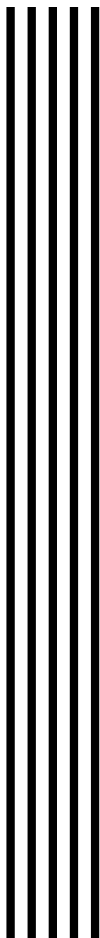


Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический
университет



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ
ПОДГОТОВКИ К ВНЕШНЕМУ
НЕЗАВИСИМОМУ ОЦЕНИВАНИЮ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

**РАЗДЕЛ 1. ЧИСЛА И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ
ВЫРАЖЕНИЯ**

Севастополь
2008

УДК 510.53

Методические указания и контрольные задания для подготовки к внешнему независимому оцениванию по математике. Раздел 1. Числа и алгебраические выражения./ Сост. М.И. Деркач, Н.А. Деркач. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. – 44 с.

Целью методических указаний является оказание помощи учащимся школ, лицеев и других средних учебных заведений в подготовке к внешнему независимому тестированию и выполнение контрольных заданий по теме «Числа и алгебраические выражения».

Указания содержат необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, а также контрольную работу и тест.

Методические указания рекомендуются прежде всего для учащихся средних школ, лицеев и гимназий, а также могут быть использованы для проведения занятий на подготовительных курсах и при самостоятельной подготовке к внешнему независимому оцениванию.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 18 ноября 2008 г., протокол № 4.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., профессор кафедры высшей математики

1. Делимость натуральных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... называются натуральными числами. Множество натуральных чисел обозначается буквой N .

Натуральное число n делится на натуральное число m (делится нацело, делится без остатка), если найдётся такое натуральное число k , что $n = m \cdot k$.

Натуральные числа, делящиеся на 2, называются четными. Все остальные натуральные числа называются нечетными. Всякое натуральное число, кроме 1, которое делится только на 1 и само на себя, называется простым числом. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 – первые семь простых чисел. Простых чисел бесконечно много. Все натуральные числа, большие 1 и не являющиеся простыми, называются составными. Например, число 18 – составное, так как оно делится не только на 1 и 18, но и на 2, 3, 6, 9.

Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, т.е. разложить на простые множители. Для получения такого разложения полезно знать некоторые признаки делимости натуральных чисел.

Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра этого числа чётная (чётными цифрами считаются цифры 0, 2, 4, 6 и 8).

Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3.

Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда две последние цифры этого числа образуют число, которое делится на 4.

Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра этого числа 0 или 5.

Натуральное число делится на 8 тогда и только тогда, когда три последние цифры этого числа образуют число, которое делится на 8.

Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 9.

Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда последняя цифра этого числа 0.

Число, на которое делится натуральное число, называется делителем этого числа. Последнее по отношению к своему делителю называется его кратным.

Общим делителем нескольких чисел называется число, являющееся делителем каждого из этих чисел. Например, 2, 3, 6 являются общими делителями чисел 30, 42, 66. Максимальный из общих делителей данных чисел называется их наибольшим общим делителем (НОД). Например, $\text{НОД}(30, 42, 66)=6$.

Для того, чтобы найти НОД нескольких чисел, достаточно разложить эти числа на простые множители и перемножить все общие простые множители, причём каждый общий простой множитель надо взять в наименьшей степени.

Общим кратным нескольких чисел называется число, являющееся кратным каждого из этих чисел. Например, числа 12, 24, 36 являются кратными чисел 3, 4, 6. Минимальное из общих кратных данных чисел называется их наименьшим общим кратным (НОК). Например, $\text{НОК}(3, 4, 6)=12$.

Для того, чтобы найти НОК нескольких чисел, достаточно разложить эти числа на простые множители и перемножить все простые множители, причём каждый простой множитель надо взять в наибольшей степени.

Если к множеству N натуральных чисел присоединить число 0, а также числа противоположные натуральным числам, т.е. числа $-1, -2, -3, \dots$, то мы получим множество целых чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Если задана пара чисел n и m , где $n \in Z, m \in N$ то число n можно единственным способом представить в виде $n = m \cdot k + r$, где $0 \leq r < m$. Если $r = 0$, то n делится нацело на m . Если $r \neq 0$, то говорят, что n делится на m с остатком r . Число k при этом называют неполным частным. Например, $17 = 3 \cdot 5 + 2$ (5 – неполное частное, 2 – остаток от деления 17 на 3). Подчеркнём, что остаток всегда меньше делителя.

Задачи с решениями

1. Найти НОД(126, 540, 630) и НОК(126, 540, 630).

Решение. Разложим числа 126, 540 и 630 на простые множители:
 $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. В разложения всех данных чисел входят простые множители 2 и 3, причём минимальная степень 2 равна единице, а минимальная степень 3 равна двойке. Поэтому $\text{НОД}(126, 540, 630) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Для вычисления НОК(126, 540, 630) надо перемножить все простые множители, которые входят в разложения данных чисел в наибольших степенях: $\text{НОК}(126, 540, 630) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3780$.

Ответ: 18; 3780.

2. Доказать признак делимости на 4: натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда две последние цифры этого числа образуют число, которое делится на 4.

Доказательство. Запишем натуральное число в виде $\overline{Aab}$, где a и b – две последние цифры натурального числа, а A – число, образованное остальными цифрами данного числа. Тогда

$$\overline{Aab} = 100 \cdot A + \overline{ab}.$$

Первое слагаемое делится на 4, поэтому: 1) если число $\overline{ab}$ делится на 4, то и данное натуральное число делится на 4;

2) если данное натуральное число делится на 4, то и число $\overline{ab}$ делится на 4, что и требовалось доказать.

3. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 4 даёт остаток 3, при делении на 5 даёт остаток 4, при делении на 6 даёт остаток 5 и при делении на 7 даёт остаток 6.

Решение. Пусть A – искомое число. Тогда число $A+1$ делится без остатка и на 2, и на 3, и на 4, и на 5, и на 6, и на 7.

Поэтому $A+1 = \text{НОК}(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Следовательно, $A = 419$.

Ответ: 419.

4. На складе имеются ножи и вилки. Их общее число больше 300, но меньше 400. Если ножи и вилки вместе считать десятками или дюжинами (то есть по 12), то в обоих случаях получится целое число десятков и целое число дюжин. Сколько на складе ножей и сколько на складе вилок, если известно, что вилок на 160 больше чем ножей?

Решение. Общее число ножей и вилок делится и на 10, и на 12, а, значит, делится и на НОК(10, 12)=60. Существует единственное натуральное число, которое больше 300 и меньше 400 и делится на 60. Таким числом является 360. Так как вилок на 160 больше чем ножей, то ножей на складе $(360 - 160) : 2 = 100$ штук, а вилок на складе $360 - 100 = 260$ штук.

Ответ: 100 и 260.

5. Ученики 11 класса с сентября по май собирали деньги на выпускной вечер. Каждый месяц каждый ученик сдавал одну и ту же сумму денег, равную целому числу гривен. К концу учебного года было собрано 28179 гривен. Сколько учеников в классе и сколько денег сдавал каждый ученик каждый месяц?

Решение. В течение одного месяца ученики собирали сумму, равную $28179 : 9 = 3131$ гривнам. Число учеников в классе, а также месячный взнос каждого ученика являются делителями числа 3131. Разложим это число на простые множители: $3131 = 101 \cdot 31$. Из этого разложения следует, что в классе 31 ученик и каждый ученик сдавал каждый месяц 101 гривну.

Ответ: 31 и 101.

6. Найти двузначное число, если цифра десятков на 2 больше цифры единиц, а произведение данного числа и суммы его цифр равно 900.

Решение. Пусть $\overline{ab}$ – искомое число. Из условия следует, что цифры a и b удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} b = a - 2, \\ (10a + b)(a + b) = 900. \end{cases}$$

Исключая из этой системы b , получаем уравнение

$(11a-2)(2a-2)=900$ или $(11a-2)(a-1)=450$. Это уравнение можно решить, перебирая возможные значения цифры a : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Достаточно проверить только значения 2, 6 и 7, так как только в этом случае произведение множителей $(11a-2)$ и $(a-1)$ оканчивается цифрой 0. Из этих цифр подходит только 7. Таким образом, $a=7$, $b=5$, т.е. искомое число 75.

