МІНІСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Севастопольський национальный технический университет

В.А. Крамарь

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СИСТЕМНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

Севастополь
2010

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

ББК 22.16

К78

ISBN 978-966-2960-58-7

УДК 517

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф., профессор кафедры производства приборов Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» Антонюк В.С.;
д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой «Высшей математики» Севастопольского национального технического университета Ю.Е. Обжерин;
д-р техн. наук, начальник кафедры святи и автоматизированных систем управления Севастопольского Военно – морского ордена Красной Звезды института имени П.С. Нахимова Д.Б. Кучер;

Научный редактор – В.Я. Копп, д-р техн. наук, проф.

Решение МОН Украины о присвоении грифа учебного пособия №1/11-8/35 от 29.09.2009

Крамарь В.А.

К78 Специальные разделы математики для системной инженерии: учебн. пособие /В.А. Крамарь. - Севастополь: Изд-во СевНТУ,2010.- 153с.

ISBN **978-966-2960-58-7**

Рассмотрены специальные разделы математики, которые используются при изучении ряда специализированных дисциплин по направлению «Системная инженерия». Приведены основные понятия, определения, теоремы. Для закрепления теоретического материала в конце каждого раздела приведены упражнения.

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов, а также слушателей отделений переподготовки и повышения квалификации в области системной инженерии.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

СОДЕРЖАНИЕ

Содержание 3
Предисловие 6
1. Теория множеств в описании систем 7
1.1. Определение множества. Операции над множествами 7
1.2. Операции над множествами 9
1.3. Прямое произведение множеств 14
1.4. Проекция и сечения множеств 15
1.5. Отображения и функции множеств 17
1.6. Бинарные отношения 20
1.7. Упражнения 23
2. Методы линейной алгебры в теории систем 26
2.1. Матричная алгебра 26
2.1.1. Определение матрицы 26
2.1.2. Некоторые специальные матрицы 26
2.1.3. Операции над матрицами и их свойства 28
2.1.4. Определители и их свойства 33
2.1.5. Миноры и их свойства. Ранг матрицы 36
2.1.6. Обратная матрица 38
2.1.7. Упражнения 39
2.2. Линейные конечномерные пространства 41
2.2.1. Понятие линейного пространства 41
2.2.2. Линейная зависимость векторов 42
2.2.3. Базисы и координатные векторы. Замена базиса 46
2.2.4. Нормированные и евклидовы конечномерные пространства 51
2.2.5. Неравенство Шварца (Коши-Буняковского) 53
2.2.6. Проекция вектора на вектор 55

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2.2.7. Ортогональный базис в пространстве R^n. Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта 57
2.2.8. Линейные оболочки, подпространства 60
2.2.9. Операции над линейными подпространствами 63
2.2.10. Ортогональные подпространства 65
2.2.11. Упражнения 68
2.3. Линейные операторы 70
2.3.1. Линейные операторы в конечномерных пространствах 70
2.3.2. Влияние замены базиса на матрицу линейного оператора 72
2.3.3. Канонические формы оператора в конечномерных пространствах 73
2.3.4. Линейные операторы, отображающие конечномерное пространство в себя 75
2.3.5. Характеристический многочлен квадратной матрицы 76
2.3.6. Инвариантные подпространства линейного оператора в пространстве R^n 79
2.3.7. Собственные векторы и собственные числа оператора 79
2.3.8. Канонические формы линейного оператора в пространстве R^n 83
2.3.9. Нормы квадратных матриц 85
2.3.10. Квадратичные формы 86
2.3.11. Упражнения 92
3. Математические методы теории сигналов 95
3.1. Определение сигнала 95
3.2. Линейные пространства сигналов 98
3.3. Нормы непрерывных и дискретных сигналов 98
3.4. Скалярное произведение. Ортогональность сигналов 102
3.5. Линейные подпространства в пространстве сигналов 103
3.6. Обобщенный ряд Фурье и его реализации 109
3.7. Интеграл Фурье. Его связь с рядом Фурье 116

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3.8. Преобразование Лапласа непрерывных сигналов 119
3.8.1. Пространство сигналов экспоненциального роста 119
3.8.2. Свойства изображения сигнала по Лапласу 123
3.8.3. Обратное преобразование Лапласа 124
3.8.4. Взаимосвязь между свойствами сигнала и расположением полюсов его изображения 127
3.8.5. Изображения Лапласа преобразований сигналов 131
3.9. Преобразование Лапласа дискретных сигналов 134
3.9.1. Дискретные сигналы экспоненциального роста 134
3.9.2. z-преобразование 135
3.9.3. Свойства изображения x(z) 136
3.9.4. Обратное z-преобразование 137
3.9.5. Дискретное преобразование Лапласа 139
3.9.6. Обратное дискретное преобразование Лапласа 141
3.9.7. Соответствие между z и s-плоскостями 144
3.9.8. z-преобразование операций над дискретными сигналами 145
3.10. Упражнения 147
Предметный указатель 150
Библиографический список 153

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе курса лекций, прочитанных на протяжении ряда лет студентам, обучающимся по направлению «Системная инженерия». Целью преподавания дисциплины «Специальные разделы математики» является необходимость углубить и расширить знания студентов по ряду направлений высшей математики, которые являются теоретической основой специальных дисциплин, а также дать студентам полное представление об основных принципах работы с различными видами математических моделей, используемых в инженерной практике. Кроме того, студенты должны овладеть навыками решения практических задач. Для этого весь лекционный материал, изложенный в пособии, иллюстрируется практическими задачами. Учебное пособие составлено в соотвествии с рабочей программой дисциплины специальности 06.050201 и обеспечивает полную теоретическую и методическую поддержку соответствующих разделов математики.

Автор выражает глубокую признательность кандидату технических наук, доценту Карапетьяну В.А. и сотруднику университета Альчакову В.В. за помощь и ценные советы, оказанные при подготовке учебного пособия к изданию, а также рецензенту доктору технических наук, профессору Обжерину Ю.Е., чьи полезные замечания и пожелания были учтены в процессе работы над рукописью.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ В ОПИСАНИИ СИСТЕМ

1.1. Определение множества. Операции над множествами

Множество есть совокупность элементов. Все элементы множества предполагаются различными. Элементы множеств – это отдельные объекты, из которых состоит множество.

Принадлежность элемента множеству обозначается как $a \in A$, непринадлежность – как $a \notin A$.

Конечным, называется множество, содержащее конечное число элементов. Количество элементов конечного множества называют мощностью множества A и обозначают $|A|$.

Множества можно задавать при помощи:

1) Перечисления:

$A = \{a, b, c, d, e\}$.

Данный способ возможен лишь для конечных множеств. В скобках перечисляются или называются элементы.

2) Задания свойств:

$A = \{a | \text{ условие принадлежности}\}$.

Пример.

$D = \{x | \sin x = \frac{1}{2}\}$ – в этом множестве бесконечное число элементов.

$N = \{1, 2, 3, ...\}$ – множество натуральных чисел.

Бесконечное множество, элементы которого могут быть пронумерованы натуральными числами, называется счетным.

Пример.

$Z = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ – множество целых чисел – счетное множество.

Множество R и равные ему по мощности множества называются континуальными.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. $R_+ = \{x \mid x \in R \text{ и } x \geq 0\}$.

Пустое множество – это множество, не содержащее элементов (обозначается $\varnothing$). Мощность пустого множества равняется нулю.

$$|\varnothing| = 0.$$

Пример.

$M = \{x \mid x \in R \text{ и } \sin x = 2\}$. $M = \varnothing$.

Универсальное множество – это множество, в которое входят элементы всех множеств, рассматриваемых в исследуемой математической модели. Универсальное множество обозначается как U.

Если любой элемент множества A входит во множество B, то множество A называется подмножеством множества B.

Обозначение: $A \subseteq B$.

Если существует элемент $x \in B$ такой, что $x \notin A$, то множество A называется собственным подмножеством множества B.

Обозначение: $A \subset B$.

Два множества A и B равны $(A = B)$, если A и B содержат строго одинаковые элементы.

Пример. $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$.

Если, A, B и C произвольные множества, то для них справедливы следующие свойства:

- $A = A$ (рефлексивность);
- Если $A = B$, то $B = A$ (симметричность);
- Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$ (транзитивность);
- $\varnothing \subset A$;
- $A \subset A$ (рефлексивность);
- Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность);
- $A \subset B$ и $B \subset A$ если $A = B$;
- Если $A \subset B$, то $|A| \leq |B|$, и если $A \subseteq B$, то $|A| < |B|$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1.2. Операции над множествами

В прикладных задачах часто приходится рассматривать операции над множествами, которые являются подмножествами универсального множества U. Поэтому, чтобы ввести операции нужно ввести систему подмножеств такую, чтобы:

– операции можно было производить над любыми подмножествами из этой системы;

– результатом операции было подмножество из этой системы.

Наиболее часто используется система P(U) – множество всех подмножеств универсального множества U. Если множество U – конечное, то $|P(U)| = 2^{|U|}$.

Пример.

1. $U = \{a,b,c\}$, $P(U) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$.

2. $U = \{a\}$, $P(U) = \{\varnothing,\{a\}\}$.

Объединением двух множеств A и B, обозначается $A \cup B$, называется множество элементы которого принадлежат и множеству A и множеству B или одновременно и A и B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } x \in A, x \in B\}$$

Свойства операции объединения:

1. $A \cup A = A$.

2. Если $A \subseteq B$, то $A \cup B = B$ (Следствия $A \cup \varnothing = A$, $A \cup U = U$).

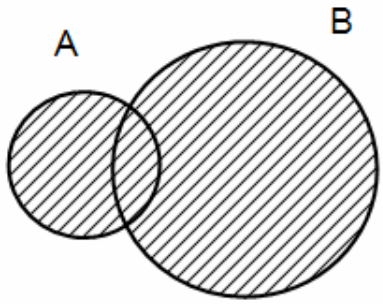


Рисунок 1 – Объединение множеств

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Указанную операцию можно обобщить на любое число множеств:

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Пример. Если $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и $B = \{x_0, x_1, x_2, x_6, x_7\}$, то объединение этих множеств имеет вид

$$A \cup B = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}.$$

Пример. Если $A = \{x : 0 \le x \le 1\}$ и $B = \{x : 0,2 < x < 2\}$, то объединение этих множеств имеет вид

$$A \cup B = \{x : \ 0 \le x < 2\}.$$

Пересечением двух множеств A и B, обозначается $A \cap B$, называется множество, элементы которого принадлежат одновременно и множеству A и множеству B.

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \ \text{и} \ x \in B\}.$$

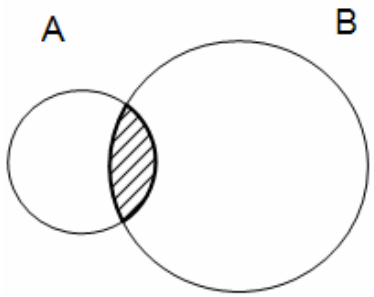


Рисунок 2 – Пересечение множеств

Свойства операции пересечения:

1. $A \cap A = A$.

2. Если $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$ (Следствия $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap U = A$).

Указанную операцию можно обобщить на любое число множеств

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

Пример. Если $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и $B = \{x_0, x_1, x_2, x_6, x_7\}$, то пересечение этих множеств имеет вид

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$A \cap B = \{x_1, x_2, x_6\}.$$

Пример. Если $A = \{x : 0 \le x \le 1\}$ и $B = \{x : 0,2 < x < 2\}$, то пересечение этих множеств имеет вид

$$A \cap B = \{x : 0,2 < x \le 1\}.$$

Пример. Если $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и $B = \{x_0, x_1, x_2, x_6, x_7\}$, то $A \cup B = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ и $A \cap B = \{x_1, x_2, x_6\}$. Следовательно, мощности будут равны $|A| = 6$ и $|B| = 5$, но $|A \cap B| = 3$, т.к. всего три элемента одновременно и во множестве A и во множестве B. Когда же мы формируем объединение, то мы выбираем элементы из обоих множеств, но каждый повторяющийся берется только один раз. Следовательно, $|A \cup B| = 6 + 5 - 3 = 8$.

Разностью между множествами A и B, обозначается $A \setminus B$, называется множество элементы которого принадлежат множеству A но не принадлежат множеству B

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

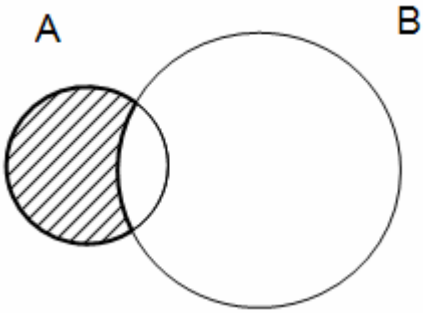


Рисунок 3 – Разность множеств

Необходимо отметить, что операция разности в общем случае не коммутативна, т.е. $A \setminus B \ne B \setminus A$.

Пример. Если $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и $B = \{x_0, x_1, x_2, x_6, x_7\}$, то разность этих множеств имеет вид

$$A \setminus B = \{x_3, x_4, x_5\},\ B \setminus A = \{x_0, x_7\}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Если $A = \{x_1, x_3, x_5\}$ и $B = \{x_0, x_2, x_4, x_6, x_8\}$, то разность этих множеств имеет вид

$$A \setminus B = A \text{ и } B \setminus A = B.$$

Если определено универсальное множество, то дополнением множества A до универсального называется множество, элементы которого принадлежат универсальному множеству и не принадлежат множеству A.

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}$$

Свойства операции дополнения:

1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{U} = \varnothing,\ \overline{\varnothing} = U$.

Большое значение имеет система подмножеств, которая называется разбиением множества U.

Разбиение R(U) – это система множеств A_i, удовлетворяющая следующим требованиям:

1. $\forall A_i \neq \varnothing$.
2. $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$.
3. $\bigcup_i A_i = U$.

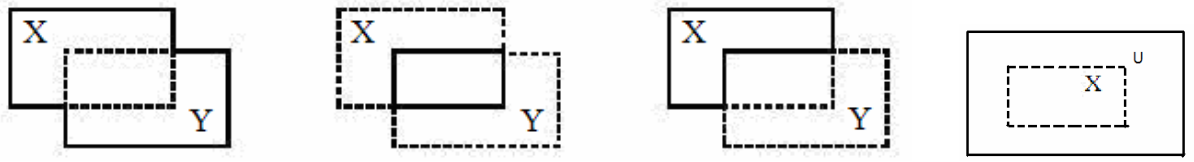
В разбиение может входить конечное и бесконечное количество множеств.

Пример: Укажем разбиения для заданных множеств.

1. $U = \{a, b, c\}$ Разбиения:
   1. $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
   2. $\{\{a, b\}, \{c\}\}$.
2. $U = R$ Разбиения:
   1. $\begin{cases} R_+ = \{x \mid x \in R,\ x \geq 0\} \\ R_- = \{x \mid x \in R,\ x < 0\} \end{cases}$;
   2. $R_k = \{x \mid k \leq x < k+1,\ k - \text{целое}\}$.

Приведем пример представления ряда указанных операций при помощи диаграмм (результат указан пунктирной линией).

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



Пересечение Объединение Разность Дополнение

Рисунок 4 – Операции над множествами

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

• Свойства коммутативности объединения и пересечения.

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

• Свойства ассоциативности объединения и пересечения.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

• Свойства дистрибутивности объединения и пересечения.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

• Законы поглощения

$$A \cap (A \cup B) = A,$$
$$A \cup (A \cap B) = A.$$

• Законы склеивания

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A,$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

• Законы (теоремы) де-Моргана

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1.3. Прямое произведение множеств

Кортежем размерности n называется упорядоченный набор из n элементов

$$\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n),$$

в котором каждый из элементов a_i принадлежит заданному множеству A_i. Здесь a_i – координаты кортежа, а A_i – координатные множества.

Кортежи находят применения во многих областях, в частности – в информатике.

Пример.

1. Положение фигуры на шахматной доске можно описать с помощью двумерного кортежа.

$$A_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \quad A_2 = \{1..8\}.$$

2. Время (в ЭВМ, электронных часах) задается в виде кортежа (чч, мм, сс), где элементы кортежа принадлежат следующим множествам: чч $\in \{0..23\}$, мм, сс $\in \{0..59\}$.

3. Векторы (например, трехмерные)

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad a_i \in R.$$

4. Синусоиды вида $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ $A, \omega \in R_+$ $\varphi \in [0, 2\pi)$ можно описать с помощью кортежа вида

$$y = (A, \omega, \varphi).$$

Если зафиксировать конкретные значения n и A_i, $i = 1..n$, то получим множество кортежей.

Пусть в n-мерных кортежах $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ координаты a_i принадлежат множествам A_i. Тогда, множество всех кортежей a называется прямым произведением множеств

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots A_n.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Прямое произведение множеств еще называют Декартовым произведением, т.к. Р. Декарт первым ввел в математику множество $R \times R = R^2$ – координатную плоскость $(x, y) \in R^2$.

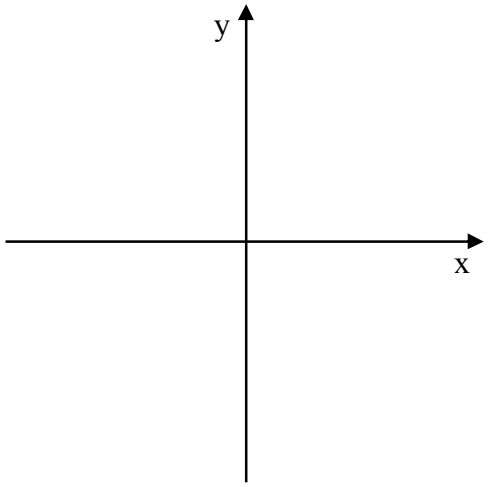


Рисунок 5 – Координатная плоскость $R \times R = R^2$

1.4. Проекция и сечения множеств

Проекции кортежей. Пусть $\bar{a} \in A_1 \times A_2 \times ... A_n$. Тогда, проекцией кортежа a на i-тое координатное множество называется его i-тая координата.

$$Пр_i \bar{a} = a_i,$$

$$Пр_{ij} \bar{a} = (a_i, a_j), \text{ где } j > i.$$

Аналогично вводятся проекции на три и более координатных множеств.

Пусть задано множество $D \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Проекцией множества $D \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ на i-тое координатное множество называется множество проекций $Пр_i a$ всех кортежей $\bar{a} \in D$.

Пример. Пусть задано множество $C = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$, $C \subseteq R^2$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

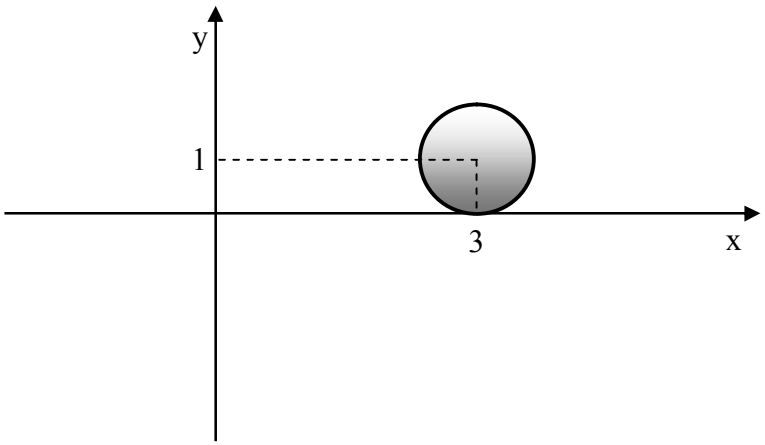


Рисунок 6 – Множество C

Найдем проекцию заданного множества на 1 и 2 координатные множества.

$\Pi p_1 C = \Pi p_x C = [2,4];$

$\Pi p_2 C = \Pi p_y C = [0,2].$

Пример. Пусть задано множество $S = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$.

Найдем проекцию заданного множества на 1 и 2 координатные множества.

$\Pi p_1 S = R$;

$\Pi p_2 S = [-1,1]$.

Аналогично определяются проекции множества $\Pi p_{ij} D$ и на большее количество координатных множеств.

Сечением множества $D \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ по значению α координаты a_i $D(a_i = \alpha)$ называется множество всех кортежей $\bar{a} \in D$, у которых i-ая координата равна α.

$$D(a_i = \alpha) = \{\bar{a} \mid \bar{a} \in D \text{ и } \Pi p_i \bar{a} = \alpha\}.$$

Пример. Пусть задано множество $C = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$, $C \subseteq R^2$.

Найдем сечение множества C по координате $y = 0$, по координате $x = 3$ и по координате $x = 0$.

$C(y = 0) = \{(3,0)\}$;

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$C(x=3)=\{(3,y)\big|0\le y\le 2\}$;

$C(x=0)=\varnothing$.

Пример. Пусть задано множество $S=\{(x,y)\big|y=\sin x\}$.

Найдем сечение множества S по координате $x=\frac{\pi}{2}$ и по координате $y=1$.

$S(x=\frac{\pi}{2})=\{(\frac{\pi}{2},1)\}$;

$S(y=1)=\{(x,1)\big|x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in I\}$.

Пусть координатные множества являются конечными и мощность каждого из множеств $|A_i|=m_i$. Тогда, справедливы следующие свойства

1. $|A|=m_1\cdot m_2\cdot\ldots m_n$;
2. $|D|\le|A|$;
3. $|D(a_i=\alpha)|\le\frac{|A|}{m_i}$;
4. $|\Pi p_i D|\le m_i$.

1.5. Отображения и функции множеств

В настоящем разделе рассматриваются обобщения известного из математического анализа понятия функции. Наиболее общее понятие – соответствие.

Пусть заданы множества X, Y и $S_\sigma\subseteq X\times Y$. Говорят, что между элементами множеств $x\in X$ и $y\in Y$ установлено соответствие σ, если $(x,y)\in S_\sigma$. При этом тройка множеств

$$\sigma=(X,Y,S_\sigma)$$

называется соответствием.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Множество X называется множеством прообразов (аргументов). Множество Y называется множеством образов (значений). Множество S_σ – графиком соответствия.

Часто используется другое обозначение соответствия

$$\sigma : X \to Y .$$

Пример. Пусть заданы: множество прообразов X={a,b,c}, множество образов $Y = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и график соответствия $S_\sigma = \{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma),(c,\gamma)\}$.

Графическое представление соответствия имеет вид

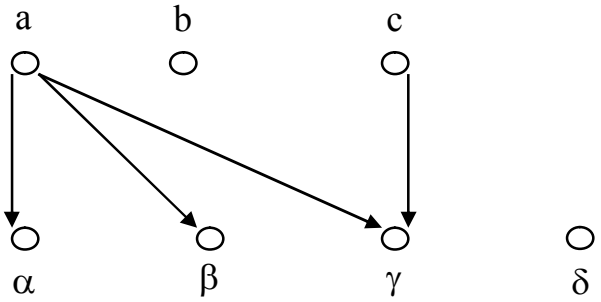


Рисунок 7 – Графическое представление соответствия

Матричный способ задания соответствия определяется матрицей, составляемой по следующему правилу

$$M_\sigma = m_{ij} = \begin{cases} 1 & (x_i, x_j) \in S_\sigma \\ 0 & (x_i, x_j) \notin S_\sigma \end{cases} .$$

Необходимо указать следующие особенности задания соответствия:

– могут быть свободные элементы в X и Y;

– одному элементу x могут соответствовать несколько y и наоборот.

Для всякого соответствия σ существует обратное соответствие

$$\sigma^{-1} = (Y, X, S_\sigma^{-1}) .$$

Здесь множество $S_\sigma^{-1} \subseteq Y \times X$, причем $(y,x) \in S_\sigma^{-1}$ тогда и только тогда, если $(x,y) \in S_\sigma$.

$$S_\sigma^{-1} = \{(y,x) \,|\, (x,y) \in S_\sigma\} .$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Обратное соответствие получается из исходного, если исходное соответствие рассматривается в обратном порядке. Проекция графика соответствия на первое координатное множество $\Pr_X S_\sigma$ – называется областью определения, а проекция графика соответствия на второе координатное множество $\Pr_Y S_\sigma$ – называется областью значений.

Частным случаем соответствия является отображение.

Отображением называется соответствие, у которого областью определения является область прообразов $X = \Pr_X S_\sigma$. Другими словами, отображение это всюду определенное соответствие.

Различают два вида отображений.

Отображение S_σ называют сюрьективным, если для всякого элемента $y \in Y$ существует хотя бы один элемент $x \in X$, такой что $(x, y) \in S_\sigma$.

Отображение S_σ называют инъективным, если множество образов совпадает со множеством значений, т.е.

$$Y = \Pr_Y S_\sigma .$$

Чтобы обратное отображение было отображением, оно должно быть сюрьективным.

Функцией называется отображение $f: X \to Y$, если каждому элементу $x \in X$ оно ставит в соответствие только один элемент $y \in Y$ (обладает свойством однозначности).

$$y=f(x).$$

Существуют различные способы задания функции:

1. Перечисление.

2. Задание при помощи формул.

3. Графическое задание.

Функция называется взаимно однозначной, если любому элементу y из области ее значений соответствует только один элемент x из области определения.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Для существования обратной функции необходимо и достаточно, чтобы функция была сюрьективной и взаимно однозначной.

Пример.

1. Преобразование Лапласа:

$$L : X \to Y,$$

X – множество функций $R_+ \to R$ экспоненциального роста. Y – множество аналитических функций комплексного переменного, обладающих свойствами: 1. При $Res \to c$ они не имеют особых точек. 2. При $Res \to +\infty$ $f(s) \to 0$.

Это функция. Обратная функция существует, если в X включить непрерывные функции.

2. Функционал: $X \to R$. X – любое множество. Например $y = \int_a^b f^2(t)dt$.

Здесь X – множество функций $f(t)$. Очевидно, что функционал не имеет обратной функции.

Большое значение имеет класс функций, для которых X=Y, осуществляющих отображение множества X в себя.

Пусть задано X. Рассмотрим функцию на X с графиком $S_1 = \{(x,x) \mid \forall x \in X\}$. Такая функция, отображающая элемент сам в себя называется тождественной или единичной.

$$\mathbf{1}(x) = x.$$

1.6. Бинарные отношения

Материал этого параграфа является обобщением понятий отношений между числами: <, ≤, =, ≠ и т.д.

Пусть задано соответствие $\alpha = (X, X, S_\alpha)$. Элементы x, y множества X связаны бинарным отношением α, если $(x, y) \in S_\alpha$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Чаще вместо знака принадлежности $(x,y)\in S_\alpha$ применяют сокращенную запись $x\alpha y$. Множество кортежей называют графиком бинарного отношения.

Бинарные отношения могут быть заданы двумя способами:

1. перечислением упорядоченных пар $(x,y)\in S_\alpha$;

2. описанием свойств множества S_α.

Бинарные отношения используются в качестве признака, который лежит в основе разбиения множества на классы, т.е. на представления множества через свои попарно - непересекающиеся подмножества.

$$M=\bigcup_i X_i,\quad X_i\bigcap X_j=\varnothing,\ i\neq j.$$

Пример. Приведем пример бинарных отношений.

1. «Предшествие» символов в алфавите:

$$a\alpha б,\ a\alpha я \text{ и т.д.}$$

(заметим, что $a\alpha a$ неверно).

2. Пусть задано множество $X=\{2,3,5,6\}$. Отношение α определяет, что числа имеют общий множитель, отличный от 0 и 1. Укажем график соответствия.

$$S_\alpha=\{(2,2),(2,6)(3,3),(3,6),(5,5),(6,2),(6,3),(6,6)\}.$$

Для конечных множеств могут быть использованы матричные и графовые способы записи бинарных отношений.

Матричный способ состоит в следующем: все элементы множества нумеруются и составляется матрица M_α размера $|X|\times|X|$ по правилу

$$m_{i,j}=\begin{cases}1 & (x_i,x_j)\in S_\alpha\\ 0 & (x_i,x_j)\notin S_\alpha\end{cases}.$$

В нашем случае: $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=6$. Тогда, матрица будет иметь вид

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Графовый способ. Все элементы множества обозначаются как вершины графа. Стрелка из x_i в x_j означает, что $(x_i, x_j) \in S_\alpha$.

Бинарные отношения обладают некоторыми общими свойствами. Рассмотрим наиболее общие из них.

1) Симметричность.

Бинарное отношение α симметрично, если из $x\alpha y$ следует, что и $y\alpha x$.

2) Антисимметричность.

Бинарное отношение α антисимметрично, если из принадлежности к нему для любых пар при выполнении $(x, y) \in S_\alpha$ для $x \neq y$ обязательно следует, что $(y, x) \notin S_\alpha$.

При матричном представлении симметричность означает $m_{ij} = m_{ji}$. Антисимметричность означает, что если $m_{ij} = 1$, то $m_{ji} = 0$.

Могут существовать бинарные отношения, которые не являются ни симметричными, ни антисимметричными.

Свойства 1 и 2 показывают (определяют) отношения между различными элементами. Следующие два свойства определяют отношение элемента самого к себе.

3) Рефлексивность.

Бинарное отношение α рефлексивно, если для всех $x \in X$ выполняется $x\alpha x$.

4) Антирефлексивность.

Бинарное отношение α антирефлексивно, если для всех $x \in X$ не выполняется отношение $x\alpha x$.

При матричном представлении отношения рефлексивность и антирефлексивность связаны с диагональю матрицы M_α. В случае

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

рефлексивности на главной диагонали M_α стоят 1, а в случае антирефлексивности на главной диагонали M_α стоят 0.

5) Транзитивность.

Бинарное отношение α транзитивно, если для всяких $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ из выполнения $x\alpha y$, $x\alpha z$ следует, что $x\alpha z$.

Понятий рефлексивности, симметричности и транзитивности достаточно, чтобы отношения эквивалентности позволяли разбить множество на классы эквивалентности.

Классами эквивалентности называют подмножество всех элементов, эквивалентных какому либо элементу множества.

Кроме отношения эквивалентности выделяют отношение порядка и строгого порядка.

Бинарным отношением порядка $(\leq)$ называют отношение, обладающее свойствами:

- рефлексивностью;
- антисимметричностью;
- транзитивностью;

Бинарное отношение является отношением строгого порядка $(<, >)$, если для него справедливы свойства:

- антирефлексивности;
- антисимметричности;
- транзитивности.

