноздри ($d \approx 1$ см) со средней скоростью порядка 2 м/с ($Q = 0,2$ л/с). При 20°C для воздуха $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\rho = 1$ кг/м³, откуда $Re \approx 1000 < Re = 2300$, т.е. воздушные потоки при дыхании оказываются ламинарными.

Полагая течение ламинарным, вычислим поток жидкости Q , т.е. объём жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени. Рассмотрим цилиндрический элемент жидкости, расположенный по оси трубы радиусом R . Предполагаем, что давление вдоль вертикального сечения трубы постоянно. Если течение стационарное, то сумма сил, действующих на этот элемент, равна нулю. В частности по оси x будем иметь: $\pi r^2 p_1 - \pi r^2 p_2 - 2\pi r l \tau$. Для

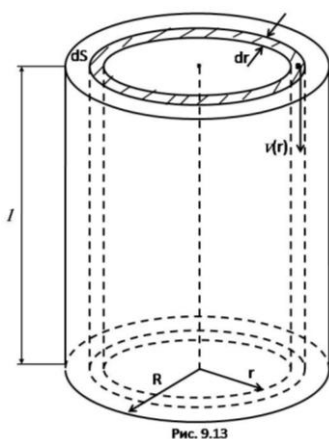


Рис. 9.13

вязкой жидкости $\tau = -\eta \cdot dv/dr$; знак «-» показывает, что скорость жидкости уменьшается с удалением от оси. Поэтому уравнение приобретает вид: $r(p_1 - p_2) + 2\eta l \cdot dv/dr = 0$.

Отсюда $dv = -r(p_1 - p_2)dr/2\eta l$ и $v = -r^2(p_1 - p_2)/4\eta l + C$. Значение постоянной C определяют из условия, что около стенок трубы ($r=R$) скорость равна нулю. Следовательно, распределение скорости по сечению определяется выражением $v(r) = (p_1 - p_2) \cdot (R^2 - r^2)/4\eta l$. Таким образом, видно, что распределение по скоростям подчиняется параболическому закону. Как и следовало ожидать, в этом случае скорость максимальна вдоль оси трубы:

$$v_{\text{макс}} = (p_1 - p_2)R^2/4\eta l.$$

Подсчитаем общий расход жидкости. Для жидкого столба расход dQ через элемент поперечного сечения dS равен: $dQ = v dS = v 2\pi r dr$; для всего сечения

находим: $Q = 2\pi(p_1 - p_2)/4\eta l \cdot \int_0^R (R^2 - r^2) r \cdot dr$, откуда $Q = \pi(p_1 - p_2)R^4 / 8\eta l$. Мы

получили *формулу Пуазейля*: для ламинарного течения вязкой жидкости в цилиндрической трубе расход пропорционален R^4 и градиенту (перепаду) давления $(p_1 - p_2)/l$. Это очень важное соотношение, применимое также и к газам при давлениях порядка миллиметров ртутного столба, используется в вакуумной технике при расчётах степени откачки воздуха.

Определяя среднюю скорость $\langle v \rangle = Q/S$, мы можем написать выражение для перепада давления вдоль трубы: $\Delta p = 8\eta l \langle v \rangle / R^2$.

Формула Пуазейля даёт возможность измерять коэффициент вязкости η жидкости путём измерения перепада давления и расхода Q (вискозиметр Оствальда).

9.4. Движение тел в жидкостях и газах.

При небольших скоростях движения тел в жидкостях существенны только

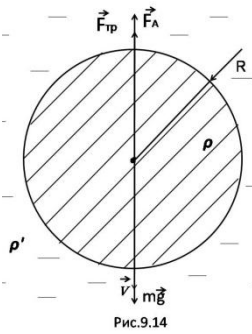


Рис.9.14

силы трения, зависящие от вязкости η . Причём, единственными величинами, от которых зависят силы трения, являются вязкость η , относительная скорость v и радиус шара R : $F_{\text{тр}} = f(\eta, v, R)$. Вид функции f можно определить из соображений размерностей:

$[F] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$, $[\eta] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, $[R] = \text{м}$, $[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$. Отсюда находим единственно возможный вид функции f : $F_{\text{тр}} = k\eta Rv$, где k – безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела. Для сферы $k = 6\pi$. В результате получаем *формулу Стокса*:

$F_{\text{тр}} = -6\pi\eta Rv$. Эта формула даёт возможность определить постоянную скорость падения шарика в вязкой жидкости, на этом основан метод определения η . Если скорость постоянна, то $F_{\text{тр}} = mg - F_A$, поэтому: $6\pi\eta Rv = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho^*)g$. Отсюда $v = \frac{2}{9} \cdot (\rho - \rho^*)gR^2 / \eta$. Скорость пропорциональна R^2 . Это объясняет явления взвесей в газах и жидкостях очень маленьких частиц (облака, туман, аэрозоли, гидрозоли). Наблюдение за скоростью падения заряженных микроскопических капелек масла в электрическом поле лежит в основе одного из методов определения элементарного электрического заряда (Милликен).

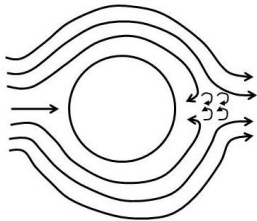


Рис. 9.15

Возникновение сопротивления в турбулентном потоке связано с работой образования вихрей за объектом. Это сопротивление имеет вид: $F_{\text{тр}} = C \cdot \rho l^2 v^2$, где l – линейные размеры объекта.

Сопротивлением, обусловленным силами вязкого трения на поверхности тела, можно пренебречь. Приведенное выражение можно представить в другом виде, если вместо l^2 ввести в формулу миделево сечение S (наибольшее по площади сечение тела, перпендикулярное потоку):

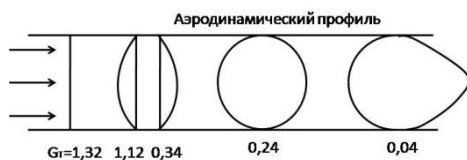


Рис. 9.16

$F_{\text{тр}} = C_T \rho v^2 S / 2$.

Безразмерный коэффициент C_T зависит от геометрической формы объекта и незначительно меняется при изменении числа Рейнольдса. В относительно широких пределах для данной геометрической формы объекта можно считать значение C_T постоянным. На рис. 9.16 представлены значения C_T некоторых тел вращения при $5000 < Re < 50000$. Для случая аэродинамического профиля вихревое сопротивление так же мало, как и сопротивление вязкого трения.

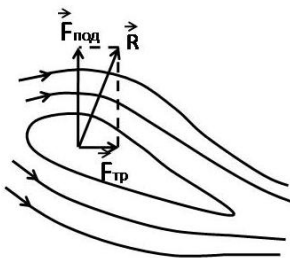


Рис. 9.17

Трудами Н.Е.Жуковского (1847 - 1921) и его ученика С.А.Чаплыгина положено начало современной аэродинамике. Жуковский, в частности, вывел формулу для определения подъёмной силы крыла самолёта, являющуюся основой всех аэродинамических расчётов самолётов, нашёл оптимальный профиль для крыла, обеспечивающий достаточную подъёмную силу при относительно малом аэродинамическом сопротивлении.

Основы молекулярной физики и термодинамики.

Лекция 10. Кинетическая теория газов.

10.1. Введение. Основные понятия.

1. В геометрии измеряется лишь *одна* основная величина – *длина*. В кинематике к ней добавляется вторая – *время*; в динамике третья – *масса*. В учении о теплоте добавляется четвёртая основная величина – *температура*.

2. В качестве собирательного названия для некоторого количества твёрдого вещества, жидкости и газа используют термин «*количество вещества*». Количество вещества только твёрдого тела, или только жидкости, или только газа, находится лишь в *одной* «*фазе*». Когда количество вещества, например воды, состоит из льда, жидкости и пара, то оно имеет три фазы, если только из воды и пара, - то две фазы и т.д.

3. Все количества вещества имеют кроме массы m , объём V , температуру T и находятся под некоторым давлением p . Величины p , V и T называют «*термическими параметрами состояния*».

4. Все количества вещества состоят из атомов или молекул. Атомы и молекулы характеризуют *состав* вещества.

5. У всех количеств вещества имеется большое число частиц. Так, например, концентрация молекул комнатного воздуха составляет $n = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. *Теория теплоты имеет дело в конечном счёте с поведением огромного числа частиц*. Поведение каждой отдельной частицы её совсем не интересует. Ни для одной из них в отдельности нельзя указать место или величину и направление скорости (координаты и импульсы) в каждый момент времени. Нельзя определить температуру и давление отдельной молекулы. Измеримы только особые параметры состояния совокупности молекул.

6. Каждое тело или каждое количество вещества в 1 киломоль независимо от химического состава состоит из $N_0 = 6,02 \cdot 10^{26}$ молекул – *число Авогадро*.

7. Далее полезно сделать указание относительно употребления некоторых слов: масса, объём, число молекул, энергия относятся всегда только к количествам вещества, т.е. к ограниченным твёрдым, жидким или газообразным объектам. При этом ради краткости часто употребляют такие термины: вещество, газ, жидкость и т.д., вместо: количество вещества, количество жидкости и т.п., если это явно следует из контекста. Это редко приводит к неправильному пониманию.

8. Изменения температуры вызывают изменения: 1) размеров тел, 2) поглощения света, 3) электрического сопротивления металлов, полупроводников и т.д. Большинство всех физических и химических явлений обнаруживает зависимость от температуры. Каждое из этих явлений может служить *основой для измерения температуры* и для устройства измерительного прибора – термометра.

В обыденной жизни, в науке и технике используют изменение объёма *жидкости*. Ртутный термометр с его стоградусной шкалой между температурой тающего льда и кипящей воды применим между $+ 800^\circ\text{C}$ и $- 30^\circ\text{C}$. Для более

низких температур до -200°C применяют термометры, заполненные *пентаном*. Наряду с жидкостными термометрами употребляют преимущественно электрические термометры (термопары, термометры сопротивления и т.д.). Для измерения высоких температур важное значение имеет оптический метод измерения температур «*оптическим пирометром*».

9. Определение понятия «*теплота*». Слово *теплота* употребляют в двух разных значениях. Большей частью обозначают им не особую форму энергии, как в случае с потенциальной, кинетической, электрической и магнитной, но только лишь особый вид перехода энергии из одного количества вещества в другое. Этот переход обусловлен *при исключении всяких вспомогательных средств* только разностью температур. Подобный переход называют «*термическим*». Затем теплота была интерпретирована (Бэкон – 1620г., Гассенди, Ломоносов – 1741г.) как результат движения частиц, из которых состоит вещество. Эти идеи были расширены и уточнены Бернулли (1738г.) и столетием позже дополнены Джоулем (1848) и Крёнигом (1856г.). Таким образом термин *теплота* обозначает *кинетическую часть внутренней энергии*. Современная кинетическая теория вещества была развита во второй половине 19 века в трудах Клаузиуса, Максвелла (1860г.) и Больцмана (1871г.) и нашла наиболее законченное выражение в трудах Гиббса в конце 19 века.

