

УДК 519.212

**В.П. Долгин, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**root@sevgtu.sebastopol.ua***НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

*Рассмотрена методика синтеза непрерывно-дискретной модели нормального распределения процесса отказов оборудования с заданной степенью точности.*

**Ключевые слова:** дискретное распределение, нормальное распределение, вероятность отказов, функция распределения.

В вычислительной математике при научном исследовании различных физических и технических задач, связанных со случайными явлениями, существует необходимость воспроизведения реального случайного процесса, подлежащего исследованию [1–3]. Одной из областей, где применяются статистические модели для реализации случайного процесса, является теория надежности. Среди широкого круга задач надежности существует определенная группа проблем, связанных с описанием распределения сроков службы технических средств после длительной эксплуатации, описание которых подчиняется закону нормального распределения. При формировании нормального распределения должно применяться усеченное распределение, критерий реализации которого строго не определен. Кроме того, не обеспечивается требуемый диапазон распределения, а точность соответствия модели заданным параметрам не рассматривается.

**Целью** статьи является обеспечение формирования нормально распределенного множества с заданными параметрами в заданном диапазоне и требуемой точностью распределения.

Большинство методов получения необходимого распределения основано на использовании последовательности  $N$  равномерно распределенных в интервале  $(0, 1)$  случайных величин  $\xi_i$  ( $i=1...N$ ). В соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей (теоремой Ляпунова) закон распределения суммы  $n$  независимых случайных величин с одним и тем же произвольным законом распределения при неограниченном увеличении числа слагаемых  $n$  приближается к нормальному [1, 2] с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\}, \quad (1)$$

где  $m_x$  – математическое ожидание;  $\sigma_x$  – стандартное отклонение.

В общем случае сумма  $n$  равномерно распределенных в интервале  $(a, b)$  независимых случайных величин стремится к нормальному распределению [2] с математическим ожиданием:

$$m_x = \frac{n(a+b)}{2} \quad (2)$$

и дисперсией

$$D_x = \frac{n(b-a)^2}{12}. \quad (3)$$

При  $a = 0, b = 1$  суммарное нормальное распределение характеризуется параметрами

$$m_x = \frac{n}{2}; \quad D_x = \frac{n}{12},$$

где  $m_x$  – математическое ожидание (2);  $D_x$  – дисперсия (3).

Для получения последовательности  $N$  нормально распределенных случайных величин  $x_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) с заданными параметрами  $m_x, D_x$  представим случайную величину  $X_i$  в виде суммы

$$x_i = m_x + \sigma_x \chi_i, \quad (4)$$

где  $\chi_i$  – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием  $M(\chi) = 0$  и стандартным отклонением  $\sigma_\chi = 1, \sigma_x = \sqrt{D_x}$ .

Найдем случайную величину  $\chi_i$ , имея последовательность равномерно распределенных в интервале (0, 1) случайных чисел  $\xi_i$   $\left(i = \left[ \overline{1, n} \right] \right)$ . Согласно центральной предельной теореме [1–3] имеем

$$\sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12}} \chi_i. \quad (5)$$

Из уравнения (5) выразим

$$\chi_i = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i - \sqrt{3n}. \quad (6)$$

Подставив значение  $\chi_i$  из (6) в (4), получим

$$x_i = m_x + \sigma_x \left( \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i - \sqrt{3n} \right). \quad (7)$$

Упростим выражение (7). В зависимости от требуемой точности число слагаемых  $n$  лежит в интервале [2] от 5 до 15. Приняв  $n=12$ , получим частный случай выражения (7) для вычисления текущего значения нормально распределенной случайной величины

$$x_i = m_x + \sigma_x \left( \sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6 \right). \quad (8)$$

Равенство (7) позволяет получить критерий реализуемости рассмотренного алгоритма. Для получения неотрицательных значений нормально распределенных случайных величин  $x_i \geq 0$   $\left(i = \left[ \overline{1, N} \right] \right)$  необходимо выполнение условия:

$$\frac{m_x}{\sigma_x} + S_x \geq \sqrt{3n},$$

где  $S_x = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

В худшем случае при значении  $S_x = 0$  условие реализуемости будет выполнено, если действительно неравенство:

$$m_x \geq \sigma_x \sqrt{3n}. \quad (9)$$

Выбрав минимально возможное значение  $n=5$ , получим критерий реализуемости модели в виде соотношения параметров нормального распределения:

$$Kr = \frac{m_x}{\sigma_x} \geq 3,87. \quad (10)$$

Введение критерия (10) позволяет получить достоверную аналитическую модель, исключающую появление отрицательных элементов реализации, область существования которых строго ограничена правой полуплоскостью.