Ответ: 75.

7. Решить в целых числах уравнение $2x-3y=5$.

Решение. Найдём какое-нибудь целое решение данного уравнения, например, $x=1$, $y=-1$. Сделаем замену переменных: $x=t+1$, $y=z-1$. Тогда уравнение примет вид: $2t+2-3z+3=5$ или $2t=3z$. Так как левая часть делится на 2, то и правая часть делится на 2, т.е. $3z$ делится на 2. А так как 3 не делится на 2, то z делится на 2, т.е. $z=2n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $2t=3 \cdot 2n$, откуда $t=3n$. Таким образом, данное уравнение имеет бесчисленное множество целых решений: $x=3n+1$, $y=2n-1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить на простые множители числа а) 1375; б) 9009.
2. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 144, 1008, 630.
3. Пользуясь признаками и свойствами делимости, установить, какие из данных чисел делятся на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 15:
 $a=2025$, $b=2160$, $c=5184$, $d=91215$, $e=37342488$,
 $f=9714832$, $g=8756442$, $h=48478300$.
4. Заменить звёздочки цифрами так, чтобы
 а) число $37*50416*$ делилось на 45, б) число $823*04733*$ делилось на 90.
5. Найти наименьшее число, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6 и 7 даёт в остатке 1.
6. Отец и сын измерили расстояние между деревьями шагами. Шаг отца – 70 см, шаг сына – 56 см. Всего их шаги совпали 11 раз (первый раз – у первого дерева, последний раз – у второго дерева). Найти расстояние между деревьями.

7. Яблоки разделили на две равные по весу части, а затем яблоки первой части разложили в пакеты по 5 кг, а яблоки второй части – в пакеты по 3 кг. Пакетов по 3 кг оказалось на 12 больше. Сколько всего было яблок?

8. Семиклассники трёх классов получили в библиотеке 759 учебников. Сколько учеников в классах и сколько учебников получил каждый ученик, если известно, что в классах учеников поровну и все ученики получили одинаковое число учебников?

9. В соревнованиях по теннису приняли участие равные по составу (т.е. по количеству мальчиков и по количеству девочек) команды. Сколько всего было команд, если мальчиков было 123, а девочек 82.

10. Одно колесо имеет в окружности 115 см, а другое 135 см. Определите наименьшее расстояние, на котором оба колеса сделают целое число оборотов.

11. Найти неполное частное и остаток от деления числа a на число b , если а) $a = 17, b = 3$; б) $a = -17, b = 3$, в) $a = -61, b = 13$, г) $a = 77, b = 11$.

12. Найти двузначное число, которое в 3 раза больше суммы его цифр.

13. Двузначное число в сумме с числом, записанном теми же цифрами, но в обратном порядке, даёт полный квадрат. Найти все такие числа.

14. Доказать признак делимости на 8.

15. Решить в целых числах уравнения:

а) $4x - 7y = 16$, б) $3x + 2y = 5$.

2. Рациональные числа

Рациональным числом называется число вида $\frac{p}{q}$, где

$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Множество рациональных чисел обозначается буквой $\mathbb{Q}$ и состоит из целых чисел и дробных чисел, т.е. чисел

вида $\frac{p}{q}$, где $q \neq 1$, а дробь $\frac{p}{q}$ несократима, т.е. $\text{НОД}(|p|, q) = 1$.

Пусть $p \in N$. Тогда дробь $\frac{p}{q}$ называется правильной, если $p < q$, и неправильной, если $p \geq q$. Неправильную дробь можно представить в виде суммы целого числа и правильной дроби. Например, $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$. Число $2\frac{1}{4}$ называется смешанным числом. Аналогично, в виде смешанного числа можно представить дробное отрицательное число. Например, $-\frac{10}{3} = -\left(3 + \frac{1}{3}\right) = -3\frac{1}{3}$.

Если знаменатель дроби представляет собой степень числа 10, то дробь называется десятичной и может быть записана в форме, которая называется десятичной формой дробного числа. Например, $\frac{31}{10} = 3,1$; $-\frac{78}{100} = -0,78$.

В виде конечной десятичной дроби может быть записана любая обыкновенная несократимая дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель q которой в разложении на простые множители содержит или 2, или 5, или 2 и 5. Например, $\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0,35$.

Если знаменатель q несократимой дроби $\frac{p}{q}$ в разложении на простые множители содержит простые множители, отличные от 2 и 5, то такая дробь может быть представлена в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Для того, чтобы получить такое представление, достаточно числитель дроби разделить на знаменатель. Например, $\frac{1}{3} = 0,33333... = 0,(3)$. Запись $0,(3)$ означает, что 3 повторяется после запятой

бесконечное число раз. Число 3 называется при этом периодом.

Аналогично, $\frac{2}{7} = 0,(285714)$. Период 285714 содержит 6 цифр.

Бесконечная периодическая дробь называется чисто периодической, если период начинается сразу после десятичной запятой.

Бесконечная периодическая дробь называется смешанной периодической, если между запятой и периодом есть другие десятичные знаки.

Справедливо и обратное утверждение: любую бесконечную периодическую дробь можно записать в виде обыкновенной дроби. Метод преобразования бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь рассмотрим на примерах.

Пример 1. Преобразовать чистую бесконечную периодическую дробь $0,(13)$ в обыкновенную дробь.

Решение. Пусть x – искомое представление. Составим уравнение для определения x . Нетрудно проверить, что x удовлетворяет уравнению $100x - x = 13$, отсюда $x = \frac{13}{99}$.

Пример 2. Преобразовать смешанную бесконечную периодическую дробь $5,8(12)$ в обыкновенную дробь.

Решение. Пусть x – искомое представление. Составим уравнение для определения x . Нетрудно проверить, что x удовлетворяет уравнению $1000x - 10x = 5812 - 58$, отсюда $x = \frac{5812 - 58}{990} = \frac{5754}{990}$.

Для того, чтобы бесконечную периодическую дробь записать в виде обыкновенной дроби, надо от числа, которое расположено до второго периода, отнять число, которое расположено до первого периода, и эту разность записать в числителе; в знаменателе записать столько девяток, сколько цифр в периоде дроби, и после девяток записать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Задачи для самостоятельного решения

1. Представить данную обыкновенную дробь в виде десятичной:

а) $\frac{17}{40}$, б) $\frac{9}{60}$, в) $\frac{12}{11}$, г) $\frac{5}{7}$.

2. Найти 55-ую цифру после запятой в десятичном представлении данной обыкновенной дроби: а) $\frac{17}{13}$, б) $\frac{19}{330}$.

3. Представить данную бесконечную периодическую дробь в виде обыкновенной: а) $0,(31)$, б) $0,17(23)$, в) $16,(61)$, г) $7,43(72)$.

4. Вычислить: а) $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 1 : 1\frac{1}{9}$,

б) $\left(\frac{5}{48} \cdot 3\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{45}\right) + 2$,

в) $((8-0,2) \cdot (7,2-5,7) + (5,4-3,65) \cdot (4,3-3,2)) : 7,25$,

г) $(2,(6)+1,8(3)) : 1,5$,

д) $\frac{21\frac{1}{4} - 19\frac{7}{8} + \frac{115\frac{3}{16} - 108\frac{1}{4}}{0,012 : 0,048} + \frac{115\frac{3}{16} - 108\frac{1}{4}}{0,0004 : 0,008}}$,

е) $\frac{36\frac{2}{3} : 15 + 8\frac{2}{3} \cdot 7}{12\frac{1}{3} + 8\frac{6}{7} : 2\frac{4}{7}} + \frac{2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} + 24 \cdot \frac{7}{9}}{7\frac{2}{3} - 157\frac{4}{5} : 24}$,

ж) $\frac{3\frac{1}{8} + 2,08(3) - 0,(3)}{7,3 - 0,4 \cdot 8,5}$.

5. Найти x из уравнения:

а) $\left[3,25 - \frac{\left(6\frac{9}{16} - 2\frac{1}{2}x \right) \cdot 0,53}{0,75} \right] : 6\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$,

$$\text{б) } 50,32 - 21,32 : \left[(20 + 9,744 : x) \cdot 0,5 - 1,63 \right] = 48,27.$$

3. Проценты

Процентом (%) от некоторой величины A называется сотая часть этой величины. Поэтому, для того чтобы найти 1% от величины A , надо A разделить на 100.