1.7. Упражнения

1. Упростить выражение алгебры множества.

$$(A \cap \overline{D \cup C}) \cup (\overline{D} \cap \overline{A \cup \overline{C}}) \cup (\overline{D} \cap B) \cup (\overline{D \cup B}).$$

2. Укажите, что представляют следующие множества?

{положительные числа} $\cup$ {отрицательные числа} $\cup$ {0}

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$\{$четные числа$\} \bigcap \{$числа, делимые на 5$\}$.

3. Найдите объединения и пересечения среди множеств

$A = \{\varnothing\},\ B = \{\varnothing, A\},\ C = \{\varnothing, A, B\}$.

4. Укажите, какое описание истинно?

$X \subset Z$ и $Y \subset Z \Rightarrow X \bigcup Y \subset Z$.

$X \subset Z$ и $Y \subset Z \Rightarrow X \bigcap Y \subset Z$.

$X \subset Z$ или $Y \subset Z \Rightarrow X \bigcup Y \subset Z$.

$X \subset Z$ или $Y \subset Z \Rightarrow X \bigcap Y \subset Z$.

5. Задано подмножество P множества $X \times Y$, где $X = Y = R$. Определить его проекции на множество X и на множество Y, а также определить его сечение S.

$$P = \{(x, y) | (x+1)^2 + (y+2)^2 = 16\},$$
$$S = P(x = -1).$$

6. На конечных множествах прообразов X и образов Y задано соответствие $\sigma = (X, Y, S_\sigma)$. График соответствия S_σ задан матрицей. Определить вид соответствия (соответствие, отображение или функция). Найти его область определения и область значений, выяснить его свойства (сюрьективность, инъективность, однозначность, взаимная однозначность). Представить график соответствия в виде подмножества элементов множества $X \times Y$ и в виде графа.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Для соответствия $\sigma = (X, Y, S_\sigma)$, указанного в задании 6, найти обратное соответствие $\sigma^{-1} = (Y, X, S_\sigma^{-1})$. Определить вид обратного соответствия (соответствие, отображение или функция). Найти его область определения и область значений, выяснить его свойства (сюрьективность, инъективность, однозначность, взаимная однозначность). Представить

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

график соответствия в виде подмножества элементов множества $Y \times X$ и в виде графа.

8. На конечном множестве X задано бинарное отношение $\alpha = (X, X, S_\alpha)$. Определить свойства бинарного отношения (симметричность, антисимметричность, рефлексивность, транзитивность). Проверить, является ли оно отношением порядка, строгого порядка.

$X = \{a,b,c,d\}$. $x \alpha y$, если x и y стоят рядом в латинском алфавите.

9. Может ли отношение не быть ни рефлексивным ни антирефлексивным?

10. Определите свойства графа для рефлексивного и антирефлексивного отношений.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2. МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ТЕОРИИ СИСТЕМ

2.1. Матричная алгебра

2.1.1. Определение матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица элементов. Обычно таблица обрамлена круглыми или прямоугольными скобками. Например, следующие прямоугольные таблицы являются матрицами

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы принадлежит определенной строке и определенному столбцу. Каждый элемент матрицы однозначно характеризуется номером строки и номером столбца. Если матрица имеет m строк и n столбцов, то ее размер – $n \times m$. Матрица размером $n \times m$ имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

где a_{ij} – элемент i-ой строки и j-го столбца, который может быть вещественным или комплексным числом, или функцией.

2.1.2. Некоторые специальные матрицы

Существуют некоторые специальные виды матриц.

Нулевая матрица – матрица, все элементы которой являются нулями.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Матрица строка – матрица, которая имеет только одну строку. Ее размер $1\times m$. Например, $\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\end{bmatrix}$. Матрица строка также называется вектором строкой. В этом случае, элементы матрицы называются компонентами вектора.

Матрица столбец – матриц, которая имеет только один столбец. Ее размер $n\times 1$. Например, $\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$. Матрица столбец также называется вектором столбцом. В этом случае, элементы матрицы также называются компонентами вектора.

Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равняется числу столбцов. Размер такой матрицы $n\times n$. Диагональ, идущая от верхнего левого угла матрицы к правому нижнему, называется главной диагональю. Элементы указанной матрицы $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ называются диагональными элементами.

Пример.

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\-2 & 0 & 4\\-4 & 5 & 5\end{bmatrix}$$

– квадратная матрица третьего порядка.

Диагональная матрица – это квадратная матрица, чьи диагональные элементы не равны нулю, а остальные элементы нулевые.

Пример.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

– диагональная матрица третьего порядка.

Единичная матрица – это квадратная матрица, диагональные элементы которой равны 1, а остальные элементы матрицы нулевые. Единичная матрица обозначается I или E.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Треугольная матрица – это квадратная матрица, имеющая только нулевые элементы с одной стороны главной диагонали. Матрица, для которой $a_{ij} = 0$ для $i > j$ называется верхней треугольной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

а матрица, для которой $a_{ij} = 0$ для $i < j$ называется нижней треугольной матрицей

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.1.3. Операции над матрицами и их свойства

Две матрицы A и B называются равными $A = B$, если каждый элемент матрицы A равен соответствующему элементу матрицы B. Очевидно, что матрицы A и B должны быть одинакового размера.

Пример. Заданы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Видим, что $A \neq B, B \neq C, C \neq A,$ а $B = D$.

Суммой двух матриц A и B размера $n \times m$ называется матрица C $(A + B = C)$ такого же размера, элементы которой равняются сумме соответствующих элементов матриц A и B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

для $i = 1,2,\ldots,n$ и $j = 1,2,\ldots,m$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Заданы матрицы

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}.$$

Найдем их сумму

$$C=A+B=\begin{bmatrix}3+2 & 2+1 & 4+0\\ -1+0 & 5+3 & -2+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 4\\ -1 & 8 & 3\end{bmatrix}.$$

Отметим, что операция суммы матриц является коммутативной и ассоциативной.

Умножение матрицы на число. Если A матрица размера $n\times m$, а λ – некоторое число, то результатом умножения матрицы A на число λ будет матрица B размера $n\times m$ элементы которой будут определяться из соотношения

$$b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij},$$

для $i=1,2,\ldots,n$ и $j=1,2,\ldots,m$.

Пример. Заданы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & -5\end{bmatrix},\ \lambda=3,$$

тогда

$$B=\lambda\cdot A=\begin{bmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 0\\ 3\cdot 1 & 3\cdot 3\\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 3 & 9\\ 0 & -15\end{bmatrix}.$$

Транспонирование матрицы. Если в исходной матрице поменять местами строки и столбцы, то полученная матрица будет называться транспонированной. Обозначается транспонированная матрица как A^T.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix},\qquad A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Матрица

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

является транспонированной к матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Симметричной матрицей называется матрица, которая равна своей транспонированной матрице, т.е.

$$A = A^T.$$

В частности, любая диагональная матрица является симметричной. Очевидно, что симметричная матрица может быть только квадратной.

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -5 & -3 \\ 9 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

– симметричная матрица 3-го порядка.

Антисимметричной матрицей называется матрица, которая равна своей транспонированной, умноженной на -1.

$$A = -A^T.$$

Антисимметричная матрица также должна быть квадратной и ее диагональные элементы должны равняться нулю.

Пример. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & 0 & -6 \\ -7 & -7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

является антисимметричной матрицей 4-го порядка.

Произведение матриц. Матрица A может быть умножена на матрицу B, если число столбцов A равняется числу строк B. Например, если A –

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

матрица размера $k \times m$, а B – размера $m \times n$, тогда произведение $A \cdot B$ может быть выполнено. Пусть

$$A = [a_{ij}]_{k \times m}, \qquad B = [b_{ij}]_{m \times n},$$

тогда произведением матрицы A на матрицу B ($A \cdot B = C$) будет называться матрица $C = [c_{ij}]_{k \times n}$, размера $k \times n$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sj}.$$

Обратим внимание на размер матрицы C: число строк матрицы совпадает с числом строк матрицы A, а число столбцов с числом столбцов матрицы B.

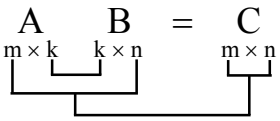


Рисунок 8 – Размерности матриц при их умножении

Пример. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix},$$

тогда

$$C = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) & (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) & (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}) \end{bmatrix}.$$

Отметим еще раз, что как видно из вышесказанного, операция произведения матриц в общем случае не коммутативна.

Пример. Вычислить произведения AB и BA, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 0 & 3\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 2 & 3\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 1 \\ 0\cdot 2+(-1)\cdot 3+1\cdot 0 & 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+1\cdot 2 & 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+1\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Произведения BA не существует, т.к. число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

При умножении единичная матрица играет ту же роль, что и число 1 при умножении чисел. Единичная матрица перестановочна с квадратной матрицей того же порядка, причем

$$A \cdot E = E \cdot A = A .$$

Операция транспонирования произведения двух матриц равна произведению транспонированных матриц в обратном порядке

$$(AB)^T = B^T A^T . \qquad (*)$$

Для доказательства этого утверждения мы должны показать, что каждый элемент в левой части последнего выражения равен соответствующему элементу в правой части. Элемент ij в левой части указанного соотношения определяется как

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k (A)_{jk} (B)_{ki} .$$

Элемент ij в правой части соотношения (*) определяется как

$$\left(B^T A^T\right)_{ij} = \sum_k \left(B^T\right)_{ik} \left(A^T\right)_{kj} = \sum_k (B)_{ki} (A)_{jk} = \sum_k (A)_{jk} (B)_{ki} .$$

Полученные равенства доказывают справедливость равенства (*).

След матрицы. След квадратной матрицы $A = [a_{ij}]$ определяется как сумма ее диагональных элементов и обозначается как trA

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Ассоциативный закон произведения матриц. Если A, B, C три матрицы, для которых определены матричные произведения AB и BC, то справедливо следующее равенство

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$(AB)C = A(BC).$$

Дистрибутивный закон произведения матриц. Если A, B, C три матрицы, для которых определены операции сложения $B + C$ и умножения AB и BC, то справедливо следующее равенство

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Возведение матрицы в степень. Целой положительной степенью $A^m (m > 0)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m = \underbrace{AA\ldots A}_{m}.$$

Под нулевой степенью квадратной матрицы A понимается единичная матрица того же порядка, что и A, т.е. $A^0 = I$.

Пример. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где α – некоторое действительное число. Вычислить A^3.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.4. Определители и их свойства

Предварительно введем некоторые вспомогательные понятия.

Пусть каждое из чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$ принимает одно из значений $1, 2, \ldots, n$, причем среди этих чисел нет совпадающих. Тогда, говорят, что совокупность чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$ является перестановкой чисел $1, 2, \ldots, n$.

Пример. Пусть $n = 3$. Тогда, $1, 2, 3$ – основная (естественная) перестановка. Возможны также перестановки: 2, 1, 3; 3, 2, 1; 2, 3, 1; 3, 2, 1; 3, 1, 2.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Число всех перестановок степени n равно $n!$.

Инверсией перестановки называется факт, состоящий в том, что меньший элемент в ней стоит правее большего. Кратность перестановки $c[i_1,i_2,\ldots,i_n]$ – число инверсий в ней.

Пример. Укажем кратности перестановки

$$c[1,2,3]=0;\qquad c[2,1,3]=1;\qquad c[3,2,1]=3.$$

Определителем квадратной матрицы A размером $n\times n$ называется число

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(-1)^{c[i_1,i_2,\ldots,i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n},$$

обладающий следующими свойствами:

– оно содержит $n!$ слагаемых;

– каждое слагаемое представляет собой произведение n элементов матрицы A – по одному из каждой строки и каждого столбца;

– слагаемое берется со своим знаком, если кратность перестановки – четная, и с противоположным, если кратность нечетная.

Пример. Является ли произведение $a_{13}a_{24}a_{41}a_{13}a_{55}$ членом определителя? В произведении $\underline{a}_{13}a_{24}a_{41}\underline{a}_{13}a_{55}$ содержаться два элемента из первой строки и, следовательно, указанное произведение не может быть членом определителя.

Из этого определения и основного свойства перестановки вытекают следующие свойства определителя:

1. Определители прямой и транспонированной матрицы совпадают.

Следствие: если каким-либо свойством обладают столбцы определителя, то им же обладают и строки определителя и наоборот. Поэтому далее будем говорить лишь о свойствах столбцов.

2. Если один из столбцов определителя нулевой, то и определитель равен нулю.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3. Если столбец определителя умножить на число, то и определитель умножиться на это число. Другими словами, общий множитель всех элементов некоторого столбца определителя можно вынести за знак определителя.

4. Перестановка двух столбцов определителя меняет его знак на противоположный.

5. Если в определителе есть одинаковые столбцы, то он равен нулю.

6. Если столбец матрицы равен сумме двух каких-либо векторов, то ее определитель равен сумме двух определителей, в которых данный столбец заменен одним из слагаемых.

7. Определитель не изменится, если к его столбцу прибавить любой другой его столбец, умноженный на произвольное число.

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

9. Если A и B матрицы размера $n \times n$, то

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B .$$

Пример. Вычислить определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix},$$

где a – некоторое вещественное число.

Приведем определитель к треугольному виду. Для этого умножим элементы 1-й строки определителя на -1 и прибавим их к соответствующим элементам 2-й и 3-й строки. В результате получим

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ 0 & 2a & -2a \\ 0 & 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^3 .$$

Квадратная матрица A, определитель которой отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, называется невырожденной.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2.1.5. Миноры и их свойства. Ранг матрицы

Минором порядка m матрицы A называется определитель m-го порядка из элементгов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов. Минор обозначается M.

Дополнительным минором элемента a_{ij} квадратной матрицы размера $n \times n$ называется определитель $n-1$-го порядка матрицы A, в которой вычеркнуты i-ая строка и j-ый столбец. Будем обозначать дополнительный минор M_{ij}.

Пример. Минор M_{21} матрицы третьего порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

равен

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}.$$

Пример. Найти миноры всех элементов матрицы третьего порядка.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы A размера $n \times n$ называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

На основе этих понятий строится основной способ раскрытия определителя по элементам строки (столбца)

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}; \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

причем, сумма произведений элементов какой либо строки определителя n-го порядка на алгебраические дополнения элементов другой его строки равна нулю, т.е. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$ при $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и $i \neq j$.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка, разложив его по элементам второй строки.

Решение. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$

$$= a_{21}(-1)^{2+1} M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2} M_{22} + a_{23}(-1)^{2+3} M_{23} =$$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}).$$

Если все миноры порядка m матрицы A равны нулю, то и все миноры высшего порядка этой матрицы равны нулю.

Рангом матрицы называется такое максимальное число m, что хотя бы один минор порядка m этой матрицы не равен нулю, а все ее миноры высшего порядка равны нулю. Ранг матрицы обозначается как $\operatorname{rang} A$. Из указанного определения следует, что:

– ранг произвольной матрицы не превосходит наименьший из ее размеров

$$\operatorname{rang} A \leq \min(n, m);$$

– ранг нулевой матрицы равен нулю;

– если A – невырожденная квадратная матрица n-го порядка, то ее ранг совпадает с порядком матрицы.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Свойства ранга матрицы.

1. Если любой столбец или строку матрицы умножить на число, не равное нулю, то ранг матрицы не изменится.

2. Если поменять местами строки (столбцы) матрицы, то ранг матрицы не изменится.

3. Если к любому столбцу (строке) матрицы прибавить любой другой столбец (строку), умноженный на произвольное число, то ранг матрицы не изменится.

4. Если удалить любой столбец матрицы, равный 0 (или представляющийся в виде суммы других, умноженный на произвольное число), то ранг матрицы не изменится.

Пример. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Указанная матрица имеет один нулевой столбец и одну нулевую строку. Отбрасывая нулевые строки и столбцы, мы получим невырожденную матрицу 2-го порядка

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},$$

определитель которой равен -5. Таким образом, ранг данной матрицы равен 2.

2.1.6. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, а I – единичная матрица того же порядка. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если в результате умножения A на обратную матрицу как справа так и слева получается единичная матрица того же порядка, что и A.

$$AA^{-1} = I, \quad A^{-1}A = I.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Обратная матрица A^{-1} существует только тогда, когда исходная матрица A невырождена.

Для того, чтобы найти обратную матрицу необходимо выполнить следующие действия:

1. Найти определитель исходной матрицы $|A|$. Если $|A|=0$, то исходная матрица A является вырожденной и обратная матрица A^{-1} не существует.

2. Найти транспонированную матрицу A^T.

3. Заменить в матрице A^T все элементы их алгебраическими дополнениями. В результате получим присоединенную матрицу $\mathrm{adj}(A)$.

4. Найти обратную матрицу A^{-1} как

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A).$$

2.1.7. Упражнения

1. Вычислить

$$\begin{bmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}^T.$$

2. Найдите произведения матриц AB и BA если они существуют.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

3. Покажите, что $A^2=0$.

$$A=\begin{bmatrix}xy & y^2\\ -x^2 & -xy\end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель, приведением матрицы к треугольному виду

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определитель, используя метод алгебраических дополнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -1 & c \\ 0 & b & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Вычислить ранг матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Найти значения x при которых определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{vmatrix}.$$

8. Решить уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Определитель имеет вид

$$\det\left[A_1 + \alpha A_i \; A_2 \ldots A_n\right] = \det A, \;\; i \neq 1.$$

Изменится ли этот определитель, если $i = 1$? Если измениться, то как?

10. Покажите, что

$$\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2.2. Линейные конечномерные пространства

2.2.1. Понятие линейного пространства

В множестве элементы не взаимодействуют между собой. Если между элементами множества вводится какое-либо взаимодействие, то такое множество называется пространством. Наибольшее практическое применение нашли линейные пространства.

Линейным пространством L называется множество, над элементами которых введены операции сложения элементов (a+b) и умножения элемента на число ($\alpha \cdot a$), удовлетворяющие следующим свойствам:

A. Свойства суммы

A1. $\forall x, y \in L \Rightarrow x + y \in L$

A2. $x + y = y + x, \quad x + y + z = x + (y + z)$

A3. Существует элемент 0 такой, что x+0=x и для всякого $x \in L$ существует $z \in L$, такой, что x+z=0.

B. Свойства произведения

B1. $\forall x \in L, \forall \alpha \Rightarrow \alpha x \in L$

B2. $\alpha\beta x = \alpha(\beta x), (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

B3. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

B4. $1 \cdot x = x \quad 0 \cdot x = 0$

Следует уточнить, какие числа допустимы в операции умножения. Если это только вещественные числа ($\alpha \in R$) то L называют вещественным пространством, а если комплексные ($\alpha \in C$) то – комплексным пространством.

Пример.

1. Множество многочленов n-ой степени.

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_0$$

$$p(x) + q(x) = (p_n + q_n)x^n + \ldots + (p_0 + q_0)$$

$$\alpha p(x) = \alpha p_n x^n + \ldots + \alpha p_0$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2. Векторы как стрелки на плоскости. Сложение векторов выполняется по правилу параллелограмма. Умножение на число вектора это изменение длины и направления.

3. Множество гармонических колебаний.

$$s(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t,$$
$$z(t) = c\sin\omega t + d\cos\omega t,$$

$\omega = \text{const}$, a, b, c, d – произвольные числа.

Пусть есть пространство таких гармонических сигналов. Тогда, можем ввести понятие суммы этих сигналов.

2.2.2. Линейная зависимость векторов

Пусть заданы m векторов $F_1, \ldots F_m$. Линейной комбинацией векторов $F_1, \ldots F_m$ называется сумма

$$Z = \sum_{k=1}^{m} x_k F_k .$$

Числа x_k называются весовыми коэффициентами линейной комбинации.

Множество векторов $\{F_1, \ldots, F_m\}$ называется линейно – независимым, если ни один из составляющих его векторов не может быть представлен линейной комбинацией остальных.

Такое множество не может содержать нулевого вектора.

Пример.

1. Векторы $F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, F_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ являются линейно независимыми, т.к. ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2. Векторы $F_1 = \begin{bmatrix} f_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\cdots$, $F_m = \begin{bmatrix} f_{1m} \\ f_{2m} \\ \vdots \\ f_{mm} \end{bmatrix}$ также являются линейно независимыми, т.к. ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

3. Векторы $F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ являются линейно зависимыми, т.к., например, вектор F_2 можно представить в виде $F_2 = 2 \cdot F_1 + 0 \cdot F_3$.

Теорема. (Признак линейной независимости векторов.) Векторы $F_1,\ldots F_m$ линейно независимы, если и только если равенство $\sum_{k=1}^{m} x_k F_k = 0$ выполняется лишь при $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Доказательство: Если $F_1,\ldots F_m$ линейно зависимы, то один из них, например, $F_1 = y_2 F_2 + \ldots + y_m F_m$. Но тогда, $(-1)F_1 + y_2 F_2 + \ldots + y_m F_m = 0$, причем, $y_1 = -1 \neq 0$. Обратно, если $\sum_{k=1}^{m} x_k F_k = 0$, и, например, $x_1 \neq 0$, то

$$F_1 = (-\frac{x_2}{x_1})F_2 + \ldots + (-\frac{x_m}{x_{m-1}})F_m . \#$$

На основе этого признака легко видеть, что условием линейной независимости векторов вида $F_1 = \begin{bmatrix} f_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\cdots$, $F_m = \begin{bmatrix} f_{1m} \\ f_{2m} \\ \vdots \\ f_{mm} \end{bmatrix}$, или векторов вида

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_{kk} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1,\ldots,m$$

является условие не равенство нулю элементов f_{kk} векторов, т.е. $f_{kk} \neq 0, k = 1,\ldots m$.

Действительно, выражение

$$x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m = 0$$

можно записать в виде системы уравнений

$$Fx = 0,$$

где $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_m \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$.

Если элементы матриц $f_{kk} \neq 0, k = 1,\ldots m$, то из равенства $f_{mm} x_m = 0$ следует, что $x_m = 0$. Из равенства $f_{m-1m-1} x_{m-1} + f_{m-1m} x_m = 0$ следует, что $x_{m-1} = 0$. И так далее.

Для проверки на линейную независимость векторов в общем случае необходимо использовать определенные критерии.

Теорема. Количество линейно независимых векторов в множестве $F_1,\ldots F_m$ равно рангу матрицы $F = \begin{bmatrix} F_1 \ldots F_m \end{bmatrix}$.

Доказательство: Пусть $\operatorname{rang} F = k$. Тогда существует минор k-го порядка не равный нулю. Пусть этот минор $M\begin{pmatrix} 1\ldots k \\ 1\cdots k \end{pmatrix}$. Покажем, что любой столбец является линейной комбинацией $F_1,\ldots F_k$. Добавим к этим столбцам

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

любой другой F_j. $\begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1k} & f_{1j} \\ f_{k1} & \dots & f_{kk} & f_{kj} \\ f_{i1} & \dots & f_{ik} & f_{ij} \end{vmatrix}$. Здесь i – любая строка, в том числе и $i \in 1\dots k$. Определитель этот равен нулю. Раскроем его по последней строке.

$$f_{i1}A_{i1} + \dots + f_{ij}A_{ij} = 0.$$

Причем, $A_{ij} \neq 0$ и все алгебраические дополнения не зависят от i-ой строки. Поэтому обозначим их $\alpha_r = A_{ir}$. Но тогда

$$\alpha_1 f_{i1} + \alpha_2 f_{i2} + \dots + \alpha_j f_{ij} = 0,$$

т.е.

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_k F_k + \alpha_j F_j = 0, \quad \alpha_j \neq 0.$$

В то же время $F_1,\dots F_k$ линейно независимы, иначе $M\begin{pmatrix} 1\dots k \\ 1\cdots k \end{pmatrix} = 0$. #

Следствия:

1) Если векторы $F_1,\dots F_m$ содержат n элементов, то при условии, что m > n указанные векторы линейно зависимы;

2) Условие линейной независимости имеет вид $\operatorname{rang}[F_1\dots F_m] = m$.

Следствие 2) позволяет фактически исследовать векторы на линейную независимость.

Пример. Покажем, что векторы

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

являются линейно зависимыми.

Из указанных векторов составим матрицу и найдем ее ранг. Для нахождения ранга матрицы будем использовать метод Гаусса.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из последней матрицы видно, что ранг исходной – равен 3. Следовательно, указанные векторы линейно зависимы.

2.2.3. Базисы и координатные векторы. Замена базиса

Рассмотрим вектор $X \in R^n$. Этот вектор можно представить в виде

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_n E_n .$$

$E_1 \ldots E_n$ – векторы вида $E_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - k$. Очевидно, что эти векторы линейно независимые. Любой вектор $X \in R^n$ можно представить через эти векторы.

Пример. Рассмотрим пространство R^2. Геометрическая интерпретация представления вектора $X \in R^2$ через векторы E_1, E_2 приведена на рисунке 9.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

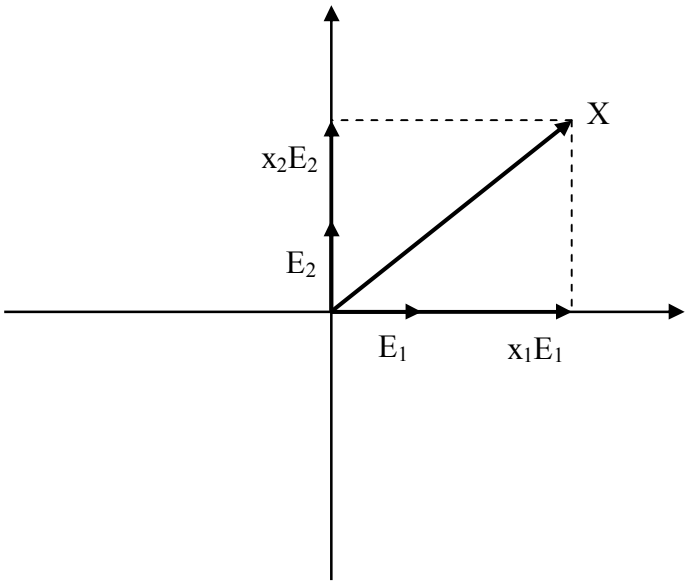


Рисунок 9 – Геометрическая интерпретация
представления вектора $X \in R^2$

Последовательность линейно-независимых векторов $F_1,\dots F_n$ называется базисом линейного пространства $R^n(C^n)$ если любой вектор из этого пространства представляется в виде линейной комбинации

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k^F F_k .$$

Числа x_k^F называются координатами X в базисе $\{F_k\}$, а составленный из них вектор $X^F = \mathrm{col}(x_1^F \dots x_n^F)$ – координатным вектором вектора X в базисе F.

Базис составленный из векторов $E_1 \dots E_n$ – называют естественным базисом пространства R^n. $x_1 \dots x_n$ – координаты вектора X в естественном базисе. $x_k E_k$ – проекция вектора X на вектор E_k.

Пример. Рассмотрим пространство R^2 – плоскость. Представим геометрическую интерпретацию вектора X через базисные векторы F_1 и F_2 в R^2.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

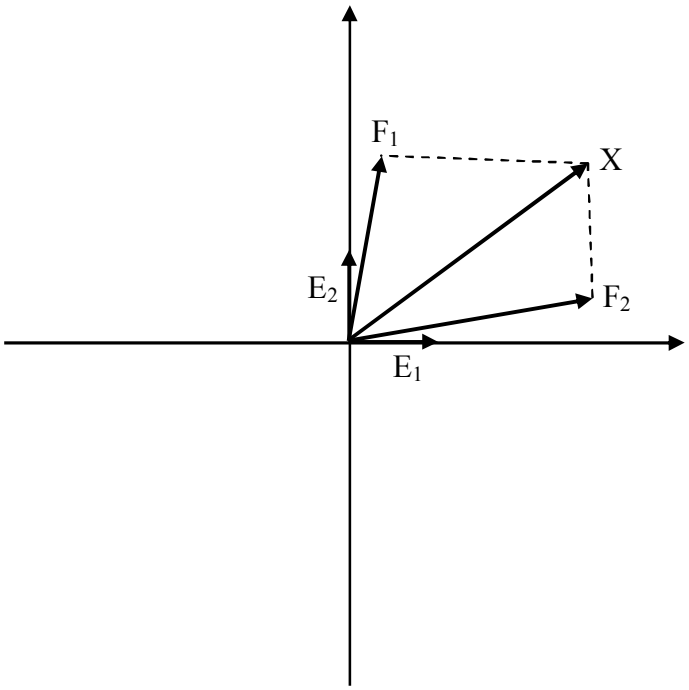


Рисунок 10 – Представление вектора X
через базисные векторы F_1 и F_2

Теорема. Представление вектора в любом базисе является единственным.

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно, и существует два представления вектора в базисе $\{F_k\}$. $X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k F_k$. Тогда, $\exists(\alpha_k - \beta_k) \neq 0$. Но это противоречит условию линейной независимости векторов базиса. #

Теорема. Любая последовательность n линейно независимых векторов $F_1,\ldots F_n$ n-мерного пространства является его базисом.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что любой вектор X из этого пространства представляется в виде линейной комбинации $X = \sum_{k=1}^{n} x_k^f F_k$. Т.к. векторы $X,F_1,\ldots F_n$ – линейно зависимы, то $\exists\beta_k$, $k = 0\ldots n$ не все равные 0 такие, что

$$\beta_0 X + \beta_1 F_1 + \ldots + \beta_n F_n = 0.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

При этом $\beta_0 \neq 0$, иначе $F_1,\dots F_n$ были бы линейно зависимы. Но тогда $x_k^f = -\frac{\beta_k}{\beta_0}$ $k = 1\dots n$. #

Следствие 1. Выражение $X = \sum_{k=1}^{n} x_k^f F_k$ можно записать в матричном виде $FX^F = X$. Это система линейных алгебраических уравнений с невырожденной квадратной матрицей F. Эта система имеет единственное решение при любых X.

Следствие 2. Данное следствие показывает формулы перехода из естественного базиса в базис F ($\{E\} \to \{F\}$) и формулы обратного перехода $\{F\} \to \{E\}$.

Рассмотрим вектор $X \in R^n$. Пусть в этом пространстве наряду с естественным базисом $E_1, E_2, \dots, E_n$ задан базис $F_1, F_2, \dots F_n$.

