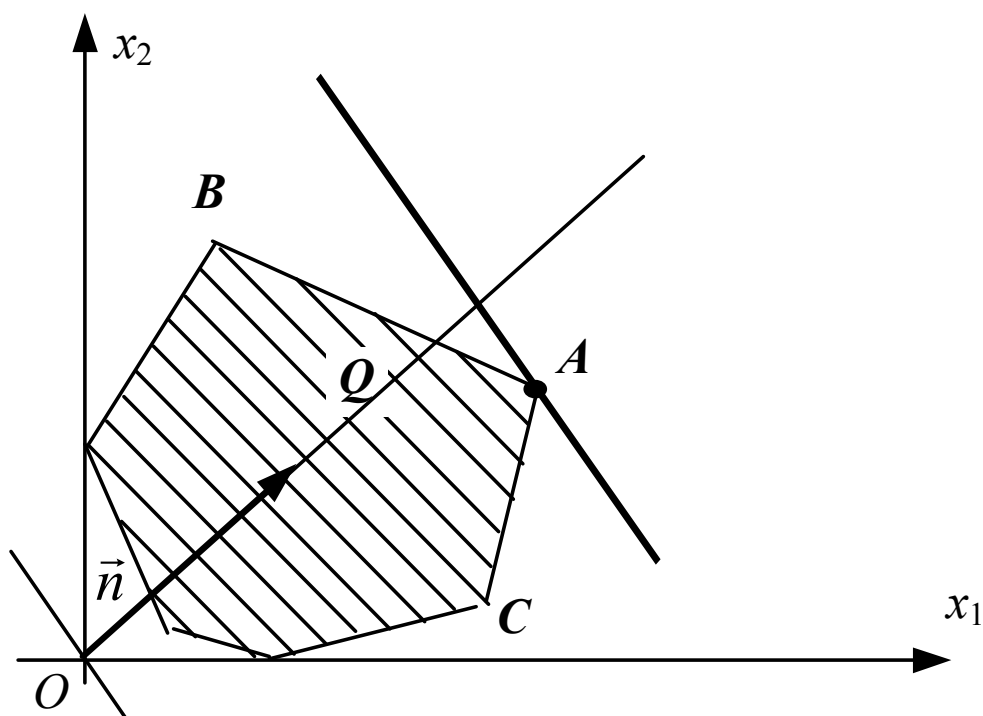


МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

**Методические указания
и варианты контрольных заданий
для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения**



Севастополь
2003

Методические указания и варианты контрольных заданий по курсу «Математическое программирование» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / Разраб. С.О. Папков, Н.Г. Плаксина. – Севастополь: СевНТУ, 2003. - 34 с.

Настоящее пособие предназначено для студентов экономических специальностей заочной формы обучения, изучающих курс высшей математики на втором курсе в четвертом семестре. Оно содержит материалы, необходимые для выполнения контрольной работы и подготовки к сдаче экзаменов:

- вопросы к экзаменам;
- контрольные задания для самостоятельной работы (десять вариантов);
- краткие ответы на все теоретические вопросы, вынесенные на экзамены;
- примеры выполнения контрольных заданий.

Для более глубокого изучения теоретического курса рекомендуется следующая учебная литература [1, 2, 3, 4, 5], приведенная в библиографическом списке данного учебного пособия.

Номер варианта контрольных заданий совпадает с последней цифрой номера студенческого билета (зачетной книжки). Вариант №10 соответствует нулю в конце номера студенческого билета.

Методические указания утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № 3 от 17 ноября 2003 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Песчанский А.И., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

Вопросы к экзамену за IV семестр	4
Задания для контрольной работы за IV семестр	5
Краткие сведения по курсу «Математическое программирование».....	9
1. ПРЕДМЕТ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ».....	9
2. ГРАФИЧЕСКИЙ И СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	10
2.1. Постановка задачи линейного программирования	10
2.2. Геометрическая интерпретация задач ЛП. Графический метод.....	11
2.3. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Жордана-Гаусса.....	14
2.4. Канонический вид системы ограничений задачи ЛП. Искусственный базис.....	17
2.5. Симплекс-метод решения задач ЛП.....	18
3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО КРИТЕРИЮ СТОИМОСТИ	25
3.1. Основные определения.....	25
3.2. Метод потенциалов нахождения оптимального решения транспортной задачи.....	28
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	34

Вопросы к экзамену за IV семестр

1. Предмет дисциплины «Математическое программирование».
2. Целевая функция. Допустимое множество.
3. Постановка задачи линейного программирования (ЛП).
4. Геометрическая интерпретация задач ЛП.
5. Графический метод.
6. Метод Жордана-Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений.
7. Стандартный и канонический вид ограничений задачи ЛП.
8. Метод искусственного базиса.
9. Базисное и опорное решение задачи ЛП.
10. Критерий оптимальности опорного решения, критерий неограниченности целевой функции.
11. Расчет симплекс-таблицы относительно разрешающего элемента.
12. Алгоритм симплекс-метода.
13. Общая постановка транспортной задачи ЛП.
14. Уравнение баланса. Случай не выполнения уравнения баланса.
15. Метод северо-западного угла определения опорного решения ТЗ.
16. Потенциалы.
17. Построение цикла. Перераспределение перевозок по циклу.
18. Алгоритм метода потенциалов.

Задания для контрольной работы за IV семестр

Задание №1. Найти методом Жордана-Гаусса общее решение системы линейных алгебраических уравнений в базисе $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$.

1.1 Базис $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 - 9x_4 - x_5 \\ x_2 &= 3 - 10x_4 - x_5 \\ x_3 &= 14 - 30x_4 - 2x_5 \end{aligned}$$

1.2 Базис $\{x_1, x_2, x_4\}$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,4 + 1,2x_3 + 0,6x_5 \\ x_2 &= 0,2 - 0,6x_3 + 0,2x_5 \\ x_4 &= 0,2 + 1,4x_3 + 1,2x_5 \end{aligned}$$

1.3 Базис $\{x_1, x_2, x_5\}$

$$\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x_1 &= -6 + 2x_3 + 13x_4 \\ x_2 &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= -\frac{9}{4} + \frac{5}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4 \end{aligned}$$

1.4 Базис $\{x_1, x_3, x_4\}$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 5 \\ -2x_1 + 8x_2 + 4x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 - 5x_5 = -5 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2,5 + 4x_2 + 2x_5 \\ x_3 &= 15 - 1,5x_2 - 7,5x_5 \\ x_4 &= -4,5x_2 + 0,5x_5 \end{aligned}$$

1.5 Базис $\{x_1, x_3, x_5\}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ -2x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 8x_5 = -4 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x_1 &= 13 - 29x_2 - 11x_4 \\ x_3 &= 7,5 - 20,5x_2 - 5,5x_4 \\ x_5 &= 3,5 - 5,5x_4 - 2,5x_5 \end{aligned}$$

1.6 Базис $\{x_1, x_4, x_5\}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = -3 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x_1 &= -6 - 48x_2 - x_3 \\ x_4 &= 11x_2 + x_3 \\ x_5 &= -3 - 24x_2 - x_3 \end{aligned}$$

1.7 Базис $\{x_2, x_3, x_4\}$

Ответ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$$

1.8 Базис $\{x_2, x_3, x_5\}$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

1.9 Базис $\{x_2, x_4, x_5\}$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -6 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = -3 \end{cases}$$

