

УДК 621.9.06.

Ю.О. Стреляная, аспирант,

Д.А. Каинов, доцент, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053

root@sevgtu.sebastopol.ua

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ШПИНДЕЛЬНОГО УЗЛА НА ГИДРОСТАТИЧЕСКИХ ОПОРАХ

Анализируется применение численных методов для расчета шпиндельных узлов.

Ключевые слова: *шпиндельный узел, математическая модель, конечные элементы.*

При функционировании гидравлических опор имеет место рабочий процесс, обусловленный упругими деформациями элементов конструкции под воздействием внешних силовых факторов и давлений, возникающих в слое жидкости, течением жидкости (смазочного материала) между взаимоспрягаемыми поверхностями опор и тепловыми явлениями вследствие вязкого трения и прокачки смазочного материала под давлением. Для выявления рациональных и оптимальных конструктивных параметров опор необходимо применение численных методов расчета этих явлений.

Математические модели сплошной среды приводят к уравнениям в частных производных, которым удовлетворяют средние величины. К уравнениям в частных производных приводят задачи гидродинамики, теплопроводности, теории упругости и многие другие.

В случае решения обыкновенных дифференциальных уравнений имеется ряд уравнений, интегрируемых в квадратурах. Решение большинства уравнений можно получить, используя только численные методы. Принципиально различных постановок задач немного: в основном это задача Коши, краевая задача для линейных уравнений, краевая задача для нелинейных уравнений. Имеется небольшое количество теоретически исследованных и практически отработанных алгоритмов, позволяющих эффективно решать существенную часть задач, связанных с численным решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Большое количество различных постановок задач, связанных с решением уравнений в частных производных, привело к тому, что теория численных методов в этом направлении дробится на большое число направлений. Использование численных методов с применением ЭВМ сильно расширило возможности в исследовании подобных задач. Разработанные алгоритмы дают возможность решать с приемлемой затратой машинного времени подавляющее большинство краевых задач, связанных с решением одно- и многомерных уравнений параболического типа с переменными коэффициентами, в частности, с коэффициентами, зависящими от решения.

Целью данной статьи является анализ методов построения, которые наиболее целесообразно использовать при моделировании шпиндельных узлов тяжелых токарных станков на гидростатических опорах.

В настоящее время, наряду с вариационно- и проекционно-разностными (метод конечных элементов) сеточные методы решения уравнений с частными производными являются наиболее распространенными. При решении задач сеточными методами мы получаем совокупность приближенных значений решения в некоторой конечной базисной системе точек.

Метод конечных элементов (МКЭ) представляет семейство проекционных методов с кусочно-полиномиальными финитными пробными функциями, носителями которых являются окрестности узлов нерегулярной сетки ячеек (конечных элементов). Суть МКЭ заключается в том, что заданная система разбивается для расчета на отдельные элементы конечных размеров — конечные элементы. Эти элементы могут быть как плоскими, так и пространственными, иметь весьма разнообразную геометрическую форму, но обязательно такую, которая позволяет исследовать напряженное состояние элемента, находящегося под действием внешних нагрузок и сил, обусловленных взаимодействием соседних элементов. Условия равновесия и уравнения совместности деформаций и перемещений в местах сочленения конечных элементов (узлах) позволяют осуществить обратный переход от некоторой совокупности конечных элементов к заданной конструкции. Таким образом, непрерывная система условно заменяется системой с конечным числом определяемых перемещений (с конечным числом степеней свободы). При этом целью является анализ сил и перемещений узлов сопряжения конечных элементов. Такой подход позволяет выполнять расчет не только стержневых систем, но и пластин, оболочек, тонкостенных стержней, массивов, т.е. любых конструкций с самой сложной геометрией. С математической точки зрения в МКЭ задача сводится к решению систем алгебраических уравнений вместо дифференциальных.

