

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ВНЕШНЕМУ
НЕЗАВИСИМОМУ ОЦЕНИВАНИЮ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

**РАЗДЕЛ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,
НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ**

Севастополь
2008

УДК 510.53

Методические указания и контрольные задания для подготовки к внешнему независимому оцениванию по математике. Раздел 2. Рациональные уравнения, неравенства и системы / Сост. М.И. Деркач, Н.А. Деркач. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. – 60 с.

Целью методических указаний является оказание помощи учащимся школ, лицеев и других средних учебных заведений в подготовке к внешнему независимому оцениванию и выполнении контрольных заданий по теме «Рациональные уравнения, неравенства и системы».

Указания содержат необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, а также контрольную работу и тест.

Методические указания предназначены, прежде всего, учащимся средних школ, лицеев и гимназий и могут быть использованы для проведения занятий на подготовительных курсах и при самостоятельной подготовке к внешнему независимому оцениванию.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 18 ноября 2008 г., протокол № 4.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., профессор кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Уравнения и неравенства с одной неизвестной.....	4
2. Линейные и квадратные уравнения.....	6
3. Рациональные уравнения с одной неизвестной.....	10
4. Линейные и квадратные неравенства	17
5. Метод интервалов решения рациональных неравенств.....	24
6. Уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля.....	27
7. Неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля.....	30
8. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными.....	35
9. Задание множества точек на плоскости при помощи уравнений и неравенств с двумя неизвестными.....	44
Контрольная работа №2.....	50
Тест №2.....	52
Ответы к задачам для самостоятельного решения.....	57
Библиографический список.....	59

1. Уравнения и неравенства с одной неизвестной

Уравнение с одной неизвестной x может быть записано в виде $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – функции от переменной x .

Число a называется *корнем*, или *решением*, уравнения, если для него справедливо числовое равенство $f(a) = g(a)$. *Решить* уравнение – означает найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет корней.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество значений x , при которых определены и функция $f(x)$, и функция $g(x)$.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются *равносильными*, если совпадают их множества решений. При этом пишут: $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$. В частности, два уравнения являются согласно определению равносильными, если оба уравнения не имеют решений.

Если все корни уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ являются корнями уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, то уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ называется *следствием* уравнения $f_1(x) = g_1(x)$. При этом пишут: $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$. Отметим, что уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ может иметь корни, которые не являются корнями уравнения $f_1(x) = g_1(x)$.

Неравенство с одной неизвестной x может быть записано в виде $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – функции от переменной x . Число a называется *решением* неравенства $f(x) > g(x)$, если для него справедливо числовое неравенство $f(a) > g(a)$. Аналогично определяется решение неравенства $f(x) < g(x)$. *Решить* неравенство – значит найти все его решения или доказать, что неравенство решений не имеет. Множество всех решений неравенства принадлежит ОДЗ этого неравен-

ства, т.е. пересечению областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Два неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ называются *равносильными*, если совпадают множества их решений. При этом пишут: $f_1(x) > g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) > g_2(x)$.

Решить систему уравнений (неравенств) с одной неизвестной – означает найти все числа, являющиеся решением каждого из уравнений (неравенств), входящих в систему, или доказать, что таких чисел не существует.

Система двух уравнений с одной неизвестной записывается

следующим образом:
$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x). \end{cases}$$

Аналогично обозначаются системы неравенств и смешанные системы.

Говорят, что уравнение (неравенство, система) *равносильно* некоторой системе, если множество решений уравнения (неравенства, системы) и системы совпадают.

Решить совокупность уравнений (неравенств, систем) с одной неизвестной – значит найти все числа, являющиеся решением хотя бы одного уравнения (неравенства, системы), входящего в данную совокупность, или доказать, что таких чисел не существует.

Совокупность уравнений $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ запи-

сывается следующим образом:
$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x). \end{cases}$$

Аналогично обозначается совокупность, в которую входят уравнения, неравенства и системы.

Говорят, что уравнение (неравенство, система) *равносильно* некоторой совокупности уравнений (неравенств, систем), если множество решений уравнения (неравенства, системы) совпадает с множеством решений этой совокупности.

2. Линейные и квадратные уравнения

Линейным уравнением называется уравнение вида

$$ax + b = 0,$$

где a и b – действительные числа, причём $a \neq 0$.

Решение уравнения $ax + b = 0$

1). Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение

$$x = -\frac{b}{a}.$$

2). Если $a = 0$ и $b = 0$, то решением уравнения является любое действительное число: $x \in (-\infty; +\infty)$ или $x \in \mathbb{R}$.

3). Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение решений не имеет: $x \in \emptyset$.

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – действительные числа, причём $a \neq 0$.

Решение квадратного уравнения зависит от *дискриминанта* D квадратного уравнения, который вычисляется по формуле $D = b^2 - 4ac$.

1). Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

2). Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два действительных различных корня: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, и тогда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

3). Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет два совпадающих действительных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, и тогда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Замечание. Если коэффициент b квадратного уравнения является чётным числом, то корни квадратного уравнения удобнее вы-

числять по формуле: $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$, где $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

Теорема Виета

Произведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения равно $\frac{c}{a}$,

а сумма равна $-\frac{b}{a}$:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

В частности, если квадратное уравнение является приведённым,

т.е. $a=1$, то $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c, \\ x_1 + x_2 = -b. \end{cases}$

Задачи с решениями

1. Решить уравнение $\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{6} = 1 - \frac{x}{3}$.

Решение.

$$\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{6} = 1 - \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{x}{3} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = 1 + \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}.$$

Ответ: $x = \frac{7}{6}$.

2. Для всех значений параметра a решить уравнение $(a^2 - 1)x = 1 + a$.

Решение.

1). Если $a^2 - 1 \neq 0$, т.е. $a \neq \pm 1$, то уравнение является линейным

и имеет единственное решение $x = \frac{1+a}{a^2-1}$, т.е. $x = \frac{1}{a-1}$.

2). Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 2$ и, следовательно, решений не имеет ($x \in \emptyset$).

3). Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$ и имеет бесчисленное множество решений: $x \in (-\infty; +\infty)$, т.е. $x \in R$.

Ответ: если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$; если $a = 1$, то $x \in \emptyset$; если $a = -1$, то $x \in R$.

3. Решить уравнение:

а) $2x^2 - 3x + 5 = 0$, б) $3x^2 + 7x + 2 = 0$, в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Решение.

а). Поскольку $D = 9 - 40 = -31 < 0$, то уравнение действительных корней не имеет.

б). Поскольку $D = 49 - 24 = 25 > 0$, то уравнение имеет два действительных различных корня: $x_1 = \frac{-7-5}{6} = -2$, $x_2 = \frac{-7+5}{6} = \frac{1}{3}$.

в). Так как $D = 16 - 16 = 0$, то уравнение имеет два совпадающих корня: $x_1 = x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

4. Для всех значений параметра a решить уравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение.

1). Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $2x + 1 = 0$, т.е. является линейным, и имеет единственное решение $x = -0,5$.

2). Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным и его решения зависят от дискриминанта D , который равен $D = 4 - 4a$.

а). Если $D < 0$, т.е. $a > 1$, то уравнение не имеет решений.

б). Если $D = 0$, т.е. $a = 1$, то уравнение принимает вид $x^2 + 2x + 1 = 0$ и имеет единственное решение $x = -1$.

в). Если $D > 0$ и $a \neq 0$, т.е. $a < 1$ и $a \neq 0$, то уравнение имеет два

решения: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4a}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Ответ: если $a = 0$, то $x = -0,5$; если $a = 1$, то $x = -1$; если $a < 1$

и $a \neq 0$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$; если $a > 1$, то $x \in \emptyset$.

5. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 5x - 4 = 0$, найти значение выражения $x_1x_2^4 + x_2x_1^4$.

Решение. Дискриминант данного квадратного уравнения положителен ($D = 57 > 0$). Поэтому уравнение имеет два действи-

тельных различных корня, которые согласно теореме Виета

$$\text{удовлетворяют системе } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -2, \\ x_1 + x_2 = 2,5. \end{cases}$$

Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 x_2^4 + x_2 x_1^4 &= x_1 x_2 (x_2^3 + x_1^3) = x_1 x_2 ((x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_2^2 x_1) = \\ &= x_1 x_2 ((x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)). \end{aligned}$$

Следовательно, $x_1 x_2^4 + x_2 x_1^4 = -2(2,5^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 2,5) = -61,25$.

Ответ: $-61,25$.

6. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов его корней.

Решение.

Первый способ

Поскольку дискриминант $D = 4a^2 - 8a + 4 = 4(a-1)^2$, то уравнение имеет два действительных корня $x_1 = 1$, $x_2 = 2a - 1$ при любых $a \in R$. Согласно условию $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$. Подставляя вместо x_1 и x_2 соответственно 1 и $2a - 1$, получаем уравнение $2a = 1 + (2a - 1)^2$. Отсюда находим два решения: $a = 0,5$ и $a = 1$.

Второй способ

Равенство $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$ преобразуем к виду $x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$. Так как согласно теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 2a - 1$, $x_1 + x_2 = 2a$, то для определения a получаем уравнение $2a^2 - 3a + 1 = 0$, которое имеет два корня: $a = 0,5$ и $a = 1$. Оба найденных значения a удовлетворяют условию задачи, так как уравнение $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ имеет два действительных корня при любых $a \in R$ в силу того, что $D = 4(a-1)^2 \geq 0$.

Ответ: $0,5; 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение: а) $\frac{x}{4} + \frac{5x-1}{6} = 2 - \frac{x}{12}$, б) $3x^2 + x - 4 = 0$,

в) $5x^2 + 7x + 3 = 0$, г) $\frac{x^2}{3} - 2x + 3 = 0$.

2. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$, найти значения выражений: а) $x_1^2 + x_2^2$, б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, в) $x_1^3 + x_2^3$, г) $x_1^4 + x_2^4$.

3. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - x - 2 = 0$, найти значения выражений: а) $x_1^2 + x_2^2$, б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, в) $x_1^3 + x_2^3$, г) $x_1^4 + x_2^4$.

4. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ равна 16?

5. При каких значениях параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (m-1)x + m^2 - 1,5 = 0$ наибольшая?

6. Для всех значений параметра a решить уравнение:

а) $(a^2 - 3a + 2)x + 1 = a$, б) $(a+1)x^2 - (a-1)x - 2a = 0$.

3. Рациональные уравнения с одной неизвестной

Рациональное уравнение с одной неизвестной может быть записано в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены от одной переменной x . В частности, если $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, то рациональное уравнение принимает вид $P(x) = 0$ и называется *целым* рациональным уравнением. Если же $Q(x)$ не является многочленом нулевой степени, то рациональное уравнение называется *дробно-рациональным*. Очевидно,

что $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Это значит, что решение дробно-рациональных уравнений сводится к решению целых рациональных уравнений.