1.10 Базис $\{x_3, x_4, x_5\}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_2 = -3 - x_1 - 5x_5$$

$$x_3 = 5 - 2x_1 + 3x_5$$

$$x_4 = 6,5 - 1,5x_1 + 7,5x_5$$

Ответ:

$$x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{4}x_4$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} + x_1 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_4$$

Ответ:

$$x_2 = 3,5 + 1,5x_1 - 0,5x_3$$

$$x_4 = 5 + 6x_1$$

$$x_5 = -2 - 3x_1 + x_3$$

Ответ:

$$x_3 = 3 + x_1 + 3x_2$$

$$x_4 = 1 + 3x_1 + 2x_2$$

$$x_5 = 8 + 4,5x_1 + 9x_2$$

Задание №2. Предприятие выпускает два вида продукции A и B , для производства которых располагает тремя видами сырья. Количество сырья каждого из трех типов расходуемое на производство 1 т. продукции вида A и B , а также общие запасы сырья даны в таблице 1:

Таблица 1

	Сырье		
	I	II	III
Продукция А	α_1	α_2	α_3
Продукция В	β_1	β_2	β_3
Запасы сырья	b_1	b_2	b_3

Кроме того известно, что предприятие обязано выпустить не менее γ_1 т. продукции вида A и не менее γ_2 т. продукции вида B . Цена реализации 1 тонны продукции вида A составляет c_1 тыс. денежных единиц, цена реализации 1 тонны продукции вида B – c_2 тыс. денежных единиц.

Значения параметров задачи в зависимости от номера варианта приведены в нижеследующей таблице 2:

Таблица 2

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_1	108	100	60	140	120	168	60	90	160	60
b_2	80	160	80	100	180	150	180	100	160	110
b_3	100	120	160	90	150	270	140	120	100	100
α_1	3	5	4	10	8	7	4	9	20	3
α_2	5	5	4	4	9	6	9	5	10	5
α_3	10	8	5	2	5	9	5	4	10	4
β_1	6	5	3	7	4	4	3	3	5	2
β_2	4	10	8	10	10	5	12	5	10	5
β_3	4	4	20	10	10	10	10	8	5	5
γ_1	1	6	2	4	1	2	3	2	1	8
γ_2	5	4	2	5	9	6	6	4	3	5
c_1	2	2	1	3	3	4	4	5	1	5
c_2	1	3	3	9	2	2	4	5	6	6

Требуется:

А) Построить математическую модель задачи.

Б) Найти оптимальный план производства (при котором достигается наибольшая прибыль от реализации) с помощью графического метода.

В) Найти оптимальный план производства с помощью симплекс-метода. Сравнить с решением, полученным графическим методом.

Задание №3. На основании приведенных ниже данных, используя метод потенциалов, составить оптимальный план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок Z является наименьшей. Исходный опорный план составить по методу северо-западного угла. Пояснить полученное решение.

Обозначения:

$a_1, a_2, \dots, a_m$ - количество груза в пунктах отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$;

$b_1, b_2, \dots, b_n$ - количество груза, требующееся в пунктах назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$;

$\|c_{ij}\|_{m \times n}$ - матрица стоимости перевозок единицы груза от каждого i – го поставщика к каждому j – ому получателю.

3.1.

$$a_1 = 60; \quad a_2 = 120; \quad a_3 = 120;$$

$$b_1 = 70; \quad b_2 = 90; \quad b_3 = 100; \quad b_4 = 40.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.2.

$$a_1 = 50; \quad a_2 = 80; \quad a_3 = 120;$$

$$b_1 = 40; \quad b_2 = 60; \quad b_3 = 80; \quad b_4 = 70.$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.3.

$$a_1 = 30; \quad a_2 = 70; \quad a_3 = 100;$$

$$b_1 = 40; \quad b_2 = 50; \quad b_3 = 70; \quad b_4 = 40.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.4.

$$a_1 = 40; \quad a_2 = 70; \quad a_3 = 90;$$

$$b_1 = 30; \quad b_2 = 50; \quad b_3 = 65; \quad b_4 = 55.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.5.

$$a_1 = 45; \quad a_2 = 63; \quad a_3 = 92;$$

$$b_1 = 14; \quad b_2 = 36; \quad b_3 = 110; \quad b_4 = 40.$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 5 & 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.6.

$$a_1 = 75; \quad a_2 = 50; \quad a_3 = 80;$$

$$b_1 = 30; \quad b_2 = 70; \quad b_3 = 70; \quad b_4 = 35.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.7.

$$a_1 = 50; \quad a_2 = 40; \quad a_3 = 80;$$

$$b_1 = 20; \quad b_2 = 50; \quad b_3 = 60; \quad b_4 = 40.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.8.

$$a_1 = 100; \quad a_2 = 150; \quad a_3 = 75;$$

$$b_1 = 125; \quad b_2 = 60; \quad b_3 = 40; \quad b_4 = 100.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.9.

$$a_1 = 60; \quad a_2 = 180; \quad a_3 = 60;$$

$$b_1 = 100; \quad b_2 = 70; \quad b_3 = 60; \quad b_4 = 70.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.10.

$$a_1 = 90; \quad a_2 = 110; \quad a_3 = 150;$$

$$b_1 = 100; \quad b_2 = 120; \quad b_3 = 90; \quad b_4 = 40.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Краткие сведения по курсу «математическое программирование»

1. ПРЕДМЕТ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Математическое программирование – математическая дисциплина, в которой рассматриваются задачи отыскания экстремальных значений функций среди множества ее возможных значений, определяемых некоторыми ограничениями.

В качестве ограничений в общем случае может быть задана система уравнений или неравенств, требование целочисленности решения. Наличие ограничений делает задачи математического программирования принципиально отличными от задач классического математического анализа. В общем случае задачу математического программирования можно сформулировать следующим образом: необходимо найти экстремальное (наибольшее или наименьшее) значение функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Исследуемая на экстремум функция F называется целевой. Система ограничений (2) определяет некоторую область Q в пространстве значений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называемую допустимым множеством. Вместо знака $\leq$ в неравенствах (2) может также стоять $\geq, <, >, =$.

Если функции F и f_i являются линейными относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$ и отсутствует требование целочисленности решения, то данная задача математического программирования относится к задачам линейного программирования (сокращенно ЛП).

Отметим также, что к задачам ЛП сводится большое число прикладных задач экономики. Линейное программирование находит широкое применение в таких отраслях как энергетика, металлургия, нефтяная индустрия, сельское хозяйство и др.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Условие. Предприятие выпускает два вида продукции A и B , для производства которых располагает тремя видами сырья в следующем количестве: сырья I типа имеется 180 т, сырья II типа – 140 т и сырья III типа - 150 т. Для производства 1 тонны продукции вида A требуется 10 т. сырья I типа, 7 т. сырья II типа, 5 т. сырья III типа. Аналогично, для производства 1 тонны продукции вида B требуется 5 т. сырья I типа, 7 т. сырья II типа 10 т. сырья III типа. Кроме того известно, что предприятие обязано выпустить не менее 6 т. продукции вида A и не менее 4 т. продукции вида B . Цена реализации 1 тонны

продукции вида A составляет 5 тыс. денежных единиц, цена реализации 1 тонны продукции вида B – 2 тыс. денежных единиц.

Требуется определить оптимальный план производства, при котором достигается максимальная прибыль.

Построение математической модели. Обозначим как x_1 (т.) объем выпущенной продукции вида A и как x_2 (т.) объем выпущенной продукции вида B . Функция прибыли является целевой для данной задачи и имеет согласно условию следующий вид

$$z = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

Ограничения на имеющиеся запасы сырья дают следующие неравенства.