Для определения коэффициентов разложения решения по базисным функциям в МКЭ применяются вариационные формулировки начально-краевых задач. В нелинейных задачах применяется вариационная формулировка Галеркина и с учетом обозначений:

Ψ – произвольная, достаточно гладкая функция; $S_F = S \setminus S_V$; $S = \partial V$. Вариационное уравнение Галеркина, начальные условия, граничные главные и граничные естественные условия, можно записать:

$$\begin{aligned} \int_V (\partial_1 Y + G(Y)) \Psi dV - \sum_{i=1}^3 \left(\int_V F_i \partial_{xi} \Psi dV + \int_S F_i(Y) n_i \Psi dS \right) &= 0; \\ t = 0, x \in V : Y &= Y_0(x); \\ t \geq 0, x \in S_V : Y &= Y_g(x, t); \\ t \geq 0, x \in S_F : F_i(Y) n_i &= F_n(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

Решение (1) ищется в виде разложения по кусочно-полиномиальным финитным пробным функциям аппроксимационного базиса, связанных с узлами и ячейками конечно-элементной сетки, приведенной на рисунке 1.

$$Y = \sum_{i=1}^N a_i(t) \varphi_i(x).$$

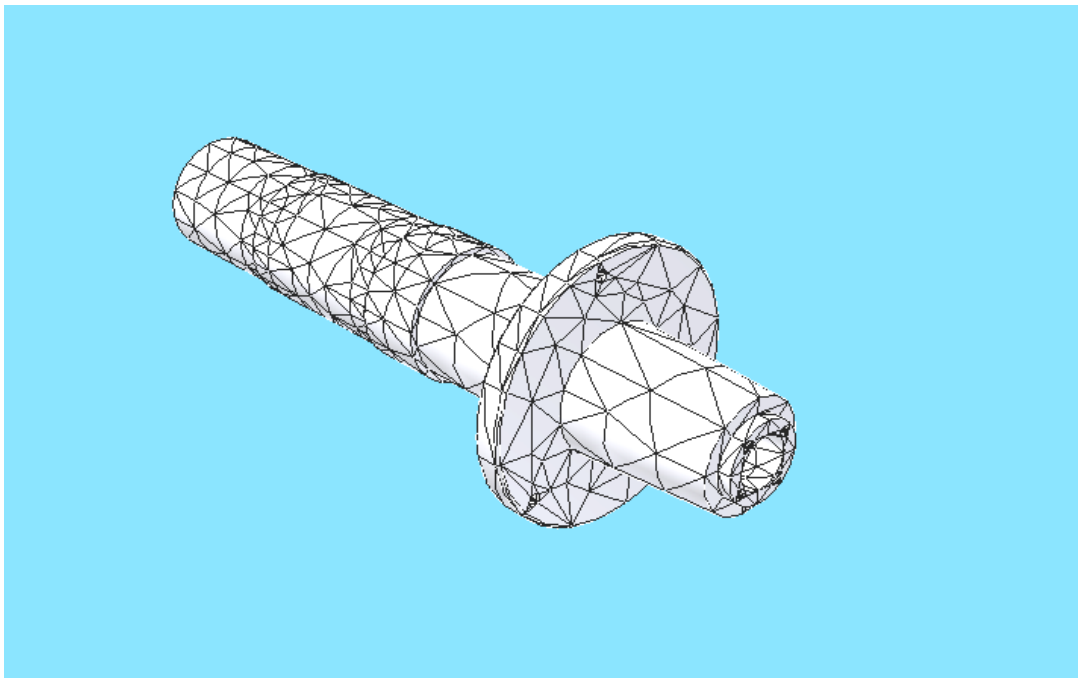


Рисунок 1 – Сетка конечных элементов шпиндельного узла на гидростатических опорах

Основным преимуществом МКЭ для решения задач гидродинамической теории смазки является его органическая способность реализовать граничные условия, полагающие равенство нулю искомой функции и первой производной от нее в соответствующем направлении. По теореме Эйлера решение исходного дифференциального уравнения эквивалентно требованию минимизации соответствующего функционала, что реализуется МКЭ при линейной вариации давления по элементу. В пределах конечного элемента назначаются свойства ограничиваемого им участка объекта (это могут быть, например, характеристики жесткости и прочности материала, плотность и т.д.) и описываются поля интересующих величин (применительно к механике твердого тела это перемещения, деформации, напряжения и т.д.). Параметры из второй группы назначаются в узлах элемента, а затем вводятся интерполирующие функции, посредством которых соответствующие значения можно вычислить в любой точке внутри элемента или на его границе. Задача математического описания элемента сводится к тому, чтобы связать действующие в узлах факторы. В механике сплошной среды это, как правило, перемещения и усилия. В качестве конечных элементов используются согласованные и несогласованные треугольники и прямоугольники. Установлена предпочтительность применения последних при решении рассматриваемых задач. Обеспечив удовлетворение интерполяционных