10.2. Основы молекулярно – кинетической теории идеального газа.

1). В макроскопическом объёме идеального газа содержится большое число молекул. 2). Размеры молекул столь малы по сравнению с промежутками между ними, что в большинстве случаев этими размерами можно пренебречь и рассматривать молекулы как материальные точки. 3). Молекулы находятся в состоянии непрерывного движения, в результате чего сталкиваются друг с другом и со стенками того сосуда, где находится газ. 4). Силы взаимодействия между молекулами газа проявляются только при соударениях, поэтому от соударения до соударения каждая молекула движется свободно. Законы движения молекул описываются законами классической механики. Столкновения молекул друг с другом и со стенками сосуда, в котором находится газ, происходят по законам упругого удара.

Во всех существующих в природе телах происходит постоянное движение составляющих эти тела частиц: поступательное, вращательное и колебательное. Характерной чертой этого движения является его *беспорядочность*. Об этом движении говорят как о *тепловом движении*.

Для описания теплового движения частиц, как некоторой системы, применяют различные методы. Например, изучение закономерности движения больших совокупностей электронов, атомов, молекул, фотонов и т.п. составляет предмет *статистической физики*. Свойства средних макроскопических величин, определяющих состояние тела, составляет предмет *термодинамики*.

10.3. Определение термодинамического состояния. Параметры состояния.

В общем случае **системой** называют *совокупность определённого числа различных веществ*, количества которых могут быть или постоянными, или

переменными (если в системе происходят химические реакции); эти вещества могут находиться в различных *фазах*: газовой, жидкой и твёрдой. Система, в которой возможны различные процессы, изучается во *взаимодействии* с внешней средой.

Состояние системы определяется численными значениями некоторых переменных величин, которые характеризуют её и называются *параметрами состояния*. Мы уже называли наиболее распространённые: давление p , объём V , и температура T . В различных случаях параметрами состояния могут быть и другие величины: намагниченность J , вектор поляризации P , напряжённость электрического E или магнитного поля H и т.п.

Давление. Благодаря тепловому движению частиц газ оказывает давление на стенки заключающего его сосуда. Молекулы газа, сталкиваясь со стенками сосуда, передают им некоторый импульс, изменением импульса в единицу времени определяют действующую на тело силу и, тем самым, давление.

Температуру определяют средней кинетической энергией молекулы: $\langle E_k \rangle = i/2 kT$, где i – число степеней свободы молекулы, k – постоянная Больцмана.

Отметим, что количество теплоты Q , а также работа A не являются характеристиками состояния системы. Это величины, которые характеризуют *обмен* системы с внешней средой (их взаимодействие).

Наряду с параметрами состояния системы вводятся другие величины, которые также характеризуют её состояние и меняются с изменением состояния, иначе говоря являются функциями состояния. Функции состояния дают более полные сведения о системе. Они зависят только от состояния и не зависят от того пути, по которому система пришла в это состояние. Наиболее важными функциями состояния являются *внутренняя энергия* U и энтропия S .

10.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Уравнение состояния идеального газа.

Пусть в объёме $V = \ell^3$ находится N молекул. $dp/dt = F_x = 2p_x z$, где $z = v_x / 2\ell$ –

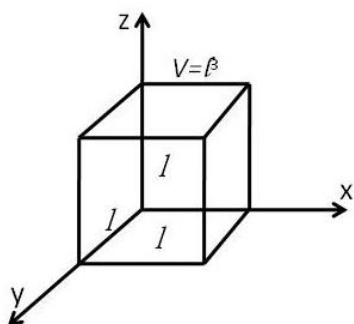
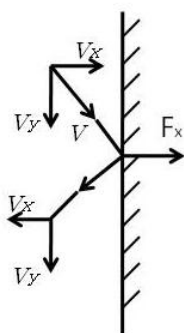


Рис. 10.1



число столкновений молекулы со стенкой за 1с, 2ℓ – путь от одной стенки до другой и обратно. Следовательно, $F_x = p_x v_x / \ell = m v_x^2 / \ell$. Величина полной силы, действующей на все 6 стенок сосуда в результате ударов всех N молекул, равна $6p\ell^2$, а с другой стороны она равна:

$$6p\ell^2 = \sum_{i=1}^N \frac{2m}{\ell} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{2Nm}{\ell} \langle v^2 \rangle, \text{ или}$$

$p = (1/3) \cdot (N/\ell^3) \cdot m \langle v^2 \rangle = (2/3)(N/V) \langle E_k \rangle$ и окончательно $p = (2/3)n \langle E_k \rangle$ – *основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа*.

По определению температуры $\langle E_k \rangle = (i/2)kT$, поэтому, если $i = 3$ – для одноатомного газа, то $p = nkT$. Учитывая, что $n = N/V$, $k = R/N_0$, $m = m_1 \cdot N$ и

$M = m_1 \cdot N_0$, подставим эти значения в выражение для p и получим *уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева - Клапейрона)*: $pV = (m/M)RT$.

Для смеси газов выполняется закон Дальтона: $m/M = pV/RT$,
 $m/M = m_1/M_1 + m_2/M_2 + m_3/M_3 + \dots$, $pV/RT = p_1V/RT + p_2V/RT + \dots$, откуда получаем закон Дальтона: $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$. Учитывая, что $m = m_1 + m_2 + \dots$, получим уравнение для определения молярной массы смеси газов: $M = (m_1 + m_2 + \dots)/(m_1/M_1 + m_2/M_2 + \dots)$.

10.5. Закон Максвелла для распределения молекул по скоростям.

Беспорядочное движение большого числа молекул газа системы в состоянии статистического равновесия позволяет использовать законы статистической механики (кинетической теории газов). Вероятность $dW(\mathbf{v})$ того, что скорости микрочастицы лежат в интервалах от $\mathbf{v}$ до $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, даётся формулой: $dW(\mathbf{v}) = (m_1/2\pi kT)^{3/2} \cdot \exp\{-m_1(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT\} dv_x dv_y dv_z$. Проинтегрировав эту формулу по всем направлениям, можно получить распределение вероятностей для абсолютных величин скоростей: $dW(v) = 4\pi(m_1/2\pi kT)^{3/2} \cdot \exp(-m_1 v^2/2kT) \cdot v^2 dv$ (рис.10.2), где $v = \sqrt{v^2}$. Среднее число частиц $dN(v)$ со скоростями, лежащими в интервалах от v до $v+dv$, равно $dN(v) = NdW(v)$, где N – полное число частиц. Распределение Максвелла даёт для наиболее вероятной скорости (из $dW(v_B)/dv = 0$) значение $v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}}$,

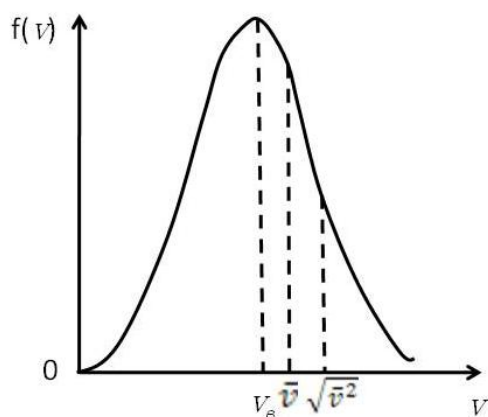


Рис. 10.2

для средней арифметической скорости $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}}$ и для средней квадратичной

скорости молекул $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}}$. Видно, что

$$v_B < \langle v \rangle < \sqrt{\langle v^2 \rangle}.$$

10.5.1. Опыт Штерна.

Испарение жидкости, электронов накаливаемыми телами и другие опыты показывают, что скорости молекул, и вообще микрочастиц, неодинаковы, причём закон их распределения по скоростям соответствует распределению Максвелла.

Прямая экспериментальная проверка этого закона была проведена Штерном (1920г.) и Ламмером (1929г.). Схема опыта представлена на рис. 10.3. Здесь испытуемым газом служили пары серебра, которые получались при испарении слоя серебра, нанесённого на платиновую проволоку, нагреваемую электрическим током. Проволока помещалась в тщательно откачанный сосуд, чтобы атомы испаряющегося серебра беспрепятственно разлетались. Для получения узкого пучка на пути атомов серебра располагалась преграда со щелью, через которую атомы попадали на латунную пластинку, находившуюся при комнатной температуре, и осаждались на ней в виде узкой полоски (изображение щели). Специальным устройством весь прибор приводился в

быстрое вращение вокруг оси, параллельной плоскости пластинки, вследствие чего изменялось место попадания атомов на пластинку: пока они пролетели путь r от щели до пластинки, пластинка смещалась. Смещение растёт с угловой скоростью ω прибора и уменьшается с ростом скорости v атомов. Зная ω и r , можно определить v . Т.к. v имеет всевозможные значения, полоска размывается, причём плотность осадка в данном месте пропорциональна числу атомов определённой скорости; наибольшая

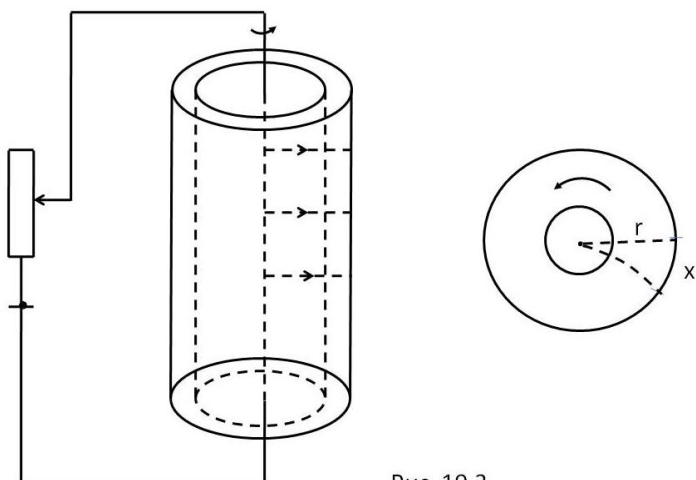


Рис. 10.3

плотность соответствует наиболее вероятной скорости, которая и определялась в опыте Штерна. Согласие теории и эксперимента хорошее.

$$(F = -2m[\omega, v], x = \frac{1}{2} \cdot F/m \cdot t^2 = \omega r^2/v).$$

10.6. Закон Больцмана для распределения частиц во внешнем потенциальном поле. Барометрическая формула.