Для сырья I типа: $10x_1 + 5x_2 \leq 180$.

Для сырья II типа: $7x_1 + 7x_2 \leq 140$.

Для сырья III типа: $5x_1 + 10x_2 \leq 150$.

Кроме того, предприятие обязано выпустить не менее 6 т. продукции вида A , то есть $x_1 \geq 6$, и не менее 4 т. продукции вида B , то есть $x_2 \geq 4$.

Можно увидеть, что согласно данному выше определению исследование на $\max$ построенной целевой функции при данных ограничениях представляет собой задачу линейного программирования.

2. ГРАФИЧЕСКИЙ И СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Постановка задачи линейного программирования

В общем случае задача ЛП сводится к отысканию n значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих некоторой системе ограничений и соответствующих минимальному значению целевой функции:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (3)$$

При отыскании максимального значения целевой функции достаточно изменить знаки коэффициентов c_i на противоположные:

$$z^* = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \rightarrow \max.$$

Для определенности положим, что допустимое множество Q задает система неравенств вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (4)$$

Действительно, если среди неравенств, задающих допустимое множество, встречается неравенство со знаком " $\geq$ " то достаточно умножить обе его части на -1 , чтобы привести данное неравенство к виду (4).

При формулировании общей задачи ЛП на независимые переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ также часто накладывается требование неотрицательности:

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если в некоторой задаче ЛП данное условие не выполняется, то переходят к новым неотрицательным переменным $y_i \geq 0, z_i \geq 0$, где $x_i = y_i - z_i$.

2.2. Геометрическая интерпретация задач ЛП. Графический метод

В задачах ЛП с двумя независимыми переменными удобным методом решения является графический метод.

Проанализируем систему ограничений задачи ЛП. Вначале вернемся к рассмотренному примеру:

$$z = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \quad (5)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \leq 180, \\ 7x_1 + 7x_2 \leq 140, \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 150, \\ x_1 \geq 6, \quad x_2 \geq 4. \end{cases} \quad (6)$$

Из курса аналитической геометрии (материал I семестра) известно, что каждое из неравенств в системе ограничений (6) определяет в плоскости координат (x_1, x_2) полуплоскость. Для удобства построения запишем первые три неравенства, поделив на свободные члены, в этом случае прямая задающая границу полуплоскости будет записана в отрезках.

$$\begin{cases} \frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{36} \leq 1, \\ \frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{20} \leq 1, \\ \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{15} \leq 1, \\ x_1 \geq 6, \quad x_2 \geq 4. \end{cases}$$

На рисунке 1 представлено допустимое множество Q , заданное системой неравенств (6). Видим, что допустимое множество в данном случае представляет собой многоугольник.

В общем случае, каждое из неравенств (4)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

определяет некоторое полупространство в координатах $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Таким образом, допустимое множество задачи линейного программирования – выпуклое многогранное множество. Если же оно ограничено, то представляет собой выпуклый многогранник.

Рассмотрим целевую функцию $z = c_1x_1 + c_2x_2$. Ее также можно рассматривать как прямую в плоскости x_1Ox_2 со свободным членом z :

$$c_1x_1 + c_2x_2 - z = 0.$$

При различных значениях z получаем совокупность параллельных прямых определенных нормалью $\vec{n}(c_1, c_2)$, которая в рассмотренном примере равна $\vec{n}(5, 2)$.

Запишем теперь целевую функцию как прямую в отрезках ($z \neq 0$):

$$\frac{x_1}{z/c_1} + \frac{x_2}{z/c_2} = 1.$$

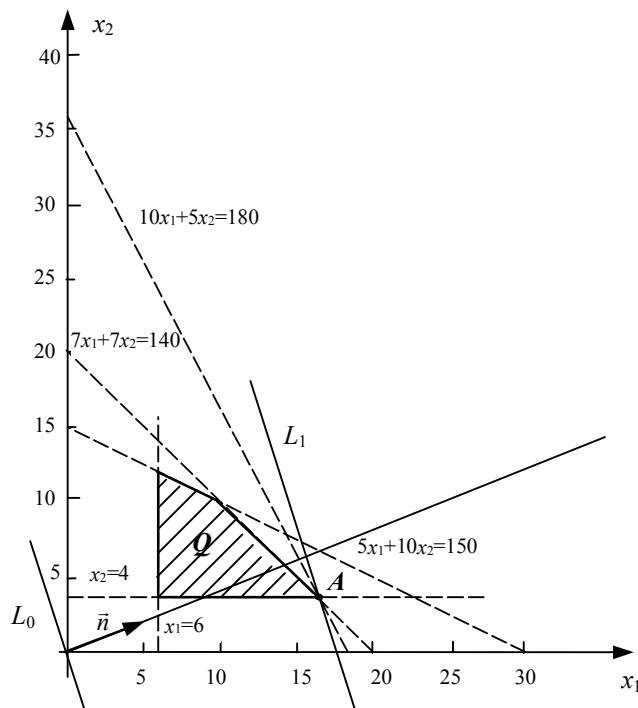


Рисунок 1 – Допустимое множество Q в рассмотренном примере, графический метод решения

Получаем что, увеличение z приводит к увеличению по абсолютной величине отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. То есть, с ростом z прямая целевой функции передвигается параллельно себе в направлении нормали. На рисунке 1 прямая $L_0: 5x_1 + 2x_2 = 0$ соответствует значению целевой функции $z=0$, прямая L_1 - наибольшему значению целевой функции. Действительно, если передвигать прямую целевой функции дальше в направлении нормали $\vec{n}$, то теряем общие точки с допустимым множеством Q . Если же прямую целевой функции передвигать в обратную от $\vec{n}$ сторону, то значение целевой функции будет заведомо уменьшаться.

В рассмотренном примере оптимальное значение достигается в точке A (16; 4), координаты которой можно найти как координаты точки пересечения соответствующих прямых:

$$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 = 140 \\ x_2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Максимальное значение целевой функции $z_{\max} = 5x_1^* + 2x_2^* = 5 \cdot 16 + 2 \cdot 4 = 88$.

Таким образом, поставленная в первом разделе задача решена: оптимальный план производства достигается при выпуске 16 т. продукции вида A и 4 т. продукции вида B , что обеспечивает максимально возможную прибыль в 88 тыс. денежных единиц.

Подводя итог, можно заключить, что задача отыскания $\max$ целевой функции $z = c_1x_1 + c_2x_2$ ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) сводится к задаче отыскания координат точки допустимого множества Q максимально удаленной от прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ ($z = 0$).

Алгоритм графического метода состоит из следующих этапов:

1. Строится допустимое множество Q , если оно пусто, то задача не имеет решения.
2. Откладывается от начала координат нормаль целевой функции $\vec{n}(c_1, c_2)$.
3. Перпендикулярно нормали $\vec{n}$ проводится прямая в направлении нормали для задачи $\max$ (или обратном нормали для задачи $\min$) таким образом, чтобы имелись общие точки с Q в «крайнем положении».
4. Возможны следующие случаи:
 - а) Если допустимое множество Q неограниченно в направлении передвижения прямой, то конечного решения задачи не существует, и говорят, что целевая функция неограниченна (рисунок 2а).

