

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический
университет



**СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.
СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**
для выполнения контрольного задания
по дисциплине «Теория вероятностей»

для студентов всех специальностей очной
формы обучения

Севастополь
2007

УДК 519.24

**«Случайные величины. Системы случайных величин»:
Методические указания для выполнения контрольного
задания по дисциплине «Теория вероятностей» /Разраб.
А.И.Песчанский, Ю.И. Папкова. – Севастополь: Изд-во
СевНТУ, 2007. - 28 с.**

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения всех специальностей, изучающих курс «Теория вероятностей». Пособие содержит 30 вариантов индивидуальных заданий, охватывающих такие разделы дисциплины как случайные величины, законы распределения, числовые характеристики случайных величин, системы случайных величин. В методических указаниях приведен пример решения нулевого варианта.

Задания, содержащиеся в указаниях, могут быть использованы для практических занятий.
Приводится список рекомендуемой литературы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшей математики» протокол № 1 от 31 августа 2007 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: ст. преподаватель Агаханянц Р.Е.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретический материал.....	4
2. Образец выполнения контрольного задания.....	8
3. Варианты контрольного задания	18
3.1. Случайная величина, законы распределения, числовые характеристики случайной величины	18
3.2. Системы случайных величин.....	24
4. Исходные данные к контрольным заданиям.....	25
Библиографический список	28

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Случайной величиной (СВ) называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестное заранее, какое именно. **Дискретной СВ** называется СВ, принимающая отдельные друг от друга значения, причем число этих значений может быть как конечным, так и бесконечным. **Непрерывной СВ** называется СВ, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Рядом распределения дискретной СВ X называется таблица, в которой перечислены возможные значения этой СВ $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ с соответствующими вероятностями

$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

$$p_i = P(X = x_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Функцией распределения СВ X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение, меньшее чем x : $F(x) = P(X < x)$. Для дискретной СВ функция распределения может быть найдена по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \quad (1)$$

Плотностью распределения непрерывной СВ называется функция $f(x) = F'(x)$. Плотность распределения обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (2)$$

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \quad (3)$$

Вероятность того, что СВ X принимает значение в заданном числовом промежутке определяется одним из равенств

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a), \quad (4)$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (5)$$

Математическим ожиданием СВ X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$$M(X) \equiv m_x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \text{ - для дискретной СВ,} \quad (6)$$

$$M(X) \equiv m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \text{ - для непрерывной СВ.} \quad (7)$$

Дисперсией СВ X называется математическое ожидание СВ $(X - m_x)^2$: $D_x = M((X - m_x)^2)$. Дисперсия определяется равенствами

$$D_x = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - m_x^2 \text{ - для дискретной СВ,} \quad (8)$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2 \quad (9)$$

- для непрерывной СВ.

Средним квадратическим отклонением СВ X называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (10)$$

Нормальным называется распределение непрерывной СВ, плотность которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормальной СВ X от математического ожидания меньше положительного числа δ , вычисляется по формуле

$$P(|X - m_x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right), \quad (11)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа. Таблица функции

Лапласа приведена в [1], [2].

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) определяется равенством

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Совокупность двух СВ (X, Y) , рассматриваемых совместно, называется **системой двух случайных величин**. Система двух непрерывных СВ (X, Y) геометрически интерпретируется как случайная точка с координатами (x, y) на плоскости Oxy . Система дискретных СВ (X, Y) характеризуется совокупностью вероятностей $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, которые сводятся в таблицу.