Если неизвестная величина x составляет указанное число $p\%$ от данной величины a , то x можно вычислить по формуле

$$x = \frac{a \cdot p}{100}.$$

Если заданное число a представляет собой указанное число $p\%$ от неизвестной величины x , то величина x может быть вычислена по формуле $x = \frac{a}{p} \cdot 100$.

Чтобы узнать, сколько процентов от числа d составляет число c , надо c разделить на d и умножить на 100%.

Задачи с решениями

1. В классе 30 учеников. Отличники составляют 20%. Сколько в классе отличников?

Решение. 1% от всех учеников составляет $\frac{30}{100} = 0,3$. Поэтому 20% от всех учеников составляют $0,3 \cdot 20 = 6$ учеников.

Ответ: 6 отличников.

2. Рабочий изготовил 150 деталей, что составляет 30% от общего числа деталей, которые он должен изготовить. Сколько всего деталей должен изготовить рабочий?

Решение. 1 % от общего числа деталей составляет $\frac{150}{30} = 5$ деталей. Поэтому всего рабочий должен изготовить $5 \cdot 100 = 500$ деталей.

Ответ: 500 деталей.

3. Сторона a прямоугольника составляет 40% от стороны b . На сколько процентов a меньше, чем b ?

Решение. Из условия задачи следует, что $a = \frac{b}{100} \cdot 40 = 0,4b$.

Следовательно, a меньше, чем b на $b - 0,4b = 0,6b$, что составляет $\frac{0,6b}{b} \cdot 100 = 60(\%)$. Заметим, что за 100% в данной задаче принималась сторона b .

Ответ: на 60%.

4. Производительность труда увеличилась на 25%. На сколько процентов изменилось время выполнения работы?

Решение. Производительность труда p , время выполнения работы t и объём работы A связаны формулой $A = p \cdot t$. При неизменном объёме работы A время t и производительность p обратно пропорциональны друг другу. По условию задачи производительность труда p увеличилась на $\frac{p}{100} \cdot 25 = 0,25p$ и, следовательно, стала равной $1,25p$, т.е. увеличилась в 1,25 раза.

Поэтому время t уменьшилось в 1,25 раза и стало равным $\frac{t}{1,25}$,

т.е. уменьшилось на $t - \frac{t}{1,25} = \frac{0,25t}{1,25} = 0,2t$, что составляет

$$\frac{0,2t}{t} \cdot 100 = 20(\%).$$

Ответ: уменьшилось на 20%.

5. Начальный вклад в сбербанк составляет a грн. Сбербанк выплачивает своим вкладчикам p процентов годовых. Найти сумму вклада через n лет.

Решение. Через год сумма вклада будет составлять $a + a \cdot \frac{p}{100} =$

$$= a \left(1 + \frac{p}{100} \right) \text{ (грн.)}, \text{ т.е. увеличится в } \left(1 + \frac{p}{100} \right) \text{ раз.}$$

Следовательно, через n лет сумма вклада увеличится в

$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ раз и станет равной A , где $A = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ (грн.)

Полученная формула называется формулой сложных процентов.

Ответ: $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ грн.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти: а) 17% от числа 24; 2) 114% от числа 105.
2. Найти число a , если а) 20 составляет 40% от числа a , б) 112 составляет 140% от числа a .
3. Сколько % от числа a составляет число b , если
а) $a = 72$, $b = 24$, б) $a = 80$, $b = 10$?
4. На сколько процентов число 20 больше числа 10, и на сколько процентов число 10 меньше числа 20?
5. Сначала зарплату увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Как изменилась зарплата?
6. Число коров на первой ферме на 12,5% меньше, чем на второй, но средний удой каждой коровы на 8% выше. На какой ферме получают молока меньше и на сколько %?
7. Влажность зерна составляет 16%. 200 кг зерна просушили, после чего оно стало легче на 20 кг. Найти влажность зерна после просушки.
8. В бассейн проведена труба. Вследствие засорения ее приток воды уменьшился на 60%. На сколько процентов вследствие этого увеличилось время, необходимое для заполнения бассейна?
9. Древесина только что срубленного дерева содержит 64% воды. Через неделю количество воды стало уже 48% от веса дерева. На сколько уменьшится при этом вес дерева, если только что срубленное оно весило 7,5 ц?
10. Заработок рабочего повысился на 20%, а цены на продукты снизились на 15%. На сколько процентов больше продуктов рабочий теперь может купить на свой заработок?

11. Слиток сплава серебра с цинком весом в 3,5 кг содержал 76% серебра. Его сплавляли с другим слитком и получили слиток весом в 10,5 кг, содержание серебра в котором было 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

12. 5 л сливок с содержанием жира 35% смешали с 4 л 20-процентных сливок и к смеси добавили 1 л чистой воды. Какой жирности получилась смесь?

13. Начальный вклад в сбербанк составляет 300 долларов. Сбербанк выплачивает своим вкладчикам 3% годовых. Найти сумму вклада через 5 лет.

4. Модуль действительного числа

Модулем действительного числа a называется неотрицательное число a , если $a \geq 0$, и число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначают символом $|a|$. Таким образом, согласно определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля.

- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|a| \geq a$;
- 3) $|-a| = |a|$;
- 4) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- 5) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$;
- 6) $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0; \end{cases}$
- 7) $|a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0$;
- 8) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- 9) $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Решение уравнения $|x| = a$.

Если $a < 0$, то уравнение решений не имеет.

Если $a = 0$, то $x = 0$.

Если $a > 0$, то $x = \pm a$.

Решение неравенства $|x| < a$.

Если $a \leq 0$, то неравенство решений не имеет ($x \in \emptyset$).

Если $a > 0$, то $x \in (-a, a)$.

Решение неравенства $|x| > a$

Если $a \leq 0$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.

Если $a > 0$, то $x < -a$ или $x > a$, т.е. $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Геометрический смысл модуля

С геометрической точки зрения $|x|$ – это расстояние от начала отсчёта O числовой оси до точки, изображающей число x , а $|x - a|$ – это расстояние между точками x и a числовой оси.

Задачи с решениями

1. Записать функцию $f(x) = ||4x - 6| - |x + 2||$ без знака модуля.

Решение. Найдём значения x , при которых выражения под знаками модуля обращаются в нуль: $(4x - 6 = 0) \Leftrightarrow (x = 1,5)$, $(x + 2 = 0) \Leftrightarrow (x = -2)$. Точки -2 и $1,5$ разбивают числовую ось на три промежутка: $(-\infty; -2)$, $[-2; 1,5)$ и $[1,5; +\infty)$.

1). Если $x \in (-\infty; -2)$, то

$f(x) = |-(4x - 6) + (x + 2)| = |8 - 3x| = 8 - 3x$, так как $8 - 3x > 0$ при $x < -2$.

2). Если $x \in [-2; 1,5)$, то

$f(x) = |-(4x - 6) - (x + 2)| = |4 - 5x| = \begin{cases} 4 - 5x, & \text{если } x \in [-2; 0,8], \\ 5x - 4, & \text{если } x \in (0,8; 1,5). \end{cases}$

3). Если $x \in [1,5; +\infty)$, то

$f(x) = ||4x - 6| - |x + 2|| = |(4x - 6) - (x + 2)| = |3x - 8|$ или

$$f(x) = \begin{cases} 8 - 3x, & \text{если } x \in [1,5; \frac{8}{3}), \\ 3x - 8, & \text{если } x \in [\frac{8}{3}; +\infty). \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} 8-3x, & \text{если } x \in (-\infty; -2) \cup [1, 5; \frac{8}{3}), \\ 4-5x, & \text{если } x \in [-2; 0, 8), \\ 5x-4, & \text{если } x \in [0, 8; 1, 5), \\ 3x-8, & \text{если } x \in [\frac{8}{3}; +\infty). \end{cases}$$

2. Используя геометрический смысл модуля (не раскрывая модуль) решить уравнение $|x+2|+|x-3|=7$.