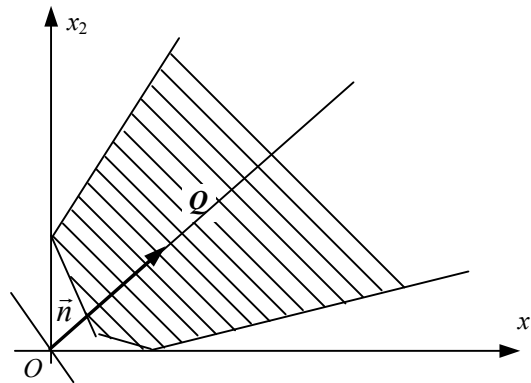


Рисунок 2а – Случай неограниченной целевой функции

- б) Если прямая совпала с частью границы Q , то задача имеет бесконечное множество решений, расположенных на данном отрезке границы AB (рисунок 2б).

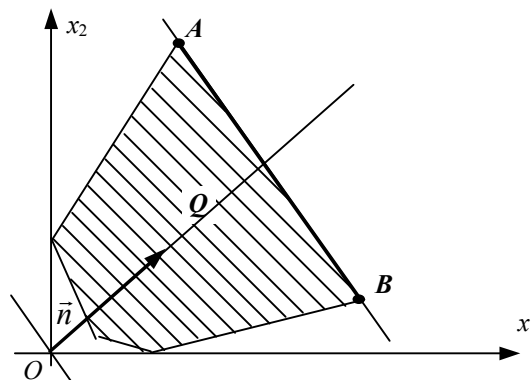


Рисунок 2б – Случай бесконечного множества решений

- в) Имеется одна точка пересечения прямой и многоугольника Q – некоторая точка A . Координаты данной точки – единственное оптимальное решение

задачи ЛП (рисунок 3в) находятся как координаты точки пересечения прямых CA и BA .

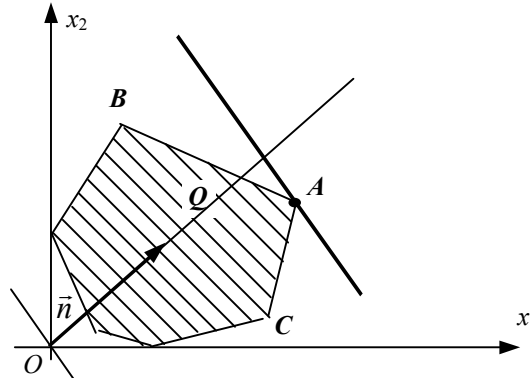


Рисунок 2в – Случай единственного оптимального решения

Отметим, что в некоторых частных случаях задачи линейного программирования с числом переменных большим двух можно свести к задачам ЛП с двумя независимыми переменными, что позволяет использовать в них графический метод. В общем же случае при решении задач ЛП используются численные методы – различные модификации симплекс-метода.

2.3. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Жордана-Гаусса

Напомним некоторые необходимые в дальнейшем сведения по линейной алгебре. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (7)$$

которая может не иметь решения (система несовместна), иметь единственное решение или иметь бесконечное множество решений (неопределенная система). Получить решение данной системы можно с помощью метода Гаусса-Жордана.

Алгоритм метода Гаусса-Жордана напоминает метод Гаусса с той разницей, что элементарными преобразованиями расширенная матрица системы приводится не к диагональному виду, а к виду с явно выделенными базисными переменными:

$$\begin{cases} x_{i_1} + \dots + d_{1r+1}x_{i_{r+1}} + d_{1r+2}x_{i_{r+2}} + \dots + d_{1n}x_{i_n} = B_1 \\ x_{i_2} + \dots + d_{2r+1}x_{i_{r+1}} + d_{2r+2}x_{i_{r+2}} + \dots + d_{2n}x_{i_n} = B_2 \\ \dots \\ x_{i_r} + d_{rr+1}x_{i_{r+1}} + d_{rr+2}x_{i_{r+2}} + \dots + d_{rn}x_{i_n} = B_r \end{cases}, \quad (8)$$

где r – ранг системы уравнений, $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ – номера базисных переменных.

Элементарные преобразования включают в себя:

1. Умножение строки матрицы на число.

2. Сложение двух строк матрицы.
3. Вычеркивание нулевой строки.
4. Перестановка строк.

Напомним, что использование элементарных преобразований не меняет решение системы. При этом общее решение системы (7) можно записать следующим образом

$$\begin{cases} x_{i_1} = -d_{1r+1}x_{i_{r+1}} - d_{1r+2}x_{i_{r+2}} - \dots - d_{1n}x_{i_n} - B_1 \\ x_{i_2} = -d_{2r+1}x_{i_{r+1}} - d_{2r+2}x_{i_{r+2}} - \dots - d_{2n}x_{i_n} - B_2 \\ \dots \\ x_{i_r} = -d_{rr+1}x_{i_{r+1}} - d_{rr+2}x_{i_{r+2}} - \dots - d_{rn}x_{i_n} - B_r \end{cases}.$$

Неизвестные в правых частях уравнений называются свободными и выступают в роли неопределенных констант, через которые выражаются базисные неизвестные.

Рассмотрим более подробно процесс приведения исходной системы (7) к виду (8). Пусть к числу базисных неизвестных отнесена переменная x_p , которую необходимо исключить из всех уравнений, кроме некоторого l -го уравнения:

$$d_{l1}x_1 + d_{l2}x_2 + \dots + d_{lp}x_p + \dots + d_{ln}x_n = B_l.$$

Коэффициент при базисной переменной должен быть равен единице, поэтому обе части данного уравнения делим на $d_{lp} \neq 0$:

$$\frac{d_{l1}}{d_{lp}}x_1 + \frac{d_{l2}}{d_{lp}}x_2 + \dots + x_p + \dots + \frac{d_{ln}}{d_{lp}}x_n = \frac{B_l}{d_{lp}}. \quad (9)$$

Пользуясь преобразованным уравнением (9) исключаем x_p из всех остальных уравнений системы. Рассмотрим некоторое уравнение с номером $j \neq l$:

$$d_{j1}x_1 + d_{j2}x_2 + \dots + d_{jp}x_p + \dots + d_{jn}x_n = B_j, \quad (10)$$

умножим уравнение (9) на d_{jp} и вычтем из (10):

$$\left(d_{j1} - \frac{d_{l1}d_{jp}}{d_{lp}}\right)x_1 + \left(d_{j2} - \frac{d_{l2}d_{jp}}{d_{lp}}\right)x_2 + \dots + 0 + \dots + \left(d_{jn} - \frac{d_{ln}d_{jp}}{d_{lp}}\right)x_n = B_j - \frac{B_ld_{jp}}{d_{lp}}.$$

Проделав данную процедуру для всех уравнений, получаем, что базисная переменная x_p остается только в одном уравнении с номером l .

Обозначив

$$\tilde{d}_{jk} = d_{jk} - \frac{d_{lk}d_{jp}}{d_{lp}}; \quad \tilde{B}_j = B_j - \frac{B_ld_{jp}}{d_{lp}} \text{ при } j \neq l, \quad (11)$$

$$\tilde{d}_{lk} = \frac{d_{lk}}{d_{lp}}; \quad \tilde{B}_l = \frac{B_l}{d_{lp}}, \quad (12)$$

можно приступать к исключению следующей базисной переменной.

При этом строка расширенной матрицы с номером l называется разрешающей строкой, столбец с номером p – разрешающим столбцом, сам элемент матрицы $d_{lp} \neq 0$ – разрешающим элементом.

Как следует из формул (11), (12) исключение некоторой переменной x_p методом Гаусса-Жордана сводится к пересчету коэффициентов системы по данным формулам. Чтобы облегчить данный алгоритм вычислений сформулируем следующее правило (правило четырехугольника).