Степенью рационального уравнения $P(x) = 0$ называется степень многочлена $P(x)$. Линейные и квадратные уравнения представляют собой целые рациональные уравнения первой и второй степени соответственно. Решения линейного и квадратного уравнений очень просто выражаются через коэффициенты этих уравнений и могут быть найдены по соответствующим формулам. В случае уравнений более высоких степеней таких формул либо не существует, либо они являются практически малоприменимыми и не используются при решении уравнений. Поэтому рациональные уравнения третьей, четвёртой и т.д. степеней стремятся свести к равносильной совокупности линейных и/или квадратных уравнений. Основными приёмами, которые используются для достижения указанной цели, являются *разложение на множители* и *замена переменной*. Впрочем, в некоторых случаях целое рациональное уравнение преобразуют в равносильное уравнение, содержащее дробно-рациональные функции. Так поступают, например, при решении *симметричных* и *возвратных* уравнений, а также *однородных* уравнений относительно рациональных функций $f(x)$ и $g(x)$.

Приведём примеры целых рациональных уравнений, которые при помощи соответствующей замены переменной приводятся либо к квадратному уравнению, либо к более простому, чем исходное, уравнению.

1). *Биквадратные уравнения*, т.е. уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$. Замена: $x^2 = t$, $t \geq 0$.

2). *Трёхчленные уравнения*, аналогичные *биквадратному*, т.е. уравнения вида $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a \neq 0$. Замена: $x^n = t$.

3). *Симметричные уравнения 4-ой степени*, т.е. уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$. Замена: $x + \frac{1}{x} = t$. Для того что-

бы воспользоваться этой заменой, обе части симметричного уравнения следует разделить на $x^2 \neq 0$, после чего сгруппиро-

вать первое и последнее, а также второе и предпоследнее слагаемые левой части.

4). *Возвратные* уравнения 4-ой степени, т.е. уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $a \neq 0$, где $ad^2 = eb^2$. Замена: $x + \frac{d}{bx} = t$.

Возвратные уравнения являются обобщением симметричных уравнений и решаются аналогично.

5). Уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = A$, где $a \leq b \leq c \leq d$ и $a+d = b+c$. Замена: $x^2 - (a+d)x = t$. Для того чтобы воспользоваться этой заменой, надо сгруппировать первый и последний, а также второй и третий множители левой части, после чего раскрыть скобки в каждой группе.

6). Уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = Ax^2$, где $a \leq b \leq c \leq d$ и $ad = bc$. Замена: $x + \frac{ad}{x} = t$ (объединить в группы

первый и четвёртый множители, а также второй и третий множители левой части, после чего раскрыть скобки в каждой группе и разделить левую и правую части уравнения на $x^2 \neq 0$).

7). Уравнения вида $(f(x))^2 + f(x)g(x) + (g(x))^2 = 0$, т.е. *однородные* 2-ой степени однородности относительно $f(x)$ и $g(x)$.

Замена: $f(x) = t \cdot g(x)$.

8). Уравнения вида $(x-a)^4 + (x-b)^4 = A$. Замена: $x - \frac{a+b}{2} = t$.

Задачи с решениями

1. Решить уравнение $x^5 - 2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$.

Решение. Используя метод группировки, можно разложить левую часть уравнения на множители, что позволит свести данное уравнение к совокупности двух простейших уравнений 2-ой и 3-ей степени:

$$x^5 - 2x^3 - 3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 2) - 3(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 3)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3 = 0, \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{3}, \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt[3]{3}, \pm\sqrt{2}$.

2. Решить уравнение $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение. Рациональными (целыми или дробными) корнями данного уравнения могут быть лишь числа $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$. Проверка

показывает, что корнем данного уравнения является $-\frac{1}{2}$. Раз-

ложим левую часть уравнения на множители, одним из которых, как мы знаем, является линейный множитель $2x + 1$:

$$(2x^3 + x^2) + (2x^2 + x) + (2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

3. Решить уравнение $x^8 - 5x^4 - 14 = 0$.

Решение. Данное уравнение является *трёхчленным*, аналогичным *биквадратному* уравнению. Замена $x^4 = t$, $t \geq 0$ приводит к квадратному относительно t уравнению $t^2 - 5t - 14 = 0$, которое имеет два корня: $t = -2$ и $t = 7$. Первый корень $t = -2$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$. Второму корню $t = 7$ соответствует равносильное исходному уравнение $x^4 = 7$. Отсюда $x = \pm\sqrt[4]{7}$.

Ответ: $\pm\sqrt[4]{7}$.

4. Решить уравнение $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение. Это уравнение является *симметричным* уравнением 4-ой степени. Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ и сгруппируем члены уравнения следующим образом:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$$

Полагаем $x + \frac{1}{x} = t$. Тогда получаем уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$, которое имеет два корня: $t = -1$ и $t = 3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -1, \\ x + \frac{1}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0, \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

5. Решить уравнение $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0$.

Решение. Данное уравнение является возвратным. Возвратное уравнение является обобщением симметричного уравнения и может быть решено аналогично:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0 &\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{3}{x}\right) - 18 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{3}{x}\right) - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{x} = 6, \\ x + \frac{3}{x} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 3 = 0, \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{6}, \\ x = -1, \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $3 \pm \sqrt{6}$, $x = -1$, $x = -3$.

6. Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40$.

Решение. Если сгруппировать первый и четвёртый, а также второй и третий множители левой части и в группах раскрыть скобки, то мы получим два квадратных трёхчлена, которые отличаются лишь свободным членом:

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8) = 40.$$

Пусть $t = x^2 + 6x$. Тогда получаем квадратное относительно t уравнение $t^2 + 13t = 0$, которое имеет два корня: $t = 0$, $t = -13$.

Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух

квадратных уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + 6x = 0, \\ x^2 + 6x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -6. \end{cases}$$

Ответ: -6; 0.

7. Решить уравнение $(x^2 + x + 2)^2 + 3x(x^2 + x + 2) - 4x^2 = 0$.

Решение. Данное уравнение является однородным 2-ой степени однородности относительно $(x^2 + x + 2)$ и x . Так как $x = 0$ не является корнем данного уравнения, то обе части этого уравне-

ния можно разделить на x^2 и сделать замену $t = \frac{x^2 + x + 2}{x}$. В ре-

зультате получим квадратное уравнение $t^2 + 3t - 4 = 0$, которое имеет два корня: $t = 1$, $t = -4$. Возвращаясь к старой переменной x , получаем совокупность двух квадратных уравнений, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} x^2 + x + 2 = -4x, \\ x^2 + x + 4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

8. Решить уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7$.

Решение. Данное уравнение можно привести к равносильному уравнению 4-ой степени. Однако этот путь является тупиковым, поскольку, как мы убедимся ниже, уравнение не имеет рациональных корней. Левая часть уравнения представляет собой сумму двух квадратов. Дополним её до квадрата разности:

$$x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} - 2x \cdot \frac{3x}{3+x} + 2x \cdot \frac{3x}{3+x} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{3+x}\right)^2 + 2x \frac{3x}{3+x} - 7 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{3+x}\right)^2 + 6 \frac{x^2}{3+x} - 7 = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно $t = \frac{x^2}{3+x}$, которое имеет два корня: $t = -7$, $t = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух квадратных уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 7x + 21 = 0, \\ x^2 - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений не имеет действительных корней, а второе уравнение имеет два действительных различных корня:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $0,5 \cdot (1 \pm \sqrt{13})$.

9. Решить уравнение $\frac{4}{x+2} - \frac{x-18}{x^2-x-6} = \frac{x}{x-3}$.

Решение. При решении данного дробно-рационального уравнения необходимо обратить внимание на общий знаменатель всех членов уравнения, а также правильно записать условие равенства нулю дроби, числитель и знаменатель которой содержат x .

$$\frac{4}{x+2} - \frac{x-18}{x^2-x-6} = \frac{x}{x-3} \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} - \frac{x-18}{(x+2)(x-3)} - \frac{x}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-3) - x + 18 - x(x+2)}{(x+2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + x + 6}{(x+2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 6 = 0, \\ (x+2)(x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset, \text{ так как корни квадратного уравнения}$$

системы 3 и -2 не удовлетворяют неравенству системы (эти корни не принадлежат ОДЗ уравнения).

Ответ: уравнение корней не имеет.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнение:

1. а) $3x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 5 = 0$, б) $3x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6 = 0$.
2. а) $x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0$, б) $2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 9x + 6 = 0$.
3. а) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$, б) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$.
4. а) $2x^4 - 5x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$, б) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.
5. а) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = 144$,
 б) $(x+3)(x-2)(x-6)(x+7) = -180$.
6. а) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 - 13(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$,
 б) $(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^2 + 5x^4 = 0$.
7. а) $x^2 + \frac{x^2}{(1+x)^2} = 3$, б) $x^2 + \frac{4x^2}{(2-x)^2} = 12$.
8. а) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$, б) $(x-4)^4 + (x-8)^4 = 32$.
9. а) $\frac{2}{5+2x} - \frac{2}{5-2x} - \frac{4x^2-45}{4x^2-25} = 0$, б) $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}$.

4. Линейные и квадратные неравенства

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, где a и b — действительные числа, причём $a \neq 0$. К линейным неравенствам относятся также неравенства, которые могут быть приведены к указанному виду после перенесения всех членов в левую часть и приведения подобных членов.

Решение неравенства $ax + b > 0$, $a, b \in R$

Если $a > 0$, то $x > -\frac{b}{a}$, т.е. $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то $x < -\frac{b}{a}$, т.е. $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Если $a = 0$ и $b > 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$ или $x \in R$.

Если $a = 0$ и $b \leq 0$, то $x \in \emptyset$.

Нестрогое неравенство $ax + b \geq 0$ равносильно совокупности строгого неравенства и уравнения:

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b > 0, \\ ax + b = 0. \end{cases}$$

Поэтому, чтобы получить решение нестрогого неравенства $ax + b \geq 0$, достаточно к решению строгого неравенства $ax + b > 0$ присоединить решение уравнения $ax + b = 0$. Впрочем, для получения решения нестрогого неравенства последнее практически никогда не представляется в виде указанной выше равносильной совокупности, так как уравнение и неравенство решаются одновременно.

Аналогично решаются неравенства $ax + b < 0$ и $ax + b \leq 0$.

Квадратным неравенством называется неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0,$$

где a , b и c – действительные числа, причём $a \neq 0$.

Если $a < 0$, то, умножив обе части неравенства на -1 и изменив знак неравенства на противоположный, мы получим неравенство, равносильное исходному и имеющее положительный коэффициент при x^2 .

Решение квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)

Решение квадратного неравенства нетрудно получить на основе анализа расположения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ (т.е. параболы) относительно оси Ox в зависимости от коэффициентов a , b и c . Так как согласно предположению $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх (в положительном направлении оси Oy). Пусть D – дискриминант квадратного трёхчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ т.е. } D = b^2 - 4ac.$$

1). Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет действительных корней, парабола не пересекает ось Ox , а, значит, расположена выше оси Ox . Поэтому решением неравенства является любое действительное число: $x \in (-\infty; +\infty)$.