Функцией распределения $F(x, y)$ системы двух СВ (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$; $Y < y$

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Плотностью распределения $f(x, y)$ системы двух непрерывных СВ (X, Y) называется вторая смешанная производная от функции распределения

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Плотность распределения обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Плотности распределения отдельных величин, входящих в систему, выражаются через плотность распределения системы формулами:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (12)$$

Законы распределения дискретных составляющих определяются равенствами

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad P(X = y_j) = \sum_{i=1}^m p_{ij}. \quad (13)$$

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении $Y = y$ называется отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей Y :

$$f_1(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей Y :

$$f_1(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Для дискретных составляющих X и Y условные законы распределения определяются равенствами

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^m p_{ij}}, \quad (14)$$

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}.$$

СВ X и Y называются **независимыми**, если условные плотности распределения СВ X и Y равны их безусловным плотностям:

$$f_1(x|y) = f_1(x), \quad f_2(y|x) = f_2(y)$$

Корреляционным моментом μ_{xy} системы (X, Y) называется величина $M[(X - m_x)(Y - m_y)]$. Для непрерывных величин X и Y корреляционный момент может быть найден по формуле

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dx dy - m_x m_y, \quad (15)$$

для дискретных величин X и Y :

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j p_{ij} - m_x m_y. \quad (16)$$

Коэффициентом корреляции величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (17)$$

Коррелированными называются две СВ, если их корреляционный момент отличен от нуля. **Некоррелированными** называются две СВ, если их корреляционный момент равен нулю. Две коррелированные величины также и зависимы. Если две СВ зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

2. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Задание № 1.

В нашем распоряжении имеются четыре лампочки, каждая из них с вероятностью $p = 0,1$ имеет дефект.

Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток; при включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. Рассматривается случайная величина X – число лампочек, которое будет испытано. Построить ряд распределения этой случайной величины, ее график, найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Случайная величина X имеет следующие возможные значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Найдем вероятности этих возможных значений. Величина X примет возможное значение $x_1 = 1$, если первая лампочка окажется без дефекта: $P(X = 1) = 1 - p = q = 0,9$. Величина X примет возможное значение $x_2 = 2$, если первая лампочка окажется с дефектом, а вторая – нет. Вероятность этого события равна $P(X = 2) = p \cdot q = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09$. Аналогично

$P(X = 3) = p^2 \cdot q = 0,009$. Величина X примет возможное значение $x_4 = 4$, если первые три лампочки окажутся с дефектом, а четвертая без дефекта, либо все четыре лампочки будут иметь дефект: $P(X = 4) = p^3 q + p^4 = p^3(q + p) = p^3 = 0,001$. Напишем

искомый ряд распределения:

X	1	2	3	4
P	0,9	0,09	0,009	0,001

Математическое ожидание m_x и дисперсию D_x случайной величины X найдем соответственно по формулам (6), (8):

$$m_x = 1 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,009 + 4 \cdot 0,001 = 1,111,$$

$$D_x = 1 \cdot 0,9 + 4 \cdot 0,09 + 9 \cdot 0,009 + 16 \cdot 0,001 - 1,111^2 \approx 0,123.$$

Функцию распределения найдем по формуле (1).

1. Если $x \leq 1$, то $F(x) = 0$.
2. Если $1 < x \leq 2$, то $F(x) = P(X = 1) = 0,9$.
3. Если $2 < x \leq 3$, то $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,99$.

4. Если $3 < x \leq 4$, то $F(x) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,999$.

5. Если $x > 4$, то $F(x) = 1$.

Искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,9, & 1 < x \leq 2, \\ 0,99, & 2 < x \leq 3, \\ 0,999, & 3 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рисунке 1.

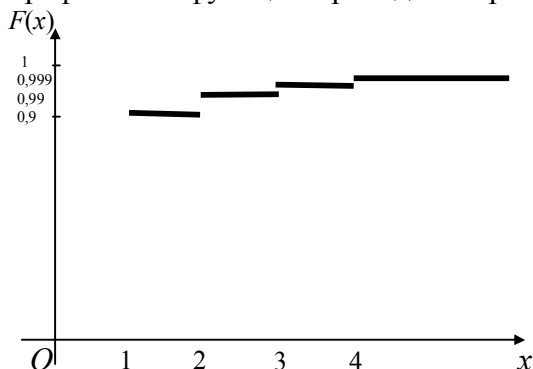


Рисунок 1 – График функции распределения $F(x)$

Задание № 2.

Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases} \quad \text{Найти} \quad \text{плотность}$$

распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X . Построить графики функции и плотности распределения.

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найдем искомое математическое ожидание по формуле (7):

$$M(X) = \int_1^2 x \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{2} x \right) dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^2 = \frac{19}{12}.$$

Дисперсию величины X найдем по формуле (9):

$$D(X) = \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx - \left(\frac{19}{12} \right)^2 = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 - \frac{1}{6} x^3 \Big|_1^2 - \left(\frac{19}{12} \right)^2 = \frac{11}{144}.$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ приведены на рисунке 2 и рисунке 3.

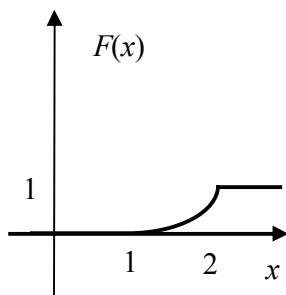


Рисунок 2 - График функции $F(x)$

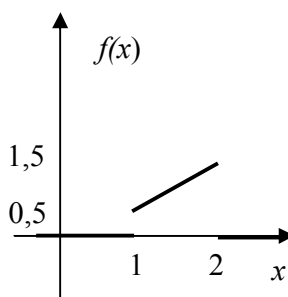


Рисунок 3 – График функции $f(x)$

Задание № 3.

Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [1, \gamma] \\ 0, & x \notin [1, \gamma] \end{cases}$

случайной величины X . Найти параметр γ , математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения случайной

величины X , вероятность выполнения неравенства $2 < X < 3$.

Решение. Определим параметр γ , используя свойство плотности распределения (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^{\gamma} dx = \frac{x}{2} \Big|_1^{\gamma} = \frac{\gamma - 1}{2} = 1, \quad \gamma = 3,$$

Числовые характеристики случайной величины X найдем соответственно по формулам (7), (9).

$$M(X) = \frac{1}{2} \int_1^3 x dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^3 = \frac{9-1}{4} = 2, \quad D(X) = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dx - 2^2 = \frac{1}{6} x^3 \Big|_1^3 - 4 = \frac{1}{3}.$$

Функцию распределения $F(x)$ выражаем из плотности распределения по формуле (3):

При $x \leq 1$ $F(x) = 0$.

$$\text{При } 1 < x \leq 3 \quad F(x) = \int_1^x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^x dx = \frac{x}{2} \Big|_1^x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{При } x > 3 \quad F(x) = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 dx + 0 = 1,$$

$$\text{таким образом, } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (2, 3) найдем по формуле (4):

$$P(2 < X < 3) = \frac{1}{2} \int_2^3 dx = \frac{1}{2}.$$

Задание № 4.

Случайная величина X распределена по «закону прямоугольного треугольника» (рисунок 4).

а) написать выражение плотности распределения;

б) найти числовые характеристики случайной величины X :

m_x , D_x , σ_x .

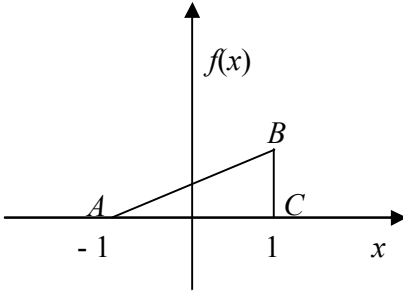


Рисунок 4 – Плотность распределения случайной величины X

Решение. Так как $\int_{-1}^1 f(x)dx = S_{\Delta} = 1$, то можно найти

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2 \cdot BC}{2} = BC = 1. \quad \text{Уравнение прямой,}$$

проходящей через две точки $A(-1, 0)$, $B(1, 1)$, имеет вид $y = \frac{1}{2}(x+1)$, и плотность распределения случайной величины

$$X \text{ будет равна } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1), & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \notin (-1, 1) \end{cases} \text{ по закону}$$

распределения найдем числовые характеристики случайной величины X , используя формулы (7), (9), (10):

$$m_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(x+1)dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3};$$

$$D_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(x+1)dx - \frac{1}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}; \quad \sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Задание № 5.