Указанные переходы осуществляются с помощью матричного умножения:

2.1. $\{F\} \to \{E\}$ $\quad X^E = P_{EF} X^F$, где матрица перехода $P_{EF} = F$;

2.2. $\{E\} \to \{F\}$ $\quad X^F = P_{FE} X^E$, где матрица перехода $P_{FE} = F^{-1}$.

Докажем справедливость сказанного. Вектор $X \in R^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации

$$X^E = \sum_{k=1}^{n} x_k^f F_k,$$

с помощью базисных векторов $F_1, F_2, \dots F_n$. Составляя матрицу $F = [F_1\ F_2 \dots F_n]$ и вектор $X^F = \mathrm{col}(x_1^F \dots x_n^F)$ получаем матричное выражение $X^E = FX^F$.

Следствие 3. Переход из базиса в другой базис в общем случае $\{F\} \to \{G\}$.

Пусть заданы базисы $\{F\}$ и $\{G\}$. Будем осуществлять переход через естественный базис $\{F\} \to \{G\} \Leftrightarrow \{F\} \to \{E\} \to \{G\}$. Таким образом, можем воспользоваться результатами Следствия 2.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Перейдем из базиса $\{F\}$ в естественный базис.

$$X^E = P_{EF} X^F .$$

Здесь, матрица перехода $P_{EF} = F$.

Теперь, осуществим переход из естественного базиса в базис $\{G\}$.

$$X^G = P_{GE} X^E .$$

Здесь, матрица перехода $P_{GE} = G^{-1}$.

Окончательно, получим соотношение для перехода в общем случае

$$X^G = P_{GE} P_{EF} X^F = P_{GF} X^F ,$$

где матрица перехода – $P_{GF} = P_{GE} P_{EF} = G^{-1} F$.

Пример. Рассмотрим базис P, заданный векторами $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и базис F, заданный векторами $F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Необходимо указать матрицы перехода от базиса P к базису F.

Как было указано в следствии 3, переход от базиса P к базису F осуществляется по формуле

$$X^F = F^{-1} P X^P ,$$

где матрица $F = [F_1 \; F_2 \; F_3]$, а матрица $P = [P_1, P_2, P_3]$. Таким образом,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обращая матрицу F, получим

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Выполняя умножение $F^{-1}P$, окончательно получаем, что матрица перехода от базиса P к базису F будет равна

$$F^{-1}P = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.2.4. Нормированные и евклидовы конечномерные пространства

В инженерной практике большое значение имеет упорядочение, сравнение между собой элементов множества. Этой цели и служат изучаемые здесь понятия.

Норма вектора $\|X\|$ – это функциональное отображение вида $R^n \to R_+$ удовлетворяющее следующим требованиям:

1. $\|X\| \geq 0$. Если $\|X\| = 0$, то X=0
2. $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$
3. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Указанное определение верно и для комплексных пространств C^n. При этом, в аксиоме 2. $|\alpha|$ означает модуль комплексного числа.

На основе понятия нормы легко ввести понятие расстояния между векторами

$$d(X,0) = \|X\|.$$

Наибольшее практическое применение нашли p-нормы

$$\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |X_k|^p \right)^{1/p},$$

где p – натуральное число. Чаще всего

1. p=2 $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}$ – евклидова норма;

2. p=1 $\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |X_k|$ – линейная норма;

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3. $p=\infty$ $\|X\|_\infty=\max\limits_{1\le k\le n}|X_k|$ – равномерная норма (Чебышева).

Линейная норма $(p=1)$ – одинаково «внимательна» к любым значениям X_k.

Евклидова норма $(p=2)$ – более внимательна к большим значениям X_k.

Равномерная норма $(p=\infty)$ – обращает внимание лишь на самое большое по значению X_k.

Для p-норм легко доказать следующее свойство: Для $\forall p:\|X\|_p\to 0$ тогда и только тогда, если все координаты $X_k\to 0,\ k=1\dots n$.

Доказательство: Необходимость: $|X_k|\le\|X\|_p$

Достаточность: $X_k\to 0\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}|X_k|^p\to 0\Rightarrow\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|X_k|^p\right)^{1/p}\to 0$.

Указанное свойство справедливо для любых норм.

Используя понятие нормы можно ввести в рассмотрение понятие нормированного вектора. Нормированный вектор это вектор, чья норма равна 1 ($\|u^x\|=1$). Вычисляется нормированный вектор по соотношению

$$u^x=\frac{1}{\|X\|}X.$$

Скалярное произведение векторов (X,Y) это функциональное отображение вида $R^n\times R^n\to R$, удовлетворяющее следующим требованиям

1. $(X,X)\ge 0,\quad (X,X)=0\Rightarrow X=0$
2. $(X,Y)=(Y,X)$
3. $(X+Y,Z)=(X,Z)+(Y,Z)$
4. $(\alpha X,Y)=\alpha(X,Y)$

Заметим, что из пунктов 4 и 2 следует, что $(X,\alpha Y)=\alpha(X,Y)$.

Для комплексного пространства C^n определение скалярного произведения отличается следующими моментами:

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

– это функциональное отображение вида $C^n \times C^n \to C$, т.е $(X,Y) \in C$;

– изменяется аксиома 2: $(X,Y) = \overline{(Y,X)}$;

– в аксиоме 4 $\alpha \in C$. Отсюда и из аксиомы 2 следует, что $(X,\alpha Y) = \bar{\alpha}(X,Y)$.

Чаще всего используют следующее представление скалярного произведения:

– для пространства $R^n : (X,Y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ (в матричной форме $(X,Y) = X^T Y$);

– для пространства $C^n : (X,Y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ (в матричной форме $(X,Y) = X^T \overline{Y}$).

Пространства, в которых введена норма векторов называются нормированными пространствами.

Пространства, в которых введено скалярное произведение называются евклидовыми пространствами. Евклидово пространство является нормированным пространством с нормой $\|X\|_c = \sqrt{(X,X)}$. При рассмотренных выше скалярных произведениях $\|X\|_c = \|X\|_2$.

Евклидовы пространства позволяют учесть не только расстояния между векторами, но и некоторые их геометрические соотношения. Полностью ввести понятие угла между векторами не удается, но можно ввести понятие ортогональности.

Векторы называются ортогональными, если они не является нулевыми, а их скалярное произведение равно нулю

$$(X,Y) = 0.$$

2.2.5. Неравенство Шварца (Коши – Буняковского)

Для любых двух векторов $X, Y \in R^n$ выполняется условие

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$(X,Y)^2 \le (X,X)(Y,Y)).$$

Причем, равенство возможно только в том случае, если векторы X и Y линейно зависимы.

Доказательство.

1. Если хотя бы один из векторов X и Y равен нулю, то неравенство заведомо выполняется.

2. Векторы X и Y не равны нулю.

Рассмотрим неравенство $(X-\alpha Y, X-\alpha Y) \ge 0$, где α – произвольное число.

Согласно аксиоме 1 скалярного произведения указанное скалярное произведение неотрицательно. Рассмотрим это произведение как функцию $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = (X-\alpha Y, X-\alpha Y) = (X,X) - 2\alpha(X,Y) + \alpha^2(Y,Y).$$

Если, функция неотрицательна, значит ее минимум также неотрицателен. Найдем минимум функции по α.

$$f'(\alpha) = -2(X,Y) + 2\alpha(Y,Y) = 0.$$

$$f''(\alpha) = 2(Y,Y) > 0.$$

Т.к. $f''(\alpha)$ – положительна, то минимум существует.

$$\alpha = \frac{(X,Y)}{(Y,Y)}.$$

$$f(\alpha_{min}) \ge 0.$$

$$(X,X) - 2\frac{(X,Y)^2}{(Y,Y)} + \frac{(X,Y)^2}{(Y,Y)} \ge 0,$$

$$(X,X) - \frac{(X,Y)^2}{(Y,Y)} \ge 0.$$

Перенося (X,X) направо и умножая обе части неравенства на (Y,Y), получаем неравенство Шварца. #

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2.2.6. Проекция вектора на вектор

При использовании геометрической интерпретации, для того, чтобы найти проекцию вектора X на вектор Y, нужно опустить перпендикуляр из конца X на Y.

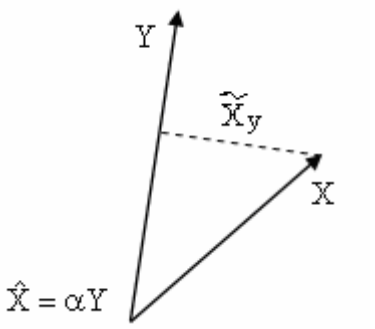


Рисунок 11 – Графическое решение задачи
нахождения проекции вектора X на вектор Y

Рассмотрим аналитическое решение этой задачи. Проекция – это вектор, идущий вдоль вектора Y. Это значит, что его можно записать в виде αY. Остается найти значение α. Т.к. перпендикуляр есть наименьшее расстояние от точки до прямой, то α можно найти из условия:

$$\min_{\alpha} \left\| X - \alpha Y \right\|_c \equiv \min_{\alpha} \left(X - \alpha Y, X - \alpha Y \right).$$

Такую задачу мы решили при рассмотрении неравенства Шварца. Таким образом, можем записать, что проекция вектора X на вектор Y равна

$$\hat{X} = \alpha_{min} Y, \quad \alpha_{min} = \frac{(X,Y)}{(Y,Y)}.$$

Вектор $\hat{X}$ можем рассматривать как приближенное значение вектора X с помощью вектора Y.

Вектора ошибки приближения определяется как $\tilde{X} = X - \hat{X}$. Докажем, что вектор $\tilde{X}$ ортогонален вектору Y. Для этого рассмотрим скалярное произведение $(\tilde{X}, Y)$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\left(\tilde{X}, Y\right) = (X - \hat{X}, Y) = (X, Y) - (\alpha_{\min} Y, Y) = (X, Y) - \alpha_{\min}(Y, Y) = 0.$$

Другая интерпретация вектора $\hat{X}$ – это наилучшее приближение αY к вектору X в том смысле, что ошибка приближения имеет наименьшую длину. Определим длину вектора ошибки проецирования $\tilde{X}$:

$$\left\|\tilde{X}\right\|_c^2 = (\tilde{X}, \tilde{X}) = (X - \hat{X}, X - \hat{X}) = (X, X) + (\hat{X}, \hat{X}) - 2(X, \hat{X}) =$$

$$= (X, X) + \alpha_{\min}^2 (Y, Y) - 2\alpha_{\min}\left(X, Y\right) = (X, X) - \frac{(X, Y)^2}{(Y, Y)} =$$

$$= \frac{(X, X)(Y, Y) - (X, Y)^2}{(Y, Y)}.$$

Другой способ представления длины вектора ошибки проецирования заключается в следующем:

$$(X, X) = (\hat{X} + \tilde{X}, \hat{X} + \tilde{X}) = (\hat{X}, \hat{X}) + (\tilde{X}, \tilde{X}) + 2(\tilde{X}, \hat{X}).$$

Последнее слагаемое равно нулю, т.к. вектор проекции и вектор ошибки проецирования ортогональны. Поэтому,

$$(X, X) = (\hat{X}, \hat{X}) + (\tilde{X}, \tilde{X}),$$

или, что тоже самое

$$\|X\|_c^2 = \left\|\hat{X}\right\|_c^2 + \left\|\tilde{X}\right\|_c^2.$$

Последние соотношение является обобщением на пространство R^n теоремы Пифагора.

Пример. В линейном пространстве R^3 найти проекцию $\hat{X}$ вектора $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

на вектор $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и вектор ошибку проецирования $\tilde{X}$.

Для нахождения проекции найдем $\alpha_{\min} = \frac{(X, Y)}{(Y, Y)} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0}{2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0} = \frac{2}{5}$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Тогда, вектор – проекция будет равен $\hat{X} = \alpha_{min} Y = \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ошибка проецирования.

2.2.7. Ортогональный базис в пространстве R^n. Алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта

Пусть в пространстве R^n задан некоторый базис $F_1,\dots F_n$. И пусть для некоторого вектора $X \in R^n$ необходимо найти координатный вектор в данном базисе.

Для определения координат вектора $X \in R^n$ в базисе F можно поступить двумя способами:

1) Воспользоваться соотношением $X^F = P_{FE} X$, где $P_{FE} = F^{-1}$.

2) Решить систему линейных алгебраических уравнений $FX^F = X$.

Оба способа являются трудоемкими.

Рассмотрим особый вид базисов, в которых эта процедура имеет наиболее простой вид.

Базис $u_1 \dots u_n$ называется ортонормальным, если:

1. $(u_k, u_k) = 1,\ k = 1 \dots n$,

2. $(u_k, u_m) = 0$ при $k \neq m$.

Если выполняется только условие 2, то базис называется ортогональным.

Введем матрицу U, составленную из векторов ортонормального базиса

$$U = [u_1, \dots, u_n].$$

Рассмотрим произведение

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \cdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1,u_1) & (u_1,u_2) & \cdots & (u_1,u_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_n,u_1) & (u_n,u_2) & \cdots & (u_n,u_n) \end{bmatrix}.$$

Такая матрица, составленная из скалярных произведений, называется матрицей Грама. Она является симметричной, а для ортогональных базисов – диагональной. Для ортонормальных базисов матрица Грама является единичной

$$U^T U = E.$$

Из этого равенства следует, что для ортонормального базиса $U^T = U^{-1}$.

Тогда,

$$X^u = U^{-1} X = U^T X.$$

Это выражение можно переписать в виде $X^u = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \cdots \\ u_n^T \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} (u_1,X) \\ \cdots \\ (u_n,X) \end{bmatrix}$, т.е. $X_k^u = (u_k,X)$.

В ортонормированном базисе мы получаем разложение

$$X = (u_1,X)u_1 + \cdots + (u_n,X)u_n.$$

Каждое слагаемое – проекция вектора X на соответствующий базисный вектор u_k.

Также, можно заметить, что квадрат длины вектора в ортонормальном базисе равен сумме квадратов его координат

$$(X,X) = (u_1,X)^2 + (u_2,X)^2 + \cdots + (u_n,X)^2.$$

Для перехода от произвольного базиса $F_1 \ldots F_n$ к ортонормальному необходимо произвести некоторые линейные преобразования над этим базисом в результате которых и получится искомый ортонормальный.

Алгоритм Грама - Шмидта.

1. Берем вектор F_1 и производим его нормирование

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$u_1 = \frac{1}{\|F_1\|_c} F_1 .$$

2. Далее, берем вектор F_2 из которого получим вектор u_2. Найдем вектор ошибки проекции F_2 на u_1 $\tilde{F}_2 = F_2 - (F_2, u_1)u_1$. Легко увидеть, что $\tilde{F}_2$ ортогонален u_1 ($\tilde{F}_2 \perp u_1$). Нормируя его, получаем вектор u_2

$$u_2 = \frac{1}{\|F_2\|_c} \tilde{F}_2 .$$

3. Берем вектор F_3. Получим вектор u_3, который ортогонален векторам u_1 и u_2

$$\tilde{F}_3 = F_3 - (F_3, u_1)u_1 - (F_3, u_2)u_2 ,$$

$$u_3 = \frac{1}{\|F_3\|_c} \tilde{F}_3 .$$

. . . . . .

к. На k-ом шаге алгоритма находим

$$\tilde{F}_k = F_k - (F_k, u_1)u_1 - \ldots - (F_k, u_{k-1})u_{k-1},$$

$$u_k = \frac{1}{\|F_k\|_c} \tilde{F}_k \quad k = 2,\ldots n .$$

Пример. Может ли на каком-то этапе к получиться $\tilde{F}_k = 0$?

Нет, т.к. это означало бы, что F_k линейно выражается через $F_1 \ldots F_{k-1}$, а это невозможно в силу линейной независимости базисных векторов.

Указанный метод можно использовать для проверки линейной независимости.

Пример. Заданы базисные векторы

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Построить ортонормированный базис методом Грама – Шмидта.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1. $\|F_1\| = 3$, тогда, $u_1 = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

2. $\widetilde{F}_2 = F_2 - (u_1, F_2)u_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$.

$$u_2 = \frac{1}{\|\widetilde{F}_2\|}\widetilde{F}_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}.$$

3. $\widetilde{F}_3 = F_3 - (u_1, F_3)u_1 - (u_2, F_3)u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

$$u_3 = \frac{1}{\|\widetilde{F}_3\|}\widetilde{F}_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Векторы u_1, u_2, u_3 – образуют ортонормальный базис.

2.2.8. Линейные оболочки, подпространства

Линейной оболочкой векторов $F_1 \dots F_m$ n-мерного пространства называется множество всех их линейных комбинаций

$$L(F_1 \dots F_m) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k F_k \right\}.$$

Пример. Пусть $n = 2$, $m = 1$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

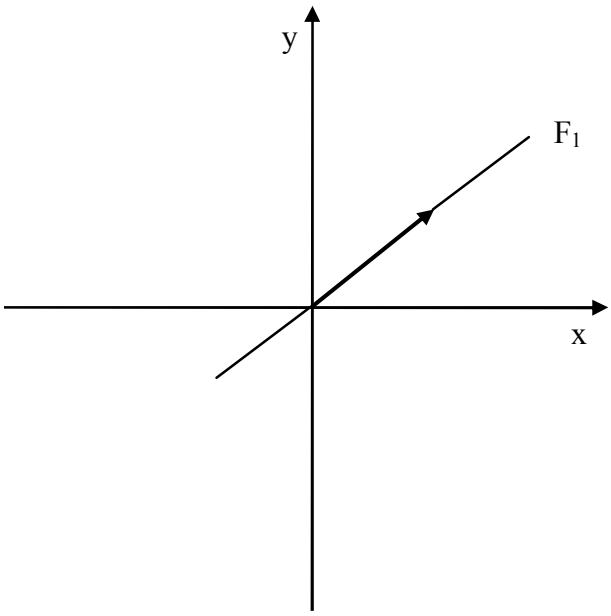


Рисунок 12 – Пример линейной оболочки при $n = 2$, $m = 1$

На рисунке 12 – линейная оболочка – это все векторы αF_1, где α – число. Т.е. в этом случае – линейная оболочка – это прямая.

Пример. Пусть $n = 2$, $m = 2$.

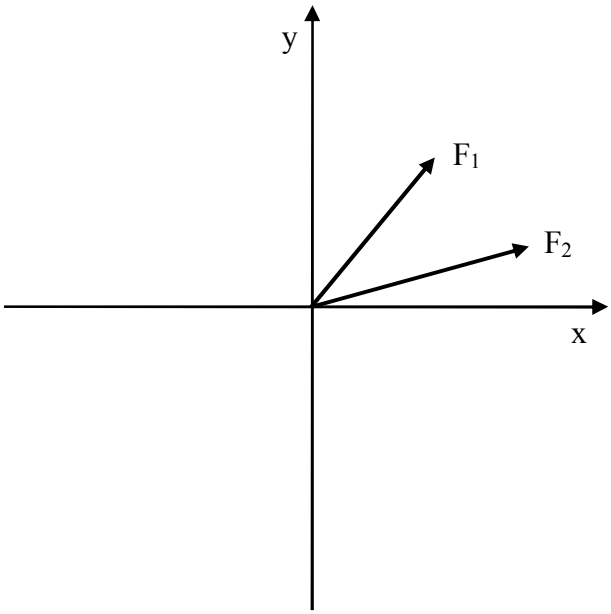


Рисунок 13 – Пример линейной оболочки при $n = 2$, $m = 2$

На рисунке 13 – линейная оболочка – это все векторы $L(F_1 F_2) = \{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2\}$. Т.е. в этом случае – линейная оболочка – это пространство R^2.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Если из $F_1 \dots F_m$ удалить линейно-зависимые векторы, то линейная оболочка оставшихся векторов будет совпадать с исходной.

Доказательство. Пусть некоторый вектор $F_r = \sum_{i=1}^{m} \beta_i F_i$. Тогда, для всякого вектора $X \in L(F_1 \dots F_m)$ справедливо представление

$$X = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} x_k F_k + \sum_{i=1}^{m} x_r \beta_i F_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} (x_k + x_r \beta_k) F_k \; . \; \#$$

Линейная оболочка $L(F_1 \dots F_m)$ является линейным пространством.

Пусть $F_1 \dots F_m$ – последовательность линейно-независимых векторов n-мерного пространства. Линейная оболочка этих векторов $L(F_1 \dots F_m)$ называется m-мерным подпространством n-мерного пространства. Векторы $F_1 \dots F_m$ называются базисом подпространства, а коэффициенты в представлении $X = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k F_k$ называются координатами вектора X в базисе $F_1 \dots F_m$. Заметим, что $m \le n$, иначе векторы $F_1 \dots F_m$ были бы линейно-зависимыми. Пусть $m < n$. Т.к. в n-мерном пространстве можно найти n линейно-независимых векторов, то базис $L(F_1 \dots F_m)$ можно дополнить векторами $F_{m+1} \dots F_n$ до базиса n-мерного пространства. Разложение $X \in L(F_1 \dots F_m)$ в базисе $F_1 \dots F_n$ будет иметь вид

$$X = \sum_{k=1}^{m} X_k^F F_k + \sum_{k=m+1}^{n} 0 \cdot F_k \; .$$

Следовательно, в базисе $F_1 \dots F_n$ координатный вектор подпространства $L(F_1 \dots F_m)$ имеет вид

$$X^F = \left[X_1^F \, X_2^F \dots X_m^F \, 0 \dots 0 \right]^T .$$

Из последнего ясно, почему $L(F_1 \dots F_m)$ называется m-мерным подпространством.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2.2.9. Операции над линейными подпространствами

Пересечение подпространств $L(F_1 \dots F_m) \cap L(G_1 \dots G_r)$ является также линейным подпространством.

Пример. Рассмотрим пересечение подпространств $L(F_1) \cap L(G_1)$, т.е. $m = 1,\ r = 1$.

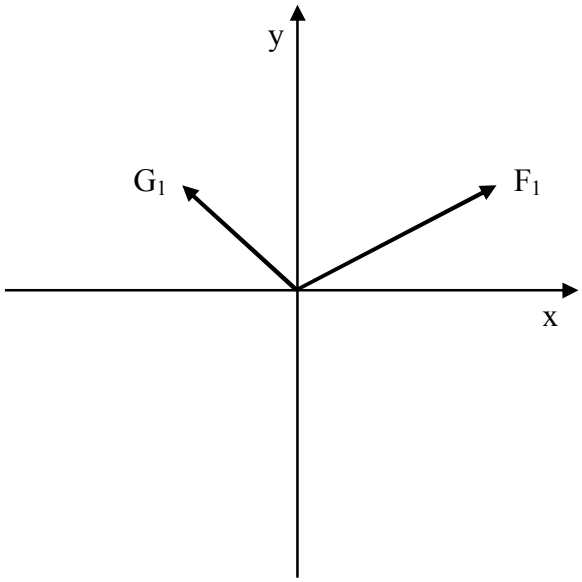


Рисунок 14 – Пример пересечения подпространств при $m = 1,\ r = 1$

Пересечение этих двух подпространств является точкой (начало координат). Она не является подпространством, т.к. мы не можем найти базис.

Пример. Рассмотрим пересечение подпространств $L(F_1, F_2) \cap L(G_1)$, т.е. $m = 2,\ r = 1$.

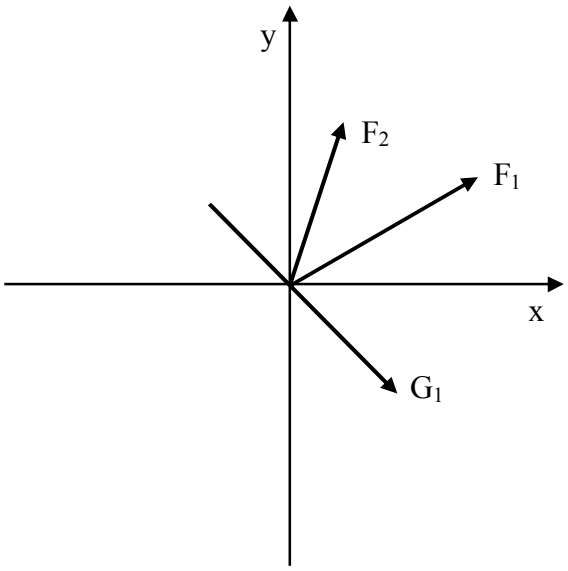


Рисунок 15 – Пример пересечения подпространств при $m = 2,\ r = 1$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

В данном случае, $L(F_1, F_2) \cap L(G_1) = L(G_1)$.

Очевидно, что

$$0 \le \dim L(F_1 \dots F_m) \cap L(G_1 \dots G_r) \le \min(m, r).$$

Если пересечение двух подпространств содержит только нулевой вектор, то будем говорить, что подпространства не пересекаются.

Сформулируем без доказательства следующую теорему. Подпространства $L_F = L(F_1 \dots F_m)$ и $L_G = L(G_1 \dots G_r)$ не пересекаются, если и только если $F_1 \dots F_m\, G_1 \dots G_r$ линейно независимы.

Суммой подпространств $L(F_1 \dots F_m) + L(G_1 \dots G_r)$ – называется множество всех векторов Z=X+Y где $X \in L(F_1 \dots F_m)$ а $Y \in L(G_1 \dots G_r)$.

Сумма подпространств не совпадает с операцией объединения множеств. В том случае, когда подпространства $L_F = L(F_1 \dots F_{m_1})$ и $L_G = L(G_1 \dots G_{m_2})$ не пересекаются, то их сумма называется прямой суммой и обозначаются как $L(F_1 \dots F_m) \dot{+} L(G_1 \dots G_r)$.

Свойства прямой суммы подпространств:

1) Любой вектор $X \in L(F) \dot{+} L(G)$ может быть единственным образом представлен в виде суммы $X = X_G + X_F$, где $X_G \in L(G)$, $X_F \in L(F)$.

Доказательство. Предположим, что рассматривается вектор который можно представить в следующем виде $X = X_{F_1} + X_{G_1} = X_{F_2} + X_{G_2}$. Но тогда, $X_{F_1} - X_{F_2} = X_{G_2} - X_{G_1}$. Так как левая часть равенства принадлежит подпространству $L(F)$, а правая – принадлежит подпространству $L(G)$, являющиеся непересекающимися, то $X_{F_1} - X_{F_2} = 0$ и $X_{G_2} - X_{G_1} = 0$. #

2) У прямой суммы $\dim L(G_1 \dots G_r) \dot{+} L(F_1 \dots F_m) = m + r$.

Доказательство. Покажем, что последовательность векторов $F_1 \dots F_m\, G_1 \dots G_r$ является базисом прямой суммы.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

а) Докажем линейную независимость. Пусть существуют коэффициенты α_k, β_k, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k F_k + \sum_{k=1}^{r} \beta_k G_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k F_k = \sum_{k=1}^{r} (-\beta_k) G_k .$$

Но тогда, каждая из сумм равна нулю, что невозможно.

б) Теперь докажем, что всякий вектор $X \in L(F) \dot{+} L(G)$ представим через указанную последовательность векторов. Но это следует из первого свойства прямой суммы, т.к. мы можем представить $X = X_F + X_G$. #

Используя изложенные выше свойства можно показать, что

$$\dim(L_F \dot{+} L_G) = \dim L_F + \dim L_G - \dim L_F \cap L_G .$$

2.2.10. Ортогональные подпространства

Пусть в пространстве R^n задано m-мерное подпространство $L(F_1 \ldots F_m)$. Вектор X называется ортогональным подпространству $L_F = L(F_1 \ldots F_m)$ если он ортогонален любому вектору из этого подпространства.

Теорема. Для того, чтобы вектор X был ортогональным подпространству $L_F = L(F_1 \ldots F_m)$, необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален каждому вектору базиса.

Доказательство. 1) Необходимость очевидна. Если вектор X ортогонален подпространству, то он ортогонален каждому вектора базиса.

2) Достаточность. Пусть X ортогонален каждому вектору базиса. Тогда, $(X, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k F_k) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (X, F_k) = 0$. #

Подпространства L_1 и L_2 называется ортогональными, если любой вектор из L_1 ортогонален любому вектору из L_2. Критерий ортогональности двух подпространств определяет

Теорема. Для того, чтобы подпространство $L(F_1 \ldots F_m)$ было ортогонально подпространству $L(G_1 \ldots G_m)$ необходимо и достаточно, чтобы

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

каждый вектор базиса $F_1 \dots F_m$ был ортогонален каждому вектору из базиса $G_1 \dots G_m$.

Теорема. Ортогональные подпространства не пересекаются.

Доказательство. Пусть пространства ортогональны, но пересекаются. Тогда, существует вектор X, принадлежащий обоим подпространствам. При этом, согласно вышесказанному, X должен быть ортогонален сам себе. $(X,X) = 0$, а значит, по свойству скалярного произведения, X – нулевой вектор. Следовательно, исходные подпространства не пересекаются. #

На практике часто применяется разложение пространства R^n на два ортогональных подпространства L и $L^{\perp}$. Поскольку ортогональные подпространства не пересекаются $L \bigcap L^{\perp} = \{0\}$, то $\dim(L \dot{+} L^{\perp}) = n$. Такие подпространства называются ортогональными дополнениями друг друга.

Рассмотрим способы построения ортогонального дополнения $L^{\perp}(G_1 \dots G_{n-m})$ подпространства $L(F_1 \dots F_m)$ до пространства R^n.

1. Как указано выше, векторы $G_i, i = 1,\dots,n-m$ должны удовлетворять следующим условиям $(F_k, G_i) = 0,\ k = 1,\dots,m;\ i = 1,\dots,n-m$. Составляя матрицу $F = [F_1\ F_2 \dots F_m]$, для каждого $G_i, i = 1,\dots,n-m$ получим матричное уравнение вида $F^T G_i = 0$. Это система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, причем $\operatorname{rang} F = m$. Такая система имеет $n-m$ линейно независимых решений. Они и образуют базис ортогонального дополнения $L^{\perp}(G_1 \dots G_{n-m})$.

2. Добавим к базису $F_1 \dots F_m$ векторы $G_1 \dots G_{n-m}$, образующие базис в R^n, а затем произведем ортогонализацию базиса, например методом Грама - Шмидта. Тогда, векторы $u_1 \dots u_m$ образуют базис подпространства $L(u_1 \dots u_m)$, а остальные векторы $u_{m+1} \dots u_n$ – базис его ортогонального дополнения $L^{\perp}(u_{m+1} \dots u_n)$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Пусть в пространстве R^3 указано подпространство $L_F = L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$. Найти ортогональное дополнение указанного подпространства до пространства R^3.