Если в расширенной матрице системы элементы расположены следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & \dots & b & & b & \dots & a & \boxed{d} & \dots & c & & c & \dots & \boxed{d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & \dots & \boxed{d} & & \boxed{d} & \dots & c & & b & \dots & a & & a & \dots & b \end{array}$$

с разрешающим элементом d , то коэффициент на месте элемента a пересчитывается по формуле $\boxed{a - \frac{bc}{d}}$.

Что касается разрешающей строки, то ее элементы делятся на разрешающий элемент, в разрешающем столбце на месте разрешающего элемента получаем единицу, все остальные элементы разрешающего столбца оказываются равными нулю.

Пример. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + x_3 = 100 \\ 20x_1 + 10x_2 + x_4 = 100, \\ 15x_1 + 15x_2 + x_5 = 90 \end{cases}$$

требуется найти ее общее решение в базисе $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Решение. Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{10} & 20 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 20 & 10 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 15 & 15 & 0 & 0 & 1 & 90 \end{array} \right)$$

Исключим из всех уравнений, кроме первого переменную x_1 . В этом случае разрешающим элементом будет выделенный элемент $a_{11} = 10$. Проведем пересчет расширенной матрицы: на месте разрешающего элемента ставим единицу $10 \rightarrow 1$, остальные элементы разрешающей строки делим на 10, то есть $20 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 1/10$, $0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 0$, $100 \rightarrow 10$. В разрешающем столбце записываем нули $20 \rightarrow 0$, $15 \rightarrow 0$. Для расчета остальных элементов используем записанное выше правило, например, рассмотрим пересчет элемента $a_{32} = 15$. Выделяем прямоугольник с вершинами на месте разрешающего и пересчитываемого элементов, тогда $15 \rightarrow 15 - \frac{20 \cdot 15}{10} = -15$. Продолжая вычисления получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1/10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -30 & -2 & 1 & 0 & -100 \\ 0 & -15 & -3/2 & 0 & 1 & -60 \end{array} \right).$$

Далее исключаем неизвестные x_2 и x_3 . Базисную переменную x_2 оставляем во втором уравнении, переменную x_3 в третьем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1/10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \boxed{-30} & -2 & 1 & 0 & -100 \\ 0 & -15 & -3/2 & 0 & 1 & -60 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/30 & 1/15 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 1/15 & -1/30 & 0 & 10/3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/2} & -1/2 & 1 & -10 \end{array} \right) \square$$

$$\square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/10 & -1/15 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & 2/15 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 20 \end{array} \right).$$

Запишем по данной расширенной матрице систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 1/10 x_4 - 1/15 x_5 = 4 \\ x_2 - 1/10 x_4 + 2/15 x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 20 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = -1/10 x_4 + 1/15 x_5 + 4 \\ x_2 = 1/10 x_4 - 2/15 x_5 + 2 \\ x_3 = -x_4 + 2x_5 + 20 \end{cases}.$$

Таким образом, метод Гаусса-Жордана позволяет построить общее решение неопределенной системы линейных алгебраических уравнений в заданном базисе.

2.4. Канонический вид системы ограничений задачи ЛП. Искусственный базис

Рассмотрим систему ограничений задачи ЛП. Прежде всего, отметим, что система ограничений любой задачи ЛП может быть путем введения дополнительных переменных записана в виде системы уравнений. Действительно, если ограничение имеет вид неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

то вводят некоторую неотрицательную неизвестную $x_{n+1} \geq 0$, чтобы дополнить неравенство до равенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i.$$

Если же неравенство имеет обратный знак

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

то дополнительную неотрицательную переменную вычитают

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i.$$

Вид задачи ЛП с системой ограничений в виде системы уравнений называется стандартным видом задачи ЛП.

Очевидно, любая задача ЛП может быть записана в стандартном виде. Причем система ограничений, как правило, является неопределенной системой линейных алгебраических уравнений, поэтому с помощью метода Гаусса-Жордана можно получить ее решение в некотором базисе.

Задача линейного программирования с системой ограничений вида (8) называется задачей ЛП в каноническом виде, а система ограничений (8) – канонической системой, приведенной к базису $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\}$.

Если исходная система ограничений содержит только неравенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases},$$

то введение дополнительных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ сразу приводит систему ограничений к каноническому виду в базисе $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}. \quad (13)$$

При этом базис, составленный из введенных дополнительных переменных $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$ называется искусственным базисом.

Если в системе ограничений канонического вида (8) положить равными нулю все свободные переменные, то полученное решение системы уравнений называется базисным решением.

Для искусственного базиса базисное решение совпадает со свободными членами системы $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, x_{n+1} = b_1, \dots, x_{n+m} = b_m$.

Если базисное решение является неотрицательным, то такое решение называется опорным решением.

Геометрически опорное решение соответствует координатам некоторой вершины многогранной области Q – области допустимых значений задачи ЛП.

2.5. Симплекс-метод решения задач ЛП

Геометрическая интерпретация задач ЛП для случая двух переменных показывает (рисунки 2б, 2в), что если имеется оптимальное решение задачи ЛП, то оно обязательно достигается в некоторой вершине области допустимых значений Q . Доказано, что это выполняется и в общем случае.

Учитывая, что каждой вершине многогранной области Q соответствует некоторое опорное решение системы ограничений в каноническом виде, получаем, что оптимальное решение следует искать среди опорных решений.

Основная идея симплекс-метода заключается в направленном переборе вершин допустимого множества Q (опорных решений) таким образом, чтобы от одной вершины к следующей возрастало (задача max) или убывало (задача min) значение целевой функции.

Рассмотрим задачу ЛП с системой ограничений записанной в каноническом виде относительно искусственного базиса:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (14)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} ; \quad (15)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m). \quad (16)$$

Симплекс-метод применяется к задачам ЛП, записанным в каноническом виде относительно некоторого базиса. Шаги алгоритма удобно оформлять в виде симплекс-таблиц. Для записанной выше задачи ЛП (14-16) симплекс-таблица имеет следующий вид:

Таблица 3

		свободные члены	свободные переменные			
			x_1	x_2	$\dots$	x_n
базис	z	0	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$
	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{n1}
	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{n2}
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Переход от одного опорного решения к другому происходит путем введения в базис одной из свободных переменных, при этом одна из базисных переменных становится свободной $x_l \leftrightarrow x_p$. Процедуру перехода к другому базису в системе ограничений можно проделать с помощью метода Жордана-Гаусса, при этом расчеты можно проводить непосредственно в симплекс-таблице по следующему правилу:

1. Разрешающий элемент заменяется на обратную величину $d_{lp} \rightarrow 1/d_{lp}$.
2. Элементы разрешающей строки l делятся на разрешающий элемент d_{lp} .
3. Элементы разрешающего столбца p , отличные от разрешающего элемента, делятся на $(-d_{lp})$.
4. Элементы симплекс-таблицы не входящие в разрешающие строку и столбец пересчитываются по правилу четырехугольника.

Симплекс-метод состоит из двух этапов. На первом этапе либо находится некоторое опорное решение системы ограничений, либо доказывается, что

система ограничений несовместна (допустимое множество - пусто). На втором этапе либо устанавливается неограниченность целевой функции, либо находится оптимальное решение.

Алгоритм симплекс-метода.