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \beta e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

где β и λ - постоянные величины.

Требуется: а) найти соотношение, которому должны удовлетворять постоянные β и λ ; б) вычислить функцию распределения $F(x)$ величины X ; в) определить вероятность попадания случайной величины X на участок $(-1; 1)$.

Решение. а) Чтобы найти соотношение между постоянными β и λ , воспользуемся свойством (2) плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x|} dx = \beta \left[\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{2\beta}{\lambda} = 1.$$

Следовательно, $\lambda = 2\beta$.

б) Функцию распределения $F(x)$ найдем по формуле (3).

$$\text{При } x \leq 0 \quad F(x) = \beta \int_{-\infty}^x e^{\lambda t} dt = \frac{\beta}{\lambda} e^{\lambda x} = \frac{1}{2} e^{\lambda x}.$$

$$\text{При } x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} + \beta \int_0^x e^{-\lambda t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}.$$

в) Для определения вероятности попадания величины X в интервал $(-1; 1)$ воспользуемся формулой (4).

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda} - \frac{1}{2} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}.$$

Задание № 6.

Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $m_x = 0$ и дисперсией $D_x = 1$. Определить, которое из двух событий $\{X| < 0,7\}$ и $\{X| \geq 0,7\}$ имеет большую вероятность.

Решение. Найдем среднее квадратическое отклонение случайной величины X по формуле (10) $\sigma_x = 1$.

Вероятности событий $\{X \leq 0,7\}$ и $\{X \geq 0,7\}$ вычисляются по формулам (11).

$$P(|X| < 0,7) = 2\Phi\left(\frac{0,7}{1}\right) = 2\Phi(0,7) = 0,516$$

$$P(|X| \geq 0,7) = 1 - 0,516 = 0,484.$$

Вероятность события $\{X| < 0,7\}$ больше.

Задание № 7.

Задан совместный ряд распределения случайных величин X и Y .

$Y \backslash X$	0	1
0	0,95	0,02
1	0,005	0,025

Требуется найти:

а) безусловный ряд распределения каждой случайной величины;

б) условный ряд распределения случайной величины X при условии $Y = 1$;

в) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционный момент и коэффициент корреляции системы (X, Y) ;

Решение.

а) Законы распределения дискретных составляющих X и Y определяются формулами (13):

$$P(X = 0) = 0,95 + 0,005 = 0,955; \quad P(X = 1) = 0,02 + 0,025 = 0,045;$$

$$P(Y = 0) = 0,95 + 0,02 = 0,97; \quad P(Y = 1) = 0,005 + 0,025 = 0,03.$$

Безусловный ряд распределения каждой случайной величины имеет вид

X	0	1
p	0,955	0,045

Y	0	1
p	0,97	0,03

б) Найдем условный ряд распределения случайной величины X при условии $Y = 1$.

Согласно расчетной формуле (14) получаем:

$$P(X = 0 / Y = 1) = \frac{0,005}{0,005 + 0,025} = 0,167;$$

$$P(X = 1 / Y = 1) = \frac{0,025}{0,005 + 0,025} = 0,833.$$

X	0	1
$P(X = x_i / Y = 1)$	0,167	0,833

в) Найдем математические ожидания, дисперсии, средние квадратические отклонения, корреляционный момент и коэффициент корреляции системы (X, Y) , используя соответственно формулы (6), (8), (10), (16) и (17).