Решение. Отметим на числовой оси точки $A(-2)$ и $B(3)$. Геометрически решить данное уравнение означает найти точку (или точки) $M(x)$ такую, что $AM + BM = 7$. Так как $AB = 5$, то точка M не может лежать на отрезке AB . Пусть точка M лежит правее точки B . Тогда $AM = AB + BM$. Поэтому $AB + 2BM = 7$, отсюда $BM = \frac{7-AB}{2} = \frac{7-5}{2} = 1$. Это значит, что правее точки B имеется единственная точка M , удовлетворяющая данному уравнению. Координата этой точки $x = 3 + 1 = 4$. Аналогично, левее точки A существуют единственная точка $M(x)$, удовлетворяющая уравнению. Координата этой точки $x = -2 - 1 = -3$. Таким образом, данное уравнение имеет два решения: $x = 4$ и $x = -3$.

Ответ: 4; -3.

3. Используя геометрический смысл модуля (не раскрывая модуль) решить неравенство $|3x-9| > 6$.

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду $|x-3| > 2$.

Отметим на числовой оси точку $A(3)$. С геометрической точки зрения решить данное неравенство означает найти множество точек $M(x)$ числовой оси, которые находятся от точки A на расстоянии большем, чем 2, т. е. для которых $AM > 2$. Точки $C(1)$ и $D(5)$ находятся от точки $A(3)$ на расстоянии 2.

Поэтому искомые точки $M(x)$ расположены или правее точки $D(5)$ или левее точки $C(1)$, т.е. $x < 1$ или $x > 5$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить: а) $\|3 - 4,5| - |7 - 2,3|\|$, б) $\left\|3,4 - \frac{18}{5} \right| - \left|0,2 - \frac{1}{6}\right\|$, в) $\|3,1 - \pi| - 0,05|$.

2. Записать функцию $f(x)$ без знака модуля:

а) $f(x) = \|x - 3| - 4|$, б) $f(x) = \|2x + 7| - 3,4|$,

в) $f(x) = \|2x + 3| - |3x - 2|\|$, г) $f(x) = \|4 - 3x| + |7 + 2x|\|$.

3. Решить уравнение: а) $|x| = -3$, б) $|x| = 2,7$, в) $|x| = 0$.

4. Решить неравенство: а) $|x| \geq 3$, б) $|x| < 13$, в) $|x| > -7$, г) $|x| \leq -1$.

5. Используя геометрический смысл модуля (не раскрывая модуль) решить уравнение:

а). $|x - 2| = 3$, б) $|x - 5| = 1,5$, в) $|x + 3| = 1$, г) $|x + 2| = 7$, д) $|3x - 4| = 2$, е) $|4x + 3| = 2$,

ж). $|x - 2| + |x - 7| = 5$, з). $|x - 2| - |x - 9| = 3$.

6. Используя геометрический смысл модуля (не раскрывая модуль) решить неравенство:

а) $|x - 6| > 3$, б) $|x + 3| \leq 4$, в) $|3x + 2| \geq 6$, г) $|4x - 7| < 2$.

5. Степени и корни

Определение степени действительного числа с целым показателем

Степенью действительного числа a с натуральным показателем n называется произведение n одинаковых множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

В частности, $a^1 = a$.

Если $a \neq 0$, то согласно определению, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in N$.

Кроме того, $a^0 = 1$.

Основные свойства степени с целым показателем.

Для любых целых чисел n и m , а также любых, не равных 0, действительных чисел a и b справедливы следующие равенства:

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad 2) a^n : a^m = a^{n-m}, \quad 3) (a^n)^m = a^{nm},$$

$$4) (ab)^n = a^n \cdot b^n, \quad 5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Определение корня степени n из действительного числа a

Корнем степени n из действительного числа a называется число b , n -ая степень которого равна a : $b^n = a$.

Пусть n - чётное число.

1). Если $a > 0$, то существует два корня степени n из a . Например, существует два корня четвёртой степени из числа 16: 2 и -2, т.к. $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$. Одно из этих значений, а именно положительное число 2, называется арифметическим значением корня 4-ой степени из числа 16 и обозначается символом $\sqrt[4]{16}$.

Арифметическим корнем степени n (где n - чётное число) из числа a называется неотрицательное число, n -ая степень которого равна a : $(\sqrt[n]{a})^n = a$ и $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

2). Если $a = 0$, то $\sqrt[n]{a} = 0$.

3). Если $a < 0$, то не существует $\sqrt[n]{a}$, т.е. не существует корня чётной степени из отрицательного числа.

Если n - нечётное число, то для любого действительного числа a (положительного, отрицательного или нуля) существует единственное число b такое, что $b^n = a$, т.е.

существует единственное значение корня нечётной степени n из действительного числа a . Это значение обозначается символом $\sqrt[n]{a}$. Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Основные свойства корней

$$1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, 2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0, 3) \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}, 5) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, 6) \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$7) \sqrt{a^2} = |a|, 8) \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.$$

Замечание. Формулы 1) – 6) справедливы для $a \geq 0, b \geq 0$, если рассматриваются корни чётной степени. Для корней нечётной степени формулы 1)-6) справедливы для любых действительных a и b .

Определение степени с дробным показателем

По определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0, n \in N, m \in Z$.

Отметим, что если $m > 0$, то a может быть равным и 0, но не может быть равным отрицательному числу, т.е. дробная степень отрицательного числа не определена. Это, в частности, связано с тем, что если мы попытаемся вычислить дробную степень отрицательного числа по правилу вычисления дробной степени положительного числа, то придём к противоречию. Например,

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2. \text{ С другой стороны,}$$

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Пришли к противоречию. Это значит, что число -8 нельзя возводить в степень $\frac{1}{3}$. Отметим, что при извлечении корня степени 3 из числа -8 мы действительно получим -2 .

Определение степени с иррациональным показателем.

Степенью положительного числа a с иррациональным показателем λ называется число, которое обозначается символом a^λ и удовлетворяет двойному неравенству

$a^q < a^\lambda < a^s$, если $a > 1$ и неравенству $a^s < a^\lambda < a^q$, если $0 < a < 1$, для любых рациональных чисел q и s , удовлетворяющих условию $q < \lambda < s$.

Если $a = 1$, то $a^\lambda = 1$ для любого показателя λ .

Все свойства степеней с целым показателем остаются справедливыми и для степеней с произвольным действительным показателем и положительным основанием.

Задачи с решениями

1. Вынести множитель из-под знака корня $\sqrt[4]{16a^4b^7}$, если $a < 0$, $b > 0$.

Решение.

$$\sqrt[4]{16a^4b^7} = \sqrt[4]{2^4 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot b^3} = \sqrt[4]{2^4} \sqrt[4]{a^4} \sqrt[4]{b^4} \sqrt[4]{b^3} = 2|a||b|\sqrt[4]{b^3} = -2ab\sqrt[4]{b^3}.$$

2. Внести множитель под знак корня: $x\sqrt{3ax}$, если $x < 0$.

Решение. $x\sqrt{3ax} = -|x|\sqrt{3ax} = -\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{3ax} = -\sqrt{3ax^3}$.

3. Упростить: $\sqrt{a^3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$.

Решение.

$$\sqrt{a^3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}} = \left(a^3 \cdot \left(a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^3 \cdot a^{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{23}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{23}{12}}.$$

Замечание. Если выражение содержит и степени и корни, то, как правило, преобразования проще выполнять, если записать все корни в виде степеней с рациональными показателями.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

а) $(27^{10} - 5 \cdot 81^4 \cdot 3^{12} + 4 \cdot 9^8 \cdot 3^8) : (41 \cdot 3^{24})$;

б) $81 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{12-4n} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^{4n-7}$.

2. Записать данное выражение в виде степени с основанием x :

а) $(x \cdot x^{-3})^{-2}$; б) $\left(x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot x^{0,3} \cdot x^{0,7}$.

3. Вычислить: а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; б) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$.

4. Упростить: а) $\frac{(\sqrt[3]{x})^4 \cdot (\sqrt[3]{xy^2})^7}{(\sqrt[3]{xy^4})^2}$; б) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x}$; в) $\sqrt[5]{x^4 \sqrt[3]{x}}$;

г) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b^2}{a}} \sqrt{\frac{1}{a^2}}$.

5. Записать в виде корня меньшей степени:

а) $\sqrt[6]{36}$; б) $\sqrt[10]{4a^4b^8}$.

6. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{24}$; б) $\sqrt[5]{2^7}$; в) $\sqrt[3]{\frac{4}{81}}$; г) $\sqrt[3]{a^{11}b^7}$; д) $\sqrt{8a^2b^7}$, где $a > 0$.

7. Внести множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2\sqrt[3]{b}$; в) $c\sqrt[4]{b^2}$, ($c > 0$).

8. Вычислить: а) $\frac{27^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{4}}{2^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{3}}$; б) $\frac{16^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt[5]{4} \cdot 9^{-\frac{5}{4}}}$.

9. Упростить: а) $\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a^3}}$; б) $\frac{\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^4 \cdot \sqrt{a^3b^5}}{b^{\frac{5}{6}} \cdot (\sqrt[n]{a})^3 \cdot \sqrt[n]{\sqrt{b^7}}}$.

6. Многочлены

Многочленом степени n относительно одной переменной x называется функция вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где a_n , a_{n-1} , ..., a_0 - заданные действительные числа (коэффициенты многочлена), причём $a_n \neq 0$. Например, многочлен 1-ой степени $P_1(x) = a_1 x + a_0$ представляет собой линейную функцию, многочлен $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ представляет собой квадратичную функцию (квадратный трёхчлен) и т.д.

Многочлены можно умножать на число, складывать (вычитать), а также умножать друг на друга. Эти действия производятся по известным правилам и сводятся, в конечном счёте, к приведению подобных членов.

Например, если $P(x) = 2x^3 - 4x + 3$, а $Q(x) = x - 1$, то $P(x) \cdot Q(x) = 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 3$.

Многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, если существует такой многочлен $S(x)$, что выполняется равенство

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x).$$

Многочлен $S(x)$ называется частным от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$.

Покажем на примере, как производится деление многочленов.

Пример 1. Пусть требуется разделить многочлен $6x^4 - 11x^2 + 5x^3 + 9x - 5$ на многочлен $3x^2 + 4x - 5$. Прделаем следующие действия.

- 1). Располагаем многочлены по убывающим степеням x .
- 2). Делим первый (старший) член делимого $6x^4$ на первый (старший) член делителя $3x^2$. Получаем первый (старший) член частного $2x^2$.
- 3). Умножаем делитель на первый член частного и результат $6x^4 + 8x^3 - 10x^2$ подписываем под делимым так, чтобы члены, имеющие одинаковые степени, располагались в одной колонке.

4). Вычитаем из делимого подписанный под ним результат. Получаем первый остаток $-3x^3 - x^2 + 9x - 5$. Если бы он оказался равным нулю или его степень была бы меньше двух (степени делителя), то деление было бы закончено.

5). Делим первый (старший) член остатка $-3x^3$ на первый член делителя $3x^2$. Получаем второй член частного $-x$.

6). Умножаем делитель на второй член частного и результат $-3x^3 - 4x^2 + 5x$ подписываем под первым остатком.

7). Вычитаем полученное выражение из первого остатка. Получаем второй остаток $3x^2 + 4x - 5$.

8). Делим первый (старший) член второго остатка на первый член делителя $3x^2$. Получаем третий член частного 1.

9). Умножаем делитель на третий член частного и результат $3x^2 + 4x - 5$ подписываем под вторым остатком.

10). Вычитаем последнее выражение из второго остатка. Получаем нуль. Деление окончено.

Проделанные действия принято записывать в следующей форме:

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5 \quad | \quad 3x^2 + 4x - 5 \\
 \underline{6x^4 + 8x^3 - 10x^2} \quad 2x^2 - x + 1 \\
 -3x^3 - x^2 + 9x - 5 \\
 \underline{-3x^3 - 4x^2 + 5x} \\
 3x^2 + 4x - 5 \\
 \underline{3x^2 + 4x - 5} \\
 0
 \end{array}$$

Результат деления можно выписывать в другой форме

$$\frac{6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5}{3x^2 + 4x - 5} = 2x^2 - x + 1,$$

$$\text{или } 6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + 4x - 5)(2x^2 - x + 1).$$

Таким образом, один многочлен разделился на другой без остатка, то есть нацело.

Если многочлен $P(x)$ не делится (нацело) на многочлен $Q(x)$, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ с остатком.

Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ с остатком означает представить многочлен $P(x)$ в виде

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

где $S(x)$ и $R(x)$ – многочлены, причём степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Для того, чтобы найти многочлены $S(x)$ и $R(x)$, достаточно воспользоваться алгоритмом деления многочленов, приведённом в примере 1. (Алгоритм закончится, когда получится многочлен, степень которого меньше степени делителя).

Пример 2. Разделим многочлен $2x^4 - 7x^3 - 3x - 11$ на многочлен $x^2 - 3x + 2$. Для удобства деления допишем в делимом слагаемое $0 \cdot x^2$.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 7x^3 + 0x^2 - 3x - 11 \quad | \quad x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{2x^4 - 6x^3 + 4x^2} \\
 -x^3 - 4x^2 - 3x \\
 \underline{-x^3 + 3x^2 - 2x} \\
 -7x^2 - x - 11 \\
 \underline{-7x^2 + 21x - 14} \\
 -22x + 3
 \end{array}$$

Таким образом, при делении многочлена $2x^4 - 7x^3 - 3x - 11$ на многочлен $x^2 - 3x + 2$ получили неполное частное $2x^2 - x - 7$ и остаток $-22x + 3$. Результат деления можно записать в виде

$$\frac{2x^4 - 7x^3 - 3x - 11}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 - x - 7 - \frac{22x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

или $2x^4 - 7x^3 - 3x - 11 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 - x - 7) - 22x + 3$.

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(x-a)$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x=a$, т.е. $P(a)$.

Следствие из теоремы Безу

Многочлен $P(x)$ делится на $(x-a)$ тогда и только тогда, когда $P(a)=0$, т.е. тогда и только тогда, когда a – корень многочлена $P(x)$.

Таким образом, если мы знаем, что a – корень многочлена $P(x)$, то многочлен $P(x)$ можно разложить на множители $P(x)=(x-a) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ – частное от деления $P(x)$ на $(x-a)$.

Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами

Пусть дан многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами $P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Предположим, что многочлен $P(x)$ имеет рациональный корень $x=\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Это значит, что

$$P\left(\frac{p}{q}\right)=0, \text{ т.е. } x=\frac{p}{q} \text{ является корнем уравнения}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$$\text{а поэтому } a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Умножим обе части полученного равенства на q^n . В результате получим $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Так как правая часть делится нацело на p , то и левая часть делится нацело на p , а это значит, что p является делителем a_0 . Аналогично, так как правая часть делится нацело на q , то и левая часть делится нацело на q , а это значит, что q является

делителем a_n . Таким образом, если $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $P(x)$, то p является делителем a_0 , а q является делителем a_n . А это значит, что рациональные корни многочлена можно подобрать, перебирая все возможные для данного многочлена числа $\frac{p}{q}$.

В частности, если многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами является приведённым, т.е. коэффициент при старшей степени равен 1: $a_n = 1$, то рациональными корнями этого многочлена могут быть лишь целые числа, которые являются делителями свободного члена a_0 .

Пример 3. Подобрать рациональные корни многочлена $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ и разложить его на множители с рациональными коэффициентами.

Решение. Так как многочлен является приведённым (коэффициент при старшей степени, т.е. при степени x^3 равен 1, то рациональными корнями этого многочлена могут быть только целые числа, являющиеся делителями свободного члена 2. Таких чисел четыре: ± 1 и ± 2 . Проверим каждое из этих чисел.

$$P(1) = 1 + 3 + 3 + 2 = 9 \neq 0, \quad P(-1) = -1 + 3 - 3 + 2 = 1 \neq 0,$$

$$P(2) = 8 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 = 28 \neq 0, \quad P(-2) = -8 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 2 = 0.$$

(Заметим, что положительные числа заведомо не являются корнями данного многочлена, а поэтому их можно было не проверять).

