

УДК 512.25

Методические указания к контрольному заданию для зачета модуля «Линейная алгебра» по дисциплине «Высшая математика» для студентов всех специальностей и форм обучения / Сост. З.Д. Захарова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005. - 38 с.

Целью методических указаний является помощь студентам в подготовке к выполнению и защите модуля «Линейная алгебра» для студентов всех специальностей и форм обучения.

Рассмотрены задачи, дающие возможность успешно освоить и проконтролировать знания по данной теме.

Задаются теоретические вопросы и предлагаются практические задачи.

Приведены подробные решения всех типовых задач, предлагаемых для самостоятельной работы студентов при усвоении модуля «Линейная алгебра»

По каждой теме подобрано 26 вариантов задач.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики СевНТУ, протокол № 2 от 11.10.2005.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент – Ледяев С.Ф., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие рекомендации студенту к выполнению контрольного задания по модулю «Линейная алгебра».....	4
2. Образец выполнения контрольного задания по модулю «Линейная алгебра».....	4
3. Варианты контрольного задания.....	14
3.1. Вычисление определителей четвертого порядка.....	14
3.2. Выполнение действий над матрицами.....	16
3.3. Нахождение ранга матрицы.....	22
3.4. Нахождение обратной матрицы.....	23
3.5. Решение систем линейных уравнений.....	26
3.6. Исследование системы на совместность.	28
3.7. Переход из одного базиса в другой.....	30
3.8. Нахождение собственных значений и собственных векторов матриц.....	35
Библиографический список.....	38

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО МОДУЛЮ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Для успешной работы над типовым расчетом необходимо предварительно изучить в разделе линейная алгебра теоретический материал, причем настолько, чтобы не только усвоить смысл основных понятий, определений, теорем, но и уметь применять их при решении задач.

Решение задач нужно излагать подробно, пояснять выполнения действий.

2. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО МОДУЛЮ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

А.

- 1) Дать определение определителя 2 –го порядка

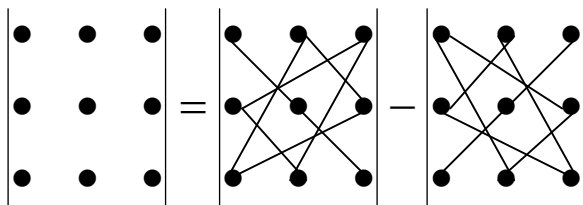
Определителем второго порядка называется выражение вида

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

$\ominus$
 $\oplus$

- 2) Записать правило вычисления определителя 3 - го порядка.

Определитель 3 – го порядка вычисляется по правилу треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так:



(основания
равнобедрен-
ных треуголь-
ников
параллельны
главной
диагонали)

(основания
треугольников
параллельны
вспомогательной
диагонали)

- 3) Вычислить определитель четвертого порядка разложением по элементам ряда.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычитаем из четвертой строки третью, получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В четвертой строке только один элемент отличается от нуля. Раскрываем определитель по элементам четвертой строки.

$$\Delta = 2(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2[2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1)] -$$

$$- 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 3 = 28$$

$$\Delta = 28.$$

Б.

1) Что называется матрицей?

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, переменных, функций содержащая m строк одинаковой длины и n столбцов.

Размер матрицы записывают $m \times n$.

2) Какие действия можно выполнять с матрицами?

Сложение, умножение на число, произведение матриц, транспонирование.

3) Выполнить действия над матрицами. Найти $3A - 2B$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 9 & 9 & 18 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & -6 & 10 \\ 6 & -2 & 8 \\ 10 & -16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -4 \\ 3 & 11 & 10 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

В.

1) Что называется рангом матрицы?

Ранг матрицы - наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы.

2) Свойства ранга матрицы.

а) При транспортировании матрицы ее ранг не меняется;

б) Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не меняется;

в) Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы;

3) Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь способом окаймления миноров, найдем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0.$$

Вычисляем окаймляющий его минор:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 2 + 3 - 2 + 2 = 0.$$

Порядок последнего из найденных ненулевых миноров равен рангу матрицы. Следовательно, ранг матрицы равен двум.

Г.

1) Каждая ли матрица имеет обратную?

Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

2) Как осуществляется проверка нахождения обратной матрицы?

В результате умножения заданной матрицы на обратную должна получаться единичная матрица.

3) Найти обратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Найдем } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 6 - 1 - 3 - 4 = 1 \neq 0.$$

Вычисляем значения всех алгебраических дополнений элементов заданной матрицы.

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -2 & A_{12} = 1 & A_{13} = 1 \\ A_{21} = -1 & A_{22} = 0 & A_{23} = 1 \\ A_{31} = 5 & A_{32} = -1 & A_{33} = -3. \end{array}$$

В результате получаем

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу.

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому обратная матрица будет:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^1 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Д.

1) Сформулировать в чем заключается метод Гаусса?

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных.

2) Какая система называется совместной?

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

3) Решить систему уравнений : 1. Методом Гаусса; 2 Матричным методом.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5. \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Если в каком либо уравнении системы коэффициент при x_1 равен 1, то это уравнение лучше всего поставить первым.

Перепишем систему, переставив местами первое и второе уравнение.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}.$$

Исключив из второго уравнения x_1 , для этого умножим первое уравнения на 2 и вычтем из второго. Исключим из третьего уравнения x_1 аналогично:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ -13x_2 + 9x_3 = 12. \\ -19x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на (-13) .

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_2 - \frac{9}{13}x_3 = \frac{12}{13} \\ -19x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}.$$

Аналогично исключим x_2 из третьего уравнения. Приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_2 - \frac{9}{13}x_3 = \frac{12}{13} \\ x_3 = -10 \end{cases}.$$

$$x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 10.$$

Рассмотренным выше методом можно решать системы линейных алгебраических уравнений любого порядка. Однако, с увеличением количества уравнений возрастает и трудность вычислительного алгоритма. Поэтому в случае систем высокого порядка необходимо использовать ЭВМ.

4) Решить систему матричным методом.

Данную систему уравнений запишем в матричной форме

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Найдем A^{-1} матрицы A .

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{33} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

$$A^* = \begin{vmatrix} -11 & -13 & -19 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{11}{2} & 4 & -\frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} & 5 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{19}{2} & 7 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad A^{-1} \cdot A = E$$

$$X_1 = \frac{11}{2} \cdot 2 + 4 \cdot 5 + \frac{7}{2} \cdot 4 = 5$$

$$X_2 = \frac{13}{2} \cdot 2 + 5 \cdot 5 + \frac{9}{2} \cdot 4 = 6$$

$$X_3 = \frac{19}{2} \cdot 2 + 7 \cdot 5 + \frac{13}{2} \cdot 4 = 10$$

$$x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 10.$$

Е.

1) Сформулировать теорему Кронекера – Капелли.

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

2) В каком случае система имеет единственное решение?

Если ранг основной матрицы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

3) Исследовать систему на совместимость

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -8 \\ 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = -18 \end{cases}.$$

Составляем матрицу A системы и расширенную матрицу B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 5 & 8 & -5 & 18 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг r_A матрицы A . Для этого проведем над матрицей A следующие элементарные преобразования (не меняющие ранга)

1. Вторую и третью строки умножим на 2. Получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ 10 & 16 & -10 \end{pmatrix}.$$

2. Из второй строки вычтем первую и к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на -5. Получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 21 & -15 \end{pmatrix}.$$

3. Умножим третью строку на $\frac{1}{3}$ и затем из третьей строки вычтем

вторую

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 21 & -15 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $r_A = 2$.

Прделав точно такие преобразования над матрицей B , получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & -4 & -16 \\ 10 & 16 & -10 & -36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 21 & -15 & -66 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда, ясно, $r_B = 2$. Так как $r_A = r_B$, то на основании теоремы Кронекера – Капелли заключаем, что система совместна. Число неизвестных данной системы равно 3, а ранг равен 2. Система будет иметь бесчисленное множество решений. Для отыскания всех решений оставляем первые два уравнения, перенося в правую часть уравнения x_3

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 - x_3 \\ x_1 + 3x_2 = -8 + 2x_3 \end{cases}.$$

Решая эту (например, по формулам Крамера), находим

$$x_1 = \frac{10 - x_3}{7}, \quad x_2 = \frac{22 - 5x_3}{7}.$$

Далее используя x_3 , определяем по формулам x_1 и x_2 . Например, если

$$x_3 = 1, \text{ то } x_1 = \frac{9}{7} \text{ и } x_2 = \frac{17}{7}, \text{ если } x_3 = 3, \text{ то } x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -1.$$

Подставляя выражения для x_1 и x_2 в заданную систему убедимся, что все эти уравнения обращаются в тождества. Следовательно, найденные эти формулы определяют все бесконечное множество решений заданной системы уравнений.