Очевидно, ортогональное дополнение будет содержать один базисный вектор $G_1 = \begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix}$.

1. Запишем уравнение для его нахождения вида $F^T G_1 = 0$,

$$\begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 = 0 \\ g_1 + g_2 = 0 \end{cases}.$$

Указанная система имеет 2 линейно независимых решения, т.к. ранг матрицы $F = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ равен 1. Выберем $G_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$. В итоге, получаем базис пространства R^3: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$.

Пример. Пусть в пространстве R^3 указано подпространство $L_F = L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.

Найти ортогональное дополнение указанного подпространства до пространства R^3.

Ортогональное дополнение будет содержать два базисных вектора G_1, G_2.

Выберем G_1 и G_2 произвольными, но так, чтобы они были линейно независимы с вектором заданного подпространства и между собой.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Проведем ортогонализацию векторов F_1, G_1, G_2, например, методом Грама-Шмидта. В итоге получим: $u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ – базисный вектор заданного подпространства, $u_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ – базисные векторы ортогонального дополнения.

2.2.11. Упражнения

1. Пусть с помощью естественного базиса E_1, E_2 задан вектор $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Укажите, изменится ли координатный вектор, если базис будет иметь вид E_2, E_1. Чему будет равен координатный вектор X^F, если базис будет иметь вид $2E_1, E_2$.

2. Докажите, что норма $\|X\|_c$ евклидова пространства обладает всеми свойствами нормы.

3. Докажите ортогональность вектора проекции $\hat{X}$ и вектора ошибки проецирования $\tilde{X}$.

4. Построить на плоскости область, удовлетворяющую для векторов линейного пространства R^2 заданному неравенству

$$\|x\|_2 \le 1, \quad \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2} \le 1.$$

5. Проверить, удовлетворяет ли свойствам нормы функция $f(x) = |x_1| + 5|x_2| - 0,2|x_3|$, заданная на линейном пространстве R^3.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

6. Проверить, удовлетворяет ли свойствам скалярного произведения функция $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$, заданная на линейном пространстве R^3.

7. Нормировать заданный в линейном пространстве R^3 вектор $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ следующими нормами: $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$, $\|x\|_n = |x_1| + 2|x_2| + \cdots + n|x|_n$.

8. Докажите, что векторы $F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $F_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ образуют базис линейного пространства R^3. Представить в этом базисе векторы $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, заданные в естественном базисе. Затем, полученные векторы представьте в естественном базисе, доказав, что они совпадают с A и B.

9. Получить формулы преобразования координат векторов пространства R^3 при переходе от базиса $F_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ к базису $G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $G_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

10. В линейном пространстве R^3 найти проекцию $\hat{x}$ вектора $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ на вектор $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и вектор $\tilde{x}$ – ошибку проецирования.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

11. Построить ортонормированный базис с помощью ортогонализации заданной последовательности векторов $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ методом Грама - Шмидта.

2.3. Линейные операторы

2.3.1. Линейные операторы в конечномерных пространствах

Пусть заданы пространства X, Y. Линейным оператором $y = A(x)$ называется функциональное отображение $X \to Y$, обладающее следующими свойствами:

1. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \ \forall x_1, x_2 \in X$

2. $A(\alpha x) = \alpha A(x) \ \forall x \in X$.

Пространство X является пространством прообразов (отправлений), а пространство Y – пространством образов (прибытий).

Пусть $X = R^n$, $Y = R^m$. Свойства линейных операторов описываются матрицей линейного оператора A – m x n состоящей из вещественных чисел.

$$y = Ax.$$

Пространство определения линейного оператора совпадает с пространством $X = R^n$.

Пространство значений это часть пространства образов $R(A) \subseteq Y$, т.е. те y, которые можно получить в результате умножения $y = Ax$. $R(A)$ является пространством. Его размерность равна количеству линейно независимых столбцов среди $A_1 \ldots A_n$ т.е. равна

$$\dim R(A) = \operatorname{rang} A.$$

В качестве базиса этого пространства можно взять линейно - независимые столбцы A. Т.е. всякий элемент y из пространства значений представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы A.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Рассмотрим пространство прообразов $X = R^3$ и пространство образов $Y = R^2$. Пусть матрица линейного оператора имеет вид $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. Пространство значения $R(A)$ – это линейная оболочка трех векторов $R(A) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right)$. Очевидно, что $\text{rang}A = 1$. Следовательно, базис пространства $R(A)$ состоит из одного вектора, например, вектора $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Условие сюръективности оператора определяется тем, что $R(A) = Y$, и, следовательно, $\text{rang}A = m$.

Пример. Определим, может ли быть сюръективным оператор $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

Так как, ранг указанной матрицы равен 2 ($\text{rang}A = 2$), а размерность пространства образов $m = 3$, то оператор не является сюръективным.

Множество прообразов $x \in X$ оператора A, образом которых является нулевой вектор, т.е. Ax=0, называется ядром оператора A и обозначается $N(A)$.

Ядро является подпространством $N(A) \subseteq X = R^n$.

Если размерность ядра оператора равна нулю, то тогда каждому y из пространства значений соответствует только один x из пространства определений.

Найдем формулу для определения размерности ядра оператора. Построим ортогональное дополнение для ядра оператора $N^{\perp}(A)$. Тогда $\dim N(A) + \dim N^{\perp}(A) = n$. $\dim N^{\perp} = \dim R(A)$. Отсюда получаем, что $\dim N(A) + \dim R(A) = n$, т.е. размерность ядра оператора определяется из соотношения

$$\dim N(A) = n - \text{rang}A .$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Матрица оператора $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 0 & 10\end{bmatrix}$. Пусть $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$. Определим ядро оператора и его размерность.

Ранг матрицы A равен 2 ($\operatorname{rang}A=2$). Следовательно, $\dim N(A)=3-\operatorname{rang}A=3-2=1$. В ядро оператора входят все $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$, удовлетворяющие условию Ax=0 или $\begin{cases}x_1+5x_3=0\\ 2x_1+10x_3=0\end{cases}$.

2.3.2. Влияние замены базиса на матрицу линейного оператора

В представлениях $y=Ax$ предполагается, что в пространствах $X=R^n$ и $Y=R^m$ введен естественный базис. Если в пространство X ввести новый базис $F=\{F_1,\ldots,F_n\}$, то оператор примет вид

$$y=AP^{EF}x^F.$$

Обозначая $A^{EF}=AP^{EF}$, получим эквивалентный оператор

$$y=A^{EF}x^F,$$

отображающий пространство X в пространство Y. Матрица A^{EF} равна

$$A^{EF}=AF=A\left[F_1\cdots F_n\right]=\left[AF_1\cdots AF_n\right].$$

Получаем, что столбцами матрицы A^{EF} являются преобразованные с помощью матрицы A базисные векторы $F_1,\ldots,F_n$.

Аналогично, введение базиса $G_1,\ldots,G_m$ в пространство Y приводит к новой форме оператора.

$$y^G=A^{GE}x,$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

где, $A^{GE} = P^{GE}A$, а матрица $P^{GE} = G^{-1} = \left[G_1 \cdots G_m\right]^{-1}$. Таким образом, можем сформулировать правило преобразования матрицы оператора A при переходе от естественного базиса к базису $G_1,\ldots,G_m$ в пространстве образов Y.

Столбцами матрицы A^{GE} являются столбцы матрицы A, представленные в базисе $G_1,\ldots,G_m$.

Объединяя указанные частные случаи, получаем, что при переходе от естественных базисов как в пространстве Y, так и в пространстве X оператор приобретет вид

$$y^G = A^{GF}x^F,$$

где, $A^{GF} = P^{GE}AP^{EF}$.

Столбцами матрицы A^{GF} являются линейные преобразования с помощью матрицы A базисных векторов $F_1,\ldots,F_n$, представленные в базисе $G_1,\ldots,G_m$.

$$A^{GF} = \left[P^{GE}AF_1 \cdots P^{GE}AF_n\right].$$

2.3.3. Канонические формы оператора в конечномерных пространствах

Вводя в пространства X и Y новые базисы, можно получить разные представления матрицы оператора A^{GF}. Каноническими называются стандартные формы, позволяющие выявить структуру оператора. Как правило, эти формы содержат блоки, состоящие из нулей.

Задача получения канонической формы матрицы сводится к выбору базисов в пространствах прообразов и образов таких, при которых матрица оператора A^{GF} имела бы наибольшее число нулей.

Рассмотрим канонические формы, основанные на базисах пространства значений $R(A)$ и ядра оператора $N(A)$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1. Введем в пространство Y базис, основанный на разложении в прямую сумму вида

$$Y = R(A) \dotplus R^{\perp}(A) = L(u_1 \dots u_r) \dotplus L(u_{r+1} \dots u_m).$$

Предположим, что $u_1 \dots u_m$ – ортономированный базис пространства Y. Тогда, матрица оператора будет иметь вид

$$A^{UE} = U^T A = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1, A_1) & \cdots & (u_1, A_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_r, A_1) & \cdots & (u_r, A_n) \\ (u_{r+1}, A_1) & \cdots & (u_{r+1}, A_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_m, A_1) & \cdots & (u_m, A_n) \end{bmatrix}.$$

Так как столбцы матрицы A – $A_k \in R(A)$, то они являются ортогональными векторам $u_{r+1}, \dots, u_m$, и последние строки матрицы A^{UE} от $r+1$ до m равны нулю, то есть

$$A^{UE} = \begin{matrix} n \\ r \\ m-r \end{matrix} \left[\begin{array}{c} \equiv \\ \hline 0 \end{array} \right].$$

2. Введем базис в пространство X, основанный на разложении в прямую сумму

$$X = N^{\perp}(A) \dotplus N(A) = L(v_1 \dots v_r) \dotplus L(v_{r+1} \dots v_n),$$

где $v_1, \dots, v_n$ – новый базис пространства X. Тогда, матрица оператора будет иметь вид

$$A^{EV} = \begin{bmatrix} Av_1 \dots Av_r & Av_{r+1} \dots Av_n \end{bmatrix}.$$

Векторы $v_{r+1}, \dots, v_n$ – являются базисом ядра оператора $N(A)$. Значит, последние столбцы матрицы оператора A^{EV} с $r+1$ до n – равны нулю, то есть,

$$A^{EV} = \begin{matrix} m \\ r \end{matrix} \left[\begin{matrix} \equiv & \vdots & 0 \end{matrix} \right].$$
$$\qquad\quad r \quad n-r$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3. Если ввести оба новых базиса одновременно, то матрица оператора примет вид

$$A^{UV} = \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}\left[\begin{array}{c|c} \equiv & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$
$$\begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

причем, матрица $r \times r$, стоящая в верхнем левом углу является невырожденной.

2.3.4. Линейные операторы, отображающие конечномерное пространство в себя

Линейные операторы, выполняющие отображение вида $R^n \to R^n$ представляются в виде квадратных матриц. Их особенность состоит в том, что пространства прообразов и образов совпадают. Если ранг матрицы оператора A равен размерности пространства,

$$\text{rang}A = n,$$

то оператор отображает пространство R^n на себя, а если ранг матрицы оператора A меньше размерности пространства,

$$\text{rang}A < n,$$

то оператор отображает пространство R^n в подпространство значений $R(A) \subset R^n$.

Далее, линейные операторы, отображающие пространство R^n на себя будем называть линейными операторами в пространстве R^n.

Так как, пространство прообразов и образов совпадают, то при введении нового базиса $F_1 \ldots F_n$ оператор приобрете следующий вид

$$y^F = A^{FF} x^F,$$

где, $A^{FF} = F^{-1}AF$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Подобное преобразование называется преобразованием подобия матрицы A. Преобразование подобия не изменяет определитель матрицы, т.е. $\det A^{FF} = \det A$.

Докажем это.

$$\det A^{FF} = \det(F^{-1}AF) = \det F^{-1} \det A \det F .$$

Учитывая, что $\det F^{-1} \det F = 1$, получаем, что $\det A^{FF} = \det A$.

Таким образом, определитель матрицы не зависит от системы координат.

2.3.5. Характеристический многочлен квадратной матрицы

Характеристический многочлен квадратной матрицы играет ключевую роль при изучении свойств линейных операторов в пространстве R^n.

Характеристическим многочленом квадратной матрицы A называется определитель вида

$$\Delta(s) = \det[sE\text{-}A] = \det\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \Delta_0 + \Delta_1 s + \cdots + \Delta_{n-1} s^{n-1} + \Delta_n s^n .$$

Перечислим свойства характеристического многочлена:

1. Коэффициенты характеристического многочлена $\Delta_k, k = 1 \ldots n$ являются вещественными числами, которые определяются значениями коэффициентов матрицы A. Формулы для вычисления этих коэффициентов сложны. При малом значении n коэффициенты $\Delta_k, k = 1 \ldots n$ можно определить, раскрыв определитель в аналитическом виде.

Пример. Пусть $n = 2$. Найдем характеристический многочлен в общем виде.

$$\Delta(s) = \det\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22} \end{bmatrix} = s^2 + (-a_{11} - a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) .$$

2. Теорема Кэли - Гамильтона (без доказательства).

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\Delta_0 E + \Delta_1 A + \cdots + \Delta_{n-1} A^{n-1} + \Delta_n A^n = 0, \ (\Delta(A) = 0).$$

Пример. Матрица $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ имеет характеристический многочлен $\Delta(s) = s^2 - 4s + 7$. Покажем, что $\Delta(A) = 0$. Подставляя матрицу A вместо s, получаем

$$\Delta(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следствие 2.1. Любая степень матрицы A – $A^k, k \geq n$ может быть представлена в виде суммы степеней матрицы A от 0 до n-1.

$$A^n = -\Delta_0 E - \cdots - \Delta_{n-1} A^{n-1},$$
$$A^{n+1} = -\Delta_0 A - \cdots - \Delta_{n-2} A^{n-1} + \Delta_{n-1}(\Delta_0 E + \cdots + \Delta_{n-1} A^{n-1}) =$$
$$= \Delta_{n-1}\Delta_0 E + (\Delta_{n-1}\Delta_1 - \Delta_0) A + \cdots + (\Delta_{n-1}\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}) A^{n-1},$$

и т.д.

Следствие 2.2. Матрицу, обратную матрице A можно представить в виде многочлена

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_0}(\Delta_1 E + \Delta_2 A + \cdots + \Delta_n A^{n-1}).$$

Доказательство. Рассмотрим матричное уравнение $\Delta_0 E + \Delta_1 A + \cdots + \Delta_{n-1} A^{n-1} + \Delta_n A^n = 0$. Умножим обе части уравнения на A^{-1}. Получим

$$\Delta_0 A^{-1} + \Delta_1 E + \cdots + \Delta_{n-1} A^{n-2} + \Delta_n A^{n-1} = 0.$$

Отсюда, выражая A^{-1}, получаем исходное соотношение.

3. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Доказательство.

$$\det(sE - F^{-1}AF) = \det(sF^{-1}F - F^{-1}AF) = \det F^{-1} \det(sE - A) \det F =$$
$$= \det(sE - A).$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

4. Пусть матрица A имеет диагональный или треугольный вид. Тогда,

$$\Delta(s) = \det\left[sE - A\right] = (s - a_{11})(s - a_{22})\cdots(s - a_{nn}) = \prod_{k=1}^{n}(s - a_{kk}).$$

5. Пусть матрица A имеет блочно - диагональный вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

где $A_{11} - m \times m$, $A_{22} - \ n - m \times n - m$ матрицы.

Тогда,

$$\Delta(s) = \det(sE - A) = \det(sE - A_{11})\det(sE - A_{22}).$$

6. Характеристическое уравнение $\Delta(s) = 0$ имеет n корней, в общем случае – комплексных s_k, $k = 1\ldots n$.

$$\Delta(s) = \prod_{k=1}^{n}(s - s_k).$$

Значения некоторых корней могут совпадать, тогда, характеристический многочлен имеет кратные корни s_k, $k = 1\ldots N$ с кратностью n_k, причем,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_N = n.$$

Если $n_k = 1$, то корень называется простым.

Характеристический многочлен может быть представлен своими корнями

$$\Delta(s) = \prod_{k=1}^{N}(s - s_k)^{n_k}.$$

Корни характеристического уравнения называются собственными числами оператора. Собственные числа играют принципиальную роль в изучении свойств линейных операторов и в теории систем.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2.3.6. Инвариантные подпространства линейного оператора в пространстве R^n

Инвариантным подпространством оператора A в пространстве R^n называется такое линейное подпространство $J \subseteq R^n$, что для всякого $x \in J$ его образ Ax также принадлежит J ($Ax \in J$).

Эти подпространства играют важную роль в приведении оператора A к простейшим (каноническим) формам. Покажем, как это приведение можно выполнить.

Пусть $F_1 \dots F_m$ – базис подпространства J. Дополним его до базиса пространства R^n некоторыми векторами $F_{m+1} \dots F_n$. Тогда, в новом базисе матрица оператора будет иметь вид

$$A^{FF} = \begin{matrix} m \\ \\ m \end{matrix}\left[\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{matrix}\right].$$

Доказательство. В новом базисе векторы AF_k, $k = 1 \dots m$ имеют (по определению инвариантного подпространства) только первые m не равных нулю координат. Но по определению это и есть первые m столбцов матрицы A^{FF}.

Очевиден вопрос. Всегда ли можно построить такое разложение и как этот сделать? Покажем, что ответ на этот вопрос связан с характеристическим многочленом и собственными числами оператора A.

2.3.7. Собственные векторы и собственные числа оператора

Будем искать одномерное инвариантное подпространство $J = L(F)$. Для этого нужно найти хотя бы один вектор $F \neq 0$ такой, что $AF \in J$, т.е. $AF = sF$.

Не равный нулю вектор $F \in C^n$, удовлетворяющий условию $AF = sF$, называется собственным вектором оператора A, а число $s \in C$ – собственным числом оператора A. Говорят, что F и s – соответствуют друг другу.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Укажем способ вычисления собственного вектора и собственного числа оператора.

Будем рассматривать выражение $AF = sF$. Перенесем влево выражение и получим $(sE - A)F = 0$. Для того, чтобы существовал вектор $F \neq 0$, необходимо, чтобы $\dim N(sE - A) \neq 0$, т.е. $\operatorname{rang}(sE - A) < n$ или $\det(sE - A) = 0$. То есть s – это корень характеристического уравнения. Пусть это, например, s_1. Тогда, ему соответствует любое нетривиальное решение уравнения

$$A^{s_1} F_1 = 0,$$

где $A^{s_1} = s_1 E - A$.

Сформулируем свойства собственных векторов.

1. Каждому собственному числу соответствует бесконечное число собственных векторов, т.к. если F_1 – собственный вектор, то и λF_1 – собственный вектор. Для однозначности можно потребовать, чтобы $\|F_1\| = 1$ (или считать разными линейно независимые векторы). Если принять такое предположение, то следует решить вопрос – сколько линейно-независимых векторов соответствует s_1. Так как $A^{s_1} F_1 = 0$, т.е. вектор $F_1 \in N(A^{s_1})$, то количество линейно независимых векторов, соответствующих s_1 равно размерности ядра A^{s_1} ($\dim N(A^{s_1})$).

Если $\operatorname{rang} A^{s_1} = n - r$, то собственному числу s_1 соответствует r линейно-независимых собственных вектора.

Доказательство. Пусть это векторы $F_1^{(1)} \dots F_1^{(r)}$. Добавим к ним до базиса C^n векторы $F_{r+1} \dots F_n$. В этом базисе оператор будет иметь вид

$$A^{FF} = \begin{matrix} r \\ \\ \\ \\ n-r \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & & & \\ & \ddots & & A_{12} \\ & & s_1 & \\ \hline & 0 & & A_{22} \end{array}\right].$$

$\quad\quad\quad

Но тогда $\det(sE - A^{FF}) = (s - s_1)^r \cdot \det(sE - A_{22})$. Таким образом, мы доказали, что $1 \le r \le n_1$.

Следствие. Простому собственному числу соответствует только один линейно-независимый собственный вектор.

2. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам – линейно-независимы.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_N F_N = 0$, причем, собственному вектору F_k соответствует собственное число s_k. Нам нужно доказать, что все $\alpha_k = 0$. Пусть, например, $\alpha_N \neq 0$. Умножим равенство на A^{s_1}

$$A^{s_1}\alpha_k F_k = (s_1 E - A)\alpha_k F_k = \alpha_k (s_1 E F_k - A F_k) = \alpha_k (s_1 - s_k) F_k .$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_2 (s_1 - s_2) F_2 + \cdots + \alpha_N (s_1 - s_2) F_N = 0 .$$

Для того, чтобы избавиться от F_2 умножим последнее равенство на A^{s_2} и т.д. до $A^{s_{N-1}}$

$$\alpha_N (s_1 - s_N)(s_2 - s_N)\ldots(s_{N-1} - s_N) F_N = 0 .$$

А так как все s_k – разные, то отсюда следует, что $\alpha_N \neq 0$. #

3. Если s_k – комплексное число, а F – соответствующий ему комплексный вектор, то $\overline{s}_k$ – тоже собственное число, а $\overline{F}$ – соответствующий этому числу собственный вектор.

Доказательство. Рассмотрим выражение $AF = s_k F$. Применим операцию комплексного сопряжения. $\overline{AF} = \overline{s_k F} \Rightarrow A\overline{F} = \overline{s}_k \overline{F}$. #

Пример. Рассмотрим следующую матрицу оператора

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа оператора.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\det\left[sE-A\right]=\det\begin{bmatrix} s-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & s-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & s-\lambda \end{bmatrix}=(s-\lambda)^3.$$

Оператор имеет собственное число $s_1=\lambda$ кратности $n_1=3$. Определим, сколько собственных векторов соответствует найденному собственному числу. Для этого найдем $\operatorname{rang}(\lambda E-A)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=0$. Тогда, согласно свойства 1 следует, что найденному собственному числу соответствуют три собственных вектора.

Пример. Рассмотрим следующую матрицу оператора

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа оператора.

$$\det\left[sE-A\right]=\det\begin{bmatrix} s-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & s-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & s-\lambda \end{bmatrix}=(s-\lambda)^3.$$

Оператор имеет собственное число $s_1=\lambda$ кратности $n_1=3$. Определим, сколько собственных векторов соответствует найденному собственному числу. Для этого найдем $\operatorname{rang}(\lambda E-A)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=2$.

Тогда, согласно свойства 1 следует, что найденному собственному числу соответствует один собственный вектор.

Пример. Рассмотрим следующую матрицу оператора

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа оператора.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\det\left[sE-A\right]=\det\begin{bmatrix}s-\lambda & 0 & 0\\ 0 & s-\lambda & 0\\ 0 & 0 & s-\lambda\end{bmatrix}=(s-\lambda)^3.$$

Оператор имеет собственное число $s_1=\lambda$ кратности $n_1=3$. Определим, сколько собственных векторов соответствует найденному собственному числу. Для этого найдем $\operatorname{rang}(\lambda E-A)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=1$. Тогда, согласно свойства 1 следует, что найденному собственному числу соответствует два собственных вектора.

2.3.8. Канонические формы линейного оператора в пространстве R^n

Случай 1. Все собственные числа матрицы оператора A – простые.

Для такого линейного оператора можно получить n линейно независимых собственных векторов. Т.е. каждому собственному числу соответствует свой собственный вектор ($s_k \Rightarrow F_k$). Как было доказано выше, векторы $F_k, k=1\ldots n$ – линейно независимы. Указанные векторы порождают n линейных непересекающихся подпространств. У каждого подпространства размерность единична и каждое подпространство является инвариантным для оператора A. Т.е. мы можем разложить пространство R^n в прямую сумму

$$R^n=J_1\dotplus J_2\dotplus\cdots\dotplus J_n.$$

Если при помощи этих векторов построить базис, то в нем столбец матрицы оператора будет иметь вид

$$A_k^{FF}=P^{FE}AF_k=s_kP^{FE}F_k=s_kE_k=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ s_k\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

и, таким образом, матрица A^{FF} имеет диагональный вид

$$A^{FF} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & s_n \end{bmatrix}.$$

Случай 2. Есть кратные собственные числа, но для каждого кратного s_k кратности n_k выполняется условие

$$\text{rang}A^{s_k} = n - n_k.$$

Как было доказано ранее, тогда собственному числу s_k соответствует n_k линейно-независимых собственных векторов. В этом случае из собственных векторов (их $n_1 + n_2 + \cdots n_N = n$) тоже можно собрать базис. При этом, так как все векторы линейно независимы, то в этом базисе матрица оператора A^{FF} тоже имеет диагональный вид.

$$A^{FF} = \begin{bmatrix} s_1 & & n_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & s_1 & & & & & & \\ & & & s_2 & & n_2 & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & s_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & s_N & n_N \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & s_N \end{bmatrix}.$$

Операторы случаев 1 и 2 называются операторами простой структуры. Они имеют n собственных векторов.

Случай 3. Оператор не имеет простую структуру. Если матрица не имеет простую структуру, то ее можно привести к блочно-диагональному виду, где по диагонали стоят клетки Жордана

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$J_m(s_k) = \begin{bmatrix} s_k & 1 & & \\ & s_k & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & s_k \end{bmatrix}_m^m .$$

Привести клетку Жордана к диагональной форме невозможно никакой заменой базиса.

2.3.9. Нормы квадратных матриц

Рассматривают два подхода к определению норм матриц. При первом из них матрица размера $n \times n$ рассматривается как вектор, состоящий из n^2 элементов. При таком подходе определения норм матриц практически совпадают с определением нормы вектора. Второй подход рассматривает матрицу как оператор и определяет его норму через нормы в пространстве прообразов и образов. Такой подход чаще применяется в теории систем и мы рассмотрим его подробнее.

Рассмотрим квадратную матрицу A и связанное с ней линейное преобразование $y = Ax$ где $y, x \in L^n$ (L^n – n-мерное линейное нормированное пространство). Согласованная норма матрицы определяется как действительное неотрицательное число, характеризующее это преобразование и определяющееся как

$$\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

причем, $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$. Действительно, $\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, тогда $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Легко видеть, что эта норма зависит от определения нормы векторов. Но при любом определении выполняются следующие свойства нормы матрицы:

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1. $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$;

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;

3. $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

4. $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$.

5. Для тождественного оператора E – $\|E\| = 1$.

Физический смысл понятия нормы состоит в следующем: если длина вектора x равна $\|x\|$, то длина вектора $y = Ax$ не может быть большей, чем $\|y\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Заметим также, что введенную норму матрицы называют подчиненной норме вектора.

Согласованные с введенными выше нормами векторов нормы матриц определяются по следующим соотношениям:

1. $$\|A\|_1 = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|} \le \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| |x_j|}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|} \le \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|;$$

2. $$\|A\|_2 = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{x^T A^T A x}{x^T x} \le \mathrm{tr} A^T A;$$

3. $$\|A\|_\infty = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\max_{i=1\ldots n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|}{\max_{k=1\ldots n} |x_k|} \le \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\max_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|}{\max_{k=1\ldots n} |x_k|} \le \max_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2.3.10. Квадратичные формы

Пусть в линейном пространстве R^n каждому элементу $x \in R^n$ поставлено в соответствие некоторое число $q(x)$. Тогда говорят, что в линейном пространстве определена функция $q(x)$ как отображение пространства R^n в пространство R^1 ($R^n \to R^1$).

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пусть в вещественном n-мерном пространстве, быть может Евклидовом, определена вещественная функция $q(x)$ которая в некотором базисе $F_1, F_2, \dots F_n$ записывается однородным многочленом второй степени, относительно координат вектора $x \in R^n$ по базису F_i, т.е.

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2,$$

где a_{ij} – фиксированные вещественные числа. Этот многочлен можно компактно записать с помощью симметричной матрицы Q размера $n \times n$ в виде

$$q(x) = x^T Q x .$$

Если использовать введенное выше определение для скалярного произведения, то

$$q(x) = (x, Qx) = (Qx, x) .$$

Такую функцию называют квадратичной формой заданной на элементах линейного пространства, а матрицу Q называют матрицей квадратичной формы.

Пример. По заданной квадратичной форме $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_2x_3$ составить ее матрицу. Учитывая, что квадратичная форма записывается однородным многочленом второй степени относительнго координат вектора, то матрица квадратичной формы будет иметь вид

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Квадратичная форма называется положительно определенной, если при любом $x \neq 0$ выполняется условие $q(x) > 0$.

Квадратичная форма называется неотрицательно определенной, если при любом x выполняется условие $q(x) \geq 0$.

Аналогично вводятся понятия отрицательно определенной и неположительно определенной квадратичных форм.

Очевидно, что указанные свойства квадратичной формы $q(x)$ зависят от матрицы Q.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Пусть в пространстве R^2 матрица квадратичной формы имеет вид $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда квадратичная форма имеет вид

$$q(x) = x^T Q x = x_1^2 + x_2^2 .$$

Указанная квадратичная форма для всех $x \neq 0$ всегда положительно определенная, т.е. $q(x) > 0$.

Пример. Пусть в пространстве R^2 матрица квадратичной формы имеет вид $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда квадратичная форма имеет вид

$$q(x) = x^T Q x = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 .$$

Указанная квадратичная форма для всех x неотрицательно определенная, т.е. $q(x) \geq 0$.

Для анализа положительной определенности квадратичной формы весьма удобно пользоваться следующим критерием.

Критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма $q(x) = x^T Q x$ была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ были строго положительны:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\cdots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Проверить, является ли квадратичная форма с матрицей

$$Q=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

положительно определенной.

Главные диагональные миноры матрицы Q равны $\Delta_1=5>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1>0$. Таким образом, указанная квадратичная форма является положительно определенной.

Пример. Проверить, является ли квадратичная форма с матрицей

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

положительно определенной.

Главные диагональные миноры матрицы Q равны $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3<0$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3<0$. Таким образом, указанная квадратичная форма не является положительно определенной.

Рассмотрим основные свойства матрицы квадратичной формы, позволяющие исследовать квадратичную форму $q(x)$.

1. Влияние замены базиса на свойства квадратичной формы.