Таким образом, только число -2 является целым корнем данного многочлена. Разложим многочлен $P(x)$ на множители методом группировки. Так как мы знаем, что одним из множителей будет $(x + 2)$, то объединим в пары слагаемые так, чтобы после вынесения общего множителя за скобки, образовался множитель $(x + 2)$, общий для каждой пары:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x^3 + 2x^2) + (x^2 + 2x) + (x + 2) = \\
 &= x^2(x + 2) + x(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x^2 + x + 1).
 \end{aligned}$$

Многочлен $(x^2 + x + 1)$ не имеет действительных корней, а поэтому не раскладывается на линейные множители. Отметим, что этот многочлен, а, следовательно, и разложение $P(x)$ на множители можно было получить при помощи деления $P(x)$ на $(x + 2)$.

Пример 4. Подобрать рациональные корни многочлена $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 11x + 2$ и разложить его на множители с рациональными коэффициентами.

Решение. Делителями числа 5 являются числа $\pm 1, \pm 5$, а делителями 2 являются числа $\pm 1, \pm 2$. Поэтому рациональными корнями данного многочлена могут быть только целые числа $\pm 1, \pm 2$ и дробные числа $\pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}$. Вычисляем значение

многочлена $P(x)$ при указанных значениях x . В результате получаем, что $P(1) = 0$, $P(-2) = 0$, $P\left(\frac{1}{5}\right) = 0$. Это значит, что

числа 1, -2 и $\frac{1}{5}$ являются корнями многочлена $P(x)$. Поэтому многочлен $P(x)$ можно разложить на множители:

$$P(x) = 5(x - 1)(x + 2)\left(x - \frac{1}{5}\right) = (x - 1)(x + 2)(5x - 1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Убедиться, что многочлен $P(x)$ делится (нацело) на многочлен $Q(x)$ и представить его в виде $P(x) = Q(x)S(x)$:

а) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2$, $Q(x) = x^2 + x - 2$,

б) $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$.

2. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ (с остатком) и представить его в виде $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$:

а) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 - 3x - 5$, $Q(x) = 2x^2 - x - 1$,

б) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, $Q(x) = x^2 + x + 2$.

3. Найти остаток от деления многочлена

а) $P(x) = x^4 - x^3 + 3x - 2$ на $(x + 1)$,

б) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ на $(x - 2)$.

4. Подобрать рациональные корни многочлена $P(x)$ и разложить его на множители с рациональными коэффициентами:

а) $P(x) = x^3 - 3x - 2$, б) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$,

в) $P(x) = 16x^3 + 12x^2 - 1$, г) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$.

5. Подобрать a и b , при которых многочлен

а) $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ делится на $x^2 - 9$,

б) $P(x) = 2x^4 + ax^3 - x^2 + bx - 1$ делится на $x^2 - 1$.

6. Сократить дробь:

а) $\frac{2x^3 - 27x^2 + 115x - 150}{x - 5}$, б) $\frac{x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 18x^2 - 27x + 27}{x^2 - 4x + 3}$.

7. Тождественные преобразования алгебраических выражений

Два алгебраических выражения называются тождественно равными, если они определены для одних и тех же значений букв, входящих в эти выражения, и принимают равные значения для всевозможных допустимых значений указанных букв. Например, выражения $ab + ac$ и $a(b + c)$ являются тождественно равными в силу распределительного закона умножения относительно сложения.

Преобразование алгебраического выражения называется тождественным, если в результате выполнения этого преобразования мы получаем выражение тождественно равное данному.

Для успешного проведения тождественных преобразований математических выражений важно знать следующие формулы *сокращённого умножения*:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (квадрат суммы);}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ (квадрат разности);}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (куб суммы);}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ (куб разности);}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ (разность квадратов);}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ (сумма кубов);}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \text{ (разность кубов).}$$

Эти формулы нужно уметь читать как справа налево, так и слева направо, а также научиться видеть их в математических выражениях (например, в тех случаях, когда буквы, входящие в эти формулы, заменены на некоторые выражения).

При выполнении тождественных преобразований выражений, представляющих собой многочлены часто приходится раскладывать эти многочлены на множители (например, при сокращении дробных выражений или при решении алгебраических уравнений степени выше 2).

Основные способы разложения многочлена на множители

1). Вынесение общего множителя за скобки.

Если все члены многочлена имеют общий множитель, то его можно вынести за скобки, например:

$$\text{а) } 2x^3a + 4x^2a^2 = 2x^2a(x + 2a);$$

$$\text{б) } a^2(a+b) + b^2(a+b) = (a+b)(a^2 + b^2);$$

$$\text{в) } a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 + 2ab + b^2) = ab(a+b)^2.$$

2). Способ группировки.

Может случиться, что отдельные группы слагаемых имеют такие общие множители, что после вынесения их за скобки в скобках окажутся одинаковые выражения, то есть появится общий множитель, например:

$$\begin{aligned} 2ab - 2bc + c^2 - ac &= (2ab - 2bc) + (c^2 - ac) = \\ &= 2b(a - c) - c(a - c) = (a - c)(2b - c). \end{aligned}$$

3). Применение формул сокращённого умножения:

$$\begin{aligned} \text{а) } 25a^4 - 16b^4 &= (5a^2 + 4b^2)(5a^2 - 4b^2) = \\ &= (5a^2 + 4b^2)(a\sqrt{5} + 2b)(a\sqrt{5} - 2b); \\ \text{б) } 4x^2 + 20xy + 25y &= (2x + 5y)^2. \end{aligned}$$

4). Разложение многочлена на множители в случае, когда известны корни (корень) этого многочлена.

Если известно, что $x = a$ является корнем многочлена $P(x)$, то этот многочлен можно разложить на множители $P(x) = (x - a)Q(x)$, где многочлен $Q(x)$ является частным от деления $P(x)$ на $(x - a)$. В частности, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни данного квадратного трёхчлена.

Задачи с решениями

1. Разложить на множители выражение $a^4 + a^2 + 1$.

Решение.

$$\begin{aligned} a^4 + a^2 + 1 &= (a^4 + 2a^2 + 1) - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = \\ &= (a^2 + a + 1) \cdot (a^2 - a + 1). \end{aligned}$$

2. Упростить: а) $\sqrt{97 + 60\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

Решение.

а). Предположим, что подкоренное выражение можно представить в виде $97 + 60\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^2$, где a и b - целые числа. Тогда $97 + 60\sqrt{2} = a^2 + 2b + 2ab\sqrt{2}$. Для определения a и

b получаем систему уравнений: $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 97, \\ ab = 30. \end{cases}$ Нетрудно

подобрать решение этой системы: $a = 5$, $b = 6$. Таким образом,

$$\sqrt{97 + 60\sqrt{2}} = \sqrt{(5 + 6\sqrt{2})^2} = 5 + 6\sqrt{2}.$$

б). Предположим, что подкоренное выражение можно представить в виде $20 - 14\sqrt{2} = (a - b\sqrt{2})^3$. Тогда

$$20 - 14\sqrt{2} = a^3 - 6ab^2 + 3a^2b\sqrt{2} - 2b^3\sqrt{2}.$$

Для определения a и b получаем систему уравнений: $\begin{cases} a^3 + 6ab^2 = 20, \\ 3a^2b + 2b^3 = 14. \end{cases}$ Нетрудно

подобрать решение этой системы: $a = 2$, $b = 1$. Таким образом,

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 - \sqrt{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить на множители выражение:

- а) $a^4 - 2a^3 + a^2 - 1$; б) $8x^3 + y^3 + 6y^2 + 12y + 8$; в) $x^4 - x^3 - x^2 - 1$;
г) $a^4 + 4a^2 - 5$; д) $a^8 + a^4 + 1$; е) $a(a+2) - (b+1)(b-1)$.

2. Сократить дробь: а) $\frac{64x^3 - 27y^6}{9y^4 - 16x^2}$; б) $\frac{b^4 + 4}{b^2 - 2b + 2}$.

3. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

- а) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$; б) $\frac{xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$; в) $\frac{2}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$.

4. Упростить: а) $\left(\frac{x}{x^2 + 2x + 4} + \frac{x^2 + 8}{x^3 - 8} - \frac{1}{x - 2} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{2}{2 - x} \right)$;

- б) $\frac{(x^2 - y)(y + x\sqrt{y} + x^2)}{y\sqrt{y} - x^3}$; в) $\sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}}$.

5. Вычислить:

- а) $\sqrt{41 + 24\sqrt{2}} - \sqrt{41 - 24\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{37 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{37 - 30\sqrt{3}}$.