Рассмотрим идеальный газ в силовом поле (рис. 10.4). Так как на молекулы газа действуют внешние силы, то давление газа будет меняться от точки к точке. Пусть силовое поле действует вдоль оси z . Разность давлений, действующих на площадки 1 и 2 равна суммарной силе, действующей на частицы газа, заключённые в объёме параллелепипеда с основанием S и высотой dz . Эта сила

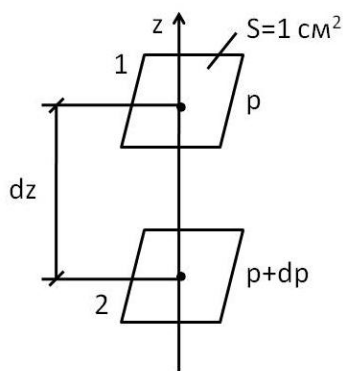


Рис. 10.4

равна $FnSdz$, где F – сила, действующая на одну молекулу в точке с координатой z . Поэтому: $dp = nFdz$, $F = -dU/dz$, $dp = -ndz \cdot dU/dz = -n \cdot dU$, но $p = nkT$ и при $T = \text{const}$ $dp = kTdn$ и $kTdn = -ndU$. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int \frac{dn}{n} = -\frac{1}{kT} \int dU, \ln n = -U/kT + \text{const}, \text{ при } U = 0 \text{ } n = n_0.$$

Таким образом получаем *формулу Больцмана*:

$$n = n_0 \cdot \exp(-U/kT). \text{ Учитывая, что } p = nkT,$$

$$p = p_0 \cdot \exp(-U/kT).$$

В случае поля тяжести вблизи земной поверхности потенциальная энергия молекулы на высоте $z = h$ $U = mgh$ и $p = p_0 \cdot \exp(-mgh/kT)$, или $p = p_0 \cdot \exp(-Mgh/RT)$ – *барометрическая формула*. Применимость барометрической формулы ограничена, т.к. атмосфера в действительности не находится в тепловом равновесии и её температура меняется с высотой.

10.7. Распределение энергии по степеням свободы.

Соотношение $mv^2/2 = 3/2 (kT)$ служит основанием для механической интерпретации температуры. Вследствие изотропности скоростей естественно считать, что $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, отсюда, учитывая $3\langle E_{\text{кx}} \rangle = 3/2(kT)$, получим,

что на каждую степень свободы системы, находящейся в тепловом равновесии, приходится в среднем энергия, равная $\frac{1}{2}kT$.

Этот результат справедлив не только для газов. Больцман показал его применимость к большинству систем, находящимся в тепловом равновесии.

Лекция 11. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах.

Переходя к изучению явлений переноса в газах, необходимо предварительно остановиться на характере взаимодействия молекул газа. Что значит «молекулы сталкиваются»? – Под *столкновением* будем понимать только те случаи, когда молекулы проходят настолько близко друг от друга, что взаимодействие существенно меняет их движение, т.е. скорости молекул существенно изменяются по величине или по направлению.

11.1. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул.

Столкновения в газе происходят совершенно беспорядочно. Поэтому и путь, проходимый молекулой между испытываемыми ею двумя последовательными столкновениями, может быть самым разным. Среднее его значение при очень большом числе столкновений z называют *средней длиной свободного пробега*:

$\langle \lambda \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i}{z}$. Эту величину можно определить следующим образом. Считаем, что

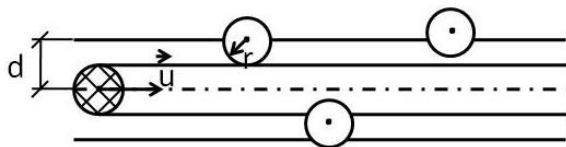


Рис. 11.1

все молекулы, кроме одной, покоятся (рис. 11.1). Скорость этой одной молекулы равна относительной средней скорости $\langle u \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$ – в результате распределения по скоростям. $d = 2r$ – радиус сферы молекулярного действия. За 1 с молекула перемещается на расстояние $\langle u \rangle$. Все неподвижные молекулы, центры которых находятся внутри цилиндра с основанием радиуса $d=2r$, входят в сферу действия движущейся молекулы, т.е. сталкиваются с ней. Сечение цилиндра $\sigma = \pi d^2$ – *эффективное сечение*. Число столкновений z за 1 с равно числу неподвижных молекул, центры которых оказываются внутри цилиндра: $z = \sigma \langle u \rangle n$. За 1 с молекула проходит путь $\langle v \rangle$ и испытывает z столкновений.

Следовательно, $\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{z} = \frac{\langle v \rangle}{\sigma \langle u \rangle n}$, или $\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$.

Для 1 моля идеального газа $pV = RT$, $n = N/V = p/kT$, тогда $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma p} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$.

Средняя длина свободного пробега определяет такие свойства газов, как *диффузия, вязкость и теплопроводность*.

11.2. Диффузия.

Если концентрация к.-л. вещества, образующего систему, различна в разных её местах, то благодаря тепловому движению молекул и их перемешиванию с

течением времени, вещество переходит из мест с большей в места с меньшей концентрацией до тех пор, пока состав вещества не станет одинаковым по всему его объёму. Этот процесс называют *диффузией*.

Для простоты предположим, что концентрация вещества C меняется только вдоль одного направления, например оси x . Количество вещества, переходящее в единицу времени через перпендикулярную оси x поверхности единичной площади называют *диффузионным потоком* j . Будем считать поток положительным, если он направлен по оси x и отрицательным, если против.

С другой стороны, вещество переходит из мест с большей в места с меньшей концентрацией. Поэтому знак потока будет обратным знаку производной dn/dx (градиент): $j = -D \cdot dC/dx$. D – коэффициент диффузии.

Поток j можно определить любым образом: как *весовое количество растворённого вещества*, проходящего через единичную площадку за 1с; как *число молекул* этого вещества и т.п. При этом надо аналогичным образом определять концентрацию C : как весовое количество ($C=\rho$) или как число молекул в единице объёма ($C=n$). Тогда Коэффициент диффузии D не будет зависеть от способа определения потока и концентрации ($[D]=m^2/c$).

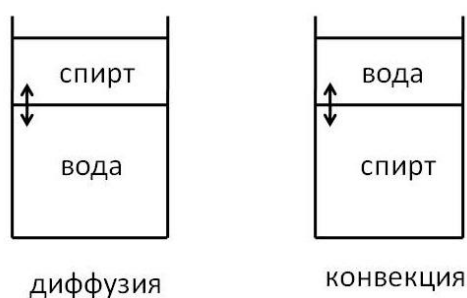


Рис. 11.2

Под действием поля сил тяжести (рис.11.2) может происходить выравнивание состава среды, сопровождающееся её движением – *конвекция*. Конвекция приводит к выравниванию состава гораздо быстрее, чем диффузия.

Используя понятие о средней длине свободного пробега $\langle \lambda \rangle$, можно определить порядок величины коэффициента диффузии в газах и выяснить характер его зависимости от состояния газа.

Рассмотрим смесь двух газов при $p=\text{const}$ и составе, изменяющемся вдоль оси x . Будем рассматривать один из газов (газ 1) в смеси.

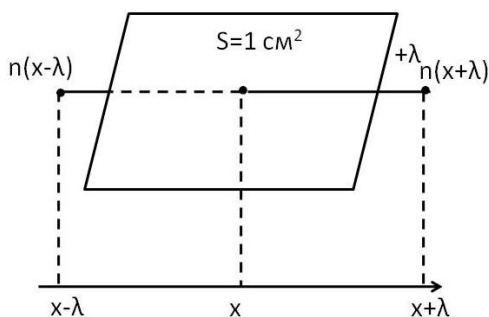


Рис. 11.3

Пусть n – концентрация его молекул и $n = f(x)$. Диффузионный поток j представляет собой избыток числа молекул, проходящих за 1с в направлении оси x через перпендикулярную ей единичную площадку, над числом молекул, проходящих через эту же площадку в противоположном направлении (рис. 11.3). Число молекул, проходящих в 1с через единицу площади, пропорционально $n\langle v \rangle$ (слева направо), n – концентрация в том месте, где молекулы испытали своё последнее столкновение; для молекул, движущихся в противоположном направлении надо взять значение n на расстоянии $\langle \lambda \rangle$ справа от площадки. Следовательно диффузионный поток даётся разностью:

$j \sim \langle v \rangle n(x - \lambda) - \langle v \rangle n(x + \lambda)$. Так как $\langle \lambda \rangle$ – малая величина, то разность $n(x-\lambda) - n(x+\lambda)$ можно заменить на $-\lambda \cdot dn/dx$. Таким образом, $j \sim -\langle v \rangle \langle \lambda \rangle dn/dx$;

сравнивая с $j = -D \cdot dn/dx$, получаем $D \sim \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$. Учитывая, что $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}$,

получим $D \sim vkT/\sigma p$, σ - сечение столкновения. Точный учёт характера взаимодействия молекул с применением методов статистической механики приводит к: $D = 1/3 \cdot \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$ и $\Delta M = -D(dp/dx) \cdot \Delta S \cdot \Delta t$.

11.3. Внутреннее трение (вязкость).

Рассмотрим поток жидкости (или газа), скорость течения которого различна в разных местах. Такое состояние не является равновесным и в жидкости (газе) будут происходить процессы, стремящиеся выровнять скорость течения. Эти

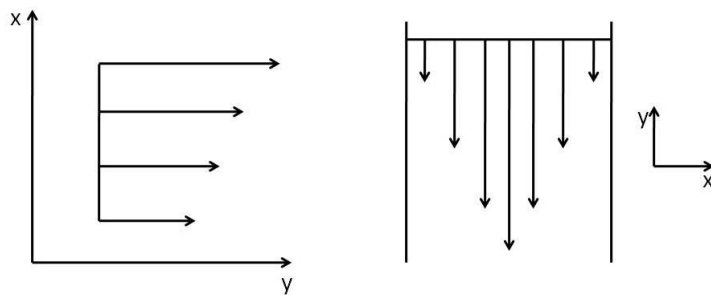


Рис. 11.4

процессы называют *внутренним трением*, или *вязкостью*. При внутреннем трении благодаря тепловому движению молекул происходит передача импульса от более быстрых участков к менее быстрым. Аналогично

диффузионному потоку введём

понятие *потока импульса* Π : это – *полный импульс, переносимый в 1с в положительном направлении оси x через единичную площадку, перпендикулярную оси x*: $\Pi = -\eta \cdot dv_y/dx$, где η - коэффициент вязкости. $[\Pi] = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с})/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) = \text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}^2$. $[\eta] = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}) = \text{Па} \cdot \text{с}$. Коэффициент вязкости определяет быстроту передачи импульса из одного места потока в другое. Скорость же равна импульсу, делённому на массу. Поэтому быстрота выравнивания скорости потока будет определяться величиной η / ρ ; $\nu = \eta / \rho$ – кинематическая вязкость. $[\nu] = \text{м}^2/\text{с} = [D]$. Поэтому $\nu = (1/3) \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$, $\eta = \rho \cdot \nu$ и, окончательно, $\eta = (1/3) \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho$.

Полный импульс, передаваемый от слоя к слою, будет $\Delta P = -\eta \cdot (dv_y/dx) \Delta S \Delta t$. Изменение импульса со временем – сила трения между поверхностями ΔS слоёв жидкости (газа), протекающих друг мимо друга: $F = -\eta \cdot (dv_y/dx) \cdot \Delta S$.

11.4. Теплопроводность.