Введем базис $F_1,F_2,\dots F_n$. Тогда, квадратичная форма в новом базисе будет иметь вид

$$q(Fx^F)=(x^F)^T F^T Q F x^F.$$

Обозначим $Q^{FF}=F^TQF$. Указанная матрица Q^{FF} является симметричной, т.е. $(Q^{FF})^T=Q^{FF}$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Видим, что при замене координат в квадратичной форме, в отличие от замены координат в линейном операторе $R^n \to R^n$ применяется не преобразование подобия. Однако преобразование подобия возникает в том случае, если векторы нового базиса $F_1, F_2, \ldots F_n$ являются ортонормированными.

2. Свойства собственных чисел и собственных векторов.

2.1. Собственные числа матрицы квадратичной формы Q являются вещественными числами.

Доказательство. Пусть λ – собственное число и X – его собственный вектор. Предположим, что для указанного собственного числа существует комплексно – сопряженное собственное число $\bar{\lambda}$, а $\bar{X}$ – его собственный вектор. Тогда,

$$QX = \lambda X \to X^T Q\bar{X} = \lambda(X, X),$$

$$Q\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X} \to X^T Q\bar{X} = \bar{\lambda}(X, X).$$

После вычитания получаем, что $(\lambda - \bar{\lambda})(X, X) = 0$, т.е. $\lambda = \bar{\lambda}$. #

Следствие. Собственные векторы матрицы квадратичной формы Q принадлежат пространству R^n.

2.2. Собственные векторы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны.

Доказательство. Рассмотрим собственные числа λ и μ, причем $\lambda \neq \mu$, и соответствующие им собственные векторы X и Y. Тогда,

$$QX = \lambda X \quad QY = \mu Y.$$

$$Y^T QX = \lambda Y^T X = \lambda(Y, X).$$

$$Y^T QX = \mu(Y, X).$$

После вычитания получаем $(\lambda - \mu)(Y, X) = 0$, т.е. $(Y, X) = 0$. #

2.3. Каждому собственному числу λ_k кратности n_k оператора Q соответствует n_k ортонормальных собственных векторов.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай $\lambda_k = 0$ кратности n_k. Найдем для матрицы оператора Q ядро оператора $N(Q)$ и пространство значений $R(Q)$ и введем в каждом ортонормированный базис. Докажем, что $R^n = N(Q) \dot{+} R(Q)$. С этой целью покажем, что $N(Q) \perp R(Q)$. Пусть векторы $Z \in N(Q),\ Y \in R(Q)$ отсюда следует, что существует вектор X такой, что $Y = QX$. Тогда, скалярное произведение имеет вид $(Y,Z) = (QX,Z) = (X,QZ) = (X,0) = 0$. Введем замену базиса $N(Q) \dot{+} R(Q)$. В этом базисе матрица оператора будет иметь вид

$$Q^{UU} = \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix}\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Q_R \end{array}\right].$$

$$m \quad n-m$$

Матрица Q_R не может иметь нулевых собственных чисел, так как в этом случае существовал бы вектор $X_R \neq 0$, принадлежащий пространству R^{n-m} такой, что $Q_R X_R = 0$. Следовательно $m = n_k$. Легко видеть, что в базисе U нулевым собственным числам соответствуют собственные векторы $E_1,\ldots,E_{n_k}$. Тогда в естественном базисе $X = UX^U$ – это векторы $u_1,\ldots,u_{n_k}$.

Теперь рассмотрим любое собственное число λ_k кратности n_k. Введем матрицу $Q_{\lambda_k} = \lambda_k E - Q$. Эта матрица имеет собственные числа $\lambda_i' = \lambda_i - \lambda_k$ кратности n_i. Поэтому λ_k в ней соответствуют нулевые собственные числа. Применим к Q_{λ_k} описанный выше способ

$$U^T Q_{\lambda_k} U = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Q_{R_k} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$U^T\left[\lambda_k E - Q\right]U = \lambda_k E - U^T Q U \rightarrow$$

$$U^T Q U = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_k & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & \lambda_k E - Q_R \end{array}\right]. \#$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Следствие. Симметрическая матрица Q имеет простую структуру и может быть приведена к диагональному виду.

3. Критерии положительной и неотрицательной определенности квадратичных форм.

Пусть мы нашли собственные числа λ_k, $k=1,\dots,N$ кратности n_k и соответствующие им собственные векторы. Как видно из указанных выше свойств, мы можем получить n собственных векторов, образующих ортонормированный базис $u_1,\dots,u_n$. Введем в квадратической форме замену переменных

$$q_U(x^U)=(x^U)^T Q^{UU} x^U,$$

где матрица

$$Q^{UU}=U^T Q U=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Но тогда

$$q_U(x^U)=\lambda_1(x_1^U)^2+\lambda_2(x_2^U)^2+\cdots+\lambda_n(x_n^U)^2.$$

Отсюда следует, что

Для положительной определенности квадратической формы необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы Q были положительными.

Для неотрицательной определенности квадратической формы необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы Q были неотрицательными.

2.3.11. Упражнения

1. Какой вид будет иметь матрица оператора, если $J_1 \dot{+} J_2 \dot{+} J_3 = R^n$?

2. Какой вид имеет матрица оператора в базисе $R(A) \dot{+} R^{\perp}(A)$, блочно-диагональный или блочно-треугольный?

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3. Определите размерность подпространства $N(A)$ – ядра оператора A и $R(A)$ – пространства значений оператора A. Постройте базисы в пространствах образов и прообразов оператора представленных в виде прямой суммы подпространств $R(A) \dot{+} R^{\perp}(A)$. Найдите представление оператора в этом базисе

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Найдите размерность подпространства $N(A)$ – ядра оператора A и $R(A)$ – пространства значений оператора A. Постройте базисы в пространствах образов и прообразов оператора представленных в виде прямой суммы подпространств $N^{\perp}(A) \dot{+} N(A)$. Найдите представление оператора в этом базисе

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Задан линейный оператор, отображающий линейное конечномерное пространство в себя. Найдите базис, в котором оператор имеет диагональную форму. Приведите оператор к диагональной форме

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Составьте матрицу квадратической формы и проверьте знакоопределенность формы с помощью миноров матрицы и по ее собственным числам

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

7. Составьте матрицу квадратической формы. Приведите квадратическую форму к каноническому виду

$$q(x) = 3x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

8. Найдите все значения параметра λ, при которых квадратическая форма положительно определена

$$q(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1 x_2 + 4x_1 x_3 - 2x_2 x_3 .$$

9. По симметричной матрице составьте квадратическую форму. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы и с их помощью приведите квадратическую форму к взвешенной сумме квадратов. Проверьте знакоопределенность формы

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ

3.1. Определение сигнала

«Физическое» определение сигнала можно сформулировать следующим образом. Сигнал – это определенная на заданном промежутке времени переменная величина, несущая информацию о состоянии или поведении системы.

Таким образом, с сигналом связаны два множества – множество определения Θ – множество моментов времени, на которых задан сигнал и множество значений сигнала Σ – то множество, которое может принимать сигнал в разные моменты времени.

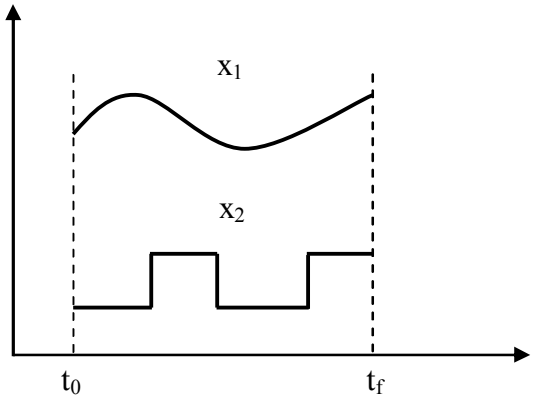


Рисунок 16 – Примеры сигналов

«Математическое» определение сигнала. Сигналом называется функциональное отображение заданного множества моментов времени Θ в множество значений сигнала Σ $(X:\Theta \to \Sigma)$. В зависимости от множества образов различают множество вещественных или комплексных сигналов: $\Sigma \subseteq R$ $(\Sigma \subseteq C)$.

Если множества Θ и Σ фиксированы и на них рассматриваются разные сигналы, то говорят, что рассматривается множество сигналов. Множество сигналов будем обозначать как $S(\Theta,\Sigma)$. Элементы этого множества будем обозначать большими латинскими буквами. Например,

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$X \in S(\Theta,\Sigma)$$

или

$$X = \{(t,x) \mid t \in \Theta\}.$$

Если исходить из определения отображения, то сигнал X является графиком отображения, то есть подмножеством множества кортежей

$$X \subset \Theta \times \Sigma.$$

Поскольку это функциональное отображение, то в сечении по $\Theta = t$ существует, и притом единственный кортеж:

$$X(\Theta = t) = (t,x)$$

который мы обычно обозначаем $x(t)$ и называем сечением (в обиходе – значением) сигнала в момент времени t.

Очень важна другая интерпретация сигнала, основанная на записи $X = (x(t) \mid t \in \Theta)$. Здесь мы можем считать, что сигнал – это вектор, составленный из чисел – сечений сигнала. Однако вместо номера элемента вектора, как это принято в теории матриц и линейной алгебре здесь выступает не натуральное число, а значение момента времени $t \in \Theta$. Тем не менее, на сигналы распространяются практически все результаты линейной алгебры.

Сигналы можно классифицировать по двум множествам.

1. По виду множества Θ.

Здесь все сигналы деляться на две группы.

а) Непрерывные по времени сигналы. $\Theta = \{[t_0, t_f]\}$.

В этой категории распространены частные случаи:

- $\Theta = [t_0, t_f]$, где t_0, t_f – заданные числа;
- $\Theta = [0, +\infty] = R_+$;
- $\Theta = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$;
- $\Theta = (-\infty, +\infty) = R$.

б) Дискретные по времени (импульсные) сигналы. $\Theta = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_f\}$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

В этой категории распространен случай так называемых однотактных сигналов

$$t_k = t_0 + k \cdot T,$$

где T – такт квантования, а k может иметь вид:

- $0 \le k \le N$;
- $0 \le k < +\infty, \quad k \in I_+$;
- $-\infty < k < +\infty, \quad k \in I$.

Пример. $\Theta = \{0, T, 2T, \ldots, NT, \ldots\}$ – множество моментов времени дискретного по времени однотактного сигнала.

2. По виду множества Σ.

В этой категории все сигналы делятся также на две группы.

а) Непрерывные по значению сигналы. $\Sigma = \{[\sigma_{min}, \sigma_{max}]\}$.

В этой категории выделяют случаи:

- Ограниченные сигналы.
- Неограниченные сигналы.

б) Дискретные по значению сигналы. $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N\}$. Подобные сигналы также называют квантованными.

Пример. Приведем пример непрерывного по времени, но дискретного по значению сигнала $S([0, 1], \{-1, 1\})$.

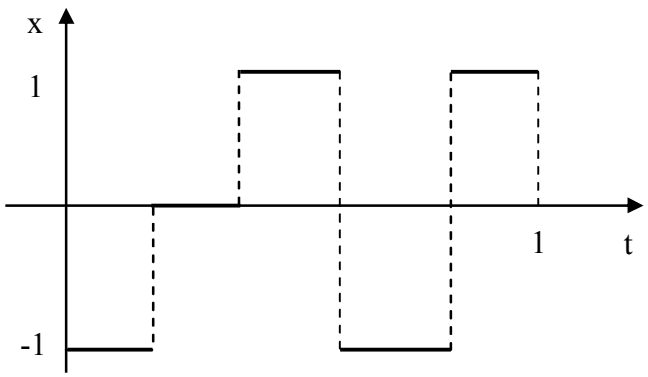


Рисунок 17 – непрерывный по времени, но дискретный по значению сигнал

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3.2. Линейные пространства сигналов

Рассмотрим два сигнала X и Y. Если рассмотреть операции суммы сигналов

$$X + Y = (x(t) + y(t) | t \in \Theta); \quad X \in S(\Theta,\Sigma), Y \in S(\Theta,\Sigma),$$

и умножения сигнала на число

$$\alpha X = (\alpha x(t) \,|\, t \in \Theta), \quad \Sigma = R\,(\Sigma = C)$$

то можно увидеть, что выполняются все аксиомы линейного пространства. Для каждого множества Θ следует рассматривать свое линейное пространство. Тем не менее эти пространства имеют много общего. Качественно же различаются пространства непрерывных сигналов $S_H(\Theta)$ и дискретных (импульсных) сигналов $S_g(\Theta)$. Далее по тексту, если это не будет приводить к неопределенности, указание на Θ в этих обозначениях будем опускать.

3.3. Нормы непрерывных и дискретных сигналов

Норма сигналов удовлетворяет всем аксиомам нормы. Рассмотрим виды норм для сигналов из пространства дискретных сигналов S_g.

1. Линейная норма: $\|X\|_1 = \sum\limits_{t_k \in \Theta} |x(t_k)|;$

2. Евклидова норма: $\|X\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{t_k \in \Theta} x^2(t_k)};$

3. Равномерная норма: $\|X\|_\infty = \sup\limits_{t_k \in \Theta} |x(t_k)|.$

Здесь $\sup\limits_{t_k \in \Theta} |x(t_k)|$ – наименьшая верхняя грань модуля $x(t_k)$, т.е. наименьшее значение постоянного уровня, который $|x(t_k)|$ не превышает при всех $t_k \in \Theta$. Если множество Θ – конечное, то в выражении для равномерной нормы операцию sup можно заменить на операцию max.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Не все сигналы из пространства дискретных сигналов S_g имеют конечное значение нормы, если Θ – бесконечное множество.

Пример. Укажем значения норм для сигнала

$$\Theta = \{kT | k \in I_+\},\ X = (1 - e^{-kT} | k \in I_+).$$

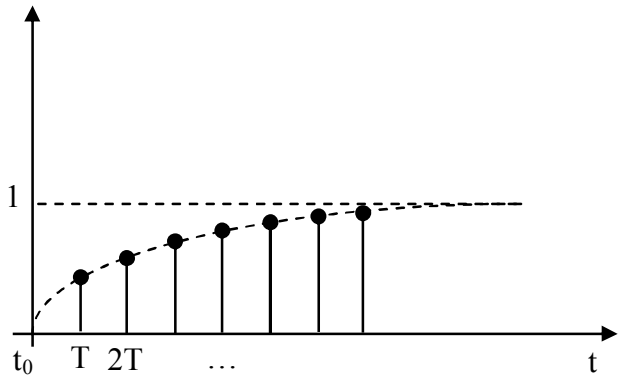


Рисунок 18 – Исследуемый сигнал

Видим, что $\|X\|_1 = \infty$, $\|X\|_2 = \infty$ а $\|X\|_\infty = 1$.

При рассмотрении подобных случаев обычно вводят пространства сигналов с конечной нормой. Например:

$$S_{g1} = \{X | X \in S_g, \|X\|_1 < \infty\}.$$

Теперь укажем виды норм для сигналов из пространства непрерывных сигналов S_H.

В указанном пространстве множество Θ является несчетным множеством, поэтому естественно операция суммы заменяется операцией интегрирования.

1. Линейная норма: $\|X\|_1 = \int_\Theta |x(t)| dt$;

2. Евклидова норма: $\|X\|_2 = \sqrt{\int_\Theta x^2(t) dt}$;

3. Равномерная норма: $\|X\|_\infty = \sup_{t \in \Theta} |x(t)|$.

Пример. Рассматривая множество моментов времени $\Theta = R_+$ получаем, что линейная норма вычисляется как

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\|X\|_1 = \int_0^{+\infty} |x(t)|dt.$$

Пример. Укажем значения норм для сигнала

$$\Theta = R_+ = [0, +\infty),\ X = \{e^{\alpha t} | t \in R_+\}.$$

При значениях $\alpha > 0$ график рассматриваемого сигнала имеет вид

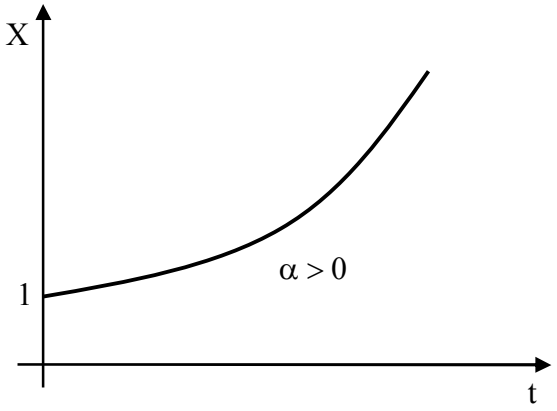


Рисунок 19 – График функций $x(t) = e^{\alpha t}$, при $\alpha > 0$

Тогда, при $\alpha > 0$

$$\|X\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt = +\infty,\ \|X\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{2\alpha t}dt} = +\infty,\ \|X\|_\infty = \sup_{t\in\Theta} e^{\alpha t} = +\infty.$$

При $\alpha = 0$ график рассматриваемого сигнала имеет вид

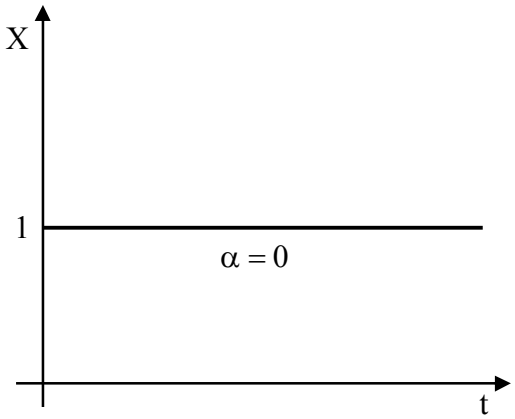


Рисунок 20 – График функций $x(t) = e^{\alpha t}$, при $\alpha = 0$

Тогда, при $\alpha = 0$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\|X\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = +\infty,\ \|X\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{2\alpha t} dt} = +\infty,\ \|X\|_\infty = \sup_{t\in\Theta} e^{\alpha t} = 1.$$

При $\alpha < 0$ график рассматриваемого сигнала имеет вид

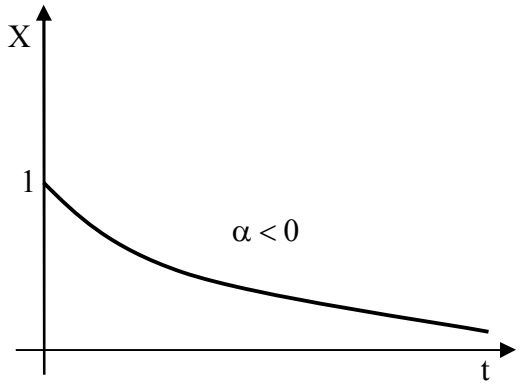


Рисунок 21 – График функций $x(t) = e^{\alpha t}$, при $\alpha < 0$

Тогда, при $\alpha < 0$

$$\|X\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha},\ \|X\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{2\alpha t} dt} = +\infty,\ \|X\|_\infty = \sup_{t\in\Theta} e^{\alpha t} = 1.$$

Пример. Укажем значения норм для сигнала представленного на рисунке

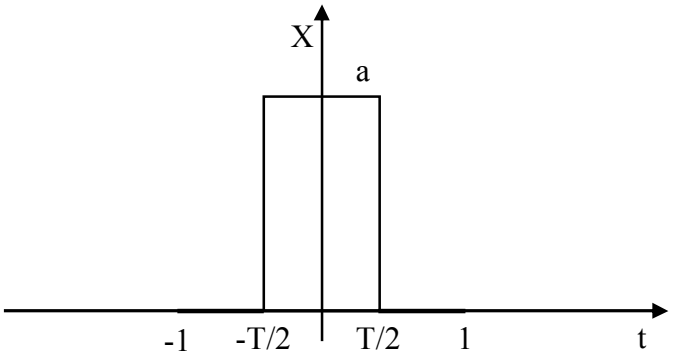


Рисунок 22 – Исследуемый сигнал

$\|X\|_1 = aT$ – площадь импульса, $\|X\|_2 = a\sqrt{T}$ – энергия импульса, $\|X\|_\infty = a$ – амплитуда импульса.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Укажем значения норм для сигнала представленного на рисунке

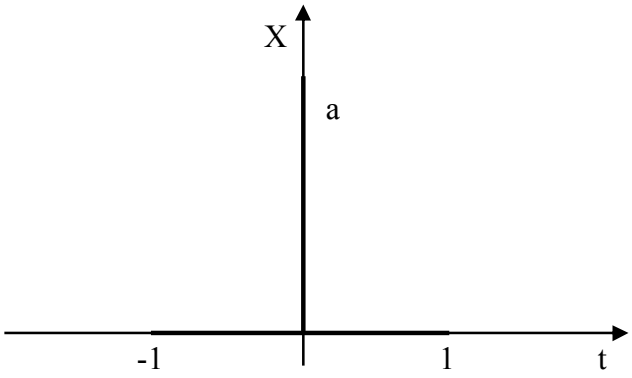


Рисунок 23 – Исследуемый сигнал

Очевидно, что $\|X\|_1 = 0$, $\|X\|_2 = 0$, $\|X\|_\infty = a$.

Из последнего примера мы видим, что для сигналов из пространства S_H первое свойство нормы нарушается в общем случае. Сигнал не нулевой, а его норма равна нулю. С физическойточки зрения такой сигнал не является информативным – он не имеет энергии. Такие сигналы будем считать равными друг другу и равными нулю.

Сигнал равен нулю почти всюду, если $\|X\| = 0$.

Нормированный сигнал

$$u_x = \frac{1}{\|X\|} X$$

существует для сигналов, норма которых конечна и не равна нулю.

3.4. Скалярное произведение. Ортогональность сигналов

Скалярное произведение для сигналов из пространства дискретных сигналов S_g определяется как

$$(X, Y) = \sum_{t_k \in \Theta} x(t_k) y(t_k), \quad (\Theta \to R);$$

$$(X, Y) = \sum_{t_k \in \Theta} x(t_k) \overline{y}(t_k), \quad (\Theta \to C).$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Для сигналов из пространства непрерывных сигналов S_H скалярное произведение определяется как

$$(X,Y)=\int_{\Theta} x(t)y(t)dt, \quad (\Theta \to R);$$

$$(X,Y)=\int_{\Theta} x(t)\overline{y}(t)dt, \quad (\Theta \to C).$$

Величина, определяемая как (X,X), называется энергией сигнала и обозначается как $Э_X$.

Величина, определяемая как (X,Y), называется взаимной энергией сигналов X и Y и обозначается как $Э_{XY}$.

Сигналы называются ортогональными, если их взаимная энергия равна нулю:

$$Э_{XY}=(X,Y)=0 \quad \equiv \quad X \perp Y.$$

Пример. Покажем, что сигналы $X=\{\sin\Delta\omega t \,|\, t\in[-T,T]\}$ и $Y=\{\cos\Delta\omega t \,|\, t\in[-T,T]\}$, где $\Delta\omega=\frac{\pi}{2T}$ являются ортогональными.

Для этого найдем взаимную энергию указанных сигналов:

$$(X,Y)=\int_{-T}^{T}\sin\Delta\omega t\cdot\cos\Delta\omega t dt=\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\sin 2\Delta\omega T dt=-\frac{1}{4\Delta\omega}\cos 2\Delta\omega t\Big|_{-T}^{T}=0.$$

Видим, что рассматриваемые сигналы ортогональны.

Для сигналов с конечной евклидовой нормой скалярное произведение сигналов ограничено.

Далее будем рассматривать только пространства сигналов с конечной нормой.

3.5. Линейные подпространства в пространстве сигналов

Пусть задано множество сигналов $X_1 \ldots X_m$. Для них как и для векторов, вводится понятие линейной комбинации $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k X_k$ и линейной

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

независимости. Указанные сигналы $X_1 \dots X_m$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда их линейная комбинация, в которой не все числа $\alpha_k = 0$, не может быть нулевым сигналом. Если множество моментов времени Θ – бесконечное множество, то применить критерий проверки на линейную независимость справедливый для пространства R^n невозможно. Действительно, получается система бесконечного числа линейных алгебраических уравнений.

Для проверки линейной независимости сигналов вводится матрица Грама

$$G = G(X_1 \dots X_m) = \begin{bmatrix} (X_1, X_1) & \cdots & (X_1, X_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (X_m, X_1) & \cdots & (X_m, X_m) \end{bmatrix}.$$

Матрица Грама имеет следующие свойства:

1. Матрица Грама симметрична. $G = G^T$ для вещественных сигналов и $G = \overline{G}^T$ для комплексных сигналов.

2. Матрица Грама для ортогональных сигналов является диагональной, а для ортономальных – единичной.

3. Пусть задан сигнал X как линейная комбинация сигналов $X_1 \dots X_m$

$$X = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k .$$

Тогда, энергия сигнала X может быть представлена как

$$(X, X) = A^T G A ,$$

где $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$.

4. Матрица Грама является неотрицательно определенной.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Доказательство. Для любого вектора $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$ имеем $(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k X_k, \sum_{l=1}^{m}\alpha_l X_l)\ge 0$. Но это скалярное произведение можем записать в виде $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\alpha_k\alpha_l(X_k,X_l)=A^T GA\ge 0$. Последнее и означает, что матрица G квадратической формы неотрицательно определена. #

5. $\det G\ge 0$.

6. Вектор $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$ является решением системы линейных алгебраических уравнений $GA=\mathrm{col}((x,x_k),k=1\ldots m)$.

Критерий линейной независимости сигналов. Для того, чтобы сигналы $X_1\ldots X_m$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы определитель их матрицы Грама не был равен нулю.

Доказательство. Необходимость. Если сигналы $X_1\ldots X_m$ линейно независимы, то при любом $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}\ne 0$ сигнал представляемый в виде линейной комбинации заданных сигналов не нулевой $(Z=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k X_k\ne 0)$ и, следовательно $(Z,Z)>0$. Но тогда по свойству 4 матица Грама $G>0$, то есть $\det G>0$. Достаточность. Если $\det G\ne 0$, то в силу свойства 4 $A^T GA>0$ для любого $A\ne 0$. Но это означает, что для любого $A\ne 0$ $(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k X_k, \sum_{k=1}^{m}\alpha_k X_k)>0$, то есть $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k X_k\ne 0$. #

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Очевидно, что если сигналы $X_1 \dots X_m$ линейно независимы, то их линейная оболочка $\left\{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k\right\}$ является линейным подпространством сигналов. Причем даже если множество Θ бесконечно, это пространство является m-мерным.

Далее линейную оболочку будем обозначать следующим образом

$$L(X_1 \dots X_m) = L_m .$$

Если известен базис подпространства $L(X_1 \dots X_m)$, то сигнал $X \in L_m$ представим в виде $X = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k$. Коэффициенты указанного представления α_k можно определить решением системы линейных алгебраических уравнений из свойства 4 матрицы Грама. Причем, т.к. $\det G \neq 0$, то такое представление единственно.

Пример. На множестве $\Theta = [0,1]$ заданы сигналы $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$. Определим, образуют ли эти сигналы трехмерное подпространство.

Для этого при помощи матрицы Грама проверим заданные сигналы на линейную независимость.

$$\det \begin{bmatrix} (1,1) & (1,t) & (1,t^2) \\ (t,1) & (t,t) & (t,t^2) \\ (t^2,1) & (t^2,t) & (t^2,t^2) \end{bmatrix} \neq 0 .$$

Таким образом, подпространство L_3 образуется заданными сигналами. Рассмотрим сигнал $x(t) = t^2 - 4t + 4$. Указанный сигнал принадлежит подпространству L_3 т.к. его можно представить в виде

$$X = X_3 - 4X_2 + 4X_1 .$$

Коэффициенты представления имеют вид $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = -4, \alpha_3 = 1$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Применив к сигналам $X_1 \dots X_m$ метод ортогонализации Грама-Шмидта, можно получить эквивалентный ортонормированный базис $U_1 \dots U_m$ этого подпространства.

Пример. На множестве $\Theta = [0,1]$ заданы сигналы $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$. Получим ортонормальный базис. Для этого используем метод ортогонализации Грама-Шмидта.

1. $U_1 = \frac{1}{\|X_1\|_c} X_1 = 1$.

2. $\tilde{X}_2 = X_2 - (X_2, U_1)U_1 = t - \frac{1}{2}$,

$U_2 = \frac{1}{\|\tilde{X}_2\|} \tilde{X}_2 = \sqrt{3}(2t-1)$.

Если сигнал $X \notin L(X_1 \dots X_m)$, тогда решение системы линейных алгебраических уравнений из свойства 4 матрицы Грама существует, но полученный в результате ее решения сигнал $\hat{X} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k \neq X$.

Теорема. Пусть $X_1 \dots X_m$ образуют базис в подпространстве L_m. Пусть сигнал $X \notin L_m$. Тогда сигнал

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k ,$$

в котором α_k являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^{m} (X_l, X_k)\alpha_l = (X, X_k), \quad k = 1 \dots m$$

является ортогональной проекцией сигнала X на подпространство L_m.

Доказательство. Введем сигнал ошибки $\tilde{X} = X - \hat{X}$. Нужно доказать, что этот сигнал ортогонален подпространству L_m. Для этого достаточно доказать, что сигнал ошибки ортогонален базисным сигналам X_k, $k = 1 \dots m$ подпространства. Выполним скалярное произведение

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$(\tilde{X}, X_k) = (X - \hat{X}, X_k) = (X, X_k) - (\sum_{l=1}^{m} \alpha_l X_l, X_k) = (X, X_k) - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l (X_l, X_k) = 0.$$

В силу определения коэффициентов α_k. Что и требовалось доказать. #

Таким образом, чтобы найти ортогональную проекцию сигнала X на подпространство L_m необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений. Если в подпространстве L_m построить предварительно ортонормированный базис $U_1 \ldots U_m$, то не будет необходимости решать указанную систему линейных алгебраических уравнений. Тогда

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k U_k ,$$

где $\beta_k = (X, U_k)$.

Теорема об ортогональной проекции. Пусть сигнал $\hat{X}$ является ортогональной проекцией сигнала X на подпространство L_m. Тогда для любого сигнала $Z \in L_m$ выполняется неравенство

$$Э_{X-\hat{X}} \le Э_{X-Z},$$

причем равенство возможно лишь при $Z = \hat{X}$.

Теорема утверждает, что сигнал $\hat{X}$ является наилучшей оценкой сигнала X из всех сигналов из подпространства L_m в смысле минимума энергии ошибки оценивания.