1) Что называется собственным вектором матрицы A .

Всякий ненулевой вектор X , удовлетворяющий условию

$A \cdot \vec{X} = \lambda \cdot \vec{X} \quad (X \neq 0)$ называется собственным вектором преобразования матрицы A , а число λ собственным значением (характеристическим числом) A , соответствующим вектору $\vec{X}$.

2) Найти собственные значения и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение матрицы A :

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (6-\lambda)(8-\lambda) - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 33 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 11$ являются собственными значениями матрицы A .

Для отыскания собственных векторов используем систему уравнений

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 3x_1 + (8-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\lambda = \lambda_1 = 3$, получаем систему уравнений для первого собственного вектора

$$\bar{u}(u_1, u_2): \begin{cases} 3u_1 + 5u_2 = 0, \\ 3u_1 + 5u_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow 3u_1 + 5u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -\frac{5}{3}u_2.$$

Зададим параметрической неизвестной значение $u_2 = 1$, тогда базисная неизвестная $u_1 = -\frac{5}{3}$. Общее решение системы $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1 - произвольная постоянная, является собственным вектором, соответствующим собственному числу $\lambda_1 = 3$.

Полагая $\lambda = \lambda_2 = 11$, получаем систему уравнений для второго собственного вектора $\bar{v}(v_1, v_2)$:

$$\begin{cases} -5v_1 + 5v_2 = 0, \\ 5v_1 - 5v_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow 5v_1 - 5v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2.$$

При $v_2 = 1$, $v_1 = 1$. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 11$ имеет вид: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

3.1. Вычисление определителей четвертого порядка

1) Перечислить свойства определителя:

2) Вычислить определитель:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & -7 & 11 & 2 \\ 5 & 6 & -8 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix},$$

$$2. \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$4. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & -7 & 11 & 2 \\ 5 & 6 & -8 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix},$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$7. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$9. \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$10. \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$11. \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$17. \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$12. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$18. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$13. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$19. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$14. \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$15. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$21. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$16. \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$22. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$23. \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix},$$

$$24. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$25. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{vmatrix},$$

$$26. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix},$$

$$27. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$28. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$29. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$30. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

3.2. Выполнение действий над матрицами

- 1) Что называется матрицей?
- 2) Записать правило перемножения матриц
- 3) Выполнить действия над матрицами

1. Найти $(3A - 7B)(A + B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти $(5A - 2B)A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти $(5A + 2B)(A - 2B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти $(A - 5B)(3A + 2B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти $(3A - B)B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Найти $(2A - 3B)(A + B)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 7 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти $(2A - 2B)3B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Найти $(7A + B)2A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Найти $(2A + B)(A - 2B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Найти $(2A - 3B)3A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Найти $(2A + 3B)5B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Найти $(5A - 3B)(A + 2B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. Найти $(A + 2B)(3A - B)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Найти $(2A - B)B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

15. Найти $(5A - 3B)A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Найти $(7A + B)(A - B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 10 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

17. Найти $(3A - 2B)B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

18. Найти $(3A + 5B)(A - 2B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

19. Найти $(A + 7B)(3A - B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Найти $(2A - 5B)(2A + B)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 9 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

21. Найти $(A - 2B)(3A + B)$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

22. Найти $(5A - 7B)(A + B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Найти $(3A + B)(2A - B)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -8 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Найти $(5A - 3B)B$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

25. Найти $(3A + 5B)(A - B)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

26. Найти $(3A + 5B)(A - B)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Найти $2A(A - 5B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

28. Найти $(2A + B)B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

29. Найти $(2A - B)(A + B)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

30. Найти $(A + 2B)(A - B)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.3. Нахождение ранга матрицы