Уравнение теплопроводности можно записать аналогично уравнению диффузии: *поток тепла q – количество тепла, проходящего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x*: $q = -K \cdot dT/dx$. Здесь K – коэффициент теплопроводности. $[q] = \text{Дж}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$, тогда $[K] = \text{Дж}/\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К} = (\text{кг} \cdot \text{м})/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$. Таким образом, теплопроводность представляет собой «диффузию энергии», причём роль коэффициента диффузии играет коэффициент «температуропроводности» χ , который можно определить так: K – определяет скорость передачи тепла от более нагретых к менее нагретым участкам. Но изменение температуры тела равно количеству полученного им тепла, делённому на теплоёмкость. Поэтому скорость выравнивания температур в различных местах определяется коэффициентом теплопроводности, делённым на

теплоёмкость единицы объёма тела: $\chi = K/\rho c_p$. $[\chi] = \text{м}^2/\text{с}$. Так что можно записать: $\chi = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$, а $K = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \rho c_p$, или, учитывая, что $C = c \cdot M$, а $\rho/M = p/RT$, и, кроме того, учитывая $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma p}$, $K = 1/3 \cdot \frac{\langle v \rangle C_p}{\sqrt{2} N_0 \sigma}$ и, так как $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то и $K \sim \sqrt{T}$. (В действительности K с температурой растёт быстрее, т.к. с ростом температуры растёт C_p и уменьшается σ).

Количество тепла, переносимого при теплопроводности, $\Delta Q = -K(dT/dx) \Delta S \Delta t$.

Таким образом, все три рассмотренные явления: диффузия, вязкость и теплопроводность - имеют одинаковый механизм.

Выпишем отдельно формулы, описывающие процессы переноса: $D = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$, $\eta = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \rho$, $K = 1/3 \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \rho \cdot c$; $\Delta M = -D \cdot dp/dx \cdot \Delta S \cdot \Delta t$, $F = -\eta \cdot dv_y/dx \cdot \Delta S$, $\Delta Q = -q \cdot dT/dx \cdot \Delta S \cdot \Delta t$.

Лекция 12. Первый закон термодинамики.

12.1. Прямые и обратные, обратимые и необратимые процессы.

В предыдущих лекциях было дано объяснение многих хорошо известных свойств газов (и жидкостей) с точки зрения представлений о движении и столкновениях молекул. Однако, как указывалось, различные свойства систем могут быть описаны также с помощью принципов термодинамики, которая не рассматривает молекулярного строения макроскопических систем, но тем не менее выводы её хорошо согласуются с опытными данными.

В молекулярно-кинетической теории газов газ рассматривается как единая система из очень большого числа частиц, из которых каждая подчиняется законам механики. С помощью простейших механических законов кинетическая теория газов объяснила многие тепловые свойства газов, например, расширение при нагревании, упругость, диффузию, вязкость, теплопроводность и т.п. Таким же путём была установлена связь между температурой и средней кинетической энергией молекул.

Поведение отдельной молекулы газа описывается законами механики, поэтому естественно считать, что и свойства газа, как собрания множества молекул, должны следовать тем же законам. Однако этот взгляд неверен. Прежде всего заметим, что все чисто механические процессы всегда *обратимы*, т.е. в механике нет места для необратимости. Механические явления строго симметричны (обратимы) по отношению к прошедшему и будущему; достаточно обратить начальные условия, как данный механический процесс пойдет в

обратном направлении. Пример – камень ($\uparrow \downarrow$), кинолента ($\leftrightarrow$) и т.п.

Парадокс Лошмидта (1876г.) (рис. 12.1) показал, что процесс $A \rightarrow B \rightarrow A$ термодинамически необратим. Другой пример необратимого процесса «яйцо $\rightarrow$ яичница $\rightarrow$ яйцо» и т.п.

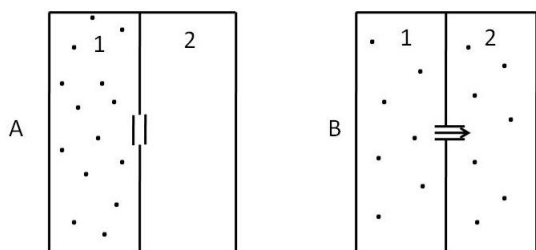


Рис. 12.1

Таким образом, приведенные соображения показывают, что кинетическая теория газов, построенная на принципах механики, не в состоянии объяснить необратимости и поэтому неизбежно находится в противоречии с термодинамикой. Далее будет показано, как разрешается конфликт между механикой, кинетической теорией газов и термодинамикой на основе наиболее общих представлений о двух видах закономерностей в природе.

12.2. Принцип эквивалентности тепла и работы.

Принцип эквивалентности *тепла и работы* утверждает: если рассматривать систему, способную обмениваться работой или теплотой с окружающей её средой, а в конце опыта возвращающуюся в первоначальное состояние, то *отношение количества тепла и работы, которыми система обменивается со средой, всегда остаётся постоянным* – $A = J \cdot Q$, или в СИ $A = Q$ (Майер – 1842 и Джоуль – 1843г.). Принцип эквивалентности тепла и работы является частным случаем более общего *закона сохранения энергии*.

Однако сам закон сохранения энергии, несмотря на кажущуюся ясность и простоту, в действительности нельзя считать ни простым ни ясным. Этот закон выражает постоянство суммы трёх слагаемых: кинетической энергии, потенциальной энергии, зависящей от положения тела, и внутренней энергии в форме тепловой, электрической или химической. При этом, как указывает Пуанкаре («Гипотеза и наука», 1903г.), такое выражение закона не представляло бы затруднений, если бы между указанными слагаемыми можно было провести строгое различие, т.е. первое слагаемое зависело только от скорости, второе не зависело бы от скорости и внутреннего состояния тел, а третье зависело бы только от внутреннего состояния тел. На самом деле это не так, ибо, например, в случае наэлектризованных тел их электростатическая энергия зависит и от состояния тел, и от их положения в пространстве: если тела ещё и движутся, то их электродинамическая энергия зависит уже не только от состояния тел и их положения в пространстве, но и от их скоростей и т.д.

Вместе с тем, тепловая и механическая формы энергии в достаточной степени разделимы и независимы друг от друга, чтобы можно было применять закон сохранения энергии. Отсюда следует, что в теории тепловых машин принцип эквивалентности теплоты и работы можно применять без всяких ограничений.

12.3. Внутренняя энергия. Первый закон термодинамики.

Предположим, что система переходит из состояния 1 в состояние 2, отличное от состояния 1 (рис.12.2). Во время превращения 1→2 система получает количество тепла Q и совершает работу A . Ясно, что обе эти величины не зависят друг от друга и зная состояния 1 и 2 недостаточно, чтобы определить величины Q и A . Однако с помощью принципа эквивалентности можно показать, что величина $Q - A$ полностью определяется начальным и конечным состояниями и не зависит от эволюции системы между этими состояниями.

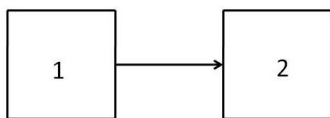


Рис. 12.2

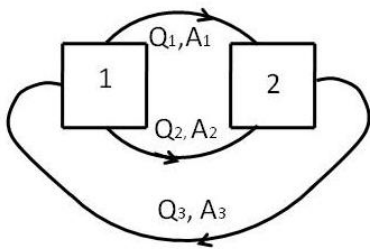


Рис. 12.3

В самом деле, предположим, что система переходит из состояния 1 в состояние 2 различными путями, причём величины Q и A принимают соответственно значения Q_1, A_1 и Q_2, A_2 . Поскольку мы рассматриваем здесь только перемещения системы в пространстве и изменения её температуры, всегда можно заставить систему вернуться в своё исходное состояние. Предположим, что возвращение из состояния 2 в состояние 1 (рис. 12.3) происходит в обоих случаях

одинаковым образом, причём соответствующие величины тепла и работы равны Q_3 и A_3 . Таким образом, получаем два цикла превращений, для каждого из которых справедливо соотношение $Q = A$: $A_1 + A_3 = Q_1 + Q_3$, $A_2 + A_3 = Q_2 + Q_3$. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $A_1 - A_2 = Q_1 - Q_2$ и после преобразования окончательно получаем: $Q_1 - A_1 = Q_2 - A_2$. При различных переходах $1 \rightarrow 2$ величина $Q - A$ сохраняется. Эта величина, следовательно, представляет изменение некоторой функции состояния, которая называется внутренней энергией системы U . Итак по определению $U_2 - U_1 = Q - A$, или в дифференциальной форме: $\delta Q = dU + \delta A$ – первый закон термодинамики: *теплота, сообщаемая системе, затрачивается на увеличение внутренней энергии системы и на работу, совершаемую системой над внешней средой.*

Отличия в записи (δQ , δA и dU) малых величин теплоты и работы и изменения внутренней энергии имеют отнюдь не формальный характер, а выражают глубокие физические различия этих величин. Дело в том, что внутренняя энергия системы является однозначной функцией её состояния. Отсюда следует, что при совершении системой произвольного процесса, в результате которого она вновь возвращается в исходное состояние, полное изменение внутренней энергии системы равно нулю: $\oint dU = 0$. В то же время, ни работа, ни теплота не являются функциями состояния и поэтому δQ и δA не являются полными дифференциалами.

Частные случаи первого закона термодинамики:

1. Адиабатический процесс - $\delta Q = 0$, $\delta A = -dU$;
2. Изохорический процесс - $V = \text{const}$, $\delta A = 0$, $\delta Q = dU$;
3. Изобарический процесс - $p = \text{const}$, $\delta A = p \cdot dV$, $\delta Q = dU + p \cdot dV$;
4. Изотермический процесс - $T = \text{const}$, $dU = 0$, $\delta Q = \delta A$.

12.4. Теплоёмкость и её зависимость от вида процесса.

Обычно *теплоёмкостью* называют количество теплоты, которое необходимо затратить для изменения температуры тела на 1 K . Теплоёмкость, отнесённая к единице количества вещества, называют *удельной* (к 1 кг вещества – *массовой*), отнесённая к моллю – *мольной* (*молярной*, или *молекулярной*), к единице объёма – *объёмной*. Соответственно единицами измерения теплоёмкости служат: Дж/К, Дж/кгК, Дж/мольК, Дж/м³К и внесистемная единица кал/моль·град.

Поскольку Q не является функцией состояния тела, а зависит от характера процесса, в результате которого тело перешло в новое состояние, то и теплоёмкость $C = dQ/dT$ определяется этим процессом.

12.4.1. Молярная и удельная теплоёмкости газов при постоянном объёме.

Поскольку $V = \text{const}$, $\delta Q = dU$, $C_V = (\delta Q/dT)_V = (dU/dT)$. Для идеального газа $U = (i/2) \cdot RT$ и молярная теплоёмкость $C_V = (i/2)R$.

Удельная теплоёмкость $c_V = C_V/M = (i/2) \cdot (R/M)$.

12.4.2. Молярная и удельная теплоёмкости газов при постоянном давлении.

$p = \text{const}$, $\delta Q = dU + p \cdot dV$. Для 1 моля идеального газа $pV = RT$, откуда $\delta Q = (i/2)RdT + RdT$ и $C_p = (i/2) \cdot R + R = ((i+2)/2) \cdot R$, т.е. $C_p = C_V + R$ - уравнение Майера.