Доказательство. Рассмотрим энергию $Э_{X-Z}$.

$$Э_{X-Z} = (X - Z, X - Z) = (X - \hat{X} + \hat{X} - Z, X - \hat{X} + \hat{X} - Z) =$$
$$= (X - \hat{X}, X - \hat{X}) + 2(X - \hat{X}, \hat{X} - Z) + (\hat{X} - Z, \hat{X} - Z).$$

Так как сигнал $\hat{X} - Z \in L_m$, то второе слагаемое равно нулю. А так как $(\hat{X} - Z, \hat{X} - Z) \ge 0$, то неравенство верно. Оно может стать равенством только если $(\hat{X} - Z, \hat{X} - Z) = 0$, т.е. при $Z = \hat{X}$. #

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3.6. Обобщенный ряд Фурье и его реализации

Пусть в пространстве L_m найден ортонормированный базис $U_1 \dots U_m$, а сигнал $X \in S(\Theta)$. Тогда для ортогональной проекцией сигнала на подпространство

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k U_k$$

справедливо равенство

$$Э_X = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 + Э_{\tilde{X}} .$$

Если энергия $Э_{\tilde{X}}$ мала, то мы можем считать, что $X \approx \hat{X}$. Если нет, и энергия $Э_{\tilde{X}}$ не достаточно мала, то найдем сигнал U_{m+1} такой, что сигналы $U_1 \dots U_{m+1}$ также образуют ортонормированную систему и, построенная на ней оценка сигнала X будет обладать большей энергией, равной

$$Э_{\hat{X}} = \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k^2 .$$

В конечномерном пространстве этот процесс заканчивается через число шагов, равное размерности пространства. В пространстве сигналов $S(\Theta)$ процесс, как правило, за конечное число шагов не заканчивается. Однако, если пространство обладает специальным свойством сепарабельности, то в нем существует счетный базис $U_1, U_2, \dots$ пространства $S(\Theta)$. При этом

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 = Э_X$$

и представление в виде ряда

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k U_k$$

является точным. В пространстве непрерывных по времени сигналов это означает равенство «почти всюду». Полученный таким образом ряд называется обобщенным рядом Фурье.

Представим, что некоторый сигнал разложен в обобщенный ряд Фурье.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1. Энергия этого сигнала будет представлена в следующем виде

$$Э_X = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 .$$

Для комплексного пространства энергия указанного сигнала будет представлена в виде

$$Э_X = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \overline{\beta}_k .$$

2. Если сигнал обладает конечной энергией $Э_X < \infty$, то коэффициенты разложения в обобщенный ряд Фурье уменьшаются с ростом k.

$$\beta_k \to 0 \text{ при } k \to \infty \text{ (если } Э_X < \infty).$$

3. Член разложения в обобщенный ряд Фурье $\beta_k U_k$ является проекцией сигнала X на сигнал U_k.

В настоящее время для представления непрерывных сигналов в виде обобщенных рядов Фурье применяется целый ряд счетных базисов:

1. Гармонический ряд Фурье.

Сигнал рассматривается на множестве моментов времени $\Theta = \left\{ [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \right\}$. Сигналы, образующие базис при формировании гармонического ряда Фурье имеют вид

$$1, \sin \Delta\omega t, \cos \Delta\omega t, \sin 2\Delta\omega t, \cos 2\Delta\omega t, \ldots,$$

где $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Отметим, что сигналы указанного базиса ортогональны друг другу, но не нормированы.

Окончательно укажем вид гармонического ряда Фурье –

$$X = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\Delta\omega t) + b_k \sin(k\Delta\omega t)) .$$

Коэффициенты разложения в гармонический ряд Фурье находятся по соотношениям:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt ,$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(k\Delta\omega t)dt, \quad k = 1,2,\dots,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(k\Delta\omega t)dt, \quad k = 1,2,\dots.$$

Пример. На интервале $\Theta = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ задан сигнал $x(t) = 1(t - \frac{\pi}{8}) - 1(t + \frac{3\pi}{8})$.

Разложим его в гармонический ряд Фурье. Для этого найдем коэффициенты разложения.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)dt = -1,$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cos(2t)dt = -0,45,\ b_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sin(2t)dt = 0,45,$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cos(4t)dt = 0,\ b_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sin(4t)dt = 0,$$

$$a_3 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cos(6t)dt = -\frac{\sqrt{2}}{3\pi},\ b_3 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sin(6t)dt = -\frac{\sqrt{2}}{3\pi}, \text{ и т.д.}$$

В случае рассмотрения четных сигналов X на множестве времени $\Theta = [-\pi, \pi]$ коэффициенты гармонического ряда Фурье принимают вид

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)dt,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\cos(k\Delta\omega t)dt, \quad k = 1,2,\dots$$

$$b_k = 0, \quad k = 1,2,\dots,$$

а в случае нечетных –

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$a_k = 0,\ k = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\sin(k\Delta\omega t)dt,\quad k = 1,2,\ldots.$$

Пример. На интервале $\Theta = [-\pi, \pi]$ задан четный сигнал $x(t) = t^2$. Разложим его в гармонический ряд Фурье. Для этого найдем коэффициенты разложения.

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(k\Delta\omega t)dt = (-1)^k\frac{4}{k^2},\ k = 1,2,\ldots$$

2. Ряд Уолша.

В ряде Уолша сигнал рассматривается на множестве моментов времени $\Theta = \{[0, 1]\}$. Сигналы $W_k(t)$, образующие базис при формировании ряда Уолша приведены на рисунке 24.

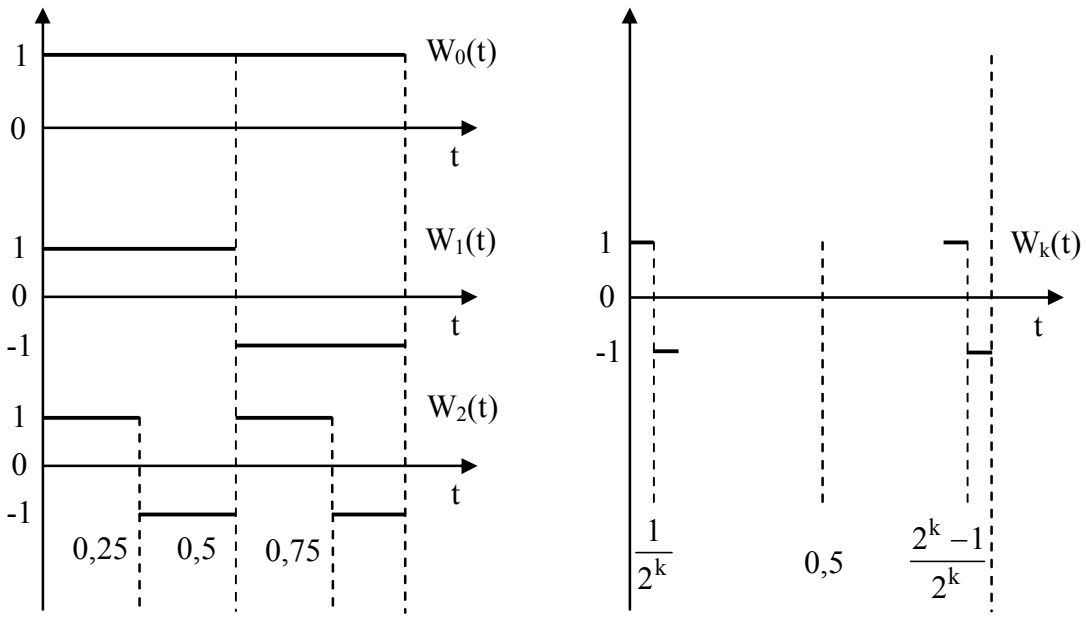


Рисунок 24 – Базисные сигналы ряда Уолша

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Сам ряд Уолша имеет вид

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k W_k(t),$$

где β_k – коэффициенты разложения в ряд.

Пример. Рассмотрим функцию $x(t) = t$ на интервале $\Theta = \{[0, 1]\}$. Найдем первые два коэффициента разложения указанного сигнала в ряд Уолша β_0 и β_1.

$$\beta_0 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

$$\beta_1 = \int_0^{0,5} t dt - \int_{0,5}^1 t dt = -\frac{1}{4}.$$

3. Комплексный ряд Фурье.

В реализации комплексного ряда Фурье сигнал рассматривается на множестве моментов времени $\Theta = \left\{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\right\}$. На указанном множестве рассматривается последовательность комплексных сигналов

$$u_k(t) = e^{j\Delta\omega kt},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Докажем, что указанные сигналы образуют взаимоортогональную систему на множестве моментов времени $\Theta = \left\{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\right\}$. Для этого выполним скалярное произведение двух произвольных, не равных друг другу сигналов из указанной последовательности комплексных сигналов

$$(e^{j\Delta\omega kt}, e^{j\Delta\omega lt}) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\Delta\omega kt} e^{-j\Delta\omega lt} dt = \frac{1}{j\Delta\omega(k-l)} e^{j\Delta\omega(k-l)t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{1}{j\Delta\omega(k-l)} [e^{j\pi(k-l)} - e^{j\pi(k-l)}] = 0$$

при $k \neq l$.

При $k = l$ получаем

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$(e^{j\Delta\omega kt}, e^{j\Delta\omega kt}) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\Delta\omega kt} e^{-j\Delta\omega kt} dt = T.$$

Таким образом, получаем, что указанные сигналы ортогональны но не нормированные, т.к. норма каждого сигнала

$$\left\| e^{j\Delta\omega kt} \right\|_c = T.$$

Окончательно получаем, что комплексный ряд Фурье имеет вид

$$X = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\Delta\omega kt}.$$

Экспоненту с мнимым показателем ввел в рассмотрение Л. Эйлер в виде тождества, связывающего тригонометрические функции с показательной

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi.$$

Из этого тождества легко вытекают свойства:

1. $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2\pi)}$;

2. $\overline{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi}$;

3. $\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$

В связи с тем, что базисные сигналы для формирования комплексного ряда Фурье ортогональны, но не нормированы, коэффициенты ряда C_k вычисляются по формуле

$$C_k = \frac{(X, e^{j\Delta\omega kt})}{(e^{j\Delta\omega kt}, e^{j\Delta\omega kt})} = \frac{1}{T}(X, e^{j\Delta\omega kt}) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\Delta\omega kt} x(t) dt.$$

Достаточными условиями существования коэффициентов разложения сигнала в комплексный ряд Фурье являются условия Дирихле:

1. $\|X\|_1 < \infty$;

2. Сигнал должен иметь не более чем конечное число разрывов первого рода и не более чем конечное число экстремумов.

Теперь укажем свойства коэффициентов комплексного ряда Фурье.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1. $C_k = \overline{C_{-k}}$.

Из этого свойства получаем, что $|C|_k = |C_{-k}|$, $\arg C_k = -\arg C_{-k}$.

2. Сигнал $C_k e^{j\Delta\omega kt} + C_{-k} e^{-j\Delta\omega kt}$ является вещественным сигналом.

3. Энергия сигнала может быть представлена в виде

$$Э_X = (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\Delta\omega kt}, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\Delta\omega kt}) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k C_{-k} = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 .$$

Из последнего свойства получаем, что коэффициенты разложения сигнала в комплексный ряд Фурье $C_k \to 0$ при $k \to \infty$, если энергия сигнала ограничена $Э_X < \infty$. Обычно, аппроксимация сигнала удовлетворительна при небольшом значении k, то есть вклад «высокочастотных составляющих» невелик.

Отметим также, что коэффициенты разложения сигнала в комплексный и гармонический ряды Фурье связаны между собой следующими соотношениями:

$$C_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Ряд Фурье можно рассматривать как соответствие вида

$$\{x(t) | \Theta = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\} \xrightarrow{\Phi_p} \{C_0, C_1, C_2, \ldots\},$$

где Φ_p – преобразование, которое сигналу из множества сигналов заданных на множестве $\Theta = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ставит в соответствие комплексные числа $C_0, C_1, C_2, \ldots$.

Если рассматривать сигналы из условия Дирихле, то они обладают свойством однозначности, т.е. каждому сигналу соответствует только одно разложение Фурье.

Обратное преобразование

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\{C_0, C_1, C_2, \ldots\} \xrightarrow{\Phi_p^{-1}} \{x(t) | \Theta = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\}$$

позволяет восстановить сигнал только в те моменты времени, в которые исходный сигнал непрерывен. В точках разрыва обратное преобразование дает среднее арифметическое от левого и правого пределов

$$\Phi_p^{-1}\{C_0, C_1, \ldots\} = \frac{x(t+0) + x(t-0)}{2}.$$

3.7. Интеграл Фурье. Его связь с рядом Фурье

Рассмотрим поведение коэффициентов разложения в комплексный ряд Фурье C_k при увеличении периода T. Для этого проанализируем неравенство

$$|C_k| \le \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|e^{jk\Delta\omega t}\right| \cdot |x(t)| dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)| dt \le \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt,$$

предполагая, что на множестве $\Theta = R$ сигнал ограничен $|X|_1 < \infty$. Видим, что с ростом периода T коэффициенты разложения $C_k \to 0$ и $\Delta\omega \to 0$. Заметим, что при этом $C_k T$ к нулю не стремится.

Введем функцию

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt.$$

Сравнивая ее с формулой для коэффициентов комплексного ряда Фурье, получаем, что $C_k T \approx x(k\Delta\omega)$, причем равенство тем точнее, чем больше T. Введенная функция называется спектральной плотностью сигнала.

Таким образом, для сигналов заданных на множестве $\Theta = R$, удовлетворяющих условию Дирихле мы ввели соответствие

$$\{x(t) | t \in R\} \xrightarrow{\Phi} \{x(\omega) | \omega \in R\}.$$

Указанное соответствие и является интегральным преобразованием Фурье. Оно обладает следующими свойствами:

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1. Линейность. Положим, что $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ – результат преобразования Фурье сигналов X и Y.

Если α и β – постоянные величины, то справедливо следующее соотношение

$$\Phi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\Phi(X) + \beta\Phi(Y).$$

То есть спектр сигнала, полученного при сложении сигналов $\alpha X, \beta Y$ равен сумме спектров этих сигналов $\alpha\Phi(X) + \beta\Phi(Y)$.

2. Комплексная сопряженность.

$$x(\omega) = \overline{x(-\omega)}.$$

3. Масштабирование сигнала. Рассмотрим сигнал $y(t) = x(\mu t)$. Если $\mu > 1$, то происходит «ускорение» сигнала, при $0 < \mu < 1$ происходит «замедление» сигнала.

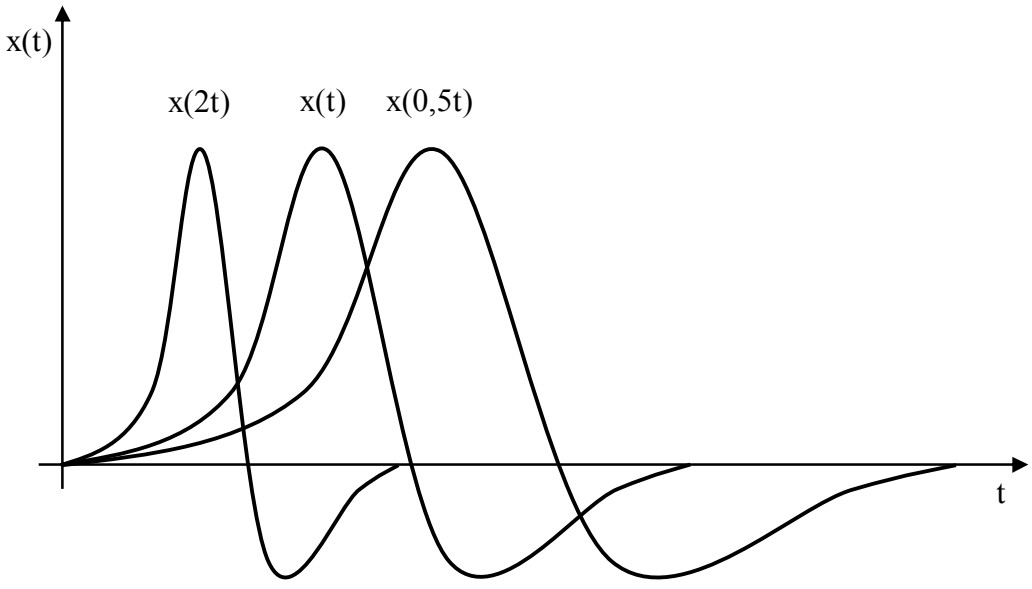


Рисунок 25 – Масштабирование сигнала

Преобразование Фурье указанного сигнала будет иметь вид

$$\Phi(x(\mu t)) = \frac{1}{\mu} x\left(\frac{\omega}{\mu}\right).$$

4. Энергия сигнала в частотной и временной области одинакова (Теорема Парсеваля), что выражается следующим соотношением

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$Э_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k C_{-k} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi T |x(\omega)|^2}{T^2} =$$

$$= \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(\omega)|^2 \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\omega)|^2 d\omega .$$

Из последнего свойства получаем, что если $Э_X < \infty$, то $x(\omega) \to 0$ при $\omega \to \pm\infty$.

Обратное соответствие определяется как

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k T \frac{1}{T} e^{jk\Delta\omega t} = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta\omega)\Delta\omega e^{jk\Delta\omega t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Указанное обратное соответствие является функцией для непрерывных сигналов $x(t)$. Для сигналов, имеющих разрывы первого рода, в точке разрыва t' обратное соответствие дает значение $\frac{x(t'+0)+x(t'-0)}{2}$.

Пример. Рассмотрим сигнал

$$x(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

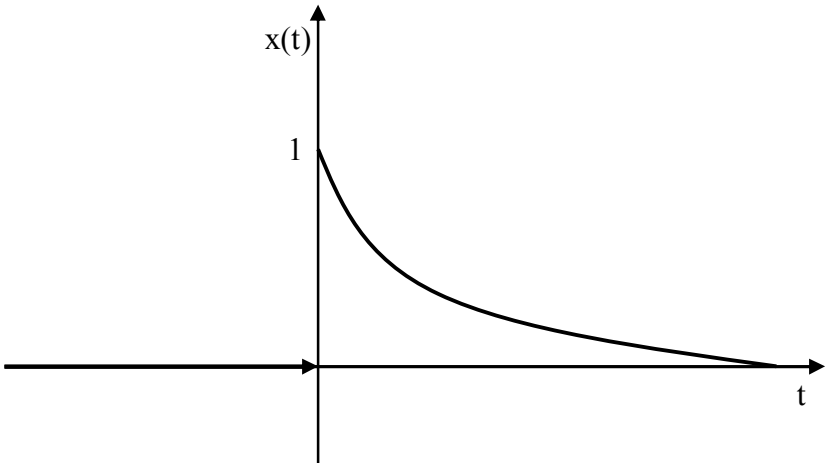


Рисунок 26 – График исследуемого сигнала при $\alpha < 0$

Выполним интегральное преобразование Фурье.

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha - j\omega} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega - \alpha} .$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3.8. Преобразование Лапласа непрерывных сигналов

Большое практическое значение преобразования Фурье связано с тем, что оно позволяет исследовать частотные свойства сигналов. В то же время в задачах исследования систем, в том числе автоматических часто сигналы не убывают с ростом времени, а ограничены или даже возрастают. В этих задачах преобразование Фурье неприменимо. Здесь применяется преобразование Лапласа. Поскольку при этом важно сохранить частотные представления сигналов, то мы будем строить преобразование Лапласа как обобщение преобразования Фурье.

3.8.1. Пространство сигналов экспоненциального роста

В отличие от преобразования Фурье преобразование Лапласа применяется к сигналам, заданным на множестве моментов времени $\Theta = R_+$.

$$X = \begin{cases} x(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Часто данное представление записывают в виде $x(t) \cdot 1(t)$, где $1(t)$ – единичная функция.

Пример. Укажем сигнал $1(t-3,5)$.

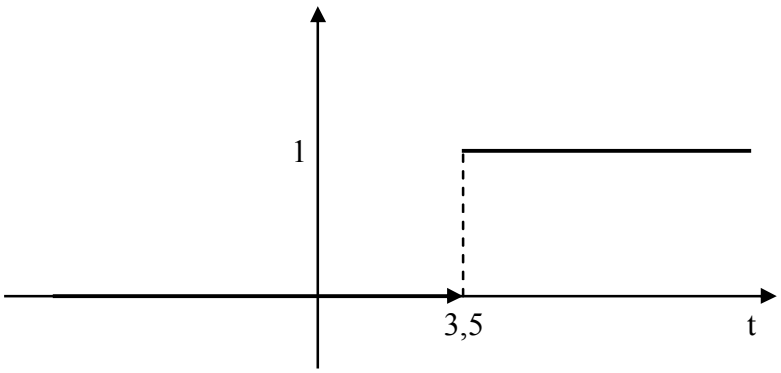


Рисунок 27 – График исследуемого сигнала

Введем в рассмотрение множество сигналов экспоненциального роста $S_e(R_+)$. Сигнал X принадлежит этому множеству ($X \in S_e(R_+)$), если

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

существуют числа M и C такие, что при всех моментах времени $t \in R_+$ выполняется неравенство

$$|x(t)| \le Me^{Ct}.$$

В определении основную роль играет лишь число C, связанное с поведением сигнала при $t \to \infty$.

Пример. Рассмотрим сигналы X_1 и X_2 изображенные на рисунке 28.

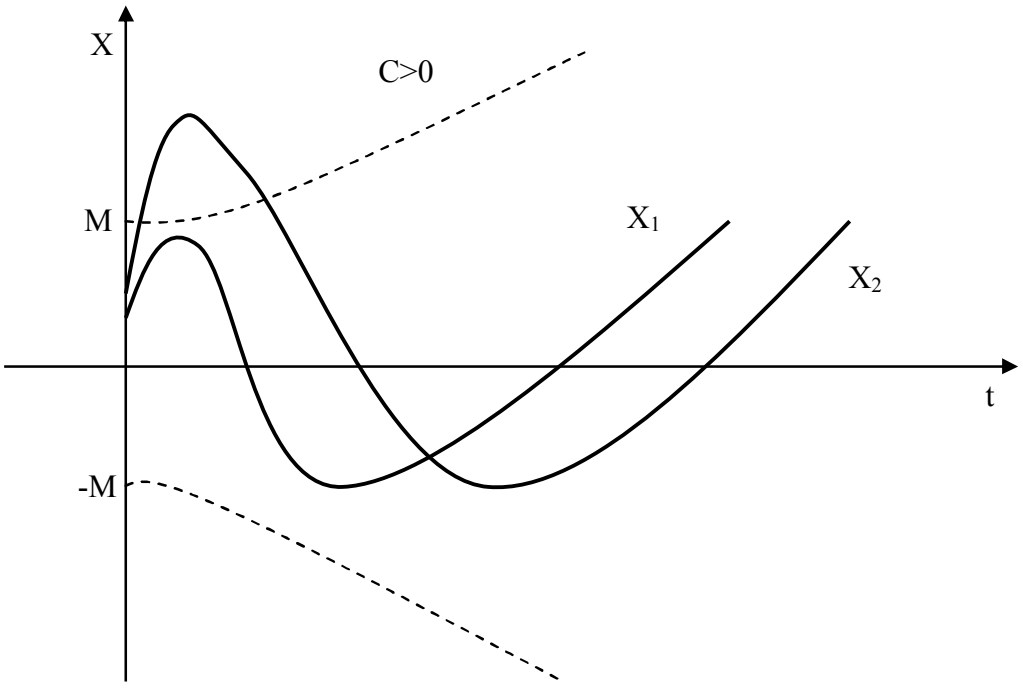


Рисунок 28 – Изображения исследуемых сигналов

Как видно из рисунка 28, если число C найдено, то число M всегда можно подобрать.

Пусть сигнал X принадлежит множеству сигналов экспоненциального роста $X \in S_e(R_+)$. Нижняя грань значений C, для которых выполняется неравенство

$$|x(t)| \le Me^{Ct}$$

называется показателем роста сигнала X и обозначается как C_X.

$$C_X = \inf C.$$

Пример. Приведем показатели роста нижеперечисленных сигналов:

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1. $x(t) = e^{-2t}$ $\quad C_X = -2;$
2. $x(t) = e^{-2t} + 100e^{-3t}$ $\quad C_X = -2;$
3. $x(t) = e^{t} + e^{-t}$ $\quad C_X = 1;$
4. $x(t) = \sin 5t$ $\quad C_X = 0;$
5. $x(t) = t$ $\quad C_X = 0$ $(|t| \le Me^{\varepsilon t},\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow C_X = 0);$
6. $x(t) = t^2 e^{-0,1t}$ $\quad C_X = -0,1$ $|x(t)| \le e^{(-0,1+\varepsilon)t}.$

График последнего сигнала $x(t) = t^2 e^{-0,1t}$ представлен на рисунке 29.

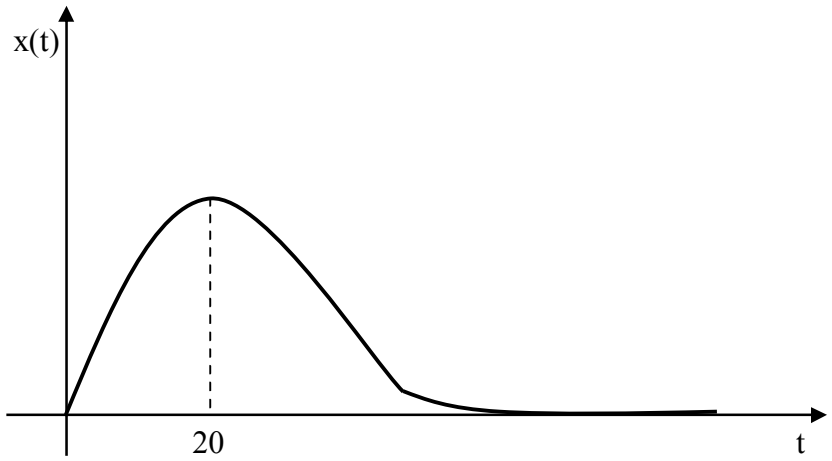


Рисунок 29 – График сигнала $x(t) = t^2 e^{-0,1t}$

Если сигнал принадлежит множеству сигналов экспоненциального роста $X \in S_e(R_+)$ с показателем роста C_X, то для любого числа $C > C_X$ выполняется условие

$$y(t) = e^{-Ct}x(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty \text{ и } \int_0^\infty |y(t)|dt < \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$|y(t)| = e^{-Ct}|x(t)| \le e^{-Ct}Me^{(C_X+\varepsilon)t} = Me^{(C_X+\varepsilon-C)t},$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало. Поскольку $C - C_X > 0$, то возьмем число $0 < \varepsilon < C - C_X$. Тогда $\alpha = C - C_X - \varepsilon > 0$ и $|y(t)| \le Me^{-\alpha t} \to 0$. Но при этом

$$\int_0^\infty |y(t)|dt \le M\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt = -\frac{M}{C_X + \varepsilon - C}. \#$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Преобразование Лапласа введем с помощью теоремы:

Пусть сигнал X заданный на множестве $\Theta = R_+$ является сигналом из множества сигналов экспоненциального роста $X \in S_e(R_+)$ с показателем роста C_X и имеет на любом ограниченном отрезке времени конечное число разрывов первого рода и локальных экстремумов. Тогда интеграл

$$x(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)dt$$

существует при любом комплексном s удовлетворяющем условию $\mathrm{Re}\, s \geq C > C_X$.

Доказательство. Пусть $s = \sigma + j\omega$. Тогда $y(t) = e^{-\sigma t}x(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Следовательно, существует преобразование Фурье

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot 1(t) e^{-j\omega t} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega t)} dt.$$

Но последний интеграл и есть интеграл, определяющий функцию $x(s) = x(\sigma + j\omega)$.

Указанный интеграл определяет преобразование Лапласа, а $x(s)$ – является изображением по Лапласу сигнала $x(t)$.

Пример. Укажем для приведенных сигналов их изображения по Лапласу и показатели роста.

1. $x(t) = 1(t), \quad C_X = 0, \quad \mathrm{Re}\, s \geq C > 0, \quad x(s) = \frac{1}{s};$

2. $x(t) = e^{\alpha t}, \quad C_X = 0, \quad \mathrm{Re}\, s \geq C > 0, \quad x(s) = \frac{1}{s - \alpha};$

3. $x(t) = e^{-2t} + e^{t}, \; C_X = 1, \; \mathrm{Re}\, s \geq C > 1, \; x(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1} = \frac{2s+1}{(s+2)(s-1)}.$

Пример. Найдем изображение по Лапласу для сигнала

$$x(t) = 1(t) - 1(t - t_0).$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$x(s)=\int_0^\infty e^{-st}1(t)dt-\int_0^\infty e^{-st}1(t-t_0)dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-s(\tau+t_0)}1(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{s}-e^{-st_0}\int_0^\infty e^{-s\tau}1(\tau)d\tau=\frac{1}{s}-\frac{e^{-st_0}}{s}.$$

Пример. Найдем изображение по Лапласу для сигнала

$$x(t)=3e^{2t}+5e^{8t}.$$

$$x(s)=\int_0^\infty 3e^{2t}e^{-st}dt+\int_0^\infty 5e^{8t}e^{-st}dt=\frac{3}{2-s}e^{-(s-2)t}\Big|_0^\infty+\frac{5}{8-s}e^{-(s-8)t}\Big|_0^\infty=$$

$$=\frac{3}{s-2}+\frac{5}{s-8}.$$

3.8.2. Свойства изображения сигнала по Лапласу

Рассмотрим некоторые свойства изображения сигнала по Лапласу $x(s)$.

1. Комплексная сопряженность.

$$x(s)=\overline{x(\overline{s})}.$$

При этом, если s – вещественно, то и $x(s)$ – вещественная функция.

2. В полуплоскости $\mathrm{Re}\,s\geq C>C_X$ изображение сигнала по Лапласу $x(s)$ является аналитической и стремится к нулю при $s\to\infty$ по любому пути.