$$m_x = 0 \cdot 0,955 + 1 \cdot 0,045 = 0,045; \quad m_y = 0 \cdot 0,97 + 1 \cdot 0,03 = 0,03;$$

$$D_x = 0^2 \cdot 0,955 + 1^2 \cdot 0,045 - (0,045)^2 = 0,045 - (0,045)^2 = 0,042975;$$

$$\sigma_x = \sqrt{0,042975} = 0,207;$$

$$D_y = 0^2 \cdot 0,97 + 1^2 \cdot 0,03 - (0,03)^2 = 0,03 - (0,03)^2 = 0,0291;$$

$$\sigma_y = \sqrt{0,0291} = 0,171;$$

$$\begin{aligned} \mu_{xy} &= 0 \cdot 0 \cdot 0,95 + 0 \cdot 1 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0 \cdot 0,005 + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot 0,025 - 0,045 \cdot 0,03 = 0,02365; \end{aligned}$$

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0,02365}{0,207 \cdot 0,171} = 0,696.$$

Задание № 8.

Двумерная случайная величина (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника ABC , вершины которого имеют координаты $A(-1; 0)$, $B(0; 0)$ и $C(0; 1)$. Определить выражение плотности распределения $f(x, y)$. Найти плотности распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$ отдельных величин X , Y , входящих в систему,

математические ожидания m_x , m_y , дисперсии D_x , D_y , коэффициент корреляции r_{xy} .

Решение.

Согласно условию

$$f(x, y) = \begin{cases} a, & (x, y) \in \Delta ABC; \\ 0, & (x, y) \notin \Delta ABC \end{cases}$$

По свойству плотности $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \alpha \cdot S_{\Delta ABC} = 1$.

Площадь треугольника равна $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2}$ (рисунок 5), поэтому $a = 2$.

Определим выражения плотностей распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$ величин X , Y , используя формулы (12).

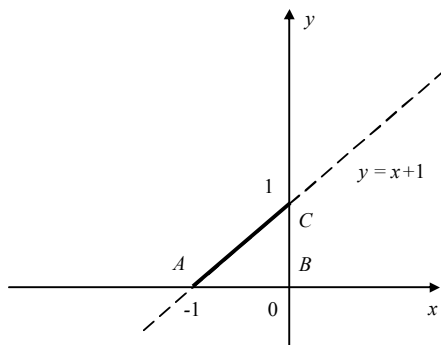


Рисунок 5 – Распределение двумерной случайной величины

Так как уравнение прямой AC имеет вид $y = x + 1$ (рисунок 5), то плотность распределения $f_1(x)$ будет равна

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty); \\ \int_0^{x+1} 2dy, & x \in (-1; 0] \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty); \\ 2x + 2, & x \in (-1; 0]. \end{cases}$$

Аналогично, для Y

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty); \\ \int_{y-1}^0 2dx, & y \in [0; 1) \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty); \\ 2 - 2y, & y \in [0; 1) \end{cases}.$$

Найдем математические ожидания, дисперсии, средние квадратические отклонения, корреляционный момент и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y) , используя соответственно формулы (7), (9), (10), (15) и (17).

$$m_x = \int_{-1}^0 x(2x+2)dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{3};$$

$$m_y = \int_0^1 y(2-2y)dy = 2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3};$$

$$D_x = \int_{-1}^0 x^2(2x+2)dx - \left(-\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}; \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6};$$

$$D_y = \int_0^1 y^2(2-2y)dy - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{18}; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6};$$

$$\mu_{xy} = \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} 2xydy - \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{36};$$

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{2}.$$

3. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

3.1. Случайная величина, законы распределения, числовые характеристики случайной величины

ЗАДАНИЕ №1

Варианты 1 – 6.

Из партии, состоящей из N изделий, среди которых имеются M бракованных, выбраны случайным образом k

изделий для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке, график функции распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

Варианты 7 – 12.

Телефон – автомат обеспечивает нужное соединение с вероятностью p . Вы пытаетесь дозвониться по определенному номеру, имея к началу опыта N двадцати пяти копеечных монет. Случайная величина X – число истраченных монет. Построить ряд распределения, график функции распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

Варианты 13 – 19.

