

УДК

Методические указания к контрольным заданиям «Линейная алгебра» для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения СевНТУ /Сост. З.Д. Захарова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005. - 55 с.

Настоящая работа является методическим указанием по контролю модуля «Линейная алгебра» для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

Рассмотрены задачи, дающие возможность успешно освоить и проконтролировать свои знания как теоретического материала и решения задач.

Приведены подробные решения всех типовых задач, предлагаемых для самостоятельной работы студентов при усвоении модуля «Линейная алгебра»

По каждой теме подобрано 26 вариантов задач.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики СевНТУ, протокол № от .2005.

Допущено учебно–методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент – Ледяев С.Ф., к.т.н., доцент кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

1.

Библиографический список.

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО МОДУЛЮ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Для успешной работы над типовым расчетом необходимо предварительно изучить в разделе линейная алгебра теоретический материал, причем настолько, чтобы не только усвоить смысл основных понятий, определений, теорем, но и уметь применять их при решении задач.

Решение задач нужно излагать подробно, пояснять выполнения действия.

Образец выполнения контрольного задания по модулю «Линейная алгебра»

I

1) Дать определение определителя 2 –го порядка

Определитель второго порядка матрицы A обозначается через

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

$\ominus$
 $\oplus$

2) Записать правило вычисления определителя 3 - го порядка.

Определитель 3 – го порядка вычисляется по правилу треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так:

(основания
равнобедрен-
ных треуголь-
ников
параллельны
главной
диагонали)

(основания
треугольников
параллельны
побочной
диагонали)

3) Вычислить определитель четвертого порядка разложением по элементам ряда i и j .

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычитаем из четвертой строки третью, получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В четвертой строке только один элемент отличается от нуля. Раскрываем определитель по элементам четвертой строки.

$$\Delta = 2(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2[2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1)] -$$

$$- 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 3 = 28$$

$$\Delta = 28.$$

II

1) Что называется матрицей?

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины и n столбцов.

Размер матрицы записывают $m \times n$.

2) Какие действия можно выполнять с матрицами?

Сложение, умножение на число, произведение матриц.

3) Выполнить действия над матрицами. Найти $3A - 2B$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 9 & 9 & 18 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & -6 & 10 \\ 6 & -2 & 8 \\ 10 & -16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -4 \\ 3 & 11 & 10 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

III

1) Что называется рангом матрицы?

Наивысшим порядком минора неравный нулю называется рангом матрицы

2) Свойства ранга матрицы.

а) При транспортировании матрицы ее ранг не меняется;

б) Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не меняется;

в) Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы;

3) Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь способом окаймления миноров, найдем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0.$$

Вычисляем окаймляющий его минор:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 2 + 3 - 2 + 2 = 0.$$

Порядок последнего из найденных ненулевых миноров равен шагу матрицы. Следовательно, ранг матрицы равен двум.

IV

1) Каждая ли матрица имеет обратную?

Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

2) Как осуществляется проверка нахождения обратной матрицы

В результате умножения заданной матрицы на обратную должна получаться единичная матрица.

3) Найти обратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Найдем } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 6 - 1 - 3 - 4 = 1 \neq 0.$$

Вычисляем значения всех алгебраических дополнений элементов заданной матрицы.

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -2 & A_{12} = 1 & A_{13} = 1 \\ A_{21} = -1 & A_{22} = 0 & A_{23} = 1 \\ A_{31} = 5 & A_{32} = -1 & A_{33} = -3. \end{array}$$

В результате получаем:

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому обратная матрица будет:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{31}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^1 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V.

1) Записать в чем заключается метод Гаусса?

Метод Гаусса заключается в последовательности исключения неизвестных?

2) Какая система называется совместной?

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

3) Решить систему уравнений : 1. Методом Гаусса; 2 Матричным методом.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5. \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Если в каком либо уравнении системы коэффициент при x_1 равен 1, то это уравнение лучше всего поставить первым.

Перепишем систему, переставив местами первое и второе уравнение.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}.$$

Исключив из второго уравнения x_1 , для этого умножим первое уравнения на 2 и вычтем из второго. Исключим из третьего уравнения x_1 аналогично:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ -13x_2 + 9x_3 = 12. \\ -19x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на (-13) .

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_2 - \frac{9}{13}x_3 = 12 \\ -19x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}.$$

Аналогично исключим x_2 из третьего уравнения. Приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_2 - \frac{9}{13}x_3 = 12 \\ x_3 = -10 \end{cases}.$$

$$x_3 = 10, x_2 = 6, x_1 = 5.$$

Рассмотренным выше методом можно решать системы линейных алгебраических уравнений любого порядка. Однако с возрастанием количества уравнений возрастает и трудность вычислительного алгоритма. Поэтому в случае систем высокого порядка необходимо использовать ЭВМ.