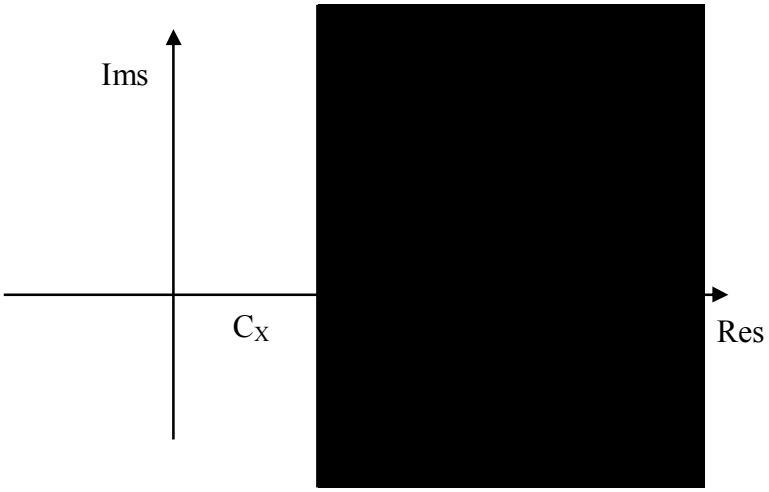


Рисунок 30 – Область аналитичности изображения сигнала по Лапласу

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3. Изображение сигнала по Лапласу $x(s)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Re}\, s \le C_X$. В указанной полуплоскости изображение сигнала по Лапласу $x(s)$ имеет особые точки (полюсы, существенно особые точки, точки ветвления).

Самая правая особая точка (особые точки) лежит на прямой $\mathrm{Re}\, s = C_X$, так что по ней можно установить характер поведения сигнала $x(t)$ при $t \to \infty$.

В дальнейшем мы остановим свое внимание на такой вид особых точек как полюсы, так как большая часть изображений сигналов имеет только полюсы.

3.8.3. Обратное преобразование Лапласа

Для введения обратного преобразования Лапласа рассмотрим теорему.

Теорема. Пусть $x(s)$ – аналитическая функция при $\mathrm{Re}\, s > C_X$, причем в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \ge C > C_X$ $x(s) \to 0$ при $s \to \infty$ и интеграл

$$\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} |x(s)|\,ds$$

сходится при любых $C > C_X$. Тогда существует интеграл

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} e^{st} x(s)\,ds,$$

причем сигнал X принадлежит множеству сигналов экспоненциального роста ($X \in S_e(R_+)$) с показателем роста C_X.

Доказательство. Указанные условия являются условиями существования обратного преобразования Фурье функции $x(C + j\omega)$ при $C > C_X$. Это означает, что существует сигнал

$$y(t) = \Phi^{-1}(x(C + j\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} x(C + j\omega)\,d\omega = e^{-Ct}\frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} e^{st} x(s)\,ds.$$

$$y(t) = e^{-Ct} x(t).$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Обозначив $x(t) = y(t)e^{Ct}$, получаем результаты теоремы. #

Указанный в теореме интеграл называют обратным преобразованием Лапласа, которое восстанавливает сигнал $x(t)$ во всех точках непрерывности.

Если особыми точками изображения сигнала $x(s)$ являются полюсы, то удобным средством вычисления и исследования сигнала $x(t)$ является теорема вычетов. Ее применение основано на следующей конструкции. Если на плоскости выбрать контур с радиусом полуокружности R настолько большим, что все полюсы попадают внутрь контура $\Gamma_R = C_R + I_R$, то по теореме Коши

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R} e^{st}x(s)ds = \sum_{s_k} \operatorname*{res}_{s_k} e^{st}x(s),$$

где s_k – полюсы изображения $x(s)$, а символ res – обозначает вычет.

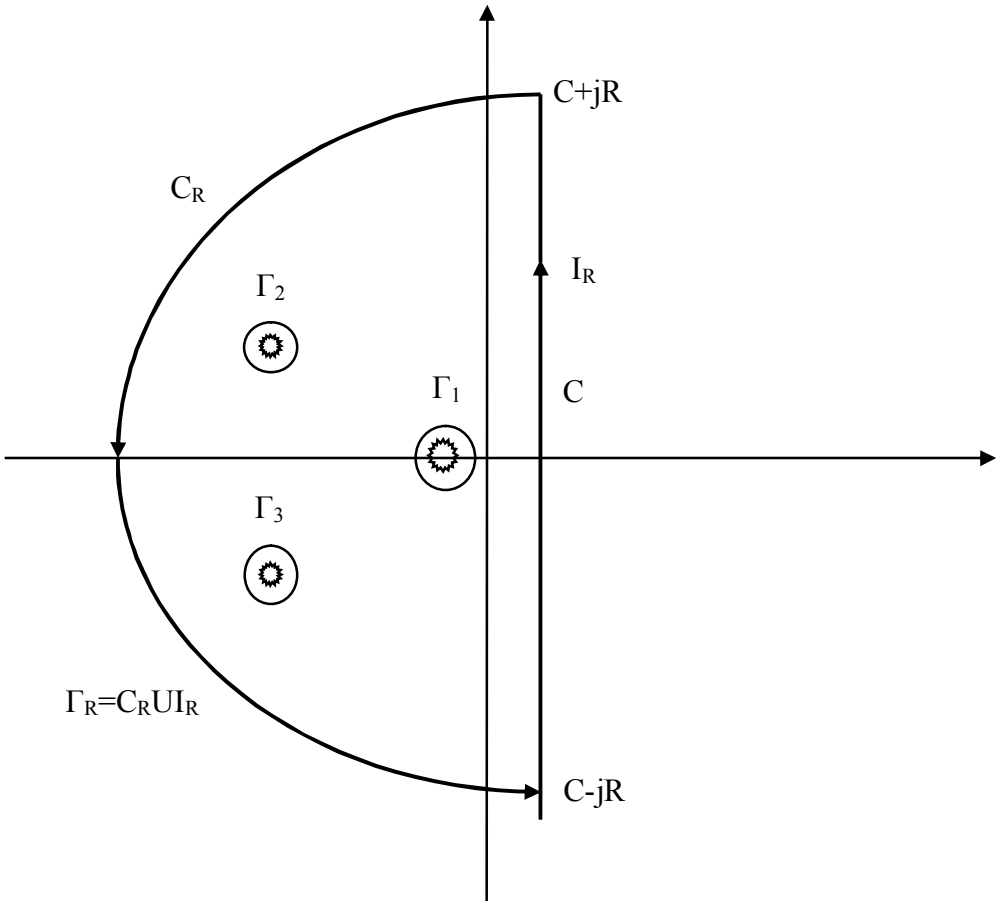


Рисунок 31 – Контур интегрирования

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

В случае определения вычета в окрестности простого полюса s_k изображения, вычет вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{s_k} e^{st}x(s) = \lim_{s\to s_k} e^{st}(s-s_k)x(s).$$

Пример. Рассмотрим изображение сигнала

$$x(s) = \frac{-4-10s}{s(s^2+4s+3)}.$$

Найдем оригинал сигнала. Полюсы указанного изображения простые, вещественные – $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -3$. Найдем вычеты для каждого полюса.

$$\operatorname*{res}_{s\to 0} x(s)e^{st} = -\frac{4}{3},$$

$$\operatorname*{res}_{s\to -1} x(s)e^{st} = -3e^{-t},$$

$$\operatorname*{res}_{s\to -3} x(s)e^{st} = \frac{13}{3}e^{-3t}.$$

Оригинал сигнала равняется сумме указанных вычетов

$$x(t) = -\frac{4}{3} - 3e^{-t} + \frac{13}{3}e^{-3t}.$$

В случае определения вычета в окрестности кратного полюса изображения (s_k кратности m), вычет вычисляется по соотношению

$$\operatorname*{res}_{s_k} e^{st}x(s) = \lim_{s\to s_k} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}[e^{st}(s-s_k)^m x(s)].$$

Пример. Рассмотрим изображение сигнала

$$x(s) = \frac{k}{s^2}.$$

Найдем оригинал сигнала. Изображение имеет полюс $\alpha_1 = 0$ кратности $m = 2$. Тогда, оригинал сигнала равняется вычету в окрестности указанного полюса.

$$x(t) = \operatorname*{res}_{s\to 0} x(s)e^{st} = \frac{d}{ds}(ke^{st})\Big|_{s=0} = tke^{st}\Big|_{s=0} = tk.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Лемма Жордана. Пусть $x(s)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \le C$ за исключением конечного числа особых точек и $x(s) \to 0$ равномерно по s при $s \to \infty$ в этой полуплоскости. Тогда

$$\int_{C_R} e^{st} x(s) \to 0 \text{ при } R \to \infty .$$

3.8.4. Взаимосвязь между свойствами сигнала и расположением полюсов его изображения

Рассмотрим два случая.

1. Простые полюсы.

а) Пусть $s_k = \alpha$ – простой вещественный полюс изображения $x(s)$. Тогда изображение сигнала можем представить в виде

$$x(s) = \frac{\varphi(s)}{(s-\alpha)},$$

где $\varphi(s)$ – аналитическая функция, причем $\varphi(\alpha) \neq 0$. Вычет в окрестности указанного полюса будет иметь вид

$$f(t) = \operatorname*{res}_{\alpha} e^{st} x(s) = \lim_{s \to \alpha} e^{st} \varphi(s) = \varphi(\alpha) e^{\alpha t} .$$

При $\alpha > 0$ сигнал $\varphi(\alpha) e^{\alpha t}$ возрастает, при $\alpha < 0$ – убывает, при $\alpha = 0$ – функция равна $\varphi(0) = \mathrm{const}$. Показатель роста указанного сигнала $C_X = \alpha$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

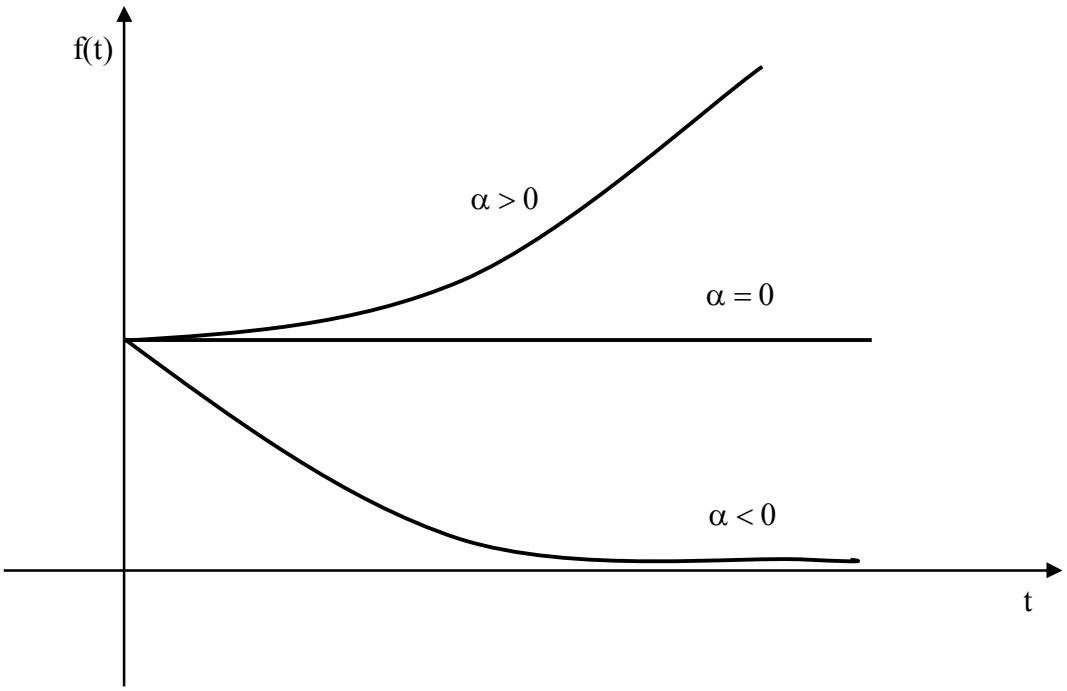


Рисунок 32 – Поведение сигнала $\varphi(\alpha)e^{\alpha t}$

Пример. Пусть $x(s)=\dfrac{s+5}{(s+1)(s-2)}$. Указанное изображение имеет полюсы $\alpha_1=-1$ и $\alpha_2=2$. Полюсы простые, вещественные. Оригинал определяется как сумма вычетов в окрестности этих полюсов.

$$x(t)=-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{7}{3}e^{2t}.$$

Указанный сигнал будет возрастать со скоростью e^{2t}.

б) Пусть s_k – комплексный полюс. $s_k=\alpha+j\beta$. Следовательно, существует комплексно сопряженный полюс $s_l=\alpha-j\beta$. В окрестностях указанных полюсов изображение сигнала представимо в виде

$$x(s)=\frac{\varphi(s)}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)},$$

где $\varphi(s_k)=a+jb,\quad \varphi(s_l)=a-jb$. Тогда,

$$f(t)=\operatorname*{res}_{s_k}e^{st}x(s)+\operatorname*{res}_{s_l}e^{st}x(s)=\frac{a+jb}{2j\beta}e^{\alpha t+j\beta t}+\frac{a-jb}{-2j\beta}e^{\alpha t-j\beta t}=$$

$$=\frac{e^{\alpha t}}{\beta}(a\sin\beta t+b\cos\beta t).$$

Получаем следующие случаи:

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

• $\alpha = 0$. График сигнала, определяемого суммой двух указанных вычетов, приведен на рисунке 33. Видим, что сигнал не убывает и не возрастает. Его период $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

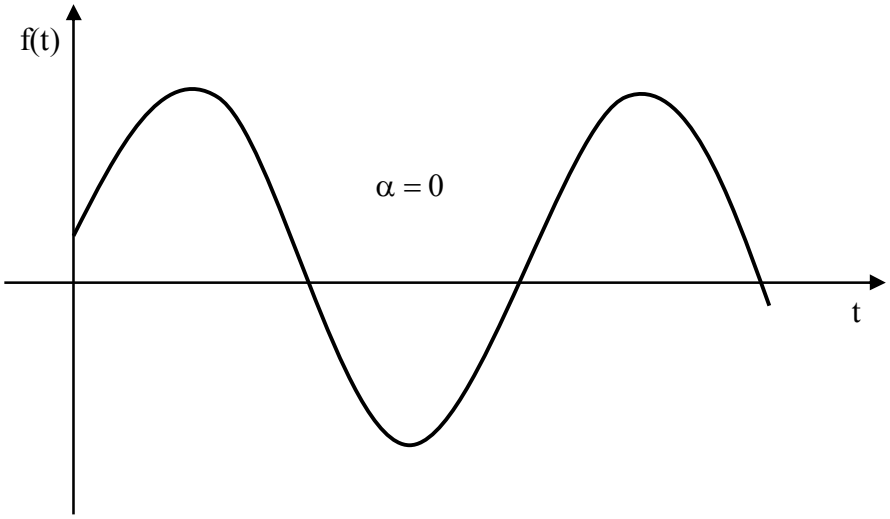


Рисунок 33 – График сигнала $f(t)$ при $\alpha = 0$

• $\alpha < 0$. График сигнала, определяемого суммой двух указанных вычетов при $\alpha < 0$, приведен на рисунке 34. Сигнал убывает и его период $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

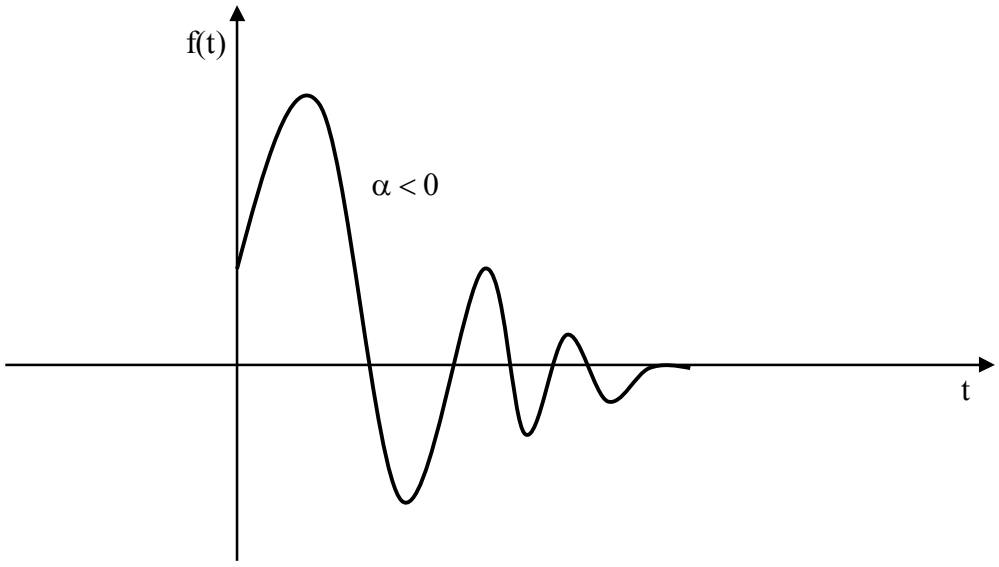


Рисунок 34 – График сигнала $f(t)$ при $\alpha < 0$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

• $\alpha > 0$. График сигнала, определяемого суммой двух указанных вычетов при $\alpha > 0$, приведен на рисунке 35. Указанный сигнал возрастает с периодом $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

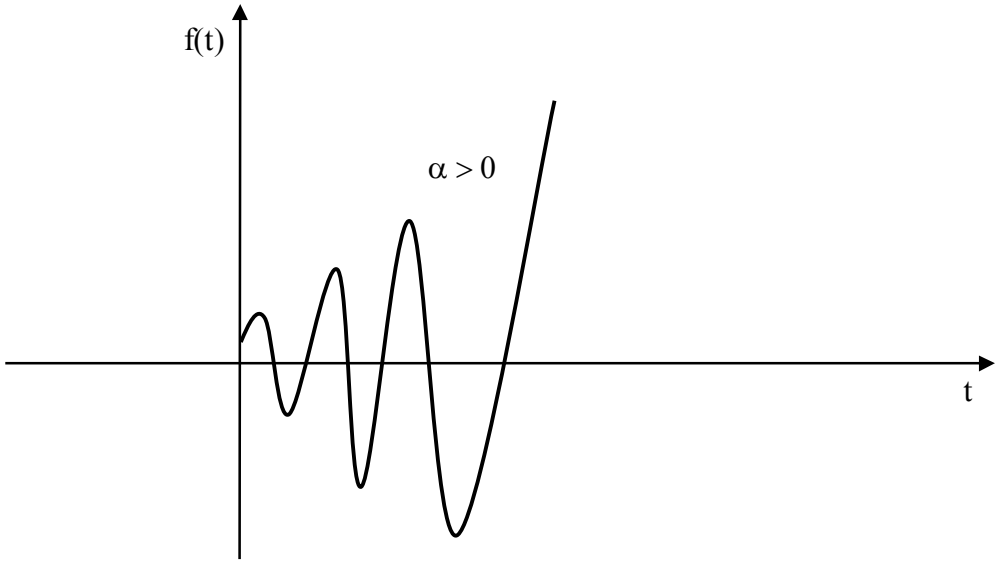


Рисунок 35 – График сигнала $f(t)$ при $\alpha > 0$

Пример. Пусть $x(s) = \frac{2s}{s^2 + 4}$. Указанное изображение сигнала имеет полюсы $\alpha_1 = 2j$ и $\alpha_2 = -2j$. Полюсы – простые, комплексно-сопряженные. Сигнал, соответствующий указанному изображению будет гармоническим. Так как $\beta = 2$, то период сигнала $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

2. Кратные полюса.

а) Пусть $s_k = \alpha$ – вещественный полюс изображения $x(s)$ кратности m. Тогда,

$$x(s) = \frac{\varphi(s)}{(s-\alpha)^m},$$

где $\varphi(\alpha) \neq 0$. Вычет в окрестности указанного полюса имеет вид

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$f(t)=\operatorname*{res}_{s_k} e^{st}x(s)=\lim_{s\to\alpha}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[e^{st}x(s)(s-\alpha)^m\right]=$$

$$=\lim_{s\to\alpha}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[e^{st}\varphi(s)\right].$$

Учитывая, что

$$\left[\varphi(s)e^{st}\right]'=\varphi'(s)e^{st}+t\varphi(s)e^{st},$$

$$\left[\varphi(s)e^{st}\right]''=\varphi''(s)e^{st}+2t\varphi'(s)e^{st}+t^2\varphi(s)e^{st},$$

и т.д., получаем, что вычет имеет вид

$$\operatorname*{res}_{\alpha} e^{st}x(s)=P_{m-1}(t)e^{\alpha t},$$

где $P_{m-1}(t)$ – полином степени $m-1$, старший коэффициент которого $\frac{\varphi(\alpha)}{(m-1)!}$, а остальные зависят от производных $\varphi^k(\alpha)$.

Таким образом, наличие кратного полюса приводит к тому, что вычет в этом полюсе содержит многочлен $m-1$ степени, где m – кратность полюса.

б) Пусть s_k – комплексный полюс изображения $x(s)$ кратности m. Рассуждая по аналогии с выше изложенными случаями, получаем, что сумма вычетов в окрестности комплексного полюса s_k и сопряженного ему s_l имеет вид

$$\operatorname*{res}_{s_k} e^{st}x(s)+\operatorname*{res}_{s_l} e^{st}x(s)=P_{m-1}(t)\frac{e^{\alpha t}}{\beta}(a\sin\beta t+b\cos\beta t).$$

3.8.5. Изображения Лапласа преобразований сигналов

Мы рассмотрим только некоторые линейные преобразования, которые понадобятся далее при изучении разделов курса.

1. Линейность преобразования.

Если сигналы $x_1(t), x_2(t)$ – оригиналы, то $\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)$ – также оригиналы, причем преобразование Лапласа линейной комбинации оригиналов равно линейной комбинации преобразований Лапласа, т.е.,

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$L(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) = \alpha_1 L(x_1(t)) + \alpha_2 L(x_2(t)).$$

(Здесь и далее L – обозначение преобразования Лапласа).

Верно и обратное. Если $x_1(s), x_2(s)$ – изображение сигналов, то $\alpha_1 x_1(s) + \alpha_2 x_2(s)$ – также изображения, причем, обратное преобразование Лапласа линейной комбинации изображений сигналов равно линейной комбинации обратных преобразований Лапласа, т.е.

$$L^{-1}(\alpha_1 x_1(s) + \alpha_2 x_2(s)) = \alpha_1 L^{-1}(x_1(s)) + \alpha_2 L^{-1}(x_2(s)).$$

(Здесь и далее L^{-1} – обозначение обратного преобразования Лапласа).

2. Изображение производной.

Если $x(s)$ изображение сигнала $x(t)$, и пусть при $t > 0$ существуют $x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)$. Тогда

$$L(x'(t)) = sx(s) - x(0),$$

$$L(x''(t)) = s^2 x(s) - sx(0) - x'(0),$$

…

$$L(x^{(n)}(t)) = s^n x(s) - s^{n-1} x(0+) - s^{n-2} x'(0+) - \ldots - x^{(n-1)}(0+).$$

Пример. Пусть задан сигнал $x(t) = e^{-t}$. Изображение указанного сигнала имеет вид $x(s) = \dfrac{1}{s+1}$. Найдем изображение производной указанного сигнала $x'(t) = -e^{-t}$.

$$L(x'(t)) = s\frac{1}{s+1} - 1 = -\frac{1}{s+1}.$$

3. Изображение свертки.

Сверткой непрерывных сигналов $x(t)$ и $y(t)$, заданных на множестве моментов времени R_+ называется интеграл

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_0^t x(t-\tau) y(\tau) d\tau.$$

Пример. Найдем свертку сигналов $x(t) = t$ и $y(t) = e^t$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$z(t) = t * e^t = \int_0^t e^\tau (t-\tau)d\tau = t\int_0^t e^\tau d\tau - \int_0^t \tau e^\tau d\tau = e^t - t - 1.$$

Если указанные сигналы $x(t)$ и $y(t)$ являются оригиналами, то изображение свертки определяется как

$$L(x(t) * y(t)) = x(s) \cdot y(s),$$

где $x(s)$ – изображение сигнала $x(t)$, а $y(s)$ – изображение сигнала $y(t)$. При этом показатель роста свертки C_z определяется как

$$C_z = \max(C_x, C_y),$$

где C_x, C_y – показатели роста сигналов $x(t)$ и $y(t)$ соответственно.

Если $x(s)$ и $y(s)$ являются изображениями сигналов $x(t)$ и $y(t)$, то

$$L^{-1}(x(s) \cdot y(s)) = x(t) * y(t).$$

Пример. Заданы сигналы $x(t) = t$ и $y(t) = \sin t$. Найдем изображение свертки $z(t) = x(t) * y(t)$.

$$L(t * \sin t) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)}.$$

Теперь выполним обратное действие и для полученного изображения свертки найдем оригинал.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right) = t * \sin t = \int_0^t \sin\tau(t-\tau)d\tau = t\int_0^t \sin\tau d\tau - \int_0^t \sin\tau \cdot \tau d\tau = t - \sin t.$$

4. Изображение интеграла.

Если в свертке принять $x(t) = 1(t)$, то получаем, что свертка имеет вид

$$z(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau.$$

Учитывая, что $L(1(t)) = \frac{1}{s}$, получаем:

Если $y(t)$ – оригинал сигнала, то $z(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau$ также оригинал, причем

$$z(s) = \frac{1}{s} y(s).$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

При этом показатель роста $C_z = \max(0, C_y)$.

3.9. Преобразование Лапласа дискретных сигналов

3.9.1. Дискретные сигналы экспоненциального роста

Рассмотрим дискретные сигналы на последовательности с постоянным тактом $\Theta = \{t_k = kT \,|\, T = \text{const}, k \in I_+\}$.

Дискретный сигнал $x(kT)$ имеет экспоненциальный рост, если существует положительные константы M и Λ такие, что неравенство

$$|x(kT)| \le M\Lambda^k$$

выполняется для всех $k \in I_+$.

Поскольку, по условию $\Lambda > 0$, то существует $C = \dfrac{\ln \Lambda}{T}$. Но тогда, $\Lambda^k = (e^{CT})^k = e^{CkT}$, т.е.

$$|x(kT)| \le Me^{CkT}.$$

Однако, как будет видно из дальнейшего, в дискретном случае удобнее рассматривать Λ, нежели C.

Сигналы экспоненциального роста образуют линейное пространство $S_e(I_+)$.

Нижняя грань Λ, при котором для сигнала $x(kT) \in S_e(I_+)$ выполняется неравенство $|x(kT)| \le M\Lambda^k$ называется показателем роста сигнала и обозначается Λ_X.

$$\inf \Lambda = \Lambda_X.$$

Пример. Укажем для приведенных дискретных сигналов показатели их роста.

1. $x(kT) = 1(kT)$ $\qquad\qquad$ $\Lambda_X = 1$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2. $x(kT) = 2^k$ $\Lambda_X = 2$.

3. $x(kT) = x_1(kT) + x_2(kT) = (-1)^k + 0,7^k$ $\Lambda_{X_1} = 1,\ \Lambda_{X_2} = 0,7$

$\Lambda_X = \max\{\Lambda_{X_1}, \Lambda_{X_2}\} = 1$.

4. $x(kT) = kT$. Т.к. $\forall \varepsilon > 1\ \ |x(kT)| \le M\varepsilon^k$, то $\Lambda_X = 1$.

5. $x(kT) = e^{2kT}$ $\Lambda_X = e^{2T}$.

Заметим, что если $\Lambda_X > 1$, то сигнал возрастает, при этом $C_X = \dfrac{\ln \Lambda_X}{T} > 0$. Также отметим, что в общем случае неравенство $|x(kT)| \le M(\Lambda_X + \varepsilon)^k$ выполняется для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

3.9.2. z-преобразование

Рассмотрим следующую теорему.

Теорема. Пусть сигнал $x(kT)$ является сигналом экспоненциального роста $x(kT) \in S_e(I_+)$ с показателем роста Λ_X. Тогда, для всех комплексных значений z, удовлетворяющих неравенству

$$|z| \ge \Lambda > \Lambda_X$$

ряд

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x(kT)$$

сходится абсолютно по z.

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$|x(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |z|^{-k} |x(kT)| \le M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Lambda_X + \varepsilon}{\Lambda} \right)^k .$$

По условиям теоремы существует такое $\varepsilon > 0$, для которого $\dfrac{\Lambda_X + \varepsilon}{\Lambda} < 1$. Но тогда

$$|x(z)| \le \frac{M}{1 - \dfrac{\Lambda_X + \varepsilon}{\Lambda}} = \frac{M\Lambda}{\Lambda - \Lambda_X - \varepsilon}.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Поскольку $\Lambda > \Lambda_X$ то предел при $\varepsilon \to 0+0$ существует и по свойству предела в неравенстве $|x(z)| \le \dfrac{M\Lambda}{\Lambda - \Lambda_X}$. #

Функция $x(z)$ называется z-изображением, а ряд, определяющий эту функцию называется z-преобразованием.

Пример. Пусть задан дискретный сигнал $x(kT) = 1(kT)$. Найдем его z-изображение. Для указанного сигнала $\Lambda_X = 1$.

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}.$$

При суммировании здесь использовалась формула суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Пример. Пусть задан дискретный сигнал $x(kT) = e^{-kT}$. Найдем его z-изображение. Для указанного сигнала $\Lambda_X = e^{-T}$.

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} e^{-kT} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-T} z^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-T}}.$$

Пример. Пусть задан дискретный сигнал $x(kT) = 2^k$. Найдем его z-изображение. Для указанного сигнала $\Lambda_X = 2$.

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}.$$

3.9.3. Свойства изображения x(z)

Укажем основные свойства z-изображения.

1. Вне круга $|z| \ge \Lambda > \Lambda_X$ – $x(z)$ является аналитической ограниченной функцией.