Вероятность попадания стрелком в цель при одном выстреле равна p . Случайная величина X - число удач стрелка, сделавшего M выстрелов. Построить ряд распределения, график функции распределения величины X . Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

Варианты 20 – 25.

С подводной лодки выпускают торпеды последовательно по одной до первого попадания в цель или полного израсходования всего боекомплекта, состоящего из M торпед. Все выстрелы независимы, а вероятность попадания в цель каждой торпеды равна p . Случайная величина X - число израсходованных торпед. Построить ряд и график функции распределения случайной величины X . Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

Варианты 26 – 30.

Проводятся испытания N изделий на надежность, причем вероятность выдержать испытания для каждого

изделия равна p . Случайная величина X - число изделий, выдержавших испытания. Построить ряд распределения, график функции распределения, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

ЗАДАНИЕ №2

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X . Построить графики функции и плотности распределения.

Варианты 1 – 15.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Варианты 16 – 30.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ №3

Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X . Найти параметр γ , математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения случайной величины X , вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$.

Варианты 1 – 8:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma - a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Варианты 9 – 16: $f(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma, b], \\ 0, & x \notin [\gamma, b]. \end{cases}$

Варианты 17 – 24: $f(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$

Варианты 25 – 30: $f(x) = \begin{cases} a, & x \in \left[\frac{b-\gamma}{2}, \frac{b+\gamma}{2} \right], \\ 0, & x \notin \left[\frac{b-\gamma}{2}, \frac{b+\gamma}{2} \right]. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ № 4

Варианты 1 – 15.

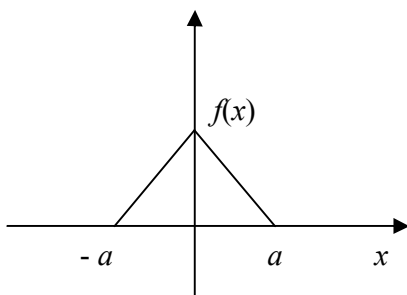


Рисунок 6 – Плотность распределения случайной величины X

Случайная величина X подчинена закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») на участке от $-a$ до a (рисунок 6):

- написать выражение плотности распределения;
- построить график функции распределения;
- найти числовые характеристики случайной величины

$X: m_x, D_x, \sigma_x;$

г) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\frac{a}{2}, a\right)$.

Варианты 16 – 30.

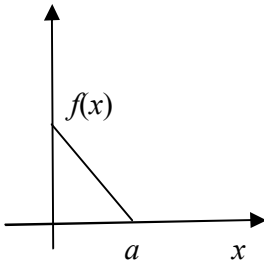


Рисунок 7 – Плотность распределения случайной величины X

Случайная величина X распределена по «закону прямоугольного треугольника» в интервале $(0, a)$ (рисунок 7):

- а) написать выражение плотности распределения;
- б) построить график функции распределения;
- в) найти числовые характеристики случайной величины X : m_x , D_x , σ_x ;
- г) найти вероятность попадания случайной величины X на участок от $\frac{a}{2}$ до a .

ЗАДАНИЕ № 5

Варианты 1 – 8.

В теории надежности технических приборов часто используется закон Вейбулла с функцией распределения

$F(x) = 1 - e^{-hx^n}$ ($x > 0$). Найти: а) плотность распределения $f(x)$; б) математическое ожидание случайной величины X при $n = 1$; в) вероятность того, что случайная величина X

($n = 1$) примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Варианты 9 – 15.

Случайная величина X подчинена показательному закону распределения:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-hx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ а) найти коэффициент } A; \text{ б) найти}$$

функцию распределения $F(x)$; в) найти математическое ожидание m_x и дисперсию D_x .

Варианты 16 – 23.

Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x) = \frac{a}{h^2 + x^2}. \text{ Найти: а) коэффициент } a; \text{ б) функцию}$$

распределения $F(x)$; в) вероятность попадания величины X на участок $(-1; 1)$.