Более точный метод получения случайных величин  $x_i$ , имеющих нормальное распределение, для требуемых значений  $\xi_i$  основан на обратном преобразовании, которое сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx = \xi_i \quad (11)$$

относительно  $x_i$ .

В этом случае определение нижней и верхней границ интервала равномерного распределения  $\xi_i$  находится путем подстановки в уравнение (11) минимального и максимального требуемых значений  $x_i$ , ограниченных интервалом (min, max):

$$a = \int_{-\infty}^{\min} f(x)dx; b = \int_{-\infty}^{\max} f(x)dx.$$

Для получения  $N$  необходимых значений  $x_i$  вычисляется  $N$  равномерно распределенных в интервале  $(a, b)$  случайных величин  $\xi_i$  и решается обратная задача (11). В качестве примера приведена версия Maple – реализации процедуры формирования множества  $X_{[i]}$   $\left(i = \left[1, N\right]\right)$  нормально распределенных случайных величин в требуемом интервале  $(\min, \max)$ .

```
> for i to N do
  ξ:=evalf(stats[random,uniform[a,b]](1)); X[i]:=evalf(solve(int(fn,t=-
infinity..u)=ξ));
od;
```

где  $X$  – массив нормально распределенных случайных величин  $x_i$ ;  $\xi$  – равномерно распределенная случайная величина.

На рисунке 1 приведены результаты моделирования по методу обратного преобразования (11) при объеме выборки  $N = 50$ .

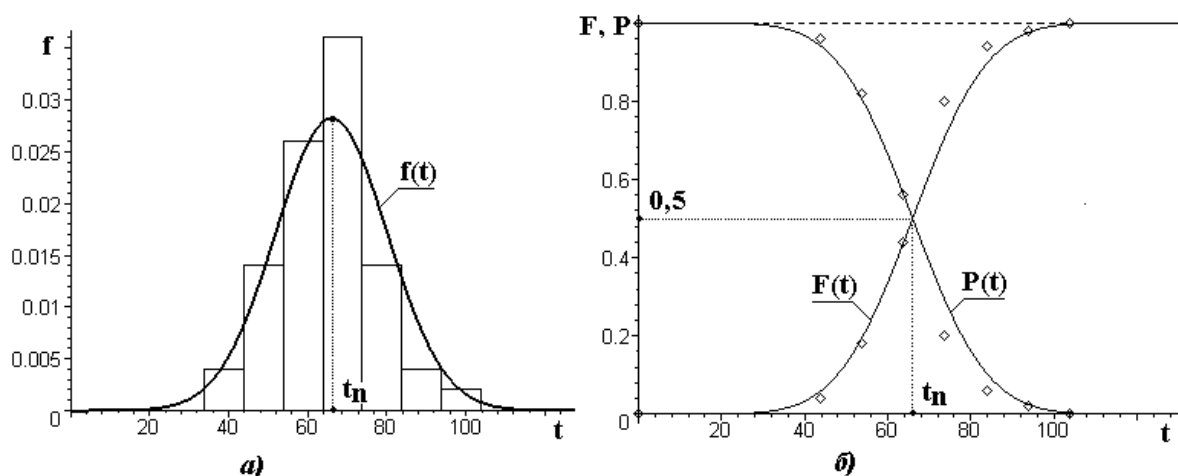


Рисунок 1 – Графики функций распределения

На рисунке 1, а изображена функция плотности вероятности  $f(t)$  и гистограмма распределения для  $m_x = 66$  ( $t_n = m_x$ ) и  $\sigma_x = 14$ , а на рисунке 1, б – функция распределения вероятностей наступления отказов  $F(t)$  и безотказной работы  $P(t)$ . Точками нанесены значения, полученные по данным, представленным гистограммой.