- 2). Если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет два одинаковых корня $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, парабола касается оси Ox в точке с абсциссой $x = -\frac{b}{2a}$, а, следовательно, $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
- 3). Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два действительных различных корня $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}$, парабола пересекает ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2 , а решением неравенства является любое действительное число, которое меньше меньшего корня x_1 или больше большего корня x_2 : $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Решение квадратного неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)

- 1). Если $D \leq 0$, то $x \in \emptyset$.
- 2). Если $D > 0$, то $x \in (x_1, x_2)$, где x_1 – меньший, а x_2 – больший корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

Замечания.

- 1). Каждое нестрогое квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \geq 0$ или $ax^2 + bx + c \leq 0$ равносильно совокупности соответствующего строгого квадратного неравенства и квадратного уравнения. Поэтому, для того чтобы получить решение нестрогого неравенства, достаточно к решению строгого неравенства присоединить решения квадратного уравнения. Отметим также, что при решении нестрогого неравенства уравнение и строгое неравенство решаются одновременно.
- 2). Квадратные неравенства можно также решать методом интервалов, который рассматривается в следующем параграфе.

Задачи с решениями

1. Решить неравенство $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 2x + 1$.

Решение.

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - 2x < 1 \Leftrightarrow \frac{3x - 2x - 12x}{6} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -11x < 6 \Leftrightarrow x > -\frac{6}{11} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{6}{11}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{6}{11}; +\infty\right).$

2. Для всех значений параметра a решить неравенство $(a^3 + a)x > a$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$a(a^2 + 1)x > a \text{ или } ax > \frac{a}{a^2 + 1}, \text{ так как } a^2 + 1 > 0.$$

Рассмотрим три случая.

1). Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > 0$, которое не имеет решений.

2). Если $a > 0$, то $x > \frac{1}{a^2 + 1}$, т.е. $x \in \left(\frac{1}{a^2 + 1}; +\infty\right).$

3). Если $a < 0$, то $x < \frac{1}{a^2 + 1}$, т.е. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a^2 + 1}\right).$

Ответ: если $a = 0$, то $x \in \emptyset$; если $a > 0$, то $x \in \left(\frac{1}{a^2 + 1}; +\infty\right)$;

если $a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a^2 + 1}\right).$

3. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \geq -7. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 4, \\ 3x \geq -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 2 \Leftrightarrow x \in [-3; 2).$$

Ответ: $[-3; 2).$

4. Решить совокупность неравенств $\begin{cases} 4x+3 < 7, \\ 2x+1 > 5. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 4x+3 < 7, \\ 2x+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 4, \\ 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

5. Решить неравенство: а) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$, б) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$,

в) $x^2 > 5$.

Решение.

а). Данное квадратное неравенство равносильно неравенству $2x^2 - 3x - 2 < 0$. Квадратный трёхчлен $2x^2 - 3x - 2$ имеет два действительных различных корня $x_1 = -0,5$, $x_2 = 2$. Графиком функции $y = 2x^2 - 3x - 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх и которая пересекает ось Ox в точках $-0,5$ и 2 (рисунок 1). Поэтому квадратный трёхчлен отрицателен для всех $x \in (-0,5; 2)$.

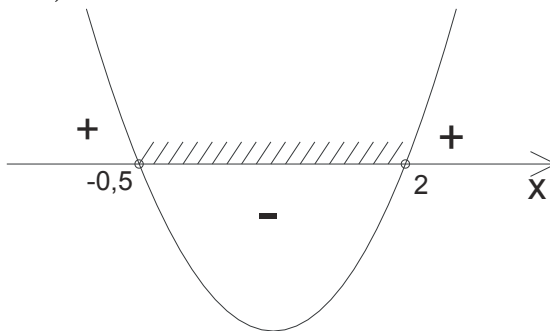


Рисунок 1

Ответ: $(-0,5; 2)$.

б). Дискриминант квадратного трёхчлена в левой части данного неравенства отрицателен ($D = 4 - 12 = -8 < 0$), а коэффициент при x^2 равен 1, т.е. положителен. Поэтому график функции $y = x^2 + 2x + 3$ представляет собой параболу, которая не пересекает ось Ox и ветви которой направлены вверх. Это значит, что

парабола целиком находится выше оси Ox , а, следовательно, $x^2 + 2x + 3 > 0$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

в). Так как обе части данного неравенства неотрицательны, то

$$x^2 > 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{5} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{5}, \\ x < -\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

6. При каких значениях параметра a решением неравенства $-x^2 + 6x + a < 0$ является любое действительное число x ?

Решение. Графиком левой части данного неравенства является парабола, ветви которой направлены вниз. Любое действительное число x является решением данного неравенства тогда и только тогда, когда парабола целиком расположена ниже оси Ox , а это равносильно тому, что дискриминант квадратного трёхчлена $-x^2 + 6x + a$ отрицателен:

$$36 + 4a < 0 \Leftrightarrow a < -9 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -9).$$

Ответ: $(-\infty; -9)$.

7. Для всех значений параметра a решить неравенство

$$ax - 3x^2 < 0.$$

Решение.

$$ax - 3x^2 < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - ax > 0 \Leftrightarrow x(3x - a) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 3x - a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > \frac{a}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 3x - a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x < \frac{a}{3}. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая.

1). Если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2). Если $a > 0$, то решением первой системы совокупности является промежуток $\left(\frac{a}{3}; +\infty\right)$, а решением второй системы совокупности является промежуток $(-\infty; 0)$. Таким образом,

$$x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{a}{3}; +\infty\right).$$

3). Если $a < 0$, то решением первой системы совокупности является промежуток $(0; +\infty)$, а решением второй системы совокупности является промежуток $\left(-\infty; \frac{a}{3}\right)$. Таким образом,

$$x \in \left(-\infty; \frac{a}{3}\right) \cup (0; +\infty).$$

Ответ: если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; если $a > 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{a}{3}; +\infty\right)$; если $a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство:

а) $\frac{1-x}{2} + 3 < 3x - \frac{2x+1}{4}$, б) $\frac{3-2x}{3} - 1 > \frac{3-2x}{6} - x$,

в) $3x^2 + 5x > 22$, г) $2x^2 - 17x \leq 9$, д) $x^2 - 5x + 7 \geq 0$.

2. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 7x - x^2 \geq 0, \\ 3x - 6 < 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3 + 2x - x^2 \leq 0, \\ x^2 - 3x - 10 < 0. \end{cases}$

3. Решить совокупность неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ 4x + 3 < 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 \leq 0, \\ x^2 + 4x + 7 < 0. \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a решением данного неравенства является любое действительное число x :

а) $(x-3)^2 \geq 2a-7$, б) $x^2 - 2x + 1 + a > 0$.

5. Для всех значений параметра a решить неравенство:

- а) $(a^2 - 2a + 1)x + a < 1$, б) $(a^2 - 7a + 12)x + a > 4$,
 в) $x^2 - (a + 1)x + a \geq 0$, г) $x^2 - ax < 0$.

5. Метод интервалов решения рациональных неравенств

Рациональным неравенством называется неравенство вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \text{ или } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0.$$

В частности, если $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, то рациональное неравенство называется целым рациональным неравенством и может быть записано в виде $P(x) > 0$ или $P(x) < 0$.

Одним из наиболее распространённых и эффективных методов решения рациональных неравенств является *метод интервалов*. Суть и основные идеи этого метода рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1. Пусть надо решить неравенство

$$(x + 5)^3 (x + 2)^2 (x - 1)(x - 4)^4 \leq 0.$$

Отмечаем на числовой оси жирными точками числа -5; -2; 1 и 4, т.е. корни всех линейных множителей (рисунок 2). (Если бы неравенство было строгим, то все указанные числа мы бы отметили прозрачными точками). Отмеченные точки разбивают числовую ось на пять интервалов. В каждом из этих интервалов все линейные множители сохраняют постоянный знак, а, следовательно, и вся левая часть данного неравенства также сохраняет постоянный знак. В самом правом интервале, т.е. в интервале $(4; +\infty)$, все линейные множители положительны, а, следовательно, и левая часть больше нуля. Далее расставляем знаки левой части в каждом из интервалов по следующему правилу: при переходе в соседний интервал через отмеченную точку левая часть меняет знак на противоположный, если линейный множитель, соответствующий этой точке, имеет нечётную степень, и не меняет знака, если указанный линейный множитель имеет чётную степень. Так, например, при переходе через точку 4 в

интервал $(1; 4)$ левая часть неравенства остаётся положительной, так как множитель $(x - 4)$ входит в левую часть неравенства в четвёртой (чётной) степени. Далее при переходе через точку 1 знак меняется с плюса на минус, при переходе через точку -2 знак левой части не меняется, а при переходе через точку -5 знак опять меняется (с минуса на плюс). Таким образом, данное неравенство имеет следующее решение: $[-5; 1] \cup \{4\}$.

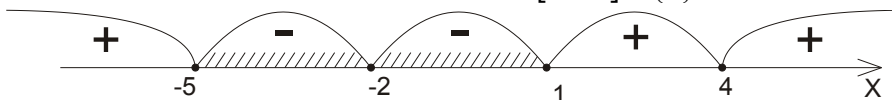


Рисунок 2

Пример 2. Воспользуемся методом интервалов для решения дробно-рационального неравенства $\frac{(x-2)^3(x+6)^2(x-1)}{(x+4)^6(x-5)^5} \geq 0$.

Отмечаем жирными точками нули числителя 1; 2 и -6, (т.е. те числа, при которых числитель обращается в нуль), а прозрачными точками нули знаменателя -4 и 5 (рисунок 3). Отмеченные точки разбивают числовую ось на шесть интервалов. В каждом из интервалов отмечаем знак левой части по указанному выше правилу. Теперь остаётся только выписать ответ: $x \in [1; 2] \cup (5; +\infty) \cup \{-6\}$.

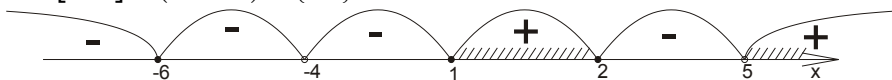


Рисунок 3

Таким образом, суть метода интервалов состоит в том, что решение неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ сводится к решению уравнений

$$P(x) = 0 \text{ и } Q(x) = 0 \text{ и определению знака выражения } \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ в}$$

каждом из интервалов, на которые корни уравнений $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$ делят числовую ось.