Варианты 24 – 30.

Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой

$P(t) = 1 - e^{-ht}$: а) определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна; б) найти вероятность того, что время поиска примет значение меньшее, чем среднее время поиска.

ЗАДАНИЕ № 6

Варианты 1 – 10.

Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков $d_0 = 5 \text{ мм}$. В следствии неточности изготовления шарика фактический его диаметр – случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением d_0 и средним квадратическим

отклонением σ_d мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем на δ мм. Определить, какой процент шариков в среднем будет отбраковываться.

Варианты 11 – 20.

Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$. Вероятность попадания этой случайной величины на участок от $-a$ до a равна 0,5. Найти σ_x и написать выражение нормального закона.

Варианты 21 – 30.

Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X . Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α, β) .

3.2. Системы случайных величин

ЗАДАНИЕ № 7

Задан совместный ряд распределения случайных величин X и Y . Требуется найти:

а) безусловный ряд распределения каждой случайной величины;

б) условный ряд распределения случайной величины X при условии $Y = M$;

а) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционный момент и коэффициент корреляции системы (X, Y) .

Варианты 1 – 7.

$Y \backslash X$	1	2	3
M	0,1	0,3	0,2
$M - 2$	0,2	0,1	0,1

Варианты 8 – 14.

$Y \backslash X$	-1	0	1
$M - 1$	0,15	0,21	0,24
$M - 2$	0,18	0,20	0,02

Варианты 15 – 21.

$Y \backslash X$	1	3	5
M	0,20	0,23	0,17
$M - 2$	0,12	0,15	0,13

Варианты 22 – 30.

$Y \backslash X$	0	1	2	3
M	0,25	0,12	0,16	0,05
$M - 4$	0,10	0,15	0,17	0

ЗАДАНИЕ № 8

Варианты 1 – 30.

Двумерная случайная величина (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри треугольника ABC . Определить выражение плотности распределения $f(x, y)$. Найти плотности распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$ отдельных величин X , Y , входящих в систему, математические ожидания m_x , m_y , дисперсии D_x , D_y , коэффициент корреляции r_{xy} . (В исходных данных указаны декартовы координаты вершин треугольника ABC).

4. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

(в первой горизонтальной строке указаны номера задач, в левом столбце – номера вариантов)

	1				2							
	N	M	k	p	a	b						
1	6	3	2		1	2						
2	5	4	3		2	3						
3	7	3	2		3	4						
4	6	4	3		4	5						
5	7	4	3		0	1						
6	5	3	2		-1	0						
7	3			0,8	-2	1						
8	4			0,9	-3	2						
9	3			0,7	-4	3						
10	5			0,6	0	4						
11	3			0,5	-2	3						
12	4			0,4	-3	0						
13		5		0,8	-4	0						
14		4		0,5	5	6						
15		5		0,4	-1	2						
16		3		0,9	0	2						
17		4		0,7	1	4						
18		4		0,6	2	4						
19		5		0,7	-3	1						
20		4		0,8	-4	0						
21		3		0,9	1	3						
22		4		0,6	2	5						
23		6		0,5	-1	1						
24		5		0,4	-2	2						
25		3		0,8	0	3						
26	4			0,8	3	5						
27	5			0,6	4	6						
28	6			0,7	-3	3						
29	5			0,6	0	2						
30	4			0,5	-1	2						
	3				4	5	6					
	a	b	x_1	x_2	a	h	σ_α	δ	a	σ	α	β
1	2,5	4	3	3,3	3,8	0,1	0,05	0,08				
2	1,5	3	2	2,6	7	0,3	0,01	0,02				
3	1,5	2,5	2	2,3	3,5	0,2	0,12	0,1				
4	1	3,5	2	2,8	8	0,4	0,02	0,01				
5	-1	2	-0,7	1,1	3	0,6	0,06	0,1				