- 1.1. Формулируется задача ЛП в общем виде.
- 1.2. Введением искусственного базиса задача ЛП приводится к каноническому виду, оформляется симплекс-таблица.
- 1.3. Если в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, то переходим к п.1.4., иначе в строке с отрицательным свободным членом находится некоторый отрицательный элемент. Если отрицательный элемент в строке с отрицательным свободным членом отсутствует, то решения не существует. Если отрицательный элемент есть, то соответствующий столбец становится разрешающим. Отыскивается разрешающий элемент среди элементов данного столбца, имеющих одинаковый знак со свободным членом. Из них выбирается тот, для которого отношение свободного члена к элементу минимально. После чего пересчитывается симплекс-таблица относительно данного разрешающего элемента. Если после пересчета число отрицательных свободных членов не уменьшилось, или они не уменьшились по абсолютной величине, то это указывает на отсутствие опорного решения.
- 1.4. Все свободные члены не отрицательны – опорное решение найдено, переходим ко второму этапу симплекс-метода.
- 2.1. Признак неограниченности целевой функции. Если в строке z симплекс-таблицы есть положительный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных элементов, то целевая функция является неограниченной.
Признак оптимальности решения. Если в строке z все коэффициенты при свободных переменных не положительны, то данное опорное решение является оптимальным.
 Если не выполняется признак оптимальности опорного решения или признак неограниченности целевой функции, то в строке z находится некоторый положительный элемент и соответствующий ему столбец становится разрешающим, то есть в базис вводится свободная переменная x_p . Среди элементов разрешающего столбца имеющих одинаковый знак со свободным членом находится разрешающий элемент, для которого отношение свободного члена к элементу столбца p минимально:

$$\frac{b_l}{d_{lp}} = \min (b_l d_{lp} > 0).$$
 После чего проводится пересчет симплекс-таблицы относительно разрешающего элемента d_{lp} .
- 2.2. Если выполняется признак оптимальности опорного решения или признак неограниченности целевой функции – конец алгоритма.

В среднем, как показывает опыт, для получения решения задачи ЛП симплекс-методом приходится проводить от $1,5m$ до $3m$ пересчетов симплекс-таблиц, где m – число уравнений в системе ограничений.

Пример. Найдем с помощью симплекс-метода решение рассмотренной ранее задачи (5-6)

$$z = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max ,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \leq 180, \\ 7x_1 + 7x_2 \leq 140, \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 150, \\ x_1 \geq 6, \quad x_2 \geq 4. \end{cases}$$

Прежде всего, приведем данную задачу к каноническому виду. В первые три неравенства добавим дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5 , из последних двух неравенств вычтем неотрицательные x_6, x_7 и изменим в них знак умножением на (-1) . Введем также новую целевую функцию $\tilde{z} = -z$. После указанных преобразований задача ЛП (5-6) примет вид:

$$\tilde{z} = -5x_1 - 2x_2 \rightarrow \min \quad (17)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 180, \\ 7x_1 + 7x_2 + x_4 = 140, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_5 = 150, \\ -x_1 + x_6 = -6, \\ -x_2 + x_7 = -4. \end{cases} \quad (18)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

Система ограничений (18) имеет канонический вид в искусственном базисе $\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$. Составляем для задачи (17-18) симплекс-таблицу:

Таблица 4

		свободные члены	свободные переменные	
			x_1	x_2
базис	$\tilde{z}$	0	5	2
	x_3	180	10	5
	x_4	140	7	7
	x_5	150	5	10
	x_6	-6	-1	0
	x_7	-4	0	-1

Так как в данной таблице имеются отрицательные свободные члены, то опорное решение не достигается в данном базисе. Согласно п. 1.3. определим разрешающий элемент, относительно которого будет проводиться пересчет

симплекс-таблицы. Строка x_6 содержит отрицательный свободный член, при этом в данной строке содержится единственный отрицательный элемент (-1) в столбце x_1 - данный столбец становится разрешающим. Для определения разрешающего элемента найдем отношения свободных членов к соответствующим элементам столбца x_1 одинакового знака:

$$x_3 : \frac{180}{10} = 18; \quad x_4 : \frac{140}{7} = 20; \quad x_5 : \frac{150}{5} = 30;$$

$$x_6 : \frac{-6}{-1} = 6 \text{ (min)}; \quad x_7 : -$$

Минимальное отношение для строки x_6 - данная строка разрешающая, а элемент (-1), стоящий на пересечении разрешающей строки x_6 и разрешающего столбца x_1 является разрешающим элементом.

Таким образом, в базис вводится переменная x_1 вместо x_6 . Чтобы перейти к новому базису проведем пересчет симплекс-таблицы согласно записанному выше правилу.

Разрешающий элемент заменяется на обратную величину $-1 \rightarrow 1/-1 = -1$, то есть остается неизменным. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент: $-6 \rightarrow -6/-1 = 6$; $0 \rightarrow 0/-1 = 0$. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент с обратным знаком $-(-1) = 1$, то есть остаются неизменными. Остальные элементы симплекс-таблицы рассчитываются по правилу четырехугольника. В частности, в строке z имеем $0 \rightarrow 0 - \frac{(-6) \cdot 5}{-1} = -30$; $2 \rightarrow 2 - \frac{0 \cdot 5}{-1} = 2$, и т.д.

После проведенных расчетов симплекс-таблица имеет следующий вид

Таблица 5

		свободные члены	свободные переменные	
			x_6	x_2
базис	$\tilde{z}$	-30	5	2
	x_3	120	10	5
	x_4	98	7	7
	x_5	120	5	10
	x_1	6	-1	0
	x_7	-4	0	-1

Так как в столбце свободных членов имеется отрицательное число в строке x_7 , то выбираем в данной строке отрицательный элемент в столбце x_2 , который становится разрешающим. Далее находится отношение свободным членов к элементам данного столбца того же знака:

$$x_3 : \frac{120}{5} = 24; \quad x_4 : \frac{98}{7} = 14; \quad x_5 : \frac{120}{10} = 12;$$

$$x_1 : -; \quad x_7 : \frac{-4}{-1} = 4 \text{ (min)}$$

Итак, разрешающий элемент находится на пересечении строки x_7 и столбца x_2 . Значит $x_7 \leftrightarrow x_2$. Пересчитываем симплекс-таблицу, аналогично предыдущему шагу:

Таблица 6

		свободные члены	свободные переменные	
			x_6	x_7
базис	$\bar{z}$	-38	5	2
	x_3	100	10	5
	x_4	70	7	7
	x_5	80	5	10
	x_1	6	-1	0
	x_2	4	0	-1

Все свободные члены оказались положительны, значит в данном базисе достигнуто опорное решение. Переходим ко второму шагу симплекс-метода. Легко проверить, что для данного опорного решения не выполняются ни критерий оптимальности (в строке $\bar{z}$ оба коэффициента при свободных переменных положительны), ни критерий неограниченности целевой функции (в столбцах свободных переменных есть положительные элементы). В связи с этим требуется перейти к новому базису согласно п.2.1.

Выберем положительный коэффициент при свободной переменной x_6 , данный столбец становится разрешающим. Среди элементов разрешающего столбца находим разрешающий элемент:

$$x_3 : \frac{100}{10} = 10 \text{ (min)}; \quad x_4 : \frac{70}{7} = 10 \text{ (min)}; \quad x_5 : \frac{80}{5} = 16;$$

$$x_1 : -; \quad x_2 : -;$$

Минимальное отношение достигается в строках x_3 и x_4 . Разрешающий элемент можно выбрать в любой из этих строк, для определенности выбираем его в строке x_3 . Тогда $x_3 \leftrightarrow x_6$, проводим пересчет симплекс-таблицы:

Таблица 7

		Свободные члены	свободные переменные	
			x_3	x_7
базис	$\tilde{z}$	-88	-0,5	-0,5
	x_6	10	0,1	0,5
	x_4	0	0,7	3,5
	x_5	30	0,5	7,5
	x_1	16	-0,1	0,5
	x_2	4	0	-1

В последней таблице выполняется критерий оптимальности опорного решения (коэффициенты при свободных переменных отрицательны). Алгоритм останавливается – оптимальное решение задачи ЛП найдено. Из последней симплекс-таблицы находим значения переменных

$$x_1 = 16; x_2 = 4; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 30; x_6 = 10; x_7 = 0$$

(напомним, что значения свободных переменных равны нулю, а значения базисных переменных находятся в столбце свободных членов).