2. Внутри круга $|z| < \Lambda$ изображение $x(z)$ допускает аналитическое продолжение, за исключением конечного числа особых точек. Наиболее удаленная от центра координат особая точка лежит на окружности $|z| = \Lambda_X$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

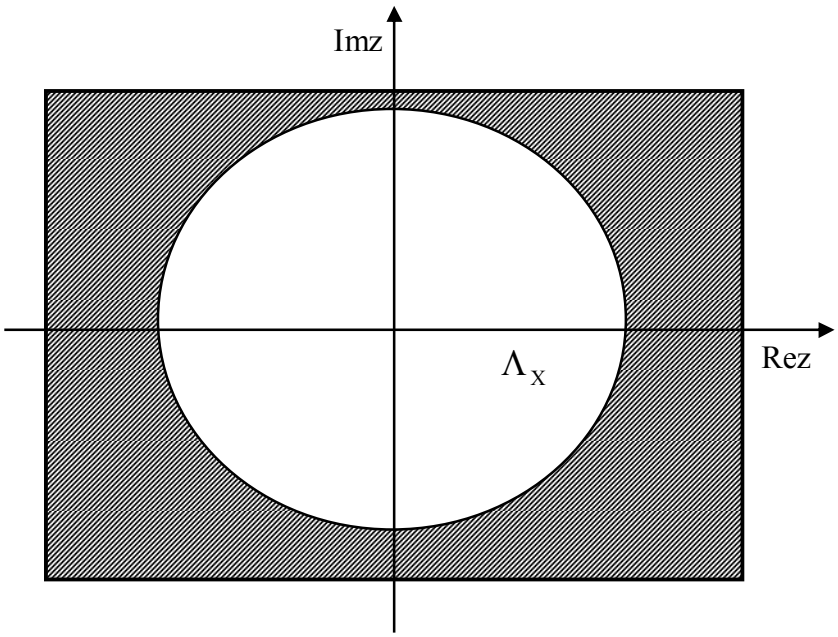


Рисунок 36 – Область аналитичности функции $x(z)$

3. Если z – вещественное число, то $x(z)$ является вещественной функцией. При этом, справедливо равенство

$$x(z) = \overline{x(\overline{z})}.$$

4. Из абсолютной сходимости ряда и возможности поэлементного перехода к пределу следует, что

$$\lim_{z\to\infty} x(z) = x(0).$$

3.9.4. Обратное z-преобразование

Пусть $x(z)$ – аналитическая и равномерно ограниченная при $|z| \geq \Lambda > \Lambda_X$ функция комплексного переменного. Тогда существует сигнал экспоненциального роста

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Lambda} z^{k-1}x(z)dz$$

с показателем роста Λ_X. Таким образом, обратное z-преобразование определяется интегралом по замкнутому контуру с направлением обхода

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

против часовой стрелки, расположенному в области сходимости и окружающему начало координат.

Если изображение $x(z)$ имеет особыми точками только полюса, то лучшим средством вычисления является теорема вычетов. Причем особыми точками являются полюса $x(z)$, а при $k=0$ – еще и вычет берется в точке $z=0$.

Согласно теореме вычетов

$$x(kT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Lambda} z^{k-1}x(z)dz=\sum_{i}\operatorname*{res}_{z=\lambda_i}[x(z)z^{k-1}],$$

где $\operatorname*{res}_{z=\lambda_i}[x(z)z^{k-1}]$ – вычет подынтегральной функции в полюсе $z=\lambda_i$. В общем случае, если $x(z)z^{k-1}$ – рациональная функция z, то ее можно записать как

$$x(z)z^{k-1}=\frac{\psi(z)}{(z-\lambda_i)^{m_i}},$$

когда функция $x(z)z^{k-1}$ имеет полюс порядка m_i в точке $z=\lambda_i$, а $\psi(z)$ не имеет полюсов $z=\lambda_i$. Вычет функции $x(z)z^{k-1}$ в точке $z=\lambda_i$ определяется формулой

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda_i}[x(z)z^{k-1}]=\frac{1}{(m_i-1)!}\left[\frac{d^{m_i-1}\psi(z)}{dz^{m_i-1}}\right]_{z=\lambda_i}.$$

Если $z=\lambda_i$ является полюсом первого порядка, то

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda_i}[x(z)z^{k-1}]=\psi(\lambda_i).$$

Пример. Задано изображение $x(z)=\frac{z}{z-1}$. Найдем оригинал для указанного изображения. Особая точка изображения – полюс $\lambda_1=1$.

$$x(kT)=\sum_{i}\operatorname*{res}_{z=\lambda_i} z^{k-1}\frac{z}{z-1}=\operatorname*{res}_{z=1}\frac{z^k}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^k(z-1)}{z-1}=1^k=1.$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Пример. Задано изображение $x(z)=\frac{z}{z-2}$. Найдем оригинал для указанного изображения. Особая точка изображения – полюс $\lambda_1=2$.

$$x(kT)=\sum_i \operatorname*{res}_{z=\lambda_i} z^{k-1}\frac{z}{z-2}=\operatorname*{res}_{z=2}\frac{z^k}{z-2}=\lim_{z\to 2}\frac{z^k(z-2)}{z-2}=2^k.$$

Пример. Задано изображение $x(z)=\frac{zT}{(z-1)^2}$. Найдем оригинал для указанного изображения. Особая точка изображения – полюс $\lambda_1=1$ кратности $m_1=2$.

$$x(kT)=\sum_i \operatorname*{res}_{z=\lambda_i}\frac{z^kT}{(z-1)^2}=\operatorname*{res}_{z=1}\frac{z^kT}{(z-1)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{z^kT(z-1)^2}{(z-1)^2}=\lim_{z\to 1}Tkz^{k-1}=kT.$$

3.9.5. Дискретное преобразование Лапласа

Одним из наиболее распространенных методов анализа линейных дискретных систем является операторный метод, основанный на дискретном преобразовании Лапласа (D-преобразование), которое по своим возможностям и методике применения близко к преобразованию Лапласа для непрерывных функций. Недостатками z-преобразования является отсутствие в нем частотной интерпретации.

Введем замену переменных $z=e^{sT}$. Тогда $z^{-k}=e^{-skT}$. Если обозначить $x^*(s)=x(e^{st})$, то получим формулу D-преобразования

$$x^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}x(kT).$$

Этот ряд для сигналов $x(kT)\in S_e(I_+)$ сходится абсолютно при $Res\ge C>C_X=\frac{\ln\Lambda_X}{T}$.

Пример. Пусть задан дискретный сигнал $x(kT)=1(kT)$. Выполним D-преобразование для указанного сигнала.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} = \frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1}.$$

При суммировании здесь используется формула суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Пример. Пусть задан дискретный сигнал $x(kT) = 2^k$. Выполним D-преобразование для указанного сигнала.

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e^{sT}} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{2}{e^{sT}}} = \frac{e^{sT}}{e^{sT} - 2}.$$

Рассмотрим основные свойства дискретного преобразования Лапласа.

а) D-преобразование обладает свойством периодичности, заключающемся в том, что $x^*(\sigma + j\omega)$ является периодической функцией по ω с периодом $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Действительно, $x^*(\sigma + j\omega) = x^*(e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T})$. Но $e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T})T} = e^{j\omega T} \cdot e^{j2\pi} = e^{j\omega T}$.

Поэтому функцию $x^*(s)$ можно рассматривать не во всей комплексной плоскости, а в полосе шириной $\frac{2\pi}{T} j$. Обычно выбирают полосу $-\frac{\pi}{T} j \le \mathrm{Im}\, s \le \frac{\pi}{T} j$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

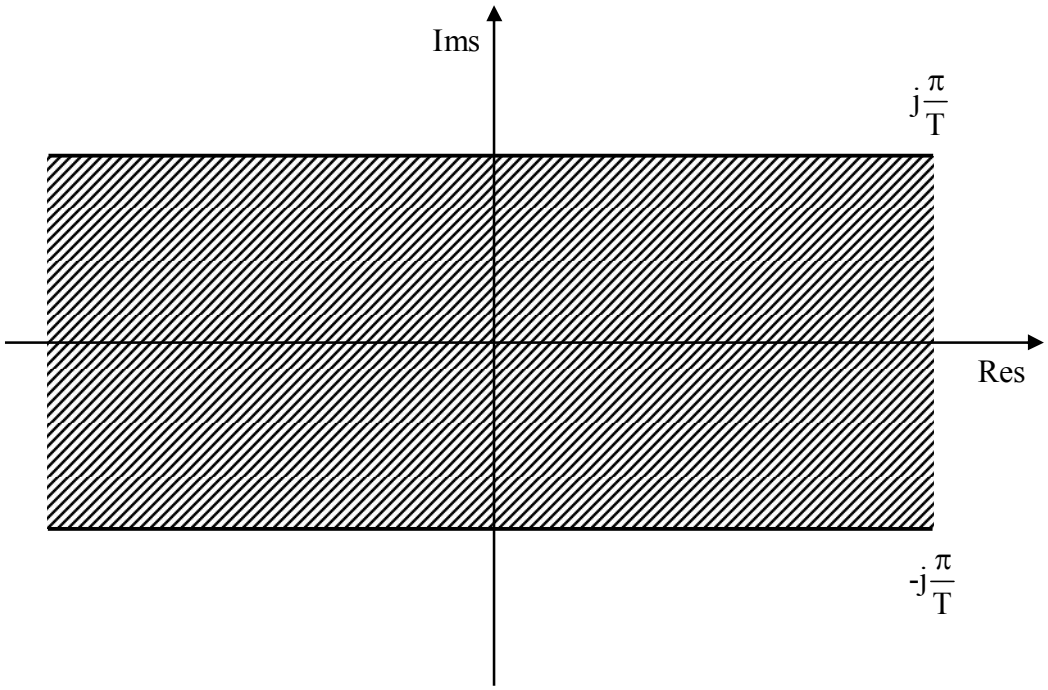


Рисунок 37 – Главная полоса комплексной плоскости

б) В заданной полосе функция $x^*(s)$ аналитическая при $\mathrm{Res} \geq C > C_X = \frac{\ln \Lambda_X}{T}$.

в) При $\mathrm{Res} < C$ функция $x^*(s)$ имеет особые точки s_m. Причем, если рассматривать всю плоскость, то особые точки повторяются периодически с периодом $s_m + j\frac{2\pi}{T}n, \ n \in I$.

г) Если s – вещественное число, то $x^*(s)$ является вещественной функцией. При этом, справедливо равенство

$$x^*(s) = \overline{x^*(\overline{s})}.$$

3.9.6. Обратное дискретное преобразование Лапласа

Прямое преобразование Лапласа (D-преобразование) предназначено для определения изображения $x^*(s)$ по оригиналу $x(kT)$. Решение обратной задачи

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

состоит в определении оригинала $x(kT)$ по изображению $x^*(s)$. Обратное D-преобразование можно получить, введя замену переменных $z = e^{sT}$ в интеграл

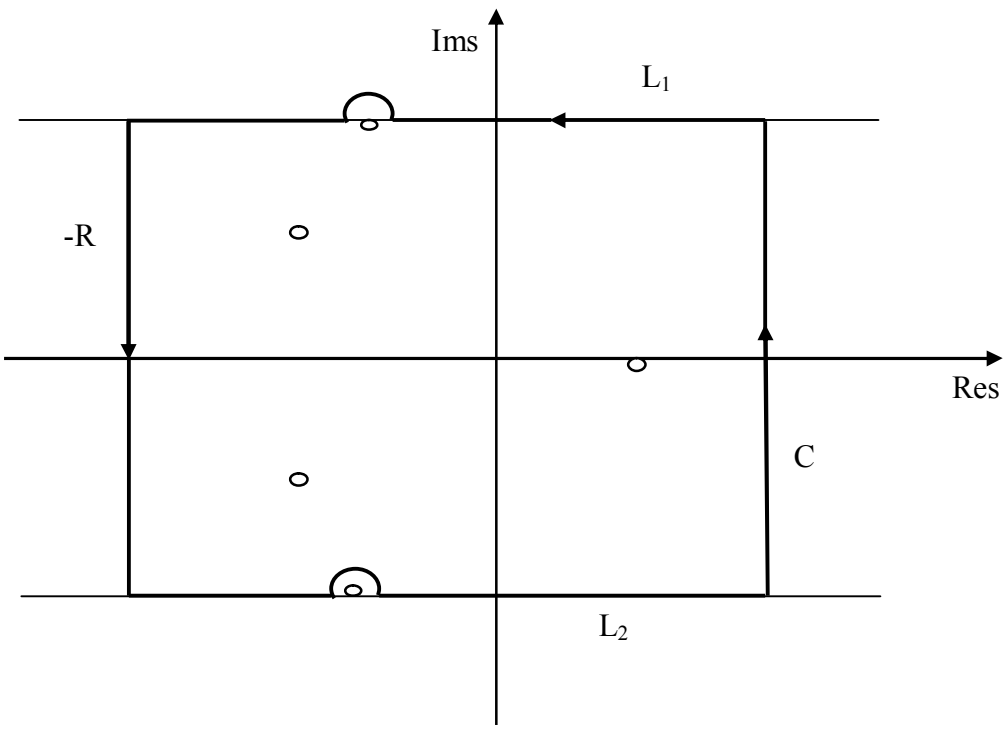
$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Lambda} z^{k-1}x(z)dz,$$

при этом, $dz = Te^{sT}ds$ и $z^{k-1} = e^{-skT}\cdot e^{-sT}$. Если $C = \frac{\ln\Lambda}{T}$, то окружности соответствует отрезок, параллельный мнимой оси. Получаем,

$$x(kT) = \frac{T}{2\pi j}\int_{C-j\frac{\pi}{T}}^{C+j\frac{\pi}{T}} e^{-skT}x^*(s)ds.$$

Это и есть обратное D-преобразование. Оно практически совпадает с обратным преобразованием Лапласа, но отрезок интегрирования конечный и есть множитель T. Обратное D-преобразование можно определить с помощью теоремы вычетов, согласно которой интеграл по замкнутому контуру равняется сумме вычетов

$$\frac{T}{2\pi}\oint_{C} e^{-skT}x^*(s)ds = T\sum_{i}\operatorname*{res}_{s=\lambda_i}[x^*(s)e^{-skT}e^{-sT}].$$



Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Рисунок 38 – Контур интегрирования

Пример. Задано изображение дискретного сигнала $x^*(s)=\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1}$. Найдем оригинал. Изображение имеет простой полюс $\lambda_1=0$.

$$x(kT)=T\operatorname*{res}_{s=0}e^{skT}\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1}=T\lim_{s\to 0}e^{s(k+1)T}\frac{s}{e^{sT}-1}.$$

Найдем предел последнего множителя.

$$\lim_{s\to 0}\frac{s}{e^{sT}-1}=\frac{1}{T}.$$

Тогда, окончательно получаем, что $x(kT)=1$.

Пример. Задано изображение дискретного сигнала $x^*(s)=\frac{Te^{sT}}{(e^{sT}-1)^2}$. Найдем оригинал. Изображение имеет полюс $\lambda_1=0$ кратности $m=2$.

$$x(kT)=T^2\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}e^{s(k+1)T}\frac{s^2}{(e^{sT}-1)^2}=$$
$$=T^2\lim_{s\to 0}\left[(k+1)Te^{s(k+1)T}\varphi^2(s)+2e^{s(k+1)T}\varphi(s)\varphi'(s)\right]=kT.$$

Здесь, $\varphi(s)=\frac{s}{e^{sT}-1}$ и $\varphi'(s)=\frac{e^{sT}-1-sTe^{sT}}{(e^{sT}-1)^2}$.

Вычисление обратного преобразования Лапласа дает те же результаты, что и обратное z-преобразование, но расчеты значительно сложнее, так как множители не сокращаются и приходится дополнительно раскрывать неопределенность. Однако, зная полюса D-изображения на основе обратного D-преобразования можно сразу сделать выводы о поведении соответствующего сигнала $x(kT)$.

Если изображение $x^*(s)$ имеет простые полюса, лежащие в интервале от 0 до $+\infty$, то сигнал $x(kT)$ является монотонным. В противном случае сигнал является колебательным с частотой $\omega=\frac{\varphi}{T}$, где $0\le\varphi\le\pi$. При

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

наличии кратных полюсов в описание сигнала добавляются полиномы от kT степени $m-1$.

3.9.7. Соответствие между z и s-плоскостями

Для установления взаимосвязи достаточно проанализировать выражения

$$s=\sigma+j\omega, \qquad z=e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T},$$

из которых видно, что мнимой оси плоскости s соответствует на плоскости z единичная окружность.

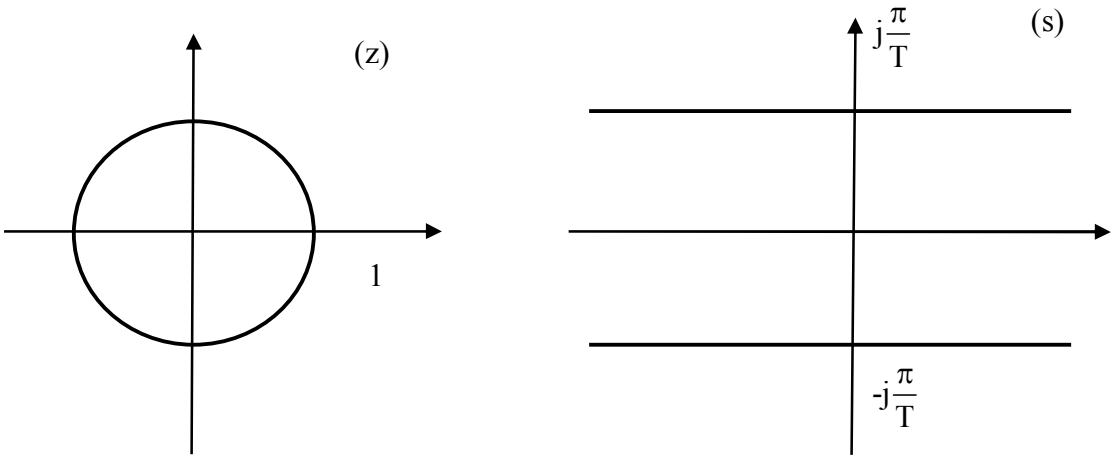


Рисунок 39 – Взаимосвязь z и s плоскостей

При этом, непрерывному росту переменной на мнимой оси плоскости s соответствует многократный обход единичной окружности на плоскости z. Учитывая вышеизложенное можно утверждать, что

- левая полуплоскость переменного s отображается на плоскость единичного круга переменного z;
- правая полуплоскость переменного s отображается на плоскость вне единичного круга переменного z;
- любой отрезок, параллельный мнимой оси на плоскости s отображается в окружность

$$\left[C-j\frac{\pi}{T}, C+j\frac{\pi}{T}\right]\rightarrow |z|=e^{CT},$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

при этом середине отрезка соответствует точка a положительной вещественной полуплоскости $z = e^{CT}$, а концам отрезка – точка на отрицательной вещественной полуоси $z = e^{CT} \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{T}T} = -e^{CT}$. Если C определяет область аналитичности, то все особые точки изображения $x(z)$ расположены внутри круга $|z| = e^{CT}$.

3.9.8. z-преобразование операций над дискретными сигналами

Если задано изображение $u(z)$ входа системы, то для линейных систем по изображению входа можно непосредственно, без перехода во временную область, найти изображение выхода системы $x(z)$. По аналогии с непрерывным случаем, мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся в дискретных линейных системах операции и для них – способы (формулы) определения изображения выхода $x(z)$ непосредственно по изображению входа $u(z)$.

1. Линейность.

Как следует непосредственно из определения, z-преобразование линейно. Если $x(KT) = \lambda_1 u_1(kT) + \lambda_2 u_2(kT)$ – оригинал, λ_i – числа, а $u_i(z)$ – известные изображения, тогда

$$x(z) = \lambda_1 u_1(z) + \lambda_2 u_2(z).$$

В общем (векторном) случае если $X(kT) = AU(kT)$, где $A - m \times n$ матрица, то

$$X(z) = AU(z).$$

2. z-преобразование запаздывающего сигнала.

Пусть $x(kT)$ – представляет собой задержанный на один такт сигнал $u(kT)$, то есть

$$x(kT) = \begin{cases} u(kT - T) & k \geq 1 \\ 0 & k = 0 \end{cases}.$$

Тогда,

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$Z(x(kT)) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} u(kT - T) = z^{-1} \sum_{\xi=0}^{\infty} z^{-\xi} u(\xi T) = z^{-1} u(z).$$

В случае отставания в два такта получаем

$$x(z) = z^{-2} u(z),$$

и т.д.

3. z-преобразование опережающего сигнала.

Пусть $x(kT)$ – представляет собой сигнал, опережающий на один такт сигнал $u(kT)$, то есть

$$x(kT) = u(kT + T).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z(x(kT)) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} u(kT + T) = u(T) + \frac{1}{z} u(2T) + \ldots = \\ &= z\left[\left(\frac{1}{z} u(T) + \frac{1}{z^2} u(2T) + \ldots\right) + u(0) - u(0) \right] = \\ &= z(u(z) - u(0)). \end{aligned}$$

4. z-изображение разности.

Пусть $\Delta u(kT) = u(kT + T) - u(kT)$ – рассматриваемая разность. Тогда

$$Z(\Delta u(kT)) = zu(z) - zu(0) - u(z) = (z - 1)u(z) - zu(0).$$

5. z-изображение свертки.

Рассмотрим свертку дискретных сигналов

$$s(kT) = \sum_{m=0}^{\infty} x(kT - mT) y(mT).$$

Тогда,

$$\begin{aligned} Z(s(kT)) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{m=0}^{k} x(kT - mT) y(mT) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} y(mT) \sum_{k=m}^{\infty} z^{-(k-m)} x(kT - mT) = [\xi = k - m] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} y(mT) \sum_{\xi=0}^{\infty} z^{-\xi} x(\xi T) = x(z) y(z). \end{aligned}$$

6. z-изображение суммы сигналов.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Рассмотрим свертку дискретных сигналов

$$s(kT) = \sum_{m=0}^{\infty} x(kT - mT)y(mT).$$

Принимая $x(kT) = 1(kT)$, $y(kT) = u(kT)$ и учитывая, что $Z(1(kT)) = \frac{z}{z-1}$, получаем

$$s(z) = \frac{z}{z-1}u(z).$$

3.10. Упражнения

1. В случае интерпретации сигнала как вектора $X \in S(\Theta,\Sigma)$, какова размерность этого вектора?

2. Рассмотрим сигнал приведенный на рисунке 22. Каким следует взять значение a, чтобы выполнялось $\|X\|_2 = 1$ при любом значении T?

3. Докажите, что $Э_{XY}^2 \le Э_X \cdot Э_Y$.

4. На отрезке времени $Q = [0, 1]$ заданы непрерывные сигналы $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \sin t$, $x_3(t) = \sin 2t$, принимающие действительные значения R. С помощью матрицы Грама проверить сигналы на линейную зависимость.

5. На отрезке времени $Q = [0, 1]$ заданы непрерывные сигналы $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \cos t$, $x_3(t) = \cos 2t$, принимающие действительные значения R. Найти ортонормированный базис подпространства L, заданного указанными сигналами, с помощью метода Грамма-Шмидта. Построить графики сигналов исходного и ортонормированного базисом подпространства L.

6. На отрезке времени $Q = [0,1]$ заданы непрерывные сигналы $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$, принимающие действительные значения R.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Найти проекцию сигнала $y = \sin 2\pi t$ на подпространство $L\{x_1, x_2, x_3\}$ двумя способами: на исходном и на ортонормированным базисах.

7. Используя данные и результаты задания № 6 вычислить энергию и норму сигнала $y = \sin 2\pi t$, энергию и норму его проекции на подпространство $L\{x_1, x_2, x_3\}$, энергию и норму его перпендикуляра. Оцените ошибку приближения сигнала $y = \sin 2\pi t$ его проекцией на подпространство $L\{x_1, x_2, x_3\}$ как отношение нормы перпендикуляра к норме сигнала $y = \sin 2\pi t$, выраженное в процентах.

8. Найдите отрезок гармонического ряда Фурье таким образом, чтобы энергия погрешности приближения сигнала $x(t) = 1(t + \frac{\pi}{2}) - 1(t - \frac{\pi}{2})$, заданного на интервале времени $Q = [-\pi, +\pi]$, этим отрезком не превышала 2 процентов от энергии сигнала.

9. Найдите отрезок комплексного ряда Фурье таким образом, чтобы энергия погрешности приближения сигнала $x(t) = 1(t + \frac{\pi}{8}) - 1(t - \frac{3\pi}{8})$, заданного на интервале времени $Q = [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, этим отрезком не превышала 2 процентов от энергии сигнала.

10. Исследуйте с помощью преобразования Лапласа решение системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} dY(t)/dt &= 3,2f(t), \\ df(t)/dt &= 0,05g(t), \\ dg(t)/dt &= -0,05g(t) + 0,05u(t) \end{aligned}\right\}$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$Y_0 = 0, \quad f_0 = 3, \quad g_0 = -2.$$

$$u(t) = \sin 0,25t.$$

Для этого найти изображение Y(s) решений систем дифференциальных уравнений. Выделите в этих изображениях составляющие: – вызванными начальными условиями – изображение собственного движения; вызванные внешним возмущением – изображения вынужденного движения. Представить на комплексной плоскости расположение особых точек изображений и по ним сделать выводы о характере решения.

По полученному изображению найдите оригиналы собственного и вынужденного движений. Постройте графики на отрезке времени $0 < t < 100$ секунд этих процессов и сравните с выводами о характере процессов, сделанными по анализу расположения полюсов.

11. Исследуйте с помощью Z-преобразования решение системы конечно-разностных уравнений

$$\left.\begin{aligned} Y(kT+T) &= Y(kT) + 3,2f(kT), \\ f(kT+T) &= f(kT) + 0,05g(kT), \\ g(kT+T) &= g(kT) - 0,05g(kT) + 0,05u(kT). \end{aligned}\right\}$$

$$Y_0 = 0, \quad f_0 = 3, \quad g_0 = -2.$$

$$u(t) = \sin(0,25kT), \quad T = 1.$$

Для этого найти изображение Y(z) решений систем конечно-разностных уравнений. Выделите в этих изображениях составляющие: – вызванными начальными условиями – изображение собственного движения; вызванные внешним возмущением – изображения вынужденного движения. Представить на комплексной плоскости расположение особых точек изображений и по ним сделать выводы о характере решения.

По полученному изображению найдите оригиналы собственного и вынужденного движений. Постройте графики на отрезке времени $0 < kT < 100$ секунд этих процессов и сравните с выводами о характере процессов, сделанными по анализу расположения полюсов.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

ПРЕДМЕТНИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А
Алгебраическое дополнение 36
Б
Базис 47
- ортонормальний 57
- подпространства 62
Бинарное отношение 20
- график бинарного отношения 21
- симметричное 22
- антисимметричное 22
- рефлексивное 22
- антирефлексивное 22
- транзитивное 23
- порядка 23
В
Взаимная энергия сигналов 103
Д
Декартовое произведение 15
Дискретное преобразование Лапласа 138
З
И
Инвариантное подпространство оператора 79
Инверсия 34
К
Канонические формы 73
Квадратическая форма 87
Класс эквивалентности 23
Координатный вектор 47
Кортеж 14
- проекция кортежа 15
Критерий Сильвестра 88
Л
Линейная комбинация векторов 42
Линейная оболочка 60
Линейный оператор 70
- пространство определения 70
- пространство значений 70
М
Матрица 26
- нулевая 26
- квадратная 27
- диагональная 27

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

- единичная 27
- треугольная 28
- сумма матриц 28
- равные матрицы 28
- транспонирование матрицы 29
- симметричная 30
- антисимметричная 30
- след матрицы 32
- степень матрицы 33
- невырожденная 35
- ранг матрицы 37
- обратная 38
- Грамма 58

Матрица строка 27
Матрица столбец 27
Минор матрицы 36
Множество 7
- элементы множеств 7
- конечное 7
- мощность множества 7
- счетное 7
- континуальное 7
- пустое 8
- универсальное 8
- пересечение множеств 10
- объединение множеств 9
- разность множеств 11
- дополнение множества 12
- разбиение множества 12
- прямое произведение множеств 14

Множество сигналов экспоненциального роста 119
Н
Норма вектора 51
Норма сигнала 98
О
Обобщенный ряд Фурье 109
Обратное преобразование Лапласа 124
Определитель матрицы 34
Ортогональное дополнение 66
Особые точки 124
Отображение 19
- сюрьективное 19
- инъективное 19

П
Перестановка 33

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Преобразование Лапласа 119
Преобразование подобия 76
Пересечение подпространств 63
Подмножество 8
Показатель роста сигнала 120
Пространство 41
- нормированное пространство 53
- евклидово пространство 53
С
Скалярное произведение 52
Скалярное произведение сигналов 102
Сигнал 95
Собственный вектор оператора 79
Собственные числа оператора 78
Соответствие 17
- обратное соответствие 18
- график соответствия 18
Т
Теорема вычетов 125
Ф
Функция 19
- взаимно однозначная 19
- обратная 20
Х
Характеристический многочлен 76
Характеристическое уравнение 78
Я
Ядро оператора 71
z
z-преобразование 135

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математические основы теории автоматического управления: учеб. пособие. В 3 т. т.1/ В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко; под ред. Б.К. Чемоданова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 552 с.: ил.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — СПб.: Изд-во «Лань», 2004.-317с.

3. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики / Ю.М. Коршунов. — М.: Энегоиздат, 1987.-415с.

4. Морозова В.Д. Теория функции комплексного переменного / В.Д. Морозова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.-376с.

5. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов. — М.: Наука. ГРФМЛ, 1980. — 384 с.

6. Вунш Г. Теория систем / Г. Вунш. — М.: Сов. радио, 1978.-468с.

7. Заде Л. Теория линейных систем / Л. Заде, Ч. Дезоер. — М.: Наука, 1970.-583с.

8. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: в 2т. / Ж. Макс. — М.: Мир, 1983.-348с.

9. Воеводин В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин. — М.: ГРФМЛ «Наука», 1980. — 420 с.

10. Мартыненко В.С. Операционное исчисление: учеб. пособие / В.С. Мартыненко. — К.: Вища шк., 1990. — 359 с.: ил.

11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988.-783с.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Навчальний посібник

Крамарь Вадим Олександрович

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СИСТЕМНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

Коректор Л.П. Светлих
Нормоконтролер Г.М. Персідських
Комп'ютерний набір і вірстка К. Альчакова

Здано в набір 02.06.2008. Підп. до друку ДК№1272 від 17.03.03.
Формат 60 х 90/16. Пап. тип №1. Офсет. Друк. Ум. друк. арк. 9,6
Тираж 300 прим. Зам. №

Видавництво СевНТУ, м. Севастополь-53, вул. Університетська, 33, НМЦ,
т.(0692)435-210
E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua:nms@sevgtu.sebastopol.ua

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)