Для того чтобы рациональное неравенство решить методом интервалов, надо выполнить следующие операции:

- 1). Записать рациональное неравенство в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$.
- 2). Разложить многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ на линейные множители и квадратичные множители, дискриминант которых отрицателен.
- 3). Избавиться от квадратичных множителей, которые сохраняют знак на всей числовой оси.
- 4). Отметить на числовой оси корни многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.
- 5). Определить знак левой части неравенства в каждом из интервалов, на которые корни многочленов разбивают числовую ось.
- 6). Записать ответ в виде объединения интервалов.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенство:

1. а) $(x+2)^3(x-3)^2(x-5) < 0$, б) $(x+5)(x+3)^2(x-7)^5 \geq 0$.
2. а) $x^3 + x^2 + x > 3$, б) $-x^2 + 7x + 10 \geq 2(x^2 - 7x - 9)^2$.
3. а) $\frac{(x^2 + 3x - 18)(4x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - 5x + 6)(3x^2 - 8x + 14)} < 0$,
 б) $\frac{4x^2 - 5x - 6}{(5 - x^2 - 4x)(4x^2 - 4x + 1)} > 0$.
4. а) $\frac{9 - x^2}{3x + 1} \geq \frac{2}{x}$, б) $\frac{x}{x + 1} \leq \frac{16}{x^2 + 4}$, в) $2x + \frac{1}{x^2} \leq 3$, г) $\frac{9}{x} \leq \frac{18 - x^2}{6 - x}$.
5. а) $\frac{x^2 + 5x - 9}{x^2 + 3x - 4} \geq 2$, б) $\frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 5x + 3} < \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 7x + 4}$.

6. Уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля

Если выражения, стоящие под знаком модуля и вне знака модуля, являются рациональными, то после раскрытия модуля, мы получим рациональное уравнение.

$$\text{Решение уравнения } |f(x)| = g(x)$$

Первый способ

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad 2) \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases}$$

Суть этого способа решения состоит в том, что модуль раскрывается по определению.

Второй способ

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad 2) \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Замечание. Выбор способа решения (первого или второго) зависит от того, какое из неравенств проще: $f(x) \geq 0$ или $g(x) \geq 0$.

Третий способ

Данное уравнение можно заменить совокупностью двух

уравнений
$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ -f(x) = g(x). \end{cases}$$

Эта совокупность уравнений является по отношению к исходному уравнению следствием, т.е. содержит все корни исходного уравнения (но может иметь еще и корни, не являющиеся корнями исходного уравнения). Корни исходного уравнения можно отобрать, например, с помощью проверки.

Способы решения простейшего уравнения, содержащего неизвестную под знаком модуля, можно использовать и в более сложных случаях. Целесообразность применения того или иного

способа зависит от характерных особенностей решаемого уравнения. Например, если уравнение имеет вид

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x),$$

то, как правило, наиболее рациональным является первый способ решения (модули раскрывать по определению).

Если же уравнение имеет вид $||f(x)| + g(x)| = h(x)$, то его более удобно решать вторым или третьим способом (первый способ может оказаться вообще непригодным).

Задачи с решениями

Решить уравнение: а) $|x - 3| = 3x + 5$, б) $|x - 1| + |x - 3| = 2x - 4$,

в) $||x^2 - 3x| - 5| = x + 1$, г) $||x^3 + x^2 - 1| - 4| = x^3 - x^2 + 3$.

Решение.

а). Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x \geq 3, \\ x - 3 = 3x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$2) \begin{cases} x < 3, \\ x - 3 = -3x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x = -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -0,5.$$

Ответ: -0,5.

б). Решим данное уравнение, раскрывая модуль по определению. Для этого найдём значения x , при которых выражения, находящиеся под знаком модуля, равны 0: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Точки 1 и 3 разбивают числовую ось на три интервала, в каждом из которых выражения $x - 1$ и $x - 3$ сохраняют постоянный знак. Поэтому в указанных интервалах исходное уравнение может быть преобразовано в равносильное уравнение, не содержащее знака модуля. Таким образом,

$$\begin{aligned} |x - 1| + |x - 3| = 2x - 4 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -(x - 1) - (x - 3) = 2x - 4, & \text{если } x \in (-\infty; 1), \\ (x - 1) - (x - 3) = 2x - 4, & \text{если } x \in [1; 3], \\ (x - 1) + (x - 3) = 2x - 4, & \text{если } x \in [3; +\infty) \end{cases} &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4=2x-4, & \text{если } x \in (-\infty; 1), \\ 2=2x-4, & \text{если } x \in [1; 3), \\ 2x-4=2x-4, & \text{если } x \in [3; +\infty). \end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in [3; +\infty).$$

Отметим, что первое и второе уравнения совокупности не имеют решений в указанных промежутках, а третье уравнение представляет собой тождество в промежутке $[3; +\infty)$.

Ответ: $[3; +\infty)$.

в). Решим уравнение методом равносильных преобразований:

$$\left| |x^2 - 3x| - 5 \right| = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} |x^2 - 3x| - 5 = x + 1, \\ |x^2 - 3x| - 5 = -x - 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ |x^2 - 3x| = x + 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -1, \\ |x^2 - 3x| = -x + 4. \end{cases} \end{cases}$$

Так как $x + 6 > 0$ при $x \geq -1$, то первая система совокупности может быть решена следующим образом:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x = x + 6, \\ x^2 - 3x = -x - 6 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 6 = 0, \\ x^2 - 2x + 6 = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \pm \sqrt{10}, \\ x \in \emptyset. \end{array} \right] \end{cases} \end{cases}$$

Отсюда $x = 2 + \sqrt{10}$.

Так как $-x + 4 \geq 0$ при $x \leq 4$, то решение второй совокупности представляет собой следующую цепочку равносильных систем:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x = -x + 4, \\ x^2 - 3x = x - 4 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 4 = 0, \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \pm \sqrt{5}, \\ x = 2. \end{array} \right] \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, получаем ещё два корня: $x = 2$ и $x = 1 + \sqrt{5}$.

Ответ: $2; 1 + \sqrt{5}; 2 + \sqrt{10}$.

г). Если каждый из двух модулей раскрыть двумя возможными способами, то мы получим совокупность четырёх уравнений, которая является следствием данного уравнения:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 5 = x^3 - x^2 + 3, \\ -x^3 - x^2 - 3 = x^3 - x^2 + 3, \\ -x^3 - x^2 + 5 = x^3 - x^2 + 3, \\ x^3 + x^2 + 3 = x^3 - x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8, \\ 2x^3 = -6, \\ 2x^3 = 2, \\ 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ x = -\sqrt[3]{3}, \\ x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Проверка показывает, что числа 0; 1 и 2 являются корнями данного уравнения, а числа -2 и $-\sqrt[3]{3}$ не являются корнями этого уравнения (при $x = -2$ и при $x = -\sqrt[3]{3}$ правая часть данного уравнения отрицательна).

Ответ: 0; 1; 2.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнение:

1. а) $|5 - 3x| = 2x + 1$, б) $|2x - 3| = 3 - 2x$, в) $|x^2 - x - 8| = -x$.
2. а) $|x - 1| + |x + 2| - 2x = 1$, б) $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 4$.
3. а) $|x^2 - 2|x|| = 3x^2 - x$, б) $|x^2 - 3x| - x + 1 = 2x^2 + x - 1$.
4. а) $|2x - 1| - 5| + x = |6 - x|$, б) $|x + 3| - |x - 1| = 2 - x^2$.

7. Неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля

Будем считать, что все выражения, находящиеся под знаком модуля или вне знака модуля, являются рациональными функциями от переменной x . Тогда после раскрытия всех модулей данного неравенства мы получим рациональное неравенство, методы решения которого изложены в п. 5. Поэтому основное внимание при решении неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, мы уделим способам раскрытия модуля.

Существуют два основных пути решения неравенств, содержащих модули.

Первый путь состоит в том, что числовая прямая разбивается на промежутки, на каждом из которых на основании определения модуля знак модуля можно снять.

Другой путь основан на следующих равносильных переходах:

$$1) |a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b, \\ a > -b, \end{cases} \quad 2) |a| > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > b, \\ a < -b. \end{cases}$$

Решение неравенства $|f(x)| > a, a \in R$

1). Если $a < 0$, то решением является любое действительное x из ОДЗ неравенства.

2). Если $a \geq 0$, то неравенство равносильно совокупности двух

неравенств $\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{cases}$

Решение неравенства $|f(x)| < a, a \in R$

1). Если $a \leq 0$, то неравенство решений не имеет: $x \in \emptyset$.

2). Если $a > 0$, то неравенство равносильно системе двух нера-

венств $\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$

Решение неравенства $|f(x)| > g(x)$

Исходное неравенство равносильно совокупности двух не-

равенств $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$

Решение неравенства $|f(x)| < g(x)$

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Замечание. Все указанные выше неравенства можно решать, раскрывая модуль по определению. Однако этот способ является менее рациональным, т.к. приходится дополнительно решать неравенство $f(x) > 0$.

Решение неравенства $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| > h(x)$

Неравенство такого вида чаще всего решают, разбивая числовую ось на промежутки, в каждом из которых модули рас-

крываются по определению. Однако в тех случаях, когда это сделать не удаётся, целесообразно воспользоваться методом равносильных переходов. Для этого необходимо последовательно уединять модуль до тех пор, пока все модули не будут раскрыты.

$$\text{Решение неравенства } \|f(x)\| + g(x) > h(x)$$

Используя метод равносильных переходов, данное неравенство можно свести к равносильной совокупности, состоящей из системы неравенств и совокупности неравенств, не содержащих модулей. Аналогично можно решить неравенство

$$\|f(x)\| + g(x) < h(x).$$

Метод интервалов

Неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля, можно решать методом, аналогичным методу интервалов решения рациональных неравенств. Суть этого метода состоит в следующем.

Заменим данное неравенство соответствующим уравнением. Для этого знак неравенства заменим на знак равенства. Найдём корни этого уравнения, а также значения x , которые не принадлежат ОДЗ уравнения (т.е. нули знаменателей дробно-рациональных выражений). Отметим на числовой оси указанные точки, разбивающие числовую ось на интервалы. В каждом интервале выберем по одной точке и проверим, является ли она решением данного неравенства. Если выбранная точка удовлетворяет исходному неравенству, то и любая другая точка этого же интервала является решением неравенства.

Задачи с решениями

Решить неравенство:

$$\text{а) } |x+2| > 5, \text{ б) } |2x-1| \leq x^2, \text{ в) } |x+2| - |x-3| \geq 2x-1,$$

$$\text{г) } \left| \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3, \text{ д) } |x^3 - x + 1| \geq x^3 + x + 15.$$

Решение.

$$\text{а) } |x+2| > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 5, \\ x+2 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -7) \cup (3; +\infty).$$

$$\begin{aligned} \text{б) } |2x-1| \leq x^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq x^2, \\ 2x-1 \geq -x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 0, \\ x^2 + 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x \in (-\infty; -1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}; +\infty). \end{aligned}$$

в). Данное неравенство решим, раскрывая модуль по определению. Приравняем к нулю выражения, находящиеся под знаком модуля: $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$, $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$. Точки -2 и 3 делят числовую ось на три промежутка: $(-\infty; -2)$, $[-2; 3)$ и $[3; +\infty)$.