Удельная теплоёмкость $c_p = C_p/M = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M}$.

Отношение $C_p/C_V = \frac{i+2}{i} = \gamma$ - *постоянная адиабаты*.

Для одноатомных молекул $i = 3$, $\gamma = 5/3 \approx 1,7$, для двухатомных молекул $i = 5$ и $\gamma = 1,4$. Для твёрдых тел $i = 6$, $\gamma = 8/6 \approx 1,3$, $C_V = 3R$ - закон Дюлонга и Пти.

12.5. Применения первого закона термодинамики.

12.5.1. Изохорический процесс.

$V = \text{const}$, $\delta A = 0$, $\delta Q = dU$, $pV = (m/M) \cdot RT$, $p/T = \text{const}$.

Изменение внутренней энергии идеального газа можно рассчитать по формуле: $U_2 - U_1 = (m/M) \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)$, или

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T.$$

Заметим, что эта формула применима для всех без исключения процессов, т.к. внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры и изменяется прямо пропорционально изменению температуры. Теплообмен с окружающей средой $\Delta Q = m \cdot c_V \cdot \Delta T$ (рис. 12.4).

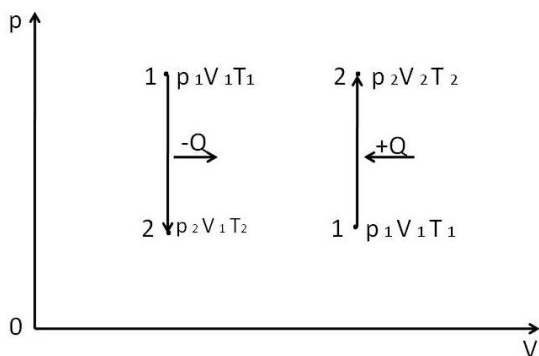
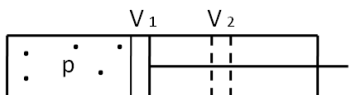


Рис. 12.4



12.5.2. Изобарический процесс. Работа при изобарическом процессе.

$p = \text{const}$, $pV = (\frac{m}{M}) \cdot RT$, следовательно, $\frac{V}{T} = \text{const}$.

Изменение внутренней энергии рассчитывают по формуле $\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$. Внешнюю работу вычисляют так (рис. 12.5): $\delta A = p \cdot dV$, $\Delta A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \rightarrow \Delta A = p \cdot \Delta V$,

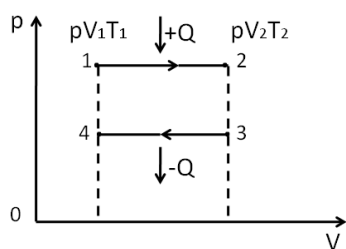


Рис. 12.5

или $\Delta A = \frac{m}{M} R \Delta T$. Теплообмен с окружающей средой: $\Delta Q = \frac{m}{M} C_p \cdot \Delta T$, или $\Delta Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T$.

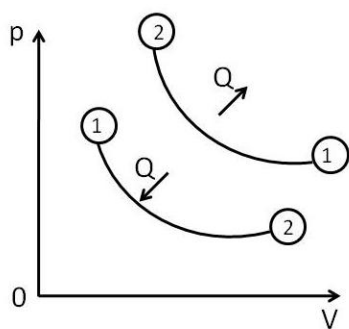


Рис. 12.6

12.5.3. Изотермический процесс. Работа при изотермическом процессе.

$T = \text{const}$, $pV = \text{const}$, $dU = 0$, $U_1 = U_2$. Рис. 12.6.

Работа $\delta A = p \cdot dV$,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV, \quad p = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{V} \cdot T, \quad A =$$

$$\frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad \text{или} \quad A = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \quad \text{и} \quad A =$$

$$\frac{m}{M} RT \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad \text{Теплообмен между газом и окружающей}$$

средой определяют из равенства

$$Q = A \quad \text{и} \quad Q = \frac{m}{M} \cdot RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

12.5.4. Адиабатический процесс. Работа при адиабатическом процессе.

$$\delta Q = 0, \quad dU = \frac{m}{M} C_v dT, \quad \delta A = p \cdot dV, \quad \delta A = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}, \quad \frac{m}{M} C_v dT + \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = 0,$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} = 0, \quad d\left(\ln T + \frac{R}{C_v} \ln V + \text{const}\right) = 0, \quad \ln T + \frac{R}{C_v} \cdot \ln V = \text{const}, \quad \ln TV^{\frac{R}{C_v}} = \text{const},$$

следовательно, $TV^{\frac{R}{C_v}} = \text{const}$, или, учитывая уравнение Майера $C_p - C_v = R$,

получим $TV^{\frac{C_p - C_v}{C_v}} = TV^{\gamma - 1} = \text{const}$, или $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1}$ (1). Учитывая, что

$$pVT^{\frac{R}{C_v}} = \frac{m}{M} RT \cdot \text{const}, \quad \text{получим} \quad pV^{\gamma} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}. \quad \text{Аналогично} \quad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$$

Эти три уравнения: $pV^{\gamma} = \text{const}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$ называют *уравнениями Пуассона*.

$$\text{Работа} \quad A = U_1 - U_2 = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} \cdot R \left(T_1 - T_2 \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{m}{M} RT_1 - \frac{m}{M} RT_2 \right) = \frac{i}{2} \left(p_1 V_1 - p_2 V_2 \right), \quad \text{или, т.к.}$$

$$i/2 = 1/[(i=2)/i - 1], \quad \gamma = (i+2)/i, \quad \text{то} \quad i/2 = 1/(\gamma-1) \quad \text{и} \quad A = 1/(\gamma-1) \cdot (p_1 V_1 - p_2 V_2).$$

12.5.5. Политропный процесс.

Обобщением рассмотренных изопроцессов, происходящих в идеальных газах, является *политропный процесс*, термодинамически описываемый уравнением $pV^n = \text{const}$, где n – показатель степени *политропы*: $n = 0$ – процесс изобарический, $n = 1$ – изотермический, $n = \gamma$ – адиабатический и $n = \pm \infty$ –

изохорический. Тогда теплоёмкость определяют как $C = (n-\gamma)R/(n-1)(\gamma-1)$, а работа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right].$$

Лекция 13. Второе начало термодинамики.

13.1. Обратимые и необратимые процессы.

Второе начало термодинамики (принцип Карно) не противоречит принципу эквивалентности тепла и работы, но добавляет к нему некоторые ограничения, поскольку оно уточняет условия, при которых работа может быть получена за счёт эквивалентного тепла. Первое начало указывает, что в разных процессах энергия сохраняется, однако не указывает направления, в котором происходит эволюция системы.

Формулировка второго начала, уточняющего направление и характер эволюции системы, не столь проста как первого. Его применение требует чёткого разграничения обратимых и необратимых процессов (в изолированной системе).

Мы уже рассмотрели несколько примеров необратимых процессов (яйцо – яичница – яйцо), добавим к ним ещё следующие: взрыв, процессы, сопровождающиеся механическим трением, т.к. в них часть энергии превращается в тепло (например, вращение жидкости в неподвижном сосуде приводит к нагреванию жидкости; обратное явление, при котором некоторое количество тепла спонтанно превращалось бы в работу не наблюдалось, – до сих пор не наблюдалось, чтобы жидкость, находящаяся в сосуде, начала вращаться за счёт тепла, содержащегося в ней, и в результате начала охлаждаться).

Обратимые процессы, как показывает их название, могут протекать и в обратном направлении, образуя замкнутый цикл. Условия, относящиеся к свойствам процессов, образующих цикл, состоят в требовании их обратимости. Это выражение предполагает, что речь идёт только о возможности пройти рассматриваемый цикл преобразований в обратном направлении. Эта возможность, которую Монтейль назвал «возвратимостью», действительно необходима, но отнюдь не достаточна. Надо, чтобы в процессе преобразований система проходила через последовательность состояний, бесконечно близких состоянию равновесия. Иными словами, бесконечно малое изменение внешних условий достаточно для того, чтобы перевести систему из данного равновесного состояния в другое равновесное состояние, причём, направление этого перехода определяется вызывающим его изменением. Если это изменение вызвано источником тепла, то условие обратимости требует, чтобы температура источника бесконечно мало отличалась от температуры системы, с которой происходит теплообмен. Аналогично, если изменение касается агента механической природы (например, силы, действующей на поршень), то условие обратимости требует отсутствия всякого трения. При выполнении этих двух условий рассматриваемое

преобразование может быть повторено в обоих направлениях бесконечное число раз, причём количество передаваемого тепла и произведенной работы будут иметь одно и то же абсолютное значение. По возвращении системы в начальное состояние полное количество переданного тепла и произведенной работы равны нулю.

Если прямой процесс $1 \rightarrow 2$ (необратимый) можно дополнить обратимым процессом $2 \rightarrow 1$ до замкнутого цикла (рис. 13.1), то изучение процесса $2 \rightarrow 1$ (в изолированных системах) позволяет получить сведения, происходящие в системе при процессе $1 \rightarrow 2$ и ускользающих от прямых термодинамических исследований.

Второе начало термодинамики рассматривает превращение тепла в механическую работу (энергию) в идеальной машине (т.е. машине без трения), которая действует по периодическому замкнутому циклу. Его можно сформулировать так: *невозможно при помощи периодически действующей машины полностью превратить в механическую работу всю теплоту, содержащуюся в одном тепловом резервуаре при одной температуре (термостате).*

13.2. Тепловые машины. Цикл Карно.

Машина Карно является идеальной и работает по обратимому циклу. Рабочим телом в ней является идеальный газ. К.п.д. тепловой машины подсчитывают по формуле $\eta = \frac{Q_h - Q_x}{Q_h}$. Таким образом, из всей теплоты Q_h , передаваемой системе нагревателем, только часть ηQ_h превращается в механическую работу, вторая же часть $Q_x = (1 - \eta)Q_h$ рассеивается, т.е. передаётся холодильнику. Рассмотрим работу такой машины (рис.13.2).

$$1 \rightarrow 2 \text{ – изотермическое расширение: } A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, Q_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

$$2 \rightarrow 3 \text{ – адиабатическое расширение: } A_{23} = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_2), Q_{23} = 0.$$

$$3 \rightarrow 4 \text{ – изотермическое сжатие: } A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}, Q_{34} = - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

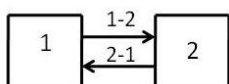


Рис. 13.1

4→1 – адиабатическое сжатие: $A_{41} = \frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1), Q_{41} = 0.$

Для двух адиабатических процессов уравнения Пуассона имеют вид: $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$, откуда, после деления, имеем: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$

Совершаемая работа $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$ и $A = \frac{m}{M} R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$, полученное

тепло $Q_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \eta = \frac{A}{Q_{12}},$ откуда к.п.д. машины Карно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$

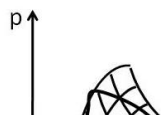
Итак, $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$ откуда $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ и сумма приведенных $\left(\frac{Q}{T}\right)$ теплот $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$

13.3. Неравенство Клаузиуса.