- 1) Что называется рангом матрицы
- 2) Какие существуют методы нахождения ранга матрицы
- 3) Определить ранг матрицы

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 5. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad 6. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$7. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad 8. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad 9. \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix},$$

$$10. \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 11. \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 12. \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$13. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 14. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad 15. \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$16. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad 17. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad 18. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 &19. \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad 20. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\
 &21. \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad 22. \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad 23. \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \\
 &24. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad 25. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 26. \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\
 &27. \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 28. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad 29. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\
 &30. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3.4. Нахождение обратной матрицы

1. Написать схему нахождения обратной матрицы
2. Дать определение вырожденной матрицы
3. Найти обратную матрицу

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 4. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad 6. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad 8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 10. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$11. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 12. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$13. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 14. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$15. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$16. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$17. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$18. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$19. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$20. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$21. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$22. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$23. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$24. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$25. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$26. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$27. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$28. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$29. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$30. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5. Решение систем линейных уравнений

1. Записать данную систему в матричной форме
2. В каком случае система имеет единственное решение
3. Решить систему уравнения

1) Методом Гаусса

2) Матричным методом

3) Методом Крамера

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -4 \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases};$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases};$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases};$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases};$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 17 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases};$$

$$10. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 21 \\ x_1 - 3x_3 = -18 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 30 \end{cases};$$

11.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 10x_2 - 3x_3 = 9; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = -3; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
25. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 9 \end{cases} ; & 26. \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -14 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 4x_1 + 23x_2 - x_3 = 58 \end{cases} ; \\
27. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} ; & 28. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} ; \\
29. \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases} & 30. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} .
\end{array}$$

3.6. Исследование системы на совместность

1. Записать теорему Кронекера – Капели
2. В каком случае система имеет бесчисленное множество решений

$$\begin{array}{ll}
1. \begin{cases} x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 14x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - 16x_2 - 11x_3 = -4 \end{cases} ; & 2. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} ; \\
3. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} ; & 4. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 11x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases} ; \\
5. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + 9x_2 - 8x_3 = -1 \end{cases} ; & 6. \begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 8x_1 + 9x_2 - 11x_3 = -16 \end{cases} ;
\end{array}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 13x_3 = 14 \end{cases} ;$$

$$9. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases} ;$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + 8x_2 + 7x_3 = -19 \end{cases} ;$$

$$13. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 28 \end{cases} ;$$

$$15. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases} ;$$

$$17. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7 \\ 9x_1 - x_2 + 16x_3 = 23 \end{cases} ;$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} ;$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} ;$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 5x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 11 \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 = -40 \end{cases} ;$$

$$12. \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 13x_3 = 22 \end{cases} ;$$

$$14. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 13x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases} ;$$

$$16. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ 10x_1 + 14x_2 + 13x_3 = -2 \end{cases} ;$$

$$18. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 13x_1 - 5x_2 + 16x_3 = 24 \end{cases} ;$$

$$20. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 16 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 8x_1 + 13x_2 - 9x_3 = 46 \end{cases} ;$$

$$\begin{array}{ll}
21. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 11x_1 + 22x_2 - 23x_3 = 32 \end{cases} & ; \quad 22. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -12; \\ 8x_1 + 19x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases} \\
23. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 13x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} & ; \quad 24. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 6 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4 \\ 7x_1 + 23x_2 - 27x_3 = 10 \end{cases} \\
25. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3 \\ 7x_1 - 9x_2 + 16x_3 = 30 \end{cases} & ; \quad 26. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -4. \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases} \\
27. \begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases} & ; \quad 28. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 10 \end{cases} \\
29. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases} & ; \quad 30. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}
\end{array}$$

3.7. Переход из одного базиса в другой

1. Дать определение собственного вектора матрицы
2. Как составляется характеристическое уравнение
3. Найти координаты вектора x в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3) .