Внутри каждого из этих промежутков выражения $x+2$ и $x-3$ сохраняют постоянный знак и поэтому исходное неравенство в каждом из указанных промежутков может быть записано без знака модуля. Таким образом,

$$\begin{aligned} |x+2| - |x-3| \geq 2x-1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2+x-3 \geq 2x-1, \text{ если } x \in (-\infty; -2), \\ x+2+x-3 \geq 2x-1, \text{ если } x \in [-2; 3), \\ x+2-x+3 \geq 2x-1, \text{ если } x \in [3; +\infty) \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \text{ если } x \in (-\infty; -2), \\ -1 \geq -1, \text{ если } x \in [-2; 3), \\ x \leq 3, \text{ если } x \in [3; +\infty) \end{cases} &\Leftrightarrow x \in (-\infty; 3]. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in (-\infty; 3]$.

г). Неравенство решим методом равносильных преобразований. Так как дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + x + 1$ отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен, то $x^2 + x + 1 > 0$ для

всех действительных x . Поэтому

$$\left| \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3 \Leftrightarrow |x^2 - 3x - 1| < 3x^2 + 3x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 1 < 3x^2 + 3x + 3, \\ x^2 - 3x - 1 > -3x^2 - 3x - 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2 > 0, \\ 2x^2 + 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x > -1. \end{cases}$$

Таким образом, $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

д). Данное неравенство решим методом интервалов. Заменим неравенство соответствующим уравнением и найдём его корни:

$$|x^3 - x + 1| = x^3 + x + 15 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - x + 1 = x^3 + x + 15, \\ x^3 - x + 1 = -(x^3 + x + 15) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7; \\ x = -2. \end{cases}$$

Так как при решении данного уравнения перешли к совокупности двух уравнений, которая является следствием исходного уравнения, то необходимо сделать проверку. Проверка показывает, что единственным корнем данного уравнения является число -2 (-7 – посторонний корень). Неравенство

$$|x^3 - x + 1| \geq x^3 + x + 15 \quad \text{равносильно} \quad \text{неравенству}$$

$$|x^3 - x + 1| - (x^3 + x + 15) \geq 0. \text{ График левой части этого неравенства}$$

представляет собой сплошную линию, которая пересекает ось Ox в единственной точке $x = -2$. Поэтому в каждом из интервалов $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$ левая часть неравенства

$$|x^3 - x + 1| - (x^3 + x + 15) \geq 0 \text{ сохраняет знак. Этот знак можно оп-}$$

ределить при помощи одной точки, выбранной из каждого интервала. Нетрудно проверить, что $x = 0$ не удовлетворяет данному неравенству, а $x = -3$ удовлетворяет данному неравенству. Таким образом, решением неравенства является промежуток $(-\infty; -2]$.

Ответ: $(-\infty; -2]$.

Замечание. В задаче д) раскрыть модуль, используя определение модуля, нам не удалось бы, так как многочлен $x^3 - x + 1$ не имеет целых (рациональных) корней.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенство:

1. а) $|3x + 7| < 12$, б) $|5x - 13| > 6$, в) $|6x - 20| \geq 9$.
2. а) $|2x + 5| < 7 - x$, б) $3x + |2 - x| \leq 5$, в) $|x - 5| < 2x + 5$.
3. а) $|5x - 1| - |4x + 2| \leq |x - 3|$, б) $|2x + 5| + |3x - 7| > |4x + 1|$.
4. а) $|2x - |x - 2|| < 3$, б) $||3x + 1| + x + 1| \geq 2$, в) $|x^2 - |x^2 + x|| > 11$.
5. а) $||x^3 - x - 1| - 5| \geq x^3 + x + 8$, б) $||2x^2 - x| - 3| \leq 2x^2 + x + 5$.

8. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными

Пусть дано уравнение с двумя неизвестными $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ – определённое алгебраическое выражение. Упорядоченная пара чисел (a, b) называется *решением* этого уравнения, если в результате замены x на a и y на b уравнение превращается в верное числовое равенство.

Систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Упорядоченная пара чисел (a, b) называется *решением* данной системы, если эта пара чисел является решением каждого уравнения системы. *Решить* систему уравнений – значит найти все решения этой системы или доказать, что система решений не имеет. Равносильность двух систем с двумя неизвестными определяется так же, как и в случае систем с одной неизвестной.

Система уравнений называется *линейной*, если каждое уравнение этой системы линейно относительно всех неизвестных,

входящих в это уравнение. Если хотя бы одно из уравнений системы не является линейным, то система называется *нелинейной*.

Линейная система двух уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – действительные числа, причём хотя бы одно из чисел a_1, b_1 , а также хотя бы одно из чисел a_2, b_2 отлично от 0.

Линейную систему можно решить *методом исключения неизвестной*, который применяется в двух видах: в виде *подстановки* и в виде *алгебраического сложения*. Суть этого метода состоит в том, что решение системы уравнений сводится к решению одного уравнения с одной неизвестной.

При решении нелинейных систем наряду с подстановкой и алгебраическим сложением используются и другие приёмы и методы, например, метод *почленного умножения и деления* уравнений системы, метод замены переменных, метод разложения на множители.

Система двух целых рациональных уравнений с двумя неизвестными x и y называется *симметрической*, если она не меняется при замене x на y и y на x .

Многочлен $P(x, y)$ от двух переменных x, y называется *однородным*, если для любых x, y и для любого действительного $\lambda \neq 0$ имеет место тождество $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y)$. Натуральное число n называется при этом *степенью однородности* данного многочлена.

Система алгебраических уравнений
$$\begin{cases} P_1(x, y) = a_1, \\ P_2(x, y) = a_2, \end{cases} \quad \text{где}$$

$P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ – однородные многочлены одинаковой степени однородности, a_1 и a_2 – действительные числа, называется *однородной* системой.

Методы решения симметрических и однородных систем, а также особенности применения различных приёмов и методов решения линейных и нелинейных систем рассмотрим на конкретных примерах.

Задачи с решениями

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x - 4y = -5, \\ 5x + 3y = 11. \end{cases}$$

Решение. Решим данную линейную систему двумя способами.

Первый способ. Из первого уравнения выразим y через x , т.е. решим первое уравнение относительно y и подставим во второе уравнение вместо y полученное выражение. В результате получим систему уравнений, равносильную данной:

$$\begin{cases} y = 0,75x + 1,25, \\ 5x + 3(0,75x + 1,25) = 11. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы мы исключили переменную y . Решая это уравнение, получаем, что $x = 1$. Подставляем найденное значение x в первое уравнение системы. В результате получаем, что $y = 2$. Таким образом, система имеет единственное решение $(1; 2)$.

Второй способ. Уравняем по абсолютной величине коэффициенты при переменной y в первом и втором уравнениях системы. Для этого умножим обе части первого уравнения на 3,

а второго уравнения – на 4:
$$\begin{cases} 9x - 12y = -15, \\ 20x + 12y = 44. \end{cases}$$

Если к обеим частям первого уравнения прибавить соответствующие части второго уравнения, то мы получим уравнение, не содержащее y : $29x = 29$. Это уравнение совместно с любым уравнением исходной системы (например, вторым) образует

систему, равносильную данной:
$$\begin{cases} 29x = 29, \\ 5x + 3y = 11. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $x = 1; y = 2$.

Ответ: $(1; 2)$.

2. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ 2x - y = 1 \end{cases} \text{ не имеет решений.}$$

Решение. Воспользуемся методом алгебраического сложения и преобразуем данную систему в равносильную ей систему:

$$\begin{cases} (a+2)x = 3, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений тогда и только тогда, когда первое уравнение системы не имеет решений, т.е. при $a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y^2 + 1 - x = 0, \\ y^2 + y^3 = xy. \end{cases}$$

Решение. При решении данной нелинейной системы можно воспользоваться методом подстановки, который позволит исключить переменную x из второго уравнения и, по сути, свести решение системы уравнений с двумя неизвестными к решению одного уравнения с одной неизвестной. Действительно, так как первое уравнение системы равносильно уравнению $x = y^2 + 1$, то, заменяя во втором уравнении x на $y^2 + 1$, получаем уравнение $y^2 - y = 0$, имеющего корни $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Тогда из равенства $x = y^2 + 1$ находим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Таким образом, система имеет два решения: $(1; 0)$ и $(2; 1)$.

Ответ: $(1; 0)$, $(2; 1)$.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену переменных: $t = \frac{1}{x}$, $z = \frac{1}{y}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} t - z = \frac{3}{2}, \\ t^2 - z^2 = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Применим *метод почленного деления* уравнений системы (разделим левую и правую части второго уравнения соответственно на левую и правую части первого уравнения) и преобразуем полученную систему в равносильную ей:

$$\begin{cases} t - z = \frac{3}{2}, \\ t + z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $t = 0,5$; $z = -1$. Следовательно, $x = \frac{1}{t} = 2$, $y = \frac{1}{z} = -1$.

Ответ: $(2; -1)$.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = -5. \end{cases}$$

Решение. Данная система является однородной. Преобразуем её в равносильную систему, содержащую однородное уравнение второй степени однородности. Для этого к обеим частям первого уравнения системы, умноженным на 5, прибавим соответствующие части второго уравнения, умноженные на 3. Второе уравнение системы оставим без изменения. В результате получим:

$$\begin{cases} 13x^2 + 21xy - 10y^2 = 0, \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = -5. \end{cases}$$

Первое уравнение системы можно рассматривать как квадратное относительно x с коэффициентами, зависящими от y :

$a = 13, b = 21y, c = -10y^2$. Дискриминант такого уравнения

$D = b^2 - 4ac = (21y)^2 + 520y^2 = (31y)^2$. Следовательно,

$$x = \frac{-21y \pm 31y}{26} = \begin{cases} \frac{5}{13}y, \\ -2y. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x = -2y, \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = -5, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \frac{5}{13}y, \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = -5. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения: $(-2; 1)$ и $(2; -1)$, вторая система также имеет два решения: $\left(\frac{5}{\sqrt{138}}; \frac{13}{\sqrt{138}}\right)$ и

$\left(-\frac{5}{\sqrt{138}}; -\frac{13}{\sqrt{138}}\right)$ и

$$\left(-\frac{5}{\sqrt{138}}; -\frac{13}{\sqrt{138}}\right).$$

Ответ: $(-2; 1), (2; -1), \left(\frac{5}{\sqrt{138}}; \frac{13}{\sqrt{138}}\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{138}}; -\frac{13}{\sqrt{138}}\right)$.