Наличие сил трения приводит к необратимости. В этом случае $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1},$

откуда $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0.$ В общем случае: $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0.$

Таким образом, между точками 1 и 3 величина Q/T претерпевает одно и то же изменение при движении по пути 1→2→3 или по пути 1→4→3. Когда рабочее тело описывает полный цикл, т.е. после ряда обратимых превращений оно возвращается в исходное состояние, полное изменение величины Q/T равно нулю. Для реальных же процессов (с трением) сумма приведенных теплот не равна нулю: $\sum \frac{Q_i}{T_i} < 0.$



Рассмотрим подробнее обратимый цикл: все

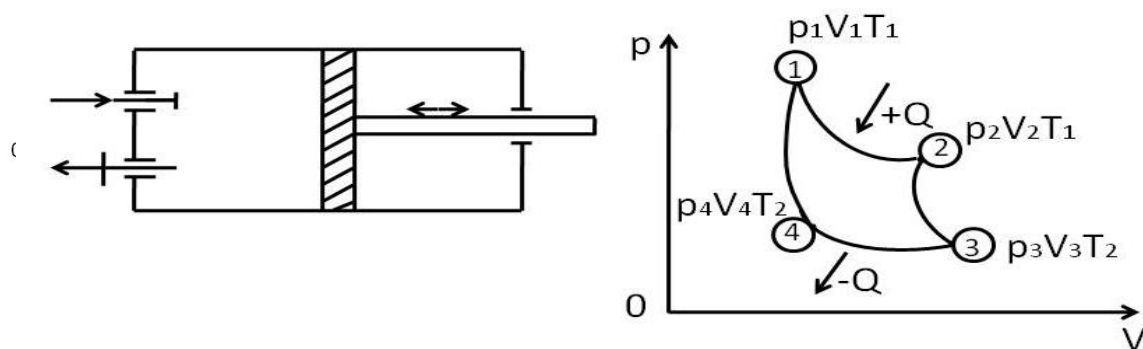


Рис. 13.2

обратимые круговые циклы, совершаемые какой-либо системой можно представить в виде суммы бесконечно малых циклов Карно, для каждого из которых справедливо соотношение: $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$. Тогда оказывается достаточным записать это соотношение для к.-л. из элементарных циклов, а затем просуммировать по всем циклам: $\sum Q/T = 0$, или в пределе $\oint \frac{dQ}{T} = 0$ (рис. 13.3).

Полученный результат показывает, что $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ не зависит от пути интегрирования (последовательности промежуточных состояний). Величину S , определяемую с точностью до аддитивной постоянной из уравнения $dS = dQ/T$, называют *энтропией*. $[S] = \text{Дж/К}$. $s = S/m$ – удельная энтропия. $[s] = \text{Дж/кгК}$ – размерность удельной теплоёмкости. Однако, сравнивая определения $C = dQ/dT$ и $S = \int \frac{dQ}{T}$, приходим к заключениям:

1. В данном состоянии рабочего тела *теплоёмкость* имеет вполне определённое значение, если указан способ передачи тепла рабочему телу. *Энтропия* также является функцией состояния, но её значение не зависит от изменения рабочего тела вблизи заданного состояния. Следовательно, именно теплоёмкость величина переменная, а энтропия – величина статическая. Но что очень важно, энтропия в противоположность теплоёмкости известна только с точностью до аддитивной постоянной.

2. В определение теплоёмкости температура входит в дифференциальной форме и выбор шкалы измерения температуры ($^{\circ}\text{C}$ или K) не скажется на значении теплоёмкости. Не так для энтропии, т.е. энтропия – величина, равная энергии, отнесённой к единице абсолютной температуры.

Таким образом, изменение энтропии при переходе системы $1 \rightarrow 2$ $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_{об}}{T}$.

Для необратимого процесса $\int_1^2 \frac{dQ_{необр}}{T} < 0$ и, таким образом, не имеет определённого значения. Соединение необратимого процесса обратимым приводит к:

$\oint \frac{dQ_{необр}}{T} = \int_1^2 \frac{dQ_{необр}}{T} + \int_2^1 \frac{dQ_{об}}{T}$, или $\int_1^2 \frac{dQ_{необр}}{T} + S_1 - S_2 < 0$ и $\int_1^2 \frac{dQ_{необр}}{T} < S_2 - S_1$. Для изолированной системы $dQ_{необр} = 0$, тогда при $1 \rightarrow 2$ $\Delta S = S_2 - S_1 > 0$. В изолированной системе, предоставленной самой себе, процессы всегда происходят в направлении увеличения энтропии. Состояние равновесия характеризуется максимумом энтропии, $dS=0$. Для адиабатического процесса $dQ=0$, $S = \text{const}$ – *изоэнтропийный процесс*.

13.4. Статистическая интерпретация энтропии.

Парадокс Лошмидта привёл Больцмана к вероятностной трактовке энтропии. Было установлено соотношение между энтропией системы и вероятностью данного состояния системы.

Количественной характеристикой теплового состояния тела, описывающей его стремление переходить в другие состояния, является *число микроскопических*

способов, которым это состояние может быть осуществлено. Это число называют *статистическим весом состояния, или термодинамической вероятностью (или «кратностью вырождения») Ω* .

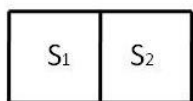
Пусть система состоит из двух подсистем, почти не зависящих друг от друга (рис. 13.4). Тогда энтропия всей системы S равна сумме энтропий обеих подсистем: $S = S_1 + S_2$. Число способов Ω , которым может осуществляться состояние системы, равно произведению чисел способов Ω_1 и Ω_2 , которыми могут быть осуществлены состояния каждой из этих подсистем в отдельности: $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$. Итак, мы допустили, что энтропия является функцией вероятности: $S = F(\Omega)$, тогда имеем: $F(\Omega) = F(\Omega_1 \cdot \Omega_2) = F(\Omega_1) + F(\Omega_2)$. Для нахождения вида неизвестной функции F дифференцируем это выражение сначала по Ω_1 , а затем по Ω_2 : $\Omega_2 \cdot F'(\Omega_1 \Omega_2) = F'(\Omega_1)$, $\Omega_1 \cdot F'(\Omega_1 \Omega_2) = F'(\Omega_2) \rightarrow \Omega_2 / \Omega_1 = F'(\Omega_1) / F'(\Omega_2)$, откуда получаем $\Omega_1 F'(\Omega_1) = \Omega_2 F'(\Omega_2)$, или $\Omega \cdot F'(\Omega) = k$, т.е. $\Omega \cdot dF(\Omega) / d\Omega = k$. Разделяя переменные и интегрируя, получим: $dF(\Omega) = k \cdot d\Omega / \Omega$, $F(\Omega) = k \cdot \ln \Omega + \text{const}$. Отсюда с точностью до постоянной получаем *формулу Больцмана для энтропии*: $S = k \ln \Omega$ - энтропия системы пропорциональна логарифму термодинамической вероятности.

13.5. Основное уравнение термодинамики.

Из первого и второго законов термодинамики $\delta Q = dU + \delta A$ и $dS = \delta Q / T$ получаем: $TdS = dU + \delta A$, $TdS = dU + pdV$, т.к. $dU = (\partial U / \partial T)_V \cdot dT + (\partial U / \partial V)_T \cdot dV$, то $TdS = (\partial U / \partial T)_V \cdot dT + [p + (\partial U / \partial V)_T] \cdot dV$, откуда $(\partial S / \partial T)_V = C_V / T$ и *основное уравнение имеет вид*: $(\partial S / \partial V)_T = \frac{1}{T} [p + (\partial U / \partial V)_T]$.

13.6. Термодинамические потенциалы.

Термодинамические потенциалы – определённые функции независимых макроскопических параметров, полностью задающих термодинамическое состояние системы. Зная термодинамические потенциалы (ТП) как функцию к.-л. полного набора параметров, можно дифференцированием и интегрированием вычислить не только все остальные параметры, но и любые макроскопические характеристики системы и происходящих в ней термодинамических процессов.



Использование ТП – основа всех расчётов в современной

Рис. 13.4 термодинамике. Для каждого полного набора независимых параметров существует свой «естественный» ТП, вычисления с помощью которого производятся наиболее просто. Так, выбору в качестве независимых переменных энтропии S , объёма V , числа частиц N и обобщённых координат x_i отвечает ТП, называемый *внутренней энергией* $U(S, V, N, x)$; выбору T, V, N, x – *свободная энергия* $F(T, V, N, x)$. ТП в переменных T, p, N, x называют *термодинамическим потенциалом Гиббса* $G(T, p, N, x)$, а в переменных S, p, N, x – *энтальпией* $H(S, p, N, x)$. Часто используют ТП в переменных T, V, x и химического потенциала μ : $\Omega(T, V, x, \mu)$.

Эти ТП связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$U = F + TS \qquad H = pV$$

$$\begin{aligned}
F &= U - TS \\
H &= U + pV \\
G &= U - TS + pV \\
\Omega &= U - TS - \mu N \\
U &= G + TS - pV \\
F &= G - pV \\
H &= G + TS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F + TS + pV \\
F + pV \\
F - \mu N \\
\Omega + TS + \mu N \\
\Omega + \mu N \\
\Omega + TS + \mu N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H - TS - pV \\
H - TS \\
H - TS - \mu N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \\
\Omega &= G - pV - \mu N.
\end{aligned}$$

$$\Omega + pV + \mu N$$

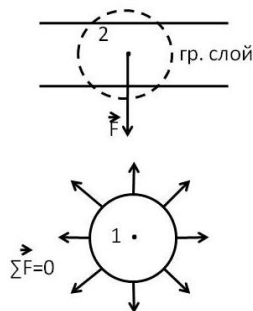


Рис. 14.1

Лекция 14. Реальные газы и пары.

14.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса.

При низких давлениях и высоких температурах состояние газа описывают уравнением Менделеева – Клапейрона с достаточной степенью точности. Однако, при повышении давления и понижении температуры газа, последний можно перевести в жидкое и далее в твёрдое состояние. Это показывает, что не во всех случаях можно пренебрегать взаимодействием между молекулами, а также собственным объёмом молекул, т.к. пренебрежение ими приводит к бесконечно большим давлениям при сжатии газа. Поправки на давление и объём молекул в формулу Менделеева – Клапейрона $pV = (m/M) \cdot RT$ ввёл Ван-дер-Ваальс:

1. Объём газа, не занятый молекулами, равен $V - b$ (для 1 моля $b = 4Nv_0$).
2. Влияние сил сцепления в среднем равно нулю для молекул, находящихся в глубине газа. Для молекулы, центр которой находится в граничном слое газа толщиной, равной радиусу сферы молекулярного действия, имеется асимметрия сил, результатом чего является внутреннее давление (особенно выраженное у жидкостей). Рассмотрим граничный слой жидкости (газа) (рис. 14.1):

а) Составляющая силы, действующей на молекулы и направленная внутрь, пропорциональна числу соседних молекул, т.е. плотности $\rho \sim 1/V$.