Наименьшее значение целевой функции $\tilde{z} = -88$. Значит $z_{\max} = -\tilde{z}_{\min} = 88$.

Сравнив с решением данной задачи, полученным графическим методом, находим, что оба метода решения дали один и тот же результат.

Отметим также, что каждая симплекс-таблица соответствует некоторому базисному решению. Так первой симплекс-таблице соответствует $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ (обе переменные - свободные). Второй симплекс-таблице - $x_1 = 6$, $x_2 = 0$. Третьей симплекс-таблице - $x_1 = 6$, $x_2 = 4$. Четвертой симплекс-таблице - $x_1 = 16$, $x_2 = 4$. Если отложить данные точки в плоскости переменных $x_1 O x_2$, то можно увидеть графически сходимость симплекс-метода (рисунок 3).

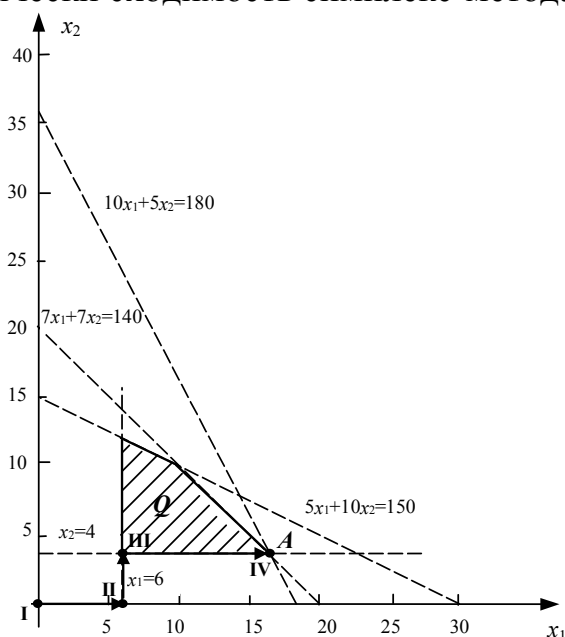


Рисунок 3 – Сходимость симплекс-метода

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО КРИТЕРИЮ СТОИМОСТИ

3.1. Основные определения

Симплекс-метод является наиболее универсальным для решения задач ЛП. Однако, существуют классы задач, которые могут быть решены методами, представляющими частные случаи симплексного и требующими менее сложного алгоритма решения. К числу таких задач относится транспортная.

Приведем общую формулировку транспортной задачи (ТЗ) по критерию стоимости и составим ее математическую модель.

Пусть имеется m баз снабжения $A_1, A_2, \dots, A_m$, на которых сосредоточено соответственно $a_1, a_2, \dots, a_m$ единиц однородного груза. Пусть имеется n пунктов получения $B_1, B_2, \dots, B_n$, потребность которых составляет $b_1, b_2, \dots, b_n$ единиц этого товара. Известны тарифы перевозок c_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), т.е. стоимость перевозки (грн) единицы груза от i -ой базы к j -му потребителю. Требуется составить такой план перевозки груза, при котором транспортные расходы были бы минимальными. Пусть x_{ij} - количество единиц груза, запланированных к перевозке от i -го поставщика j -му потребителю. Условие задачи запишем в виде таблицы 8, которую будем называть матрицей планирования и которая поможет составить математическую модель задачи.

Таблица 8

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	...	B_n	Запасы
A_1	$x_{11}^{c_{11}}$	$x_{12}^{c_{12}}$	...	$x_{1n}^{c_{1n}}$	a_1
A_2	$x_{21}^{c_{21}}$	$x_{22}^{c_{22}}$	...	$x_{2n}^{c_{2n}}$	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	$x_{m1}^{c_{m1}}$	$x_{m2}^{c_{m2}}$	...	$x_{mn}^{c_{mn}}$	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Задача. Требуется найти оптимальный план перевозки однородного груза из пунктов A_1, A_2, A_3 , в которых сосредоточено соответственно 40, 50, 60 единиц груза, в пункты назначения B_1, B_2, B_3, B_4 , потребности которых составляют 30, 35, 40, 45 единиц груза соответственно. Известна матрица стоимости перевозок 1 единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Составим математическую модель задачи.

Пусть x_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$) - количество перевозимого груза от каждого пункта отправления в каждый пункт назначения. Тогда

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 60, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 35, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 45. \end{cases}$$

Требуется найти план перевозки груза $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$ так, чтобы

транспортные расходы были минимальными, т.е. чтобы целевая функция $z = 2x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 8x_{14} + \dots + 4x_{34}$ приняла свое наименьшее значение.

На основании математической модели задачи построим таблицу:

Таблица 9

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	2 30	4 10	6	8	40
A_2	3	2 25	2 25	1	50
A_3	5	4	7 15	4 45	60
Потребности	30	35	40	45	150=150

Первоначальное допустимое решение получим по методу северо-западного угла, заполнив, в первую очередь, клетку A_1B_1 . Число заполненных клеток должно быть $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Получим матрицу перевозок груза

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 45 \end{pmatrix}.$$

Транспортные расходы составили сумму:

$$z = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 25 \cdot 2 + 25 \cdot 2 + 15 \cdot 7 + 45 \cdot 4 = 485 \text{ (грн)}$$

Нельзя ли перераспределить товар так, чтобы уменьшить транспортные расходы?

3.2. Метод потенциалов нахождения оптимального решения транспортной задачи

Допустимый план перевозок – это значения x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), которые удовлетворяют системе ограничений и условию неотрицательности. Он должен иметь $(m + n - 1)$ заполненную клетку. Если окажется, что заполнено клеток меньше, т.е. решение вырожденное, необходимо добавить столько нулей, чтобы заполненных клеток было $(m + n - 1)$. Чтобы перейти к другому допустимому решению, необходимо одну клетку из занятых освободить, а другую из числа свободных – занять. Это равносильно переводу одной базисной переменной в число свободных, а свободной – в базис. Для этого составляют замкнутый цикл, который начинается и заканчивается в клетке, в которую нужно ввести переменную. Цикл состоит из последовательных горизонтальных и вертикальных отрезков, соединяющих клетки, соответствующие текущим базисным переменным, и клетку,

соответствующую вводимой переменной. Для любой вводимой в базис свободной переменной можно построить только один замкнутый цикл. Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, нужно знаком «+» отметить незанятую клетку, которую надо загрузить. Строим цикл для этой клетки и, начиная движение от клетки с «+», поочередно проставляем знаки «-» и «+». Затем находим $\min$ груза из перевозок, стоящих в вершинах цикла со знаком «-». Эта величина определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу. Ее заносим в клетку, для которой построен цикл. Двигаясь по циклу, прибавляем эту величину к тем перевозкам, которые отмечены знаком «+» и вычитаем из тех перевозок, которые стоят со знаком «-».

Необходимо после этого проверить, чтобы в новом допустимом решении число заполненных клеток было по-прежнему $(m + n - 1)$.