функций формы требованиям полноты, функционал минимизируется приближенно. При этом расходы через узлы, не лежащие на границах исследуемой области, принимаются равными нулю. Учет ленточного вида матрицы текучести в сочетании с оптимальным порядком нумерации узлов позволяет минимизировать объем массива для хранения указанной матрицы. Для повышения точности результатов и сокращения времени счета поле узловых давлений и расходов вначале определяется для грубой схемы дискретизации (как и при конечно-разностном методе), после чего вводятся дополнительные узлы таким образом, чтобы их концентрация в области решения была пропорциональна градиенту искомой функции, например, давления. В качестве первого приближения для нового ансамбля узловых точек используется решение, полученное для грубой схемы.

Однако при реализации системы конечно-элементных уравнений, аппроксимирующих исходное дифференциальное уравнение, обеспечивается очень малая скорость сходимости, а во многих случаях процесс является вообще расходящимся. Необходимость реализации, вообще говоря, нелинейной системы уравнений снижает преимущества конечно-элементного метода решения исходных уравнений по сравнению с конечно-разностным.

Учитывая вышеизложенные обстоятельства, можно констатировать, что для рассматриваемого класса задач МКЭ еще требует доработки и особых преимуществ по сравнению с методом конечных разностей не дает, тем более, что решения, получаемые МКЭ с разбиением двумерной области на треугольные либо прямоугольные элементы, и методом конечных разностей с аппроксимацией исходных уравнений согласно схеме центральной пятиточечной звезды, дают практически одинаковые результаты. Здесь следует лишь отметить, что в случае, когда ожидается резкий градиент изменения исследуемой функции, необходимо локально измельчить шаг конечно-разностной сетки в зоне ожидаемого явления [1].

Линейная постановка алгоритма расчета.

Имея математический аппарат для получения матриц жесткости конечных элементов, приведения нагрузок, приложенных к поверхности или в объеме элемента, к усилиям в узлах, а также решения обратных задач (вычисления полей деформаций и напряжений в объеме элемента на базе перемещений в узлах), можно построить алгоритм МКЭ.

1. Производится дискретизация объема, занимаемого деталью или сборкой на элементы, или, другими словами, строится сетка конечных элементов. Для объемного тела область разбивается (в рамках функциональности Autodesk Inventor) на тетраэдры с гранями, аппроксимируемыми линейными (линейная зависимость от координат) или параболическими функциями координат. Для поверхностных моделей — на плоские (линейная) или криволинейные (параболическая зависимость) треугольники.

2. Для пространственных конечных элементов степенями свободы являются перемещения в направлении осей локальной системы координат элемента. Для конечных элементов оболочек к трем перемещениям в каждом узле добавляются по три угла поворота нормали к срединной поверхности области, аппроксимируемой элементом, относительно тех же осей.

3. Определяются зависимости для преобразования перемещений и углов поворота в узлах к глобальной системе координат.

4. Вычисляются матрицы жесткости конечных элементов. В формулы для расчета компонентов матриц жесткости конечных элементов помимо координат узлов входят модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов. То есть, если анализируется сборка, то в зависимости от принадлежности элемента детали при расчете матриц жесткости элементов используются соответствующие характеристики жесткости материала.

5. Полученные матрицы жесткости с использованием зависимостей для перехода от локальных систем координат элемента в глобальные преобразуются в глобальную систему координат.

6. Матрицы жесткости, представленные в глобальных координатах, объединяются в глобальную матрицу жесткости $[K]$.

7. Назначенные граничные условия, статические и кинематические, приводятся к нагрузкам и перемещениям в узлах, выраженным в глобальной системе координат, и включаются в столбец усилий $[F]$.