6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Если x заменить на y , а y заменить на x , то система не изменится. Следовательно, она является *симметрической* и может быть преобразована в более простую систему при помощи замены переменных $x + y = t, xy = z$. Так как

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy, \quad x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2, \quad \text{то}$$

$$x^2 + y^2 = t^2 - 2z, \quad x^4 + y^4 = (t^2 - 2z)^2 - 2z^2 = t^4 - 4t^2z + 2z^2.$$

Относительно новых неизвестных система принимает вид

$$\begin{cases} t^4 - 4t^2z + 3z^2 = 91, \\ t^2 - 3z = 7. \end{cases}$$

Исключая из этой системы t^2 , получаем её решения:

$\begin{cases} t = 4, \\ z = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} t = -4, \\ z = 3. \end{cases}$ Следовательно, исходная система равносильна

совокупности двух систем: 1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$

Первая система имеет решения $(1; 3)$ и $(3; 1)$, а вторая – $(-1; -3)$ и $(-3; -1)$.

Ответ: $(-1; -3)$, $(-3; -1)$, $(1; 3)$, $(3; 1)$.

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$

Решение. Данная система является и симметрической, и однородной. Однако наиболее рациональным способом решения является способ, в основе которого лежит метод алгебраического сложения. Решение данной системы представим в виде цепочки равносильных систем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 7 - 6, \\ x^2y + xy^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^3 = 1, \\ xy(x + y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \\ x = 2, \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 2)$, $(2; -1)$.

8. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4,5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$

Решение. Умножим обе части первого уравнения на -3 , а обе части второго уравнения на 2 и полученные уравнения сложим. В результате приходим к линейному уравнению $3x + y = 5$, которое совместно с одним из уравнений исходной системы, например, первым, образует систему, равносильную данной:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4,5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x, \\ 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x, \\ 7x^2 - 26x + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \\ x = \frac{12}{7}, \\ y = -\frac{1}{7}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(2; -1), \left(\frac{12}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.

9. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Решение. Будем рассматривать второе уравнение системы как квадратное относительно x с коэффициентами, зависящими от y . Это позволит нам выразить x линейно через y и свести решение системы к квадратному уравнению относительно y .

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ \begin{cases} x = -2y, \\ x = -y - 2. \end{cases} \end{cases}$$

Данная система имеет три решения: $(0; 0), (2; -1), \left(-\frac{10}{7}; -\frac{4}{7}\right)$.

Ответ: $(0; 0), (2; -1), \left(-\frac{10}{7}; -\frac{4}{7}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить систему уравнений:

1. а)
$$\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ 2x - 3y = -13, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x + 5y = 20, \\ 6x + 10y = 7. \end{cases}$$

2. а)
$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x^2 - 3xy + 5y^2 = 3, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x^2 + 3y^2 = 5. \end{cases}$$

3. а)
$$\begin{cases} \frac{6}{x+y} + \frac{5}{x-y} = 7, \\ \frac{3}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{5}{x+2y} + \frac{8}{y} = 5, \\ \frac{10}{x+2y} - \frac{2}{y} = 1. \end{cases}$$

4. а)
$$\begin{cases} xy^3 + x^3y = -10, \\ x^2y^4 + x^4y^2 = 20, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^3y^4 + x^4y^3 = 24. \end{cases}$$

5. а)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - y^2 = 2, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

6. а)
$$\begin{cases} x - xy + y = 1, \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 11, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

7. а)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - x + 2y = 6, \\ 1,5x^2 + 3y^2 - x + 5y = 12, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x^2y - 9 = 0, \\ x - y - x^2y + 3 = 0. \end{cases}$$

8. а). При каких значениях a система
$$\begin{cases} (a+1)x + y = 3, \\ 2x - (a-2)y = 6 \end{cases}$$
 не имеет решений?

б). При каких значениях b система
$$\begin{cases} x - (b-1)y = 2, \\ (b+2)x + 2y = 4 + b^2 \end{cases}$$
 имеет бесчисленное множество решений?

9. Задание множества точек плоскости при помощи рациональных уравнений и неравенств с двумя неизвестными

Рациональное неравенство с двумя неизвестными может быть записано в виде $f(x, y) > 0$, где $f(x, y)$ – рациональное выражение, содержащее неизвестные x и y . Решением неравенства $f(x, y) > 0$ называется упорядоченная пара чисел (a, b) такая, что $f(a, b) > 0$ является верным числовым неравенством. Каждое решение неравенства с двумя неизвестными (так же как и каждое решение уравнения с двумя неизвестными) можно изобразить точкой плоскости прямоугольных декартовых координат Oxy , абсцисса которой равна a , а ордината равна b : $x = a$, $y = b$. Такая геометрическая интерпретация может оказаться очень полезной при решении некоторых алгебраических задач, например, уравнений и неравенств с параметрами. С другой стороны, возможность задавать плоские множества уравнениями и/или неравенствами позволяет решать геометрические задачи алгебраическими методами. Например, задача о взаимном расположении двух прямых на плоскости сводится к исследованию решения системы двух линейных уравнений.

Задачи с решениями

1. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, заданное неравенством $yx - x - 1 > 0$.

Решение.

Первый способ

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ y > 1 + \frac{1}{x}, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 0, \\ y < 1 + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Решением неравенства $x > 0$ является полуплоскость, расположенная правее прямой $x = 0$, т.е. правее оси Oy . Решением не-

равенства $y > 1 + \frac{1}{x}$ является множество точек плоскости, расположенных выше ветвей гиперболы $y = 1 + \frac{1}{x}$. Поэтому решением первой системы является множество точек правой полуплоскости, расположенных над правой ветвью гиперболы $y = 1 + \frac{1}{x}$. Аналогично, решением второй системы является множество точек левой полуплоскости, расположенных ниже левой ветви гиперболы $y = 1 + \frac{1}{x}$. Следовательно, решением данного неравенства с двумя неизвестными является множество точек плоскости, расположенных выше правой или ниже левой ветвей гиперболы $y = 1 + \frac{1}{x}$. Искомое множество точек отмечено штриховкой на рисунке 4.

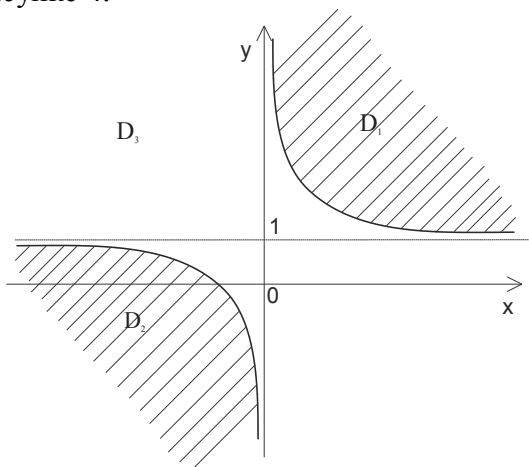


Рисунок 4

Второй способ

Неравенство с двумя неизвестными можно решить (т.е. найти плоское множество, задаваемое этим неравенством) при помощи метода, аналогичного методу интервалов решения неравенства с одной неизвестной. Заменим данное неравенство соответствующим уравнением $yx - x - 1 = 0$, которое равносильно

уравнению $y = 1 + \frac{1}{x}$. Решение этого уравнения с двумя неизвестными представляет собой множество точек гиперболы $y = 1 + \frac{1}{x}$, ветви которой разбивают плоскость Oxy на три области (рисунок 4): область D_1 (множество точек плоскости, расположенных выше правой ветви гиперболы), область D_2 (множество точек плоскости, расположенных ниже левой ветви гиперболы) и область D_3 (множество точек плоскости, расположенных между ветвями гиперболы). В каждой из этих областей левая часть данного неравенства, т.е. выражение $yx - x - 1$, сохраняет постоянный знак, который может быть определен при помощи одной точки, выбранной в каждой из указанных областей. В области D_1 выберем точку $(1; 3)$. Координаты этой точки $x = 1$ и $y = 3$ удовлетворяют данному неравенству: $3 \cdot 1 - 1 - 1 > 0$, поэтому и все точки области D_1 удовлетворяют данному неравенству. В области D_3 в качестве пробной точки удобно выбрать точку $(0; 0)$, которая не удовлетворяет данному неравенству, а, следовательно, ни одна точка области D_3 не удовлетворяет данному неравенству. Наконец, в области D_2 выбираем точку $(0; -3)$ и убеждаемся, что координаты этой точки удовлетворяют данному неравенству, а, следовательно, и все точки области D_2 удовлетворяют этому неравенству. Таким образом, решением неравенства $yx - x - 1 > 0$ является множество точек плоскости, представляющее собой объединение областей D_1 и D_2 .

2. Найти площадь области, координаты точек которой удовлетворяют неравенству $|x + 1| + |y - 1| \leq 3$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности четырёх систем:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ y-1 \geq 0, \\ x+1+y-1 \leq 3, \end{cases} & 2) \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ y-1 \leq 0, \\ x+1-y+1 \leq 3, \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x+1 \leq 0, \\ y-1 \geq 0, \\ -x-1+y-1 \leq 3, \end{cases} & 4) \begin{cases} x+1 \leq 0, \\ y-1 \leq 0, \\ -x-1-y+1 \leq 3. \end{cases}
 \end{array}$$

Решением неравенства $x+1 \geq 0$ является полуплоскость, расположенная правее прямой $x = -1$. Аналогично, решением неравенства $y-1 \geq 0$ является полуплоскость, расположенная выше прямой $y = 1$, а решением неравенства $x+1+y-1 \leq 3$ является полуплоскость, расположенная ниже прямой $x+y=3$ (во всех трёх случаях границы полуплоскостей, т.е. прямые $x = -1$, $y = 1$, $x+y=1$ также включаются в соответствующие решения).

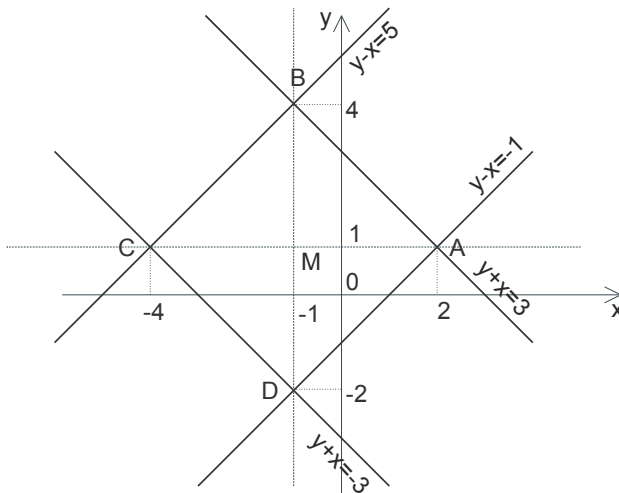


Рисунок 5

Пересечением указанных трёх полуплоскостей, т.е. решением первой системы, является прямоугольный равнобедренный треугольник с вершинами в точках $M(-1;1)$, $A(2;1)$ и $B(-1;4)$ (рисунок 5). Решениями второй, третьей и четвёртой систем являются соответственно треугольники MBC , MCD и MDA , рав-

ные треугольнику MAB . Эти четыре прямоугольных равнобедренных треугольника образуют квадрат $ABCD$, который и является решением данного неравенства. Площадь этого квадрата $S_{ABCD} = 4S_{MAB} = 2MA^2 = 18$.