Затем нужно вычислить оценку тарифа γ_{ij} для построенного цикла. Она равна сумме C_{ij} тарифов клеток, участвующих в построенном цикле, взятых соответственно со знаками «+» и «-». Если эта сумма положительна, то построенный цикл приведет к увеличению транспортных расходов; если отрицательна, то к уменьшению. Величина γ_{ij} показывает, насколько изменится целевая функция Z , если по циклу переместить одну единицу груза. Если для всех незанятых клеток γ_{ij} будет ≥ 0 , то допустимое решение является оптимальным.

Изложенное выше составляет смысл распределительного метода решения ТЗ, который не является эффективным.

Процедуру нахождения оценок γ_{ij} для незанятых клеток облегчает метод потенциалов.

Суть метода заключается в том, что каждому поставщику $A_i (i = 1, \dots, m)$ ставится в соответствие число u_i , а каждому потребителю $B_j (j = 1, \dots, n) - v_j$ так, чтобы сумма $(u_i + v_j)$ была равна тарифу для каждой заполненной клетки.

Обозначим для каждой пустой клетки сумму $(u_i + v_j)$ через c'_{ij} и назовем их косвенными тарифами. Если в полученном решении разность $c_{ij} - c'_{ij} \geq 0$ для всех пустых клеток, то решение является оптимальным. Если хотя бы одна из разностей меньше нуля, то решение можно улучшить, т.е. уменьшить транспортные расходы.

Справедлива теорема о том, что оценка тарифа незанятой клетки равна разности между тарифом и ее косвенным тарифом:

$$j_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}.$$

В заключение сформулируем алгоритм метода потенциалов решения ТЗ:

1. Находим допустимое решение, заполненных клеток должно быть $(m + n - 1)$.
2. Для каждой заполненной клетки определяем потенциалы: u_i и v_j . Так как заполненных клеток $(m + n - 1)$, а переменных - $(m + n)$, то одной из переменных, например, u_1 , придадим нулевое значение.
3. Для каждой незанятой клетки считаем косвенный тариф c'_{ij} и определяем оценку тарифа $j_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$.
4. Если все $j_{ij} \geq 0$, то план перевозок является оптимальным.
5. Если есть оценки j_{ij} , меньшие нуля, то выбираем из них наименьшую. Составляем для соответствующей клетки цикл и перемещаем по нему наименьшее количество груза из тех перевозок, которые стоят в клетках со знаком « $\leftarrow$ ».
6. Получили в результате новое допустимое решение, которое надо испытать на оптимальность.
7. Так поступаем до получения оптимального решения.

Продemonстрируем метод потенциалов на примере ТЗ, для которой нами было получено допустимое решение методом северо-западного угла.

Таблица 10

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	u_i
A_1	30	10			40	0
A_2		25	25		50	-2
A_3				45	60	3
Потребности	30	35	40	45	150=150	
v_j	2	4	4	1		

Выполним действия:

1. Каждой строке поставим в соответствие числа u_1, u_2, u_3 , а каждому столбцу - v_1, v_2, v_3, v_4 .

Составим уравнения:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 4, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_3 = 2, \\ u_3 + v_3 = 7, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases}$$

В результате, положив $u_1 = 0$, получим, что $v_1 = 2$; $v_2 = 4$; $u_2 = -2$; $v_3 = 4$; $u_3 = 3$; $v_4 = 1$.

Итак, потенциалы посчитаны.

Считаем косвенные тарифы для незанятых клеток:

$$\begin{aligned} c'_{13} &= 4 + 0 = 4; & c'_{24} &= 1 - 2 = -1; \\ c'_{14} &= 1 + 0 = 1; & c'_{31} &= 2 + 3 = 5; \\ c'_{21} &= 2 - 2 = 0; & c'_{32} &= 4 + 3 = 7. \end{aligned}$$

Вычисляем оценку тарифа для каждой незанятой клетки по формуле

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}:$$

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= 6 - 4 = 2; & \gamma_{24} &= 1 - (-1) = 2; \\ \gamma_{14} &= 8 - 1 = 7; & \gamma_{31} &= 5 - 5 = 0; \\ \gamma_{21} &= 3 - 0 = 3; & \gamma_{32} &= 4 - 7 = -3 < 0. \end{aligned}$$

Среди оценок есть отрицательная. Для клетки A_3B_2 составляем цикл (покажем его в таблице). Если по этому циклу перевезти 1 единицу груза, то транспортные расходы уменьшатся на 3 грн, а если 15 единиц, то на 45 грн. Транспортные расходы будут равны $485 - 45 = 440$ (грн).

4. Перейдем к новому допустимому решению, получим таблицу 11:

Таблица 11

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	u_i
A_1	2 30	4 10	6	8	40	0
A_2	3	2 10 -	2 40	1	50	-2
A_3	5	4 15 +	7	4 - 45	60	0
Потребности	30	35	40	45	150=150	
v_j	2	4	4	4		

5. Вычислим оценку тарифа для каждой незанятой клетки так, как это было выполнено ранее.

$$\gamma_{13} = 6 - (4 + 0) = 2; \quad \gamma_{24} = 1 - (-2 + 4) = -1 < 0;$$

$$\gamma_{14} = 8 - (4 + 0) = 4; \quad \gamma_{31} = 5 - (2 + 0) = 3;$$

$$\gamma_{21} = 3 - (2 - 2) = 3; \quad \gamma_{33} = 7 - (4 + 0) = 3.$$

Так как $\gamma_{24} < 0$, то транспортные расходы можно уменьшить на 10 грн. Для клетки $(A_2 B_4)$ составим в таблице цикл и перейдем к новой таблице.

6. Перейдем к новому допустимому решению, построим таблицу 12:

Таблица 12

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	u_i
A_1	2 30	4 10	6	8	40	0
A_2	3	2	2 40	1 10	50	-3
A_3	5	4 25	7	4 35	60	0
Потребности	30	35	40	45	150=150	
v_j	2	4	5	4		

Вычислим потенциалы и посчитаем оценки тарифов для каждой свободной клетки:

$$\begin{aligned}\gamma_{13} &= 6 - (5 + 0) = 1; & \gamma_{22} &= 2 - (4 - 3) = 1; \\ \gamma_{14} &= 8 - (4 + 0) = 4; & \gamma_{31} &= 5 - (2 + 0) = 3; \\ \gamma_{21} &= 3 - (2 - 3) = 4; & \gamma_{33} &= 7 - (5 + 0) = 2.\end{aligned}$$

Все оценки тарифов для каждой свободной клетки положительны. Значит, получен оптимальный план перевозок груза.

$$\begin{aligned}x_{\text{опт.}} &= \begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 25 & 0 & 35 \end{pmatrix} & z_{\min} &= 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 40 \cdot 2 + \\ & & & + 10 \cdot 1 + 25 \cdot 4 + 35 \cdot 4 = 430 \text{ грн.}\end{aligned}$$

Замечание. Если в ТЗ $\sum_i a_i \neq \sum_j b_j$, то модель ТЗ называется открытой. Для решения задачи необходимо ввести фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с нулевыми тарифами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высш.шк., 1986. – 319 с.
2. Давыдов Э.Г. Исследование операций: Учеб. пособие для студентов вузов / Э.Г. Давыдов. – М.: Высш.шк., 1990. – 383 с.
3. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М.: Высш.шк., 1980.
4. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: «Советское радио», 1964. – 736 с.
5. Кулян В.Р. Математическое программирование (с элементами информационных технологий): Учеб. пособие для студентов нематематических специальностей вузов / В.Р. Кулян, Е.А. Юнькова, А.Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2000. – 124 с.