Изложенный подход обеспечивает нормальное распределение множества дискретных значений  $x_i$  с параметрами, близкими заданным. Степень близости зависит от объема выборки  $N$ , относительной погрешности  $\delta$ , математического ожидания  $m_x$  и требуемой вероятности  $P$ , так как  $N = t^2 D_x / (m_x \delta)^2$ , где  $t$  – корень уравнения Лапласа:

$$\Phi(\mathbf{C}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \exp(-x^2/2) dx;$$

$$\Phi(\mathbf{C}) = P \left\{ \left| \bar{m}_x - m_g \right| < \delta \right\},$$

где  $m_g$  – математическое ожидание генеральной совокупности.

На рисунке 2 изображены кривые зависимости значений корня уравнения Лапласа  $t(P)$  (кривая 2, а) и требуемого объема выборки  $N(\delta)$  (кривая 2, б) для обеспечения заданной точности параметров выборки нормального распределения.

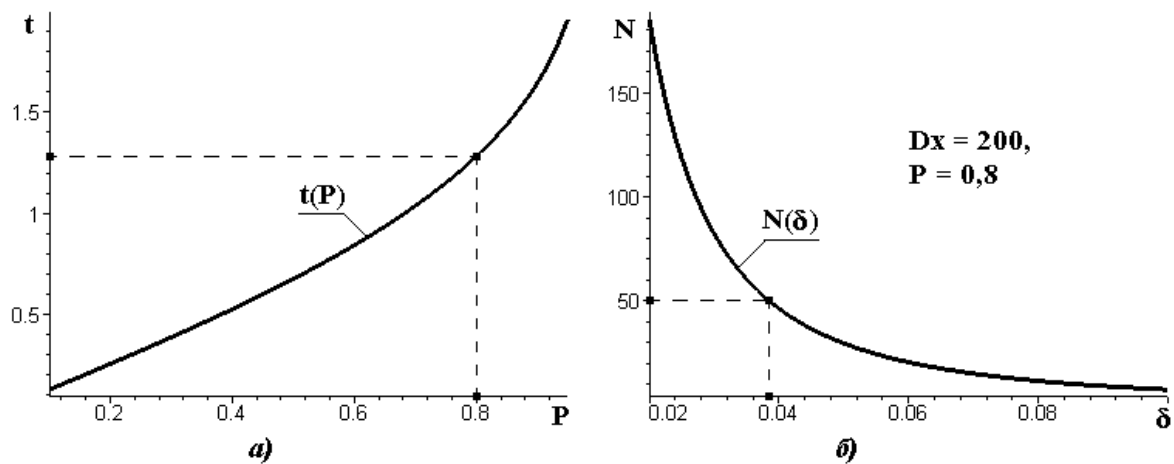


Рисунок 2 – Графики функций  $t(P)$  и  $N(\delta)$

В общем случае зависимость требуемого объема выборки  $N$  определяется значениями двух варьируемых параметров  $P$  и  $\delta$ , которые могут произвольно меняться, и двух параметров  $m_x$  и  $D_x$ , вычисляемых по текущей реализации, что позволяет построить рекуррентную процедуру настройки модели. На рисунке 3 изображены модификации представления функции  $N(P, \delta)$  в пространстве параметров (рисунок 3, а) и ее семейство при фиксированных значениях  $\delta$  (рисунок 3, б).