6. Упростить выражение и найти его значение при указанных значениях a и b :

а) $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^{-1}$, $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$.

б) $\frac{4 - \sqrt[3]{a^2}}{(2 + \sqrt[3]{ab})^2 - (\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{b})^2}$, $a = \sqrt[3]{3}$, $b = \sqrt{0,008}$.

Контрольная работа «Числа и алгебраические выражения»

1. Найти а) НОД(56, 70, 126), б) НОК(54, 90, 162).

2*. Заменить звёздочки цифрами так, чтобы число $75*31419*$ делилось нацело на 90.

3**. Для устройства ёлки купили орехов, конфет и пряников – всего 760 штук; орехов взяли на 80 штук больше, чем конфет, а пряников на 120 штук меньше, чем орехов. Какое наибольшее число одинаковых подарков для детей можно сделать из этого запаса.

4. Решить уравнение:

$$2\frac{2}{3} : \left(\left((3,72 - 0,02x) \cdot \frac{10}{37} \right) : \frac{5}{6} + 2,8 \right) - \frac{7}{15} = 0,2.$$

5*. Вычислить $\frac{12 \cdot 0,8 - 1,8}{2,08(3) + 2,0(6) - 0,25}$.

6**. Найти сумму первых 30-ти цифр после запятой в десятичной записи рационального числа $\frac{30212}{333333}$.

7. Количество девочек в классе составляет 60% от количества мальчиков. Сколько процентов от всех учеников составляют мальчики?

8*. По плану работа выполняется за 108 дней. На сколько дней быстрее будет выполнена работа, если повысить производительность труда на 20%?

9*. Банк выплачивает своим вкладчикам 8% годовых. Сколько денег надо положить на счёт, чтобы через год получить 60 грн. прибыли?

10. Вычислить: а) $\frac{3^{\frac{5}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{3}}$, б) $\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})}$,

$$\text{в) } \sqrt[4]{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}, \text{ г) } \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}.$$

11. Представить в виде степени: $\sqrt[5]{b^4 \sqrt[3]{b^3}} : \sqrt[3]{b^2 \sqrt[3]{b^3}}$.

12*. Определить знак разности $\sqrt[3]{5} - \sqrt{2\sqrt[3]{3}}$.

13*. Упростить $\sqrt[4]{256a^4b^8c^{12}}$, если $a < 0$, $c > 0$.

14. Найти все действительные корни многочлена $P(x)$ и разложить его на множители:

а) $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$, б) $P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 24$,

в) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$.

15. Записать выражение без знака модуля:

а) $\frac{x - \sqrt{2} + |x - \sqrt{2}|}{2(x - \sqrt{2})}$, если $x > \sqrt{2}$, б) $\|x + 3| - |x - 1|\|$.

16. Разложите на множители: а) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$,

б) $c^8 - c^4 - 2c^2 - 1$, в) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

17. Упростить: а) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$,

б) $\frac{27a^3 - 64b^3}{b^2 - 4} : \frac{9a^2 + 12ab + 16b^2}{b^2 + 4b + 4}$.

18**. Известно, что $\frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^2}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3})}{b^2(a-b)^{\frac{1}{3}}} = 7$. Во сколько

раз a больше b , если оба этих числа положительны.

Замечание. Полное и правильное решение задачи, отмеченное двумя звёздочками, оценивается в 5 баллов, одной звёздочкой – в 4 балла, а полное и правильное решение задачи, не отмеченное звёздочками, оценивается двумя баллами. Таким образом, максимальное количество баллов, которое можно получить за контрольную работу, равно 100.

Тест «Преобразование алгебраических выражений»

1	Нацело на 8 делится А)364 Б)328 В)339 Г)342 Д)362
2	Если ширина прямоугольного садового участка на 10 м меньше его длины, а длина забора вокруг него 100 м, то площадь участка равна А)700м ² Б)680 м ² В)660 м ² Г)500 м ² Д)600м ²
3	Если неполное частное равно 16, делитель 19, а остаток 13, то делимое равно А)317 Б)318 В)319 Г)314 Д)316
4	Упростить $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10}$ А) 18 Б) 12 В) 20 Г) 60 Д) 120
5	Если $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, то дробь $\frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$ равна А) 1 Б) 2 В) 2,5 Г) $\frac{1}{3}$ Д) -3
6	Вычислить $0,7 \cdot \frac{5^a \cdot 4^b}{5^{a-1} \cdot 2^{2b} + 5^a \cdot 2^{2b-1}}$ А) 1 Б) -1 В) 2 Г) -2 Д) 0,3
7	Яблоки при сушке потеряли 85% своей массы. Из 500 кг свежих яблок сушеных получится А)75кг Б)64кг В)51кг Г)36кг Д)45кг
8	Разность $\sqrt{19881} - 2$ равна А) 139 Б) 141 В) 151 Г) 149 Д) 153
9	Значение выражения $(a-2)^{-1} + (b-2)^{-1}$ при $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ и $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ равно А) 0 Б) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ В) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$ Г) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ Д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
10	При $a = 3\frac{1}{3}$ выражение $a^{-0,5} + \frac{a^{-0,5} - a^{0,5}}{a + a^{0,5}}$ равно А) 0,3 Б) 25 В) -0,35 Г) -25 Д) 0,35

11	Значение выражения $4x^2 + 20x + 25$ при $x = -0,5$ равно А) 0 Б) 4,25 В) 9,5 Г) 16 Д) 25
12	Длина аквариума 90 см, ширина 40 см, а высота 60 см. Чтобы уровень воды был ниже верхнего края на 10 см, в него надо влить А) 180л Б) 18л В) 160л Г) 16л Д) 20л
13	Дробь $\frac{19^2 - 18^2}{56^2 - 19^2}$ равна А) 0,75 Б) -0,01(3) В) 0,01(3) Г) $-\frac{5}{73}$ Д) $\frac{5}{73}$
14	Вычислить $0,87^2 + 0,26 \cdot 0,87 + 0,0169$ А) 1 Б) 2 В) 3,96 Г) 4 Д) 2,3922
15	Выражение $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} + \sqrt{2}$ равно А) -1 Б) $-\sqrt{2}$ В) $\sqrt{3} + 1$ Г) $\sqrt{2} + 1$ Д) 1
16	Если через одну трубу бассейн наполняется за 5 часов, а через другую – за 4 часа, то бассейн наполнится на 90% за А) 1,5 ч Б) 45 мин В) 1,2 ч Г) 2 ч Д) 50 мин
17	Вычислить $3\sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{1,5} + 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ А) 0 Б) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ В) $\sqrt{3}$ Г) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ Д) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
18	Число $ 7\sqrt{6} - 6\sqrt{8} + 12\sqrt{2}$ равно А) $6\sqrt{7}$ Б) $12\sqrt{2}$ В) $14\sqrt{2}$ Г) $7\sqrt{6}$ Д) $-8\sqrt{6}$
19	Вычислить $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)^2$ А) $2\sqrt{5}$ Б) 2 В) 3 Г) $2\sqrt{5} - 2$ Д) 4
20	Произведение $\sqrt[3]{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2\sqrt{8}}$ равно А) 2 Б) ± 3 В) 3 Г) -3 Д) не существует

21	Значение выражения $0,3 + 0,029 : \left(\frac{6}{35} - 0,13 \right)$ равно А) 0,1 Б) -0,1 В) 1 Г) 0,31 Д) 0,5
22	Если из 40 т железной руды выплавляют 15 т стали, содержащей 6% примесей, то процент примесей в руде составляет А) 62% Б) 70% В) 64,75% Г) 72,4% Д) 75%
23	Если число 1000 разделить на две части так, чтобы 8% первой части в сумме с 24% второй части составили 12% всего числа, то меньшая часть числа равна А) 200 Б) 250 В) 93,75 Г) 300 Д) 150
24	Если $a = \sqrt{5}$, то выражение $\left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} \right)^2$ равно А) 1 Б) 2 В) $4 + 2\sqrt{5}$ Г) $4 - 2\sqrt{5}$ Д) $2\sqrt{13}$
25	Равенство $\frac{\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-0,25}} \cdot x^{\frac{5}{12}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 2$ верно при x равном А) $\sqrt[6]{2}$ Б) 64 В) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ Г) $\frac{1}{64}$ Д) $\sqrt[3]{2}$.
26	Выражение $\sqrt{(0,36)^{-2}} : \left(1\frac{2}{3} \right)^3 + (7,5)^0 : \left(2\frac{1}{3} \right)^{-1}$ равно А) ± 1 Б) 1 В) ± 2 Г) 2 Д) 0,35
27	Число $1515\frac{103}{528} - 1517\frac{397}{880} + 1\frac{160}{660}$ равно А) 1 Б) 2 В) -1 Г) $\frac{223}{220}$ Д) $-\frac{223}{220}$
28	Выражение $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ равно А) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ Б) $-\sqrt{\sqrt{2}-1}$ В) 1 Г) -1 Д) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$
29	Площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 5 и периметром 12 равна А) 3 Б) 6 В) 7 Г) 9 Д) 11