б) Внутреннее давление равно сумме сил, действующих на единицу площади поверхностного слоя, которая также $\sim \rho \sim 1/V$. Следовательно, $p_{\text{вн}} = a/V^2$, где a – постоянная, связанная с силами Ван-дер-Ваальса. Тогда уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моля запишется: $(p + a/V^2) \cdot (V - b) = RT$. Для любого количества газа

$$(p + (\frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2})) \cdot (V - \frac{m}{M} b) = \frac{m}{M} RT.$$

14.2. Изотермы Ван-дер-Ваальса и изотермы Эндрюса.

Для исследования поведения 1 моля реального газа решим уравнение состояния относительно V : $V^3 - (b + RT/p)V^2 + (a/p)V - ab/p = 0$. При заданных p и T это уравнение третьей степени относительно V (рис. 14.2).

На участках ge и ca зависимость $p = f(V)$ имеет нормальный характер: давление уменьшается при увеличении объёма. Участок es соответствует неестественному состоянию, когда сжатие вещества приводило бы к уменьшению давления. Очевидно, что такие состояния вообще не могут осуществляться в природе. Наличие неосуществимого участка es изотермы означает, что при постепенном изменении объёма вещество не может всё время оставаться в виде однородной среды; в некоторый момент времени должно наступить скачкообразное изменение состояния и распада вещества на две фазы. Другими словами истинная изотерма будет иметь вид ломаной линии $abfg$ (изотерма Эндрюса). Часть её ab – отвечает газообразному состоянию, а часть fg – жидкому, bf – двухфазное состояние. Причём, можно показать, что $S_{bcd} = S_{def}$.

Что касается bs и ef , то они отвечают метастабильным состояниям – переохлаждённому пару и перегретой («растянутой») жидкости.

При повышении температуры прямолинейный участок изотермы уменьшается и при критической температуре стягивается в точку (K). Здесь a – кривая фазового равновесия, b – кривая, ограничивающая область, в которой неразделённое на фазы вещество не может существовать даже в метастабильном состоянии.

14.3. Критические параметры и константы Ван-дер-Ваальса.

В критической точке $(dp/dV)_T = 0$. В этой точке $p = p_k$, $V = V_k$, $T = T_k$. Критические значения p_k , V_k , T_k можно связать с параметрами a и b . При $T = T_k$, $p = p_k$ все три корня уравнения Ван-дер-Ваальса $V^3 - (b + RT_k/p_k)V^2 + (a/p_k)V - ab/p_k = 0$ одинаковы и равны V_k . Поэтому это уравнение должно быть тождественным уравнению $(V - V_k)^3 = V^3 - 3V^2V_k + 3VV_k^2 - V_k^3 = 0$. Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях V даёт: $b + RT_k/p_k = 3V_k$, $a/p_k = 3V_k^2$, ab/p_k . Решая их

относительно критических параметров, получим: $V_k = 3b$, $p_k = a/27b^2$, $T_k = 8a/27Rb$.

Если в качестве единиц для p , V и T выбрать их критические значения, то уравнение состояния реального газа становится одинаковым для всех веществ.

$p^* = p/p_k$, $T^* = T/T_k$, $V^* = V/V_k \rightarrow (p^* + 3/V^{*2}) \cdot (3V^* - 1) = 8T^*$ – закон соответственных состояний.

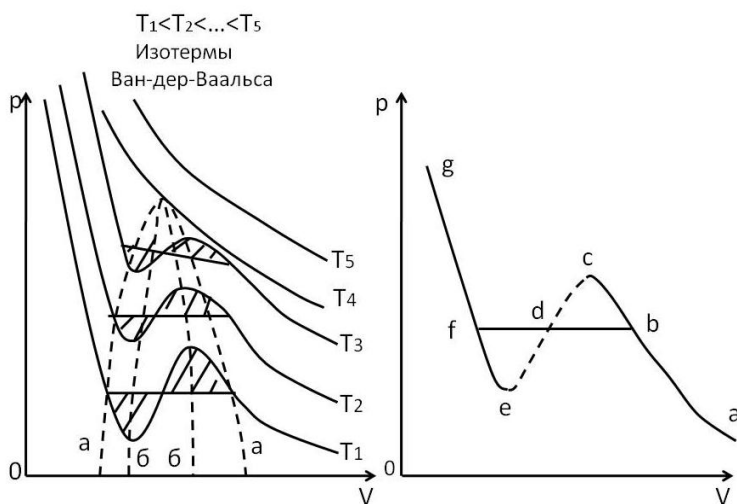


Рис. 14.2

14.4. Внутренняя энергия реального газа. Адиабатическое расширение газа в пустоту. Эффект Джоуля – Томсона.

Предположим, что для реального газа по-прежнему применима теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Для одного моля $E_k = (i/2)RT = C_V T$. Выражение для потенциальной энергии взаимодействия

молекул найдём следующим образом: при расширении газа от V_1 до V_2 внутримолекулярное давление $p_{\text{вн}} = a/V^2$ совершает работу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{вн}} dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}. \quad \text{Так как}$$

работа внутренних сил равна изменению потенциальной энергии системы, то $-(a/V)$ – выражение для потенциальной энергии одного моля газа: $U = C_V T - a/V$.

Рассмотрим адиабатическое расширение газа, при котором газ внешней работы не совершает

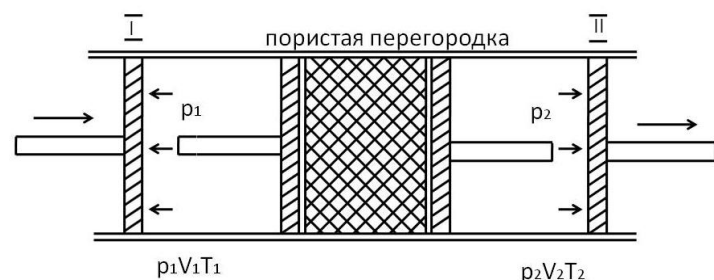


Рис.14.3

(расширение в вакуум): $Q = (U_2 - U_1) + A$, $Q = 0$, $A = 0$, $U_2 = U_1$ – применимо и для идеального и для реального газов. Но для идеального газа равенство $U_2 - U_1 = 0$ означает $T_1 = T_2$, для реального же газа $U_1 = C_V T_1 - a/V_1$, $U_2 = C_V T_2 - a/V_2$ и равенство $U_1 = U_2$ приводит к $T_1 - T_2 = (a/C_V) \cdot (1/V_1 - 1/V_2)$ и т.к. при расширении $V_2 > V_1$, то $T_1 > T_2 \rightarrow$ *реальный газ при расширении охлаждается*. Это охлаждение объясняется тем, что часть кинетической энергии теплового движения молекул переходит при расширении в потенциальную энергию их взаимодействия.

Изменение температуры при расширении реального газа через пористую перегородку называют эффектом Джоуля–Томсона (рис. 14.3).

$Q = (U_2 - U_1) + A = 0 \rightarrow U_2 - U_1 + (A_2 - A_1) = 0 \rightarrow U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$, $pV = RT - a/V + bp + ab/V^2$ и окончательно:

$$(C_V + R) \cdot (T_1 - T_2) = 2a(1/V_1 - 1/V_2) - b(p_1 - p_2) - ab(1/V_1^2 - 1/V_2^2).$$

Знак $T_1 - T_2$ зависит от соотношения между положительными и отрицательными величинами в правой части этого выражения. Рассмотрим два предельных случая:

1. Допустим, что у газа величина a очень мала, а b – велика, т.е. силы взаимодействия между молекулами очень слабы, но размеры самих молекул велики: $(C_V + R) \cdot (T_1 - T_2) \cong -b(p_1 - p_2)$, т.к. $p_2 < p_1$, то $T_2 > T_1$, т.е. при таком расширении газ *нагревается*.

2. Допустим, что у другого газа величина b мала, а a – велика, тогда:

$(C_V + R) \cdot (T_1 - T_2) \cong 2a(1/V_1 - 1/V_2)$ т.к. $V_2 > V_1$, то $T_1 > T_2$, т.е. газ *охлаждается*.

Эффект Джоуля – Томсона используют для охлаждения и сжижения газов (табл.4.1).

Таблица

Вещество	$10^{-6}a, \frac{\text{ат} \cdot \text{см}^3}{\text{гмоль}}$	$b, \frac{\text{см}^3}{\text{гмоль}}$	$t_k, ^\circ\text{C}$	$P_k, \text{ ат}$	$V_k, \text{ см}^3$
N_2	1,35	39,6	-147	33,5	90,3
O_2	1,36	31,9	-119	50,8	79,9
CO_2	3,61	42,8	+31	73	98,2
H_2O	5,47	30,5	+347	218	55

14.5. Температура атмосферы высоко над уровнем моря

Основной причиной изменения температуры является конвекция в тропосфере – непрерывное перемешивание воздуха из низших слоев в высшие и из высших в низшие. При переходе воздуха из низших слоев в высшие он расширяется. Так как воздух плохой проводник тепла, то процесс расширения – адиабатический.

Изменение давления p с высотой z имеет вид:

$$dp = -\rho g dz, \quad pV = \frac{m}{\mu} RT \rightarrow \rho = \frac{pM}{RT} \rightarrow dp = -\frac{gMp}{RT} dz$$

Из уравнения Пуассона

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const} \rightarrow T = \text{const} \cdot p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow \ln T = \ln \text{const} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln p \rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} \rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}$$

$$p = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gM}{R} \frac{dp}{dT} dz \rightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gM}{R}$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1,4-1}{1,4} \cdot \frac{9,8 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31} \rightarrow \frac{dT}{dz} = -9,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{К}}{\text{м}}, \text{ или}$$

$$\frac{dT}{dz} = -9,8 \frac{\text{К}}{\text{км}}$$

В действительности эта величина несколько больше, чем наблюдаемое среднее значение, т.к. мы пренебрегли конденсацией водяного пара.

14.6. Особенности газообразного, жидкого и твердого состояний вещества

Правило фаз Гиббса утверждает: система, состоящая из f фаз и n независимых компонент, имеет степень изменчивости (или число степеней свободы) ν , равную $\nu = 2 + n - f$.

Пусть система составлена из смеси трех различных фаз одного вещества: твердой, жидкой и газообразной, например, лед, вода и водяной пар. Мы имеем одну компоненту и три фазы: $n=1$, $f=3$, тогда $\nu = 0$. Это значит, что нет никакой свободы выбора: три фазы могут одновременно существовать только при определенных значениях температуры и давления (T_t , p_t – тройная точка) (рис.14.4). Тройная точка воды находится при $T_t=0,0075^\circ\text{C}$ и $p_t=0,00602$ атм. Так как давление в тройной точке меньше атмосферного, то горизонтальная линия $p=1$ атм (пунктирная линия на диаграмме) пересекает три области: лед, жидкость и пар.

АД- кривая фазового равновесия вода-лед;

АВ- кривая фазового равновесия вода-пар;

АС- кривая фазового равновесия лед-пар.

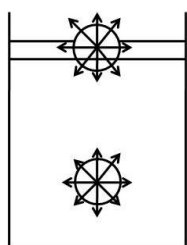


Рис. 15.1

Лекция 15. Жидкости.