8. Полученная линейная система уравнений вида

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (2)$$

решается относительно столбца перемещений. Это наиболее трудоемкий этап расчета. Для решения используются итерационные или прямые методы. Матрица жесткости $[K]$, как правило, хранится в компактной форме, структура которой определяется до этапа ее заполнения матрицами жесткости элементов.

9. Для каждого конечного элемента, имея перемещения (углы поворота) в узлах и аппроксимирующие функции, рассчитываются деформации. Если элементы линейные — деформации в

пределах элементов постоянные, если элементы параболические — деформации изменяются линейно. На основе деформаций вычисляются напряжения в элементах. При необходимости (функция программы) напряжения в узлах смежных элементов усредняются (это также весьма ответственный этап, по-разному решаемый в различных программах) с последующим пересчетом напряжений в пределах каждого элемента.

10. На основе компонентов напряженно-деформированного состояния и параметров прочности материала (материалов) производится вычисление эквивалентных напряжений по какому-либо критерию прочности [2].

Прямой метод построения уравнений, связывающих факторы состояний в пределах конечного элемента в линейной постановке.

1. Поле перемещений $\mathbf{A}$ в пределах элемента (для пространственной задачи $\Delta = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$) посредством интерполяционных функций (в так называемых изопараметрических конечных элементах, используемых, в частности, в Autodesk Inventor), собранных в матрицу $\mathbf{N}$, выражается через узловые перемещения $\mathbf{A}$. Зная такие величины, например, перемещений в узлах, можно получить их значения, линейную интерполяцию в любой точке рассматриваемого элемента в зависимости от координат. В матричном виде соотношения имеют вид:

$$\Delta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}$$

Для пространственной задачи,

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k\}$$

где k — число узлов конечного элемента.

2. Поле деформаций $\mathbf{\varepsilon}$ выражается через степени свободы $\mathbf{A}$ посредством дифференцирования поля перемещений (а, фактически, интерполяционных функций) согласно соотношениям, собранным в матрицу $\mathbf{B}$ и связывающим деформации с перемещениями:

$$\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

3. С учетом уравнений состояния (на основе закона Гука), коэффициенты которых образуют матрицу $\mathbf{E}$, устанавливается связь сначала между полем напряжений и полем деформаций: $\mathbf{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{\varepsilon}$, а затем и между напряжениями и степенями свободы в узлах:

$$\mathbf{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

4. Формулируются выражения для сил $\mathbf{R}$, действующих в вершинах элемента, в зависимости от поля напряжений $\mathbf{\sigma}$, для чего используется матрица преобразования напряжений в узловые силы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{\sigma}$$

5. Связываются выражения для узловых сил и перемещений в узлах:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ — матрица жесткости конечного элемента.

6. Для придания матрице $\mathbf{K}$ свойства симметрии добиваемся замены матрицы преобразования жесткости матрицей, транспонированной к матрице преобразования перемещений в параметры деформации $\mathbf{B}^T$ [3]. Тогда:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Перечисленные зависимости позволяют, зная перемещения в узлах, получить величины сил, а также решить обратную задачу: по силам найти перемещения, затем деформации и напряжения в пределах конечного элемента. Пример расчета напряженно-деформированного состояния приведен на рисунке 2.

Прямая формулировка, как правило, используется для получения матриц жесткости конечных элементов стержней, балок и пластин, а также для описания процесса теплопроводности.

Аналитический расчет интегралов в выражении для матрицы жесткости невозможен даже для треугольников с криволинейными сторонами. Поэтому прибегают к численному интегрированию. Оно заключается в замене интеграла суммой произведений подынтегральных выражений, вычисленных в точках Гаусса или в некоторой другой системе точек, на соответствующие весовые коэффициенты. Этот процесс сопровождается расчетом величины определителя якобиана. Отрицательная величина является следствием вырожденности данного конечного элемента. Как правило, информация о данном обстоятельстве помещается в диагностические сообщения программ.

Классический метод Галеркина, использующий глобальные базисные функции, испытывает трудности, связанные с удовлетворением граничным условиям в случае областей решения сложной геометрии. В МКЭ упомянутые трудности, связанные со сложной геометрией, преодолеваются путем построения локальных полиномиальных базисных функций, удовлетворяющих главным граничным

условиям с использованием сетки конечных элементов. Однако, разработаны и бессеточные методы построения базисных функций и удовлетворения граничных условий.