6	-2	1	-1,5	0,3	7,5	0,5	0,14	0,08				
7	-3	5	-2	2	2,5	0,9	0,04	0,06				
8	-1,5	2,5	-1	0	16	1,1	0,16	0,09				
9	1	1,8	1,3	1,6	7,9	0,7	0,03	0,01				
10	1	2,4	1,5	2	4	0,8	0,07	0,08				
11	2	3,5	2,5	3	12	0,3			1,1			
12	2	2,8	2,1	2,5	1,2	0,2			2,3			
13	1	2,8	-1	3	14	0,15			3,5			
14	1	2,6	1,5	3	9,5	0,35			1,8			
15	2	3	1	3	4,5	0,25			2,5			
16	2	4,8	4,5	5	6,4	0,45			2,2			
17	-4	-2	-1	0	1,8	0,75			1,5			
18	-3	-1	-2	0	3,8	0,55			3,8			
19	2	4	0	3	0,2	2,2			2,9			
20	1	3	0	2	5	3,5			2,1			
21	1	1,5	0	0,5	1,9	4			10	4	2	13
22	-1	1,5	0	1	7,8	2,8			9	5	5	14
23	-1,5	-1	-1	2	11	1,5			8	1	4	9
24	-1,5	1	-1	1	7,2	3			7	2	3	10
25	0,5	1	0	3	4,4	2,4			6	3	2	11
26	0,2	2	0	4	10,2	3,8			5	1	1	12
27	0,5	3	0	0,5	0,7	4,6			4	5	2	11
28	0,4	4	1	5	4,3	1,8			3	2	3	10
29	0,25	1	0	3	7,8	2,8			2	5	4	9
30	0,02	2	0	3	4,2	3,4			2	4	6	10
		7		8								
		M	x_A	y_A	x_B	y_B	x_C	y_C				
1	6	0	0	1	1	1	1	-1				
2	5	0	0	-1	1	1	1	1				
3	3	0	0	-1	1	1	-1	-1				
4	4	0	0	-1	-1	1	1	-1				
5	7	0	0	2	2	2	2	-1				
6	8	0	0	-2	2	2	2	2				
7	9	0	0	-2	2	2	-2	-2				
8	8	0	0	-2	-2	2	2	-2				
9	7	1	1	1	-1	0	0	0				
10	6	-1	1	1	1	0	0	0				
11	5	-1	1	-1	-1	0	0	0				
12	4	-1	-1	1	-1	0	0	0				
13	3	2	2	2	-2	0	0	0				
14	10	-2	2	2	2	0	0	0				

15	11	-2	2	-2	-2	0	0
16	9	0	0	6	6	6	-6
17	8	0	0	-6	6	6	6
18	7	0	0	-6	6	-6	-6
19	6	0	0	-6	-6	6	-6
20	5	0	0	5	5	5	-5
21	4	0	0	-5	5	5	5
22	12	0	0	-5	5	-5	-5
23	13	0	0	-5	-5	5	-5
24	14	4	4	4	-4	0	0
25	11	-4	4	4	4	0	0
26	10	-4	4	-4	-4	0	0
27	9	-4	-4	4	-4	0	0
28	15	3	3	3	-3	0	0
29	7	-3	3	3	3	0	0
30	8	-3	3	-3	-3	0	0

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов/ В.Е. Гмурман. – 9-е изд., с тер. – М.: Высш.шк., 2003. – 479с.
2. Гмурман В.Е. Руководство решению задач по теории вероятностей и математической статистике/ В.Е. Гмурман. – М.: Высш.шк., 2002. – 405 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерное приложение/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Изд-во «Наука», 1988.– 480 с.
4. Вища математика: Зб.задач: У 2 ч. Ч.2./П.П. Овчинников, П.С. Кропив'янський, С.П. Полушкін; За заг.ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 376 с.

Заказ № _____ от « ____ » _____ 2007. Тираж _____ экз.
 Изд-во СевНТУ