15.1. Поверхностное натяжение.

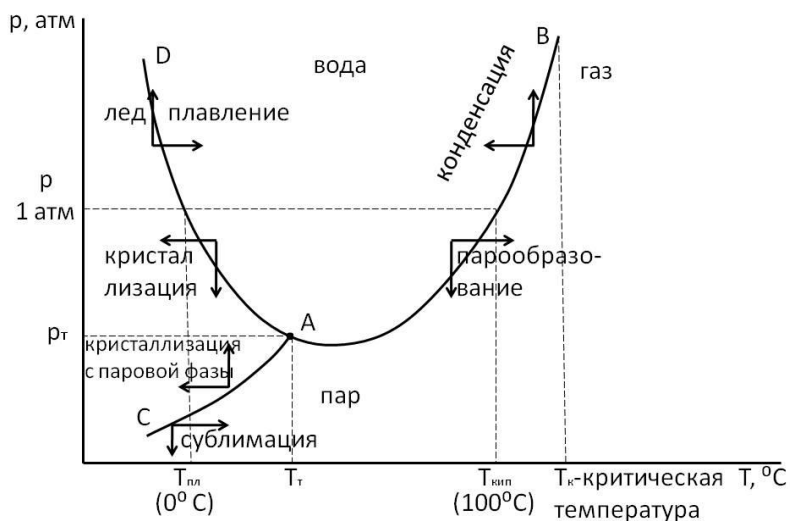


Рис.14.4

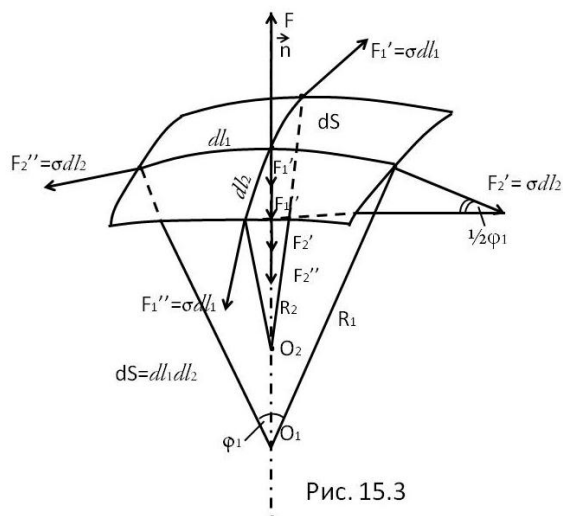
Поверхностные эффекты, обусловленные межмолекулярными силами сцепления, у жидкостей проявляются в гораздо большей степени, чем у газов. Наличие у тел свободной поверхности приводит к поверхностным или капиллярным явлениям.

Строго говоря, всякое тело находится не в вакууме, а в к.л. другой среде, например, атмосфере. Поэтому следует говорить не просто о поверхности тел, а о

поверхности раздела двух сред.

Поверхностное натяжение вызывает образование капель жидкости и стремится придать им выпуклую или даже сферическую форму, если объём капель настолько мал, что действие других сил (тяжесть, электрические силы) незначительно по сравнению с действием поверхностного слоя. В случае тонких жидких плёнок (например, мыльные пузыри), которые в сечении представляют

собой как бы две соединённые между собой поверхности, преобладающими являются поверхностные силы. Они и определяют равновесную форму плёнки (совместно с силами внешнего давления). Энергия молекул внутри и в

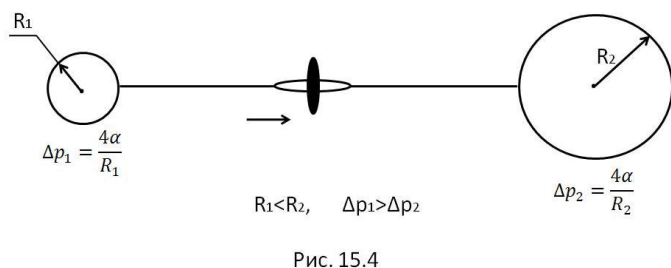


поверхностном слое жидкости различны (рис. 15.1). Разность между энергией всех молекул (обеих сред) вблизи поверхности раздела и той энергией, которую эти молекулы имели бы, если бы они находились внутри тела, называют *поверхностной энергией*.

Поверхностная энергия пропорциональна площади S поверхности раздела:

$U = \sigma S$, где σ - коэффициент поверхностного натяжения. Он зависит от природы соприкасающихся сред и от их состояния.

Как известно из механики, силы действуют всегда так, чтобы привести тело в



состояние с наименьшей энергией. Отсюда следует, что, т.к. поверхностная энергия стремится принять наименьшее возможное значение, то коэффициент σ всегда положителен. В противном случае соприкасающиеся среды не могли бы

существовать в раздельном виде — их поверхности раздела стремились бы неограниченно увеличиваться, т.е. обе среды стремились бы взаимно перемешаться.

Рассмотрим ряд преобразований (рис. 15.2): $F = -dU/dx$, $-dA = dU$,

$dU = \sigma \cdot dS$, $-Fdx = \sigma dS$, $F = -\sigma \cdot dS/dx$, $dS = (a+b+c+d) \cdot dx$, $(a+b+c+d) = \ell \rightarrow F = -\sigma \cdot \ell$. Таким образом, на линию, ограничивающую поверхность тела (или к.-л. участок этой поверхности), действуют силы, направленные перпендикулярно этой линии по касательной к поверхности, внутрь тела. Сила, отнесенная к единице длины, равна коэффициенту поверхностного натяжения σ . $[\sigma] = \text{Дж/м}^2 = \text{Н/м}$.

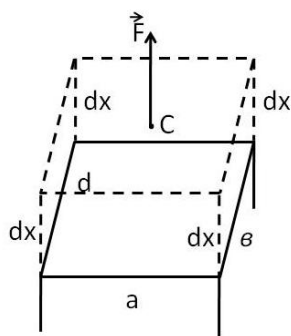


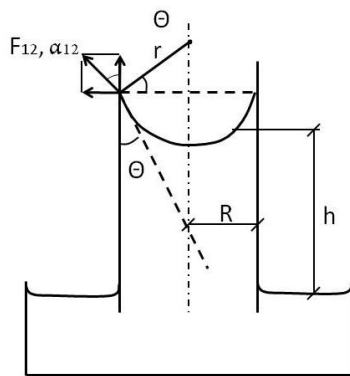
Рис. 15.2

15.2. Жидкие плёнки. Формула Лапласа.

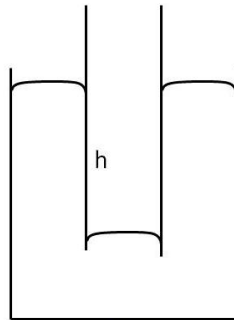
Рассмотрим элемент поверхности dS жидкости, находящейся в равновесии. Предположим, что давление по обе стороны dS различны. В этом случае равновесие будет только тогда, когда силы давления, действующие на dS , уравниваются силами поверхностного натяжения, которые действуют на границу элемента dS (рис. 15.3).

$$F = F'_{1n} + F''_{1n} + F''_{2n} \cdot F'_{2n} = \sigma \cdot d\ell_2 \cdot \sin \varphi_1 / 2 = = 1/2 \cdot \sigma \cdot d\ell_2 \cdot \varphi_1 = F''_{2n},$$

$$F'_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot d\ell_2 \cdot d\ell_1 / R_1 = F''_{2n}, \quad F'_{1n} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot d\ell_1 \cdot d\ell_2 / R_2 = F''_{1n} \text{ и}$$



$$2\pi R \sigma \cos \theta = \pi R^2 \rho g h$$



$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g h}$$

Рис. 15.7

$\Delta p \cdot dS = 2F_1 + 2F_2$, $\Delta p \cdot d\ell_1 \cdot d\ell_2 = \sigma \cdot d\ell_2 \cdot d\ell_1 / R_1 + \sigma \cdot d\ell_1 \cdot d\ell_2 / R_2 \rightarrow \Delta p = \sigma \cdot (1/R_1 + 1/R_2)$ – *формула Лапласа*. В случае сферической формы капли жидкости $R_1 = R_2 = R$ и $\Delta p = 2\sigma/R$. Если жидкая плёнка образует полую сферу (мыльный пузырь), то $\Delta p = 4\sigma/R$. При соединении двух мыльных пузырей меньший пузырь будет уменьшаться, а больший – увеличиваться в размерах (рис. 15.4).

15.3. Капиллярные явления.

Капиллярными называют явления, происходящие на границе соприкосновения различных веществ: твёрдых, жидких и газообразных.

Рассмотрим капиллярные явления у границы трёх сред (рис. 15.5): 1 – твёрдая, 2 – жидкая, 3 – газообразная. К линии соприкосновения трёх сред вместе (О – линия, перпендикулярная плоскости чертежа) приложены три силы поверхностного натяжения, каждая из которых направлена по касательной внутрь поверхности соприкосновения соответствующих двух сред. По величине они, отнесённые к единице длины, равны соответственно σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} . Угол между поверхностью и твёрдой стенкой называют *краевым углом* θ . Поверхность жидкости устанавливается так, чтобы равнодействующая σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} не имела составляющей вдоль стенки сосуда (перпендикулярная составляющая уничтожается сопротивлением стенки). Таким образом, условия равновесия у стенки запишутся:

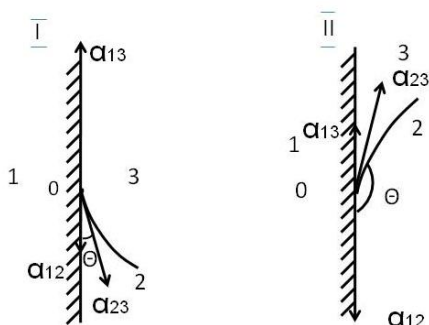


Рис. 15.5

$\sigma_{13} = \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta$, $\rightarrow \cos \theta = (\sigma_{13} - \sigma_{12}) / \sigma_{23}$. Если $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, то $\cos \theta > 0$, $\angle \theta$ – острый, – *смачивание*, $\sigma_{13} < \sigma_{12}$, $\cos \theta < 0$, $\angle \theta$ – тупой, не смачивает (рис. 15.6). $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| \leq \sigma_{23}$.

Ранее было указано, что в состоянии равновесия давления соприкасающихся тел должны быть одинаковыми. В действительности это

утверждение справедливо лишь постольку, поскольку пренебрегают капиллярными явлениями. При учёте поверхностного натяжения давления в соприкасающихся средах, вообще говоря, оказываются различными.

Выведем формулу для высоты поднятия (опускания) жидкости в капилляре цилиндрической формы (рис. 15.7).

$$2\pi R \sigma \cdot \cos \theta = \pi R^2 \rho g h \rightarrow (2\sigma \cos \theta) / \rho g R.$$

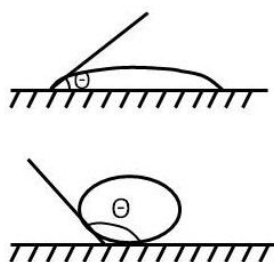


Рис. 15.6