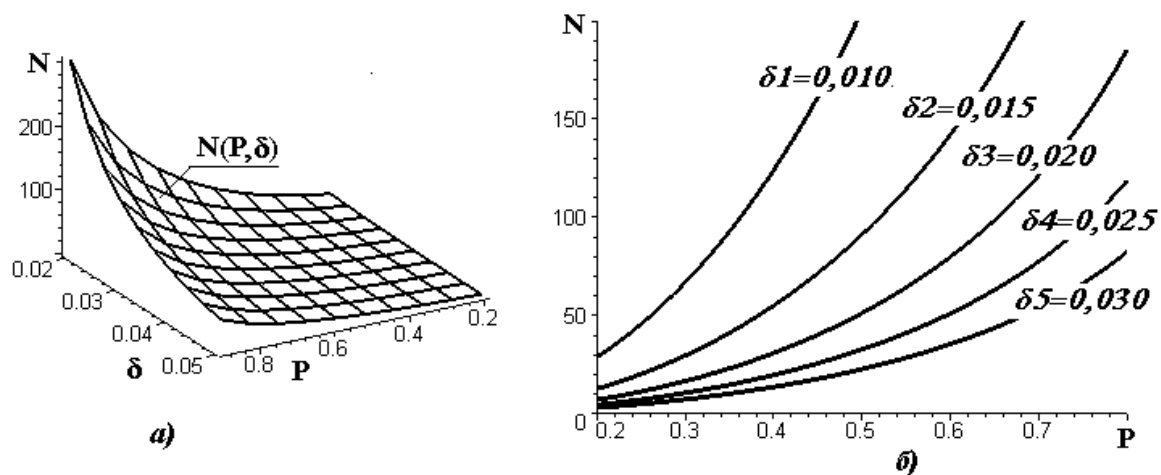


Рисунок 3 – Графики модификаций представления функции  $N(P, \delta)$

На рисунке 4 изображены графики процессов изменений относительной погрешности  $\delta$  (увеличено в 104 раз), дисперсии выборки  $D_x$  при изменениях с шагом 10 от 50 до 250 объема выборки  $N$  (показано на графике от 150 до 230) для  $k = 20$  шагов.

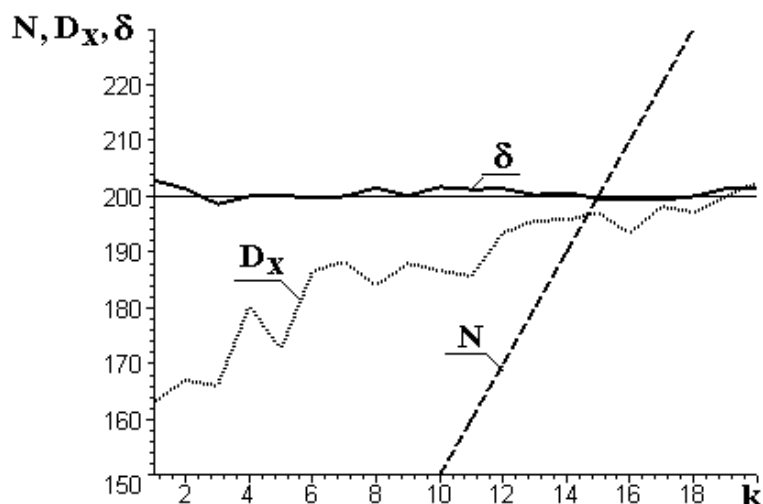


Рисунок 4 – Графіки ітераційного процесу

Полученные результаты позволяют предложить использование модели для формирования эквивалентного множества нормально распределенных случайных величин по неполному экспериментальному множеству реализаций, либо итерационную процедуру уточнения параметров реального распределения по мере поступления данных.

Перспективы дальнейших исследований состоят в адаптации изложенного метода к решению задач оценки параметров распределения вероятностей технического состояния систем и технических средств.

#### **Бібліографічний список використаної літератури**

1. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. — М.: Наука, 1965. — 546 с.
2. Решение задач надежности и эксплуатации на универсальных ЭЦВМ / Б.П. Креденцер, М.М. Ластовченко, С.А. Сенецкий, Н.А. Шишонко. Под ред. Н.А. Шишонка. — М.: Сов. радио, 1967. — 400 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

*Поступила в редакцию 10.07.2010 г.*

#### **Долгін В.П. Безперервно-дискретна модель нормального розподілу**

Розглянута методика синтезу безперервно-дискретної моделі нормального розподілу процесу відмов устаткування із заданим ступенем точності.

**Ключові слова:** дискретний розподіл, нормальний розподіл, вірогідність відмов, функція розподілу.

#### **Dolgin V.P. The continuous-discrete model of the normal distribution**

A methodology of synthesis for the continuous-discrete model of normal distribution of a process of equipment failures with the set exactness degree is considered.

**Keywords:** discrete distributing, normal distribution, failure probability, distributing function.