Ответ: 18.

3. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y - ax + 2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Решение неравенства $x^2 + y^2 \leq 1$ представляет собой круг радиусом 1 с центром в начале координат, а решением уравнения $y - ax + 2 = 0$ или $y = ax - 2$ является прямая, которая при всех значениях параметра a проходит через точку $(0, -2)$ и имеет угловой коэффициент, равный a .

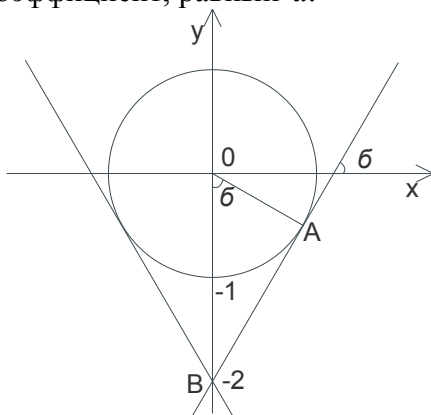


Рисунок 6

С геометрической точки зрения решить данную задачу – означает найти все значения углового коэффициента a , при которых прямая $y - ax + 2 = 0$ и круг $x^2 + y^2 \leq 1$ имеют единственную общую точку, т.е. при которых прямая $y = ax - 2$ является касательной к окружности $x^2 + y^2 = 1$. Так как из каждой точки, лежащей вне окружности, можно провести две различные касательные, то задача имеет два решения. Пусть α – угол, который

образует касательная с положительным направлением оси Ox (рисунок 6). Тогда $a = \operatorname{tg} \alpha$. Рассмотрим случай, когда α – острый угол. В силу равенства острых углов, стороны которых взаимно перпендикулярны, $\alpha = \angle BOA$. Поэтому из прямоугольного треугольника OAB имеем: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BA}{OA} = \frac{\sqrt{2^2 - 1^2}}{1} = \sqrt{3}$. Если α – тупой угол, то $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$. Таким образом, $a = \pm\sqrt{3}$.

Ответ: $a = \pm\sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют указанным соотношениям:

а) $y \leq 2x - 3$, б) $y \geq 2x^2 + 3x - 1$, в) $y^2 \geq -(x + 2)^2 + 1$,

г) $|y + 2| \geq 1$, д) $x^2 - 5xy + 6y^2 \geq 0$, е) $y - \frac{x+1}{x} \leq 0$,

ж) $\left| \frac{x}{y} \right| \leq 1$, з) $\begin{cases} y \leq |x + 2|, \\ |x| \leq 3, \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ y - x > 0. \end{cases}$

2. Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную указанным соотношением, и вычислите её площадь:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + y^2 \geq 1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y \leq 4, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ в) $x^2 + y^2 \leq 4x$, г) $|x - 2| + |y + 3| \leq 2$.

3. При каких значениях параметра a данная система имеет четыре решения:

а) $\begin{cases} |x| + |y| \leq 1, \\ x^2 + y^2 = a, \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - |x^2 - 4| = 0, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

Контрольная работа №2

«Рациональные уравнения, неравенства и системы»

Решить уравнения:

- 1) $(x-5)^2(x-1)-(x-8)^2(x-2)=103$,
 2) $\left(\frac{5x+1}{2x-3}\right)^2 + \left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)^2 = \frac{82}{9}$,
 3) $x^3 - 5x^2 - 2x + 16 = 0$, 4) $10x^4 - 29x^3 + 30x^2 - 29x + 10 = 0$.

Решить неравенства и системы неравенств:

- 5) $\frac{2x-1}{5} - \frac{1+3x}{3} < 2$, 6) $\begin{cases} 3x-5 < 0 \\ -7x-2 > 0 \end{cases}$, 7) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$,
 8) $(x^2 - 10x + 25)(2x - 4) \leq 0$, 9) $x^2 + 3x + 2 < (x^2 + 3x)^2$,
 10) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0, \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0, \end{cases}$ 11) $\frac{6}{x-1} < \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.

Решить уравнения:

- 12) $|3x+2| - |3-7x| = 4$, 13) $||x+3| - 5| = 2x+1$,
 14) $|x^2 - 3| + x^2 + x = 7$, 15) $x^2 - |x| - 12 = 0$.

Решить неравенства:

- 16) $||2x-3| - 4| > 3x$, 17) $|2x+3| - |5-3x| < 2$,
 18) $x^2 + |x-1| \leq 5$, 19) $|2x^2 - 3x + 1| \leq x-1$.

Решить системы уравнений:

- 20) $\begin{cases} \frac{7x-3y}{5} = \frac{5x-y}{3} - \frac{x+y}{2}, \\ \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{3}, \end{cases}$ 21) $\begin{cases} \frac{5}{x-2y} + \frac{8}{x} = 2, \\ \frac{10}{x-2y} - \frac{2}{x} = 22, \end{cases}$
 22) $\begin{cases} x-3y=0, \\ x^2+5xy+7y^2=31, \end{cases}$ 23) $\begin{cases} (x+y)^3(x-y)^2=27, \\ (x-y)^3(x+y)^2=9, \end{cases}$

$$24) \begin{cases} x^2 + y^2 + 5x + 5y + 3xy = 15, \\ x^2 + y^2 - x - y + xy = 1, \end{cases} \quad 25) \begin{cases} 5x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ 3x^2 - 3xy - 3y^2 = 1. \end{cases}$$

26). Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 3x + 7y = 20, \\ ax + 14y = 15 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Изобразить на плоскости множества точек, удовлетворяющих данным неравенствам или системам неравенств:

$$27) y + 3x < 1,$$

$$28) y \geq x^2 - 4x + 3,$$

$$29) (y+1)^2 \geq -(x-2)^2 + 4, \quad 30) |y-3| \leq 2,$$

$$31) x^2 - 2xy - 3y^2 \leq 0, \quad 32) \left| \frac{y}{x} \right| \leq 2,$$

$$33) \begin{cases} y \leq |x+1|, \\ |x| \leq 2, \end{cases} \quad 34) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

35). Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ 4y - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

36). При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y - x^2 = a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет три решения?

Замечание. Правильное решение каждой из задач 5, 6, 7, 12, 20, 21, 22 и 27 оценивается 2 баллами, а каждой из остальных задач – тремя баллами.

Тест № 2

«Рациональные уравнения, неравенства и системы»

1	Уравнение $- x+2 +a x =x^2-2a$ имеет корнем число -3 , если a равно А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5
2	Корнем уравнения $\frac{5}{x} + \frac{13}{2x} = 4$ является А) 1 Б) 2,125 В) 3,375 Г) 2,875 Д) 1,125
3	Расстояние между корнями уравнения $14x^2 - 5x - 1 = 0$ равно А) $\frac{3}{14}$ Б) $\frac{11}{14}$ В) $\frac{5}{14}$ Г) $\frac{9}{14}$ Д) $\frac{13}{14}$
4	Отношение корней уравнения $x^2 + bx + 2 = 0$ равно 2 при следующих значениях b А) ± 6 Б) ± 2 В) ± 3 Г) ± 4 Д) ± 5
5	Оба корня уравнения $x^2 - ax + 1 + x = a^2$ равны нулю при a , равном А) ± 1 Б) 1 В) ± 2 Г) 2 Д) -1
6	Корнем уравнения $ax + 3a + 2(x-1) = 3x + a^2$ является любое число, если a равно А) 1 Б) 2 В) 3 Г) -1 Д) -2
7	Сумма всех корней уравнения $x^2 - 3 x + 2 = 0$ равна А) 3 Б) 4 В) -1 Г) -2 Д) 0
8	Уравнение $x^2 - 2ax + 4 = 0$ имеет действительные корни при А) $a \geq \pm 2$ Б) $a \leq \pm 2$ В) $ a \geq 2$ Г) $ a < 2$ Д) $a \geq -2$
9	Решением уравнения $\sqrt{2}x + \sqrt{6} = \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}}$ является число А) $-\sqrt{2}$ Б) $-\sqrt{3}$ В) $\sqrt{3}$ Г) $\sqrt{2}$ Д) $\sqrt{4}$

10	Уравнение $(x^4 - 16) \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = 0$ имеет А) 1 корень Б) 2 корня В) 3 корня Г) 4 корня Д) нет корней
11	Для уравнения $x^2 - 8x + 1 = 0$ с корнями x_1 и x_2 вычислить $x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2$ А) -8 Б) 8 В) -5 Г) 5 Д) 4,5
12	Если $\begin{cases} \frac{y}{x} = 0, (2), \\ 2x - y = 32, \end{cases}$ то разность $y - x$ равна А) -10 Б) -14 В) 10 Г) 14 Д) 12
13	Произведение корней уравнения $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = (x + 1)(x - 5)(x - 1)$ равно А) -26 Б) -68 В) -6,4 Г) $-\frac{15}{6}$ Д) -2,6
14	Сумма $x + y$ решения (x, y) системы уравнений $\begin{cases} 0,7x + 0,3y = 2,7, \\ 13x + 17y = -67 \end{cases}$ равна А) 1 Б) 2 В) -1 Г) -2 Д) 3
15	Сумма корней уравнения $100x^3 + 199x^2 = -99x$ составляет А) 0,01 Б) -0,01 В) 1,99 Г) -1,99 Д) 99
16	Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + x - 2 = 0$ равна А) 2 Б) 4 В) 6 Г) 8 Д) 0
17	Сумма корней уравнения $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-3}{x-1} = \frac{5}{2}$ равна А) 1 Б) -1 В) 3 Г) 4 Д) -3
18	Сумма действительных корней уравнения $(x - 2)^2 (x^2 - 4x + 3) = 12$ равна А) -3 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 0