4) Решить систему матричным методом

Данную систему уравнений запишем в матричной форме

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Найдем A^{-1} матрицы A .

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{33} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

$$A^* = \begin{vmatrix} -11 & -13 & -19 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{11}{2} & 4 & -\frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} & 5 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{19}{2} & 7 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad A^{-1} \cdot A = E$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$X_1 = \frac{11}{2} \cdot 2 + 4 \cdot 5 + \frac{7}{2} \cdot 4 = 5$$

$$X_2 = \frac{13}{2} \cdot 2 + 5 \cdot 5 + \frac{9}{2} \cdot 4 = 6$$

$$X_3 = \frac{19}{2} \cdot 2 + 7 \cdot 5 + \frac{13}{2} \cdot 4 = 10$$

$$x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 10$$

Исследовать систему на совместимость:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -8 \\ 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = -18 \end{cases}$$

Составляем матрицу A системы и расширенную матрицу B .

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & -5 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 5 & 8 & -5 & 18 \end{vmatrix}$$

VI

1) Сформулировать теорему Кронекера – Капели

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы

2) В каком случае система имеет единственное решение?

Если ранг совместной матрицы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

3) Исследовать систему на совместимость

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -8 \\ 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = -18 \end{cases}$$

Составляем матрицу A системы и расширенную матрицу B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 5 & 8 & -5 & 18 \end{pmatrix}$$

Вычислим ранг r_A матрицы A . Для этого проведем над матрицей A следующие элементарные преобразования (не меняющие ранга)

1. Вторую и третью строки умножим на 2. Получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ 10 & 16 & -10 \end{pmatrix}$$

2. Из второй строки вычтем первую и к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на -5. Получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 21 & -15 \end{pmatrix}$$

3. Умножим третью строку на $\frac{1}{3}$ и затем из третьей строки вычтем вторую

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 21 & -15 \end{vmatrix}.$$

Отсюда $r_A = 2$.

Прделаав точно такие преобразования над матрицей B , получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & -4 & -16 \\ 10 & 16 & -10 & -36 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 21 & -15 & -66 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Отсюда, ясно, $r_B = 2$. Так как $r_A = r_B$, то на основании теоремы Кронекера – Капели заключаем, что система совместна и неопределенна, так как число неизвестных 3 больше ранга 2. Для отыскания всех решений отбрасываем третье уравнение, а оставшиеся два записываем в виде

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 - x_3 \\ x_1 + 3x_2 = -8 + 2x_3 \end{cases}$$

Решая эту (например, по формулам Крамера), находим

$$x_1 = \frac{10 - x_3}{7}, \quad x_2 = \frac{22 - 5x_3}{7}.$$

Далее используя x_3 , определяем по формулам x_1 и x_2 . Например, если

$$x_3 = 1, \text{ то } x_1 = \frac{9}{7} \text{ и } x_2 = \frac{17}{7}, \text{ если } x_3 = 3, \text{ то } x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -1.$$

Подставляя выражения для x_1 и x_2 в заданную систему убедимся, что все эти уравнения обращаются в тождества. Следовательно, найденные эти формулы определяют все бесконечное множество решений заданной системы уравнений.

VII

1) Что называется собственным вектором матрицы A .

Всякий ненулевой вектор X , удовлетворяющий условию

$A \cdot \vec{X} = \lambda \cdot \vec{X} \quad (X \neq 0)$ называется собственным вектором преобразования матрицы A , а число λ собственным значением

(характеристическим числом) A , соответствующим вектору $\vec{X}$. Собственным значением λ матрицы A являются корнями ее характеристического уравнения.

2) Найти собственные значения и собственные вектора матрицы:

Составим характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)[(2-\lambda)^2] = 0 \quad (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1 \quad \lambda_3 = 3$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$ являются собственными значениями линейного преобразования.

Для отыскания собственных векторов используем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Полагая $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ получаем систему.

Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ соответствует семейство собственных векторов $u = c_1(e_1 + e_2)$.

Если $\lambda_3 = 3$ для определения координат собственного вектора получим систему

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Семейство собственных векторов соответствует этому собственному значению, определяется равенством $v = c_2(e_1 - e_2)$.

I.

1) Перечислить свойства определителя:

2) Вычислить определитель:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & -7 & 11 & 2 \\ 5 & 6 & -8 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & -7 & 11 & 2 \\ 5 & 6 & -8 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$