30Если $a = \sqrt{7} + \sqrt{3}$, то выражение $\sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$ равно

А) $\frac{10 + 2\sqrt{21}}{3}$ Б) 2 В) $\sqrt{2}$ Г) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ Д) $5 + \sqrt{21}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения**1. Делимость целых чисел**

1. а) $5^3 \cdot 11$, б) $3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. 2. 18; 5040. 3. b, c, e, f, g, h ; a, b, c, d, g ; b, c, e, f, g, h ; a, b, d, h ; b, c, e, g ; b, c, e, f ; a, b, c, d, g ; a, b, d . 4. а) 371504160, 375504165; б) 8236047330. 5. 421. 6. 28 м. 7. 160 кг. 8. 11, 23. 9. 41. 10. 31 м 5 см. 11. а) 8; 1, б) -6; 1, в) -5; 4. г) 7; 0. 12. 27. 13. 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92. 14. а) $x = 7n + 4, y = 7n, n \in \mathbb{Z}$, б) $x = -2n + 1, y = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$.

2. Рациональные числа

1. а) 0,425; б) 0,15; в) 1,(09); г) 0,(714285). 2. а) 3; б) 7. 3. а) $1\frac{29}{30}$; б) 5,75; в) ; г) 3; д) 144,25; е) ; ж) . 4. а) $1\frac{19}{24}$; б) 2,4.

3. Проценты

1. а) 4,08; б) 119,7. 2. а) 50; б) 80. 3. а) 33,(3)% ; б) 12,5%. 4. 100%; 50%. 5. Уменьшилась на 1%. 6. На первой ферме меньше на 5,5%. 7. 6,(6)%. 8. 150%. 9. $\approx 2,3$ ц. 10. $41\frac{3}{17}\%$. 11. 88%. 12. 25,5%. 13. ≈ 348 .

4. Модуль действительного числа

1. а) 3,2; б) $\frac{1}{6}$; в) $3,15 - \pi$.

$$2. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} -1 - x, & \text{если } x \in (-\infty; -1), \\ 1 + x, & \text{если } x \in [-1; 3], \\ 7 - x, & \text{если } x \in (3; 7), \\ x - 7, & \text{если } x \in [7; +\infty). \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -2x - 10, 4, & \text{если } x \in (-\infty; -5, 2), \\ 2x + 10, 4, & \text{если } x \in [-5, 5; -3, 5], \\ -2x - 3, 6, & \text{если } x \in (-3, 5; -1, 8), \\ 2x + 3, 6, & \text{если } x \in [1, 8; +\infty). \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} 5 - x, & \text{если } x \in (-\infty; -1, 5) \cup \left(\frac{2}{3}; 5\right), \\ -5x - 1, & \text{если } x \in [-1, 5; -0, 2], \\ 5x + 1, & \text{если } x \in \left(-0, 2; \frac{2}{3}\right], \\ x - 5, & \text{если } x \in [5; +\infty). \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} -3 - 5x, & \text{если } x \in (-\infty; -3, 5), \\ 11 - x, & \text{если } x \in \left[-3, 5; \frac{4}{3}\right], \\ 5x + 3, & \text{если } x \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right). \end{cases}$$

3. а) $\emptyset$; б) $\pm 2, 7$; в) 0.4. а) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; б) $(-13; 13)$; в)

$(-\infty; +\infty)$; г) $\emptyset$. 5. а) -1; 5; б) 3, 5; 6, 5; в) -4; -2; г) -9; 5; д) $2; \frac{2}{3}$; е) -

1, 25; -0, 25; ж) $[2; 7]$; з) 7. 6. а) $(-\infty; 3) \cup [9; +\infty)$ б) $[-7; 1]$; в)

$\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$; г) $(1, 25; 2, 25)$.

5. Степени и корни

1. а) 8; б) $-\frac{32}{3}$. 2. а) x^4 ; б) $x^{\frac{25}{12}}$. 3. а) 6; б) 2. 4. а) $x^3 y^2$; б) $\sqrt[6]{x^5}$;

в) $\sqrt[15]{x^{13}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$, если $b > 0$; $-\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$, если $b < 0$. 5. а) $\sqrt[3]{6}$; б) $\sqrt[5]{2a^2b^4}$.

6. а) $2\sqrt{6}$; б) $2\sqrt[5]{2^2}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$; г) $a^3b^2\sqrt[3]{a^2b}$; д) $2ab^3\sqrt{2b}$.

7. а) $\sqrt[3]{162}$; б) $\sqrt[3]{a^6b}$; в) $\sqrt[4]{c^4b^2}$. 8. а) $\frac{3}{2\sqrt[6]{2}}$; б) $36\sqrt[5]{9}$. 9. а) 1; б)

6. Многочлены

1. а) $S(x) = x^2 - x + 1$; б) $S(x) = 3x^2 + x - 3$.

2. а) $S(x) = x^2 + 0,5x - 0,75$; $R(x) = -3,25x - 5,75$;

б) $S(x) = 2x^2 - 10x + 5$, $R(x) = 20x - 11$. 3. а) -3; б) 15.

4. а) $(x-2)(x+1)^2$; б) $(2x-1)(x^2-3x+1)$; в) $(2x+1)^2(4x-1)$;

г) $(x+1)^2(x-2)(3x-2)$. 5. а) $a = -27$; $b = -36$; б) $b = -a$; $a \in R$.

6. а) $2x^2 - 17x + 30$; б) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$.

7. Тождественные преобразования алгебраических выражений

1. а) $(a^2 - a - 1)(a^2 - a + 1)$;

б) $(2x + y + 2)(4x^2 - 2xy - 4x + y^2 + 2y + 1)$;

в) $(x+1)(x^3 - 2x^2 + x - 1)$; г) $(a^2 + 5)(a+1)(a-1)$;

д) $(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1)$; е) $(a+b+1)(a-b+1)$.

2. а) $-\frac{16x^2 + 12xy + 9y^2}{3y + 4x}$; б) $b^2 + 2b + 2$. 3. а) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$;

б) $\frac{xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}$; в) $2 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$; г) $\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{x + y}$. 4. а) $\frac{1}{x+2}$;

б) $-x - \sqrt{y}$; в) $1 + \sqrt{a-1}$. 5. а) 6; б) 2. 6. а) 0,25; б) $1\frac{1}{24}$.

Библиографический список

1. Титаренко О.М., Роганін О.М. Математика. Самовчитель майбутнього студента. – Харків: ТОРСІНГПЛЮС, 2007.- 448 с.
2. Шутовский О.М., Човник Ю.В., Колесникова Л.В. Тестирование. Математика – Вып. 2. – К.: Мастер-класс, 2007. - 160 с.
3. Шарыгин И.Ю. Математика для школьников старших классов. –М.: Дрофа, 1995. -496 с.: ил.
4. Захарійченко Ю.О., Шкільний О.В., Математика: Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. – К.: Генеза, 2008. – 104 с.: іл.
5. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие/[Под ред. Сканави М.И.] – 3-е издание дополненное. М.: Высшая школа, 1978. – 519 с.: ил.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Делимость натуральных чисел.....	3
2. Рациональные числа.....	8
3. Проценты.....	12
4. Модуль действительного числа.....	15
5. Степени и корни.....	18
6. Многочлены.....	22
7. Тождественные преобразования алгебраических выражений.....	29
Контрольная работа.....	34
Тест.....	36
Ответы к задачам для самостоятельного решения.....	39
Библиографический список.....	42