В бессеточных методах Галеркина применяются финитные базисные функции, связанные со свободными узлами (частицами). Такие базисные функции строятся без объединения узлов в ячейки (то есть, без построения сетки), что позволяет использовать подвижные узлы для описания сложных движений сплошной среды и при этом исключить трудности, связанные с искажениями ячеек подвижных сеток.

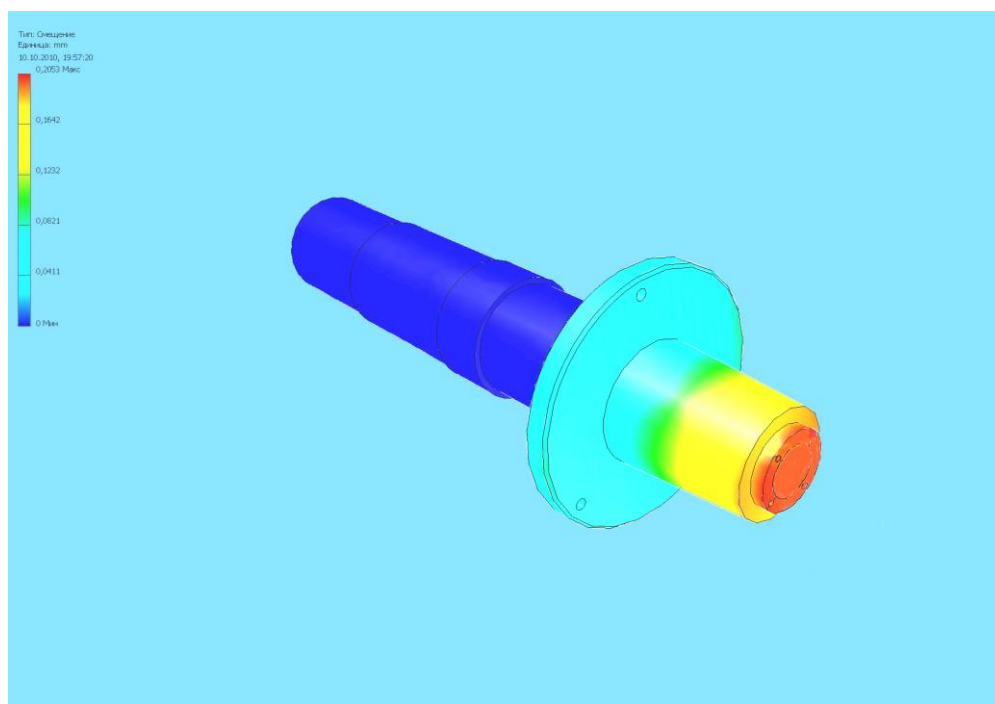


Рисунок 2 – Пример расчета напряженно-деформированного состояния шпиндельного вала на гидростатических опорах в Autodesk Inventor

В бессеточных спектральных методах Галеркина в качестве пробных функций используется набор собственных функций приближенного оператора задачи. Такой выбор базиса обеспечивает ускоренную сходимость приближенных решений с ростом числа базисных функций.

Для преодоления сложности расчета объекта целесообразна разработка специализированного программного обеспечения на основе бессеточных спектральных методов, что является перспективой дальнейших исследований в данном направлении.

Библиографический список использованной литературы:

1. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1973. — 631 с.
2. Ковалев В.Д. Опоры и передачи жидкостного трения станочного оборудования: составление и анализ / В.Д. Ковалев, О.Ф. Бабин. Учеб. пособие. — Краматорск: ДГМА, 2005. — 188 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

Поступила в редакцию 23.10.2010 г.

Стреляная Ю.О., Каінов Д.О. Аналіз чисельних методів розрахунку шпиндельного вузла на гідростатичних опорах

Аналізується застосування чисельних методів для розрахунку шпиндельних вузлів.

Ключові слова: шпиндельний вузол, математична модель, кінцеві елементи.

Strelyanaya J.O., Kainov D.A. Analysis of numerical methods for calculating the spindle units on hydrostatic supports

The articles examines the use of numerical methods for calculating spindle units.

Keywords: spindle assembly, the mathematical model, finite elements.