$$1. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{6; -1; 3\}$$

$$2. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3 \\ e_2' = \frac{3}{2}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{1; 2; 4\}$$

$$3. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' = \frac{4}{3}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{1; 3; 6\}$$

$$4. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3 \\ e_2' = 3e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{2; 4; 1\}$$

$$5. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{4}{3}e_3 \\ e_2' = 4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{6; 3; 1\}$$

$$6. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3 \\ e_2' = \frac{5}{4}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{1; 4; 8\}$$

$$7. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{5}{4}e_3 \\ e_2' = 5e_1 - e_2 \\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{8; 4; 1\}$$

$$8. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3 \\ e_2' = \frac{6}{5}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{2; 5; 10\}$$

$$9. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{5}e_3 \\ e_2' = 6e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} ;$$

$$x = \{10; 5; 1\}$$

$$11. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{7}{6}e_3 \\ e_2' = 7e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} ;$$

$$x = \{12; 6; 1\}$$

$$13. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3 \\ e_2' = \frac{1}{2}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} ;$$

$$x = \{1; 6; 12\}$$

$$10. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3 \\ e_2' = \frac{7}{6}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} ;$$

$$x = \{1; 6; 12\}$$

$$12. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3 \\ e_2' = \frac{8}{7}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} ;$$

$$x = \{-1; 7; 14\}$$

$$14. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ e_2' = -e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} ;$$

$$x = \{2; 4; 3\}$$

$$15. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_2' = \frac{2}{3}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{2; 6; -3\}$$

$$16. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{12; 3; -1\}$$

$$17. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3 \\ e_2' = \frac{3}{4}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{1; -4; 8\}$$

$$18. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3 \\ e_2' = \frac{3}{4}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{1; 4; -8\}$$

$$19. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 4e_3 \\ e_2' = \frac{4}{5}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{7; -5; 10\}$$

$$20. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{4}{5}e_3 \\ e_2' = -4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{5; -5; -4\}$$

$$21. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 5e_3 \\ e_2' = \frac{5}{6}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{1; -6; 6\}$$

$$22. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - \frac{5}{6}e_3 \\ e_2' = -5e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

$$x = \{6; 6; 2\}$$

23.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 6e_3 \\ e_2' = \frac{6}{7}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

 $x = \{1; 7; -7\}$
24.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{7}e_3 \\ e_2' = \frac{8}{9}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

 $x = \{1; -9; 9\}$
25.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 7e_3 \\ e_2' = \frac{7}{8}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

 $x = \{3; -8; 8\}$
26.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 8e_3 \\ e_2' = \frac{8}{9}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

 $x = \{1; -9; 9\}$
27.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

 $x = \{1; -1; 2\}$
28.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' = \frac{4}{3}e_3 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

 $x = \{1; 2; 3\}$
29.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - \frac{4}{3}e_3 \\ e_2' = 4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

 $x = \{4; 1; 3\}$
30.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3 \\ e_2' = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3' = e_1 - 3e_2 + e_3 \end{cases}.$$

 $x = \{1; 2; 3\}$

3.8. Нахождение собственных значений и собственных векторов матриц

1. Что называется собственным значением и собственным вектором матрицы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$1. \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$4. \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$5. \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$6. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$7. \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$8. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$9. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$10. \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$11. \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$12. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$13. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$15. \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$17. \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$19. \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$21. \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{0}{3} & \frac{0}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix},$$

$$23. \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$14. \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$16. \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$18. \begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$20. \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{0}{3} & \frac{0}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

$$22. \begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix},$$

$$24. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$25. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$27. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$29. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$26. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$28. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$30. \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984. – 328 с.
2. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы / Н.В. Ефимов . – М.: Наука, 1975. – 227 с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. М.: Наука, 1980. – 239 с.
4. Данко П.Е Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.Кожевникова . – М.: Высшая школа, 2003. – 303 с.- Ч.І.
5. Данко П.Е Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.Кожевникова . – М.: Высшая школа, 2003. – 417 с., Ч.ІІ.
6. Бугров Я.С. Высшая математика Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1984. – 175 с.
7. Борисович З.И. Определители и матрицы / З.И. Борисович – М.: Наука, 1988. – 184 с.
8. Щипачов В.С. Курс высшей математики / В.С. Щипачов. – 2 изд. пере раб. – М.: Проспект, 2002. – 599 с.
9. Канатников А.Н. Линейная алгебра для студентов ВТУзов / А.Н. Канатников. – Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 336 с.