19	Уравнением, корни которого на 1 больше корней уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$, является А) $x^2 - 6x + 5 = 0$ Б) $x^2 - 7x + 5 = 0$ В) $x^2 - 6x + 4 = 0$ Г) $x^2 - 5x + 3 = 0$ Д) $x^2 - 4x + 2 = 0$
20	Функция $y = \sqrt{x^2 - 4}$ определена при всех следующих x А) $x \geq \pm 2$ Б) $x \leq \pm 2$ В) $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ Г) $x \in [-2; 2]$ Д) $x \in [0; +\infty)$
21	Сумма целых решений неравенства $2x + 12 + x \geq -2x$ на промежутке $[-5; -1]$ равна А) -7 Б) -5 В) -9 Г) -10 Д) -15
22	По отношению к прямой $y = \sqrt{5}x + \sqrt{10}$ точки $A(1; 5)$ и $B(2; 8)$ расположены следующим образом А) обе – ниже Б) A – выше, B – ниже В) обе – выше Г) A – ниже, B – выше Д) A – на прямой, B – ниже.
23	Прямые $2x + y - 1 = 0$ и $y - x + a = 0$ пересекаются во втором координатном угле, если А) $a > -1$ Б) $a < -1$ В) $0 < a < 1$ Г) $a > 1$ Д) такое невозможно.
24	Если $a + 2b = 2$ и $2 < a < 4$, то значения b заключены в промежутке А) $(-1; 0)$ Б) $(0; 1)$ В) $(-2; 0)$ Г) $(4; 6)$ Д) $(1; 2)$
25	Площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $y = 2a^2 - a^2x$ ($a \neq 0$), больше 18, если А) $a < \pm 3$ Б) $a \geq \pm 3$ В) $a > 3$ Г) $a < 3$ Д) $a > 2$
26	Система неравенств $\begin{cases} 0,3x + 0,4 < 0,7x - 0,8, \\ 3 + x > a + 4x - 1 \end{cases}$ не имеет решений, если А) $-7 < a < 7$ Б) $a \leq 7$ В) $a > 7$ Г) $a < -5$ Д) $a \geq -5$

27	Если $a < 0$, то неравенство $\frac{3}{x} > \frac{1}{ a }$ эквивалентно неравенству А) $x < 3a$ Б) $-3a > x > 0$ В) $0 < x < 3a$ Г) $x > 3a$ Д) $x < 0, x > 3a$.
28	Парабола $y = -x^2 + 3x + a$ полностью расположена ниже прямой $y = x + 2$, если А) $a \leq 9$ Б) $a < 1$ В) $a > 1$ Г) $a \leq 1$ Д) $a \geq 2$
29	Все решения неравенства $\frac{x}{ x } \geq x^3$ образуют множество А) $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$ Б) $(0; 1) \cup [2; +\infty)$ В) $(-\infty; 0) \cup (1; 2]$ Г) $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$ Д) $(1; 2]$
30	Наибольшее значение выражения $10 - x^2 - 2x - y^2 + 4y$ равно А) 11 Б) 12 В) 13 Г) 14 Д) 15
31	Множество всех решений неравенства $(x+1)^{-1} < (x-3)^{-1}$ равно А) $(-\infty; +\infty)$ Б) $(-1; 3)$ В) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ Г) $(3; +\infty)$ Д) $(-1; +\infty)$
32	Если $16 < a < 32$, $-8 < b < -4$, то частное $\frac{a}{b}$ заключено в промежутке А) $(-2; 8)$ Б) $(2; 8)$ В) $(-8; -2)$ Г) $(-8; 2)$ Д) $(-4; 16)$
33	Указать промежутки, в каждой точке которого справедливо неравенство $(1 - \sqrt{3})x > \sqrt{3} + 1$ А) $(-2 - 2\sqrt{2}; +\infty)$ Б) $(-4 - 2\sqrt{3}; +\infty)$ В) $(-\sqrt{2}; +\infty)$ Г) $(-\sqrt{3}; +\infty)$ Д) $(-\infty; -8)$

34	Уравнение $x^2 - 2ax + 9 = 0$ не имеет действительных корней при всех a, удовлетворяющих условию А) $a < \pm 3$ Б) $a > 3$ В) $a \in (-3; 3)$ Г) $a \in (-4; \sqrt{3})$ Д) $a < -3$.
35	Область определения функции $y = \sqrt{(x+5)(15+2x-x^2)}$ совпадает с множеством А) $(-\infty; -5] \cup [3; 5]$ Б) $[-5; 3] \cup [5; +\infty)$ В) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$ Г) $(-\infty; 3]$ Д) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$
36	Площадь фигуры, заданной системой неравенств $y \geq x-1$, $y \leq 3- x$ равна А) 8 Б) $2\sqrt{2}$ В) $3\sqrt{2}$ Г) 4 Д) $4\sqrt{2}$
37	Сумма координат точки пересечения прямых $1,4x + 0,8y = -0,25$ и $16x + 22y = a$ положительна, если А) $a < -7$ Б) $a > 2,5$ В) $-1 < a < 2$ Г) $a > -2$ Д) $a < -3$.
38	Функция $y = \sqrt{4 + 2ax + ax^2}$ определена на всей числовой оси, если А) $a \leq 4$ Б) $a \geq 4$ В) $0 \geq a \geq -4$ Г) $a > 0$ Д) $0 \leq a \leq 4$
39	Наибольшим целым решением неравенства $\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}{6} - 1 \right) (5x - 16) < 0$ является А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) такого числа не существует
40	Множество значений функции $y = \sqrt{x^2 - 4x + 8} - 1$ равно А) $[-1; 1]$ Б) $(-\infty; 1]$ В) $(-\infty; -1]$ Г) $[1; +\infty)$ Д) $[-1; +\infty)$
41	Все решения неравенства $3x - x^2 \leq x$ образуют множество А) $[0; 2]$ Б) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ В) $[2; +\infty)$ Г) $[2; 3]$ Д) $[0; 3]$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

2. Линейные и квадратные уравнения

1. а) $-\frac{13}{7}$, б) $1; -\frac{4}{3}$, в) $\emptyset$, г) 3. 2. а) 7, б) 7, в) 18, г) 47. 3. а) 2,25, б) -2,25, в) 1,625, г) 3,0625. 4. 0. 5. -1. 6. а) если $a=1$, то $x \in R$; если $a=2$, то $x \in \emptyset$; если $a \neq 1$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a-2}$, б) если $a = -\frac{1}{3}$ или $a = -1$, то $x = -1$, если $a \neq -\frac{1}{3}$ и $a \neq -1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2a}{a+1}$.

3. Рациональные уравнения с одной неизвестной

1. а) $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$, б) 2; $\pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{3}}$. 2. а) 1, б) -2; $\frac{1}{2}; \pm\sqrt{3}$. 3. а) $\pm 1; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, б) -1; -2. 4. а) $-\frac{1}{2}; 2; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, б) -3; $-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2$. 5. а) -4; 5, б) -4; 3; $\frac{-1\pm\sqrt{145}}{2}$. 6. а) -1; -0,5; 2; 4, б) $1; \frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$. 7. а) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, б) $-1\pm\sqrt{5}$. 8. а) -3; -5, б) 6. 9. а) 4,5, б) 3.

4. Линейные и квадратные неравенства

1. а) $(1,25; +\infty)$, б) $(0,75; +\infty)$, в) $\left(-\infty; -\frac{11}{3}\right) \cup (2; +\infty)$, г) $[-0,5; 9]$, д) $(-\infty; +\infty)$. 2. а) $[0; 2)$, б) $(-2; -1] \cup [3; 5)$. 3. а) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$, б) 0,5. 4. а) $(-\infty; 3,5]$, б) $(0; +\infty)$. 5. а) если $a=1$, то $x \in \emptyset$; если $a \neq 1$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{1-a}\right)$, б) если $a=3$ или $a=4$, то $x \in \emptyset$; если $a \in (3; 4)$, то $x < \frac{1}{3-a}$; если $a \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$, то $x > \frac{1}{3-a}$, в) если $a=1$, то $x \in R$; если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1] \cup [a; +\infty)$; если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a] \cup [1; +\infty)$, г) если $a=0$, то $x \in \emptyset$; если $a < 0$, то $x \in (a; 0)$; если $a > 0$, то $x \in (0; a)$.

5. Метод интервалов решения рациональных неравенств

1. а) $(-2; 3) \cup (3; 5)$, б) $(-\infty; -5] \cup [7; +\infty) \cup \{-3\}$. 2. а) $(1; +\infty)$, б) $\left[\frac{7-\sqrt{87}}{2}; -1\right] \cup \left[8; \frac{7+\sqrt{87}}{2}\right]$. 3. а) $(-6; 0,5) \cup (0,5; 2)$, б) $(-5; -0,75) \cup (1; 2)$. 4. а) $(-\infty; -2] \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \{1\}$, б) $(-1; 4] \cup \{-2\}$,

в) $(-\infty; -0,5] \cup \{1\}$, г) $[-6; 0) \cup (6; +\infty) \cup \{3\}$. 5. а) $(-4; 1)$,

б) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; 1)$.

6. Уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля

1. а) 0,8; 6, б) $(-\infty; 1,5]$, в) $-2; -2\sqrt{2}$. 2. а) $[1; +\infty)$, б) $[-1; 0] \cup \{-4\}$.

3. а) 0; 0,75, б) 1; $-0,5 \cdot (5 + \sqrt{33})$. 4. а) $[0,5; 3]$, б) $0; 1 - \sqrt{5}$.

7. Неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля

2. а) $\left(-12; \frac{2}{3}\right)$, б) $(-\infty; 1,5]$, в) $(0; +\infty)$. 3. а) $(-\infty; +\infty)$,

б) $(-\infty; 2,2) \cup (3; +\infty)$. 4. а) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$, б) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$,

в) $(-\infty; -11) \cup (11; +\infty)$. 5. а) $(-\infty; -\sqrt[3]{6})$, б) $[-4; +\infty)$.

8. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными

1. а) $(-2; 3)$, б) $\emptyset$. 2. а) $(1; 1), (2, 2; 0, 4)$, б) $(1; 1)$. 3. а) $(2; 1)$, б) $(1; 2)$.

4. а) $(2; -1), (-2; 1), (1; -2), (-1; 2)$, б) $(2; 1), (1; 2)$. 5. а) $(1; 1), (-1; -1)$,

б) $(1; 1), (-1; -1)$. 6. а) $(1; 2), (2; 1), (1; -4), (-4; 1)$, б) $(2; 1), (1; 2)$. 7. а) $(2; 1)$,

$\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$, б) $(2; 1), (0; 3), (-3; 0)$. 8. а) 1, б) 0.

9. Задание множества точек плоскости при помощи рациональных уравнений и неравенств с двумя неизвестными

2. а) 3π , б) 4, в) 4π , г) 8. 3. а) 1, б) $[\sqrt{2}; 2)$.

Библиографический список

1. Захарійченко Ю.О. Математика: Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / Ю.О. Захарійченко, О.В. Шкільний. – К.: Генеза, 2008. – 104 с.
2. Титаренко О.М. Математика. Самовчитель майбутнього студента / О.М. Титаренко, О.М. Роганін. – Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2007. – 448 с.
3. Шутовский О.М. Тестирование. Математика / О.М. Шутовский, Ю.В. Човник, Л.В. Колесникова. – К.: Мастер-класс, 2007. – 160 с.
4. Шарыгин И.Ю. Математика для школьников старших классов / И.Ю. Шарыгин. – М.: Дрофа, 1995. – 496 с.
5. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы: учебное пособие / под ред. Сканави М.И. – 3-е издание дополненное. – М.: Высшая школа, 1978. – 519 с.

