



Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНЫХ И РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ “МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ОПЕРАЦИЙ”**

"Информационные управляющие системы и технологии"
для студентов всех форм обучения по направлению
0804 – “Компьютерные науки”

Часть 2. Задачи транспортного типа

Севастополь
2007



УДК 004.4

Методические указания к выполнению контрольных и расчётно-графических заданий по дисциплине “Методы исследования операций” для студентов всех форм обучения по направлению 0804 – “Компьютерные науки”. Часть 2. Задачи транспортного типа/ Разраб. Л.П. Старобинская, В.Ю. Карлусов. - Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. –60 с.

Цель методических указаний: обеспечение выполнения учащимися как дневной, так и заочной формы обучения полного цикла операционных исследований в задачах линейного программирования – начиная от построения математической модели, нахождения для неё оптимального решения и заканчивая организацией проведения вычислительного эксперимента при решении вариационной задачи нахождения улучшенных параметров допустимой стратегии.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры Информационных систем, протокол № 02 от 15 сентября 2006 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Апраксин Ю.К., доктор техн. наук, профессор. каф. Кибернетики и вычислительной техники.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Общая характеристика транспортных задач.....	4
1.1. Содержательная постановка транспортной задачи.....	5
1.2. Основные свойства транспортных задач.....	5
1.3. Построение математической модели задачи.....	6
2. Метод потенциалов.....	7
2.1. Экономическая интерпретация задачи.....	7
2.2. Описание алгоритма решения задачи.....	8
2.3. Методы построения начального опорного плана. Примеры реше- ния задач.....	11
2.3.1. Метод северо-западного угла.....	12
2.3.2. Метод минимальной стоимости.....	15
2.3.3. Метод Фогеля (штрафов).....	18
2.4. Пример решения транспортной задачи методом потенциалов.....	21
2.5. Анализ модели на чувствительность.....	25
3. Венгерский метод.....	28
3.1. Экономическая интерпретация задачи.....	28
3.2. Основные этапы решения транспортной задачи венгерским методом.....	29
3.3. Пример решения транспортной задачи венгерским методом.....	31
3.4. Анализ модели на чувствительность.....	40
4. Транспортная задача с ограниченными пропускными способностями коммуникаций.....	42
4.1. Экономическая интерпретация задачи.....	42
4.2. Описание алгоритма решения задачи.....	43
4.3. Пример решения транспортной задачи с ограниченными пропуск- ными способностями.....	45
4.4. Анализ модели на чувствительность.....	46
5. Задача о назначениях.....	49
5.1. Содержательная постановка задачи.....	49
5.2. Экономическая интерпретация задачи.....	50
5.3. Основные понятия метода.....	50
5.4. Описание алгоритма решения задачи.....	51
5.5. Пример решения задачи выбора.....	53
5.6. Анализ модели на чувствительность.....	57
Библиографический список.....	60

ВВЕДЕНИЕ

Анализ опыта преподавания дисциплины “Методы исследования операций” позволил обнаружить существенные моменты, на которые следует обратить внимание в ходе выполнения контрольных работ, курсового проектирования и подготовки к экзаменам.

1. Отмечается слабое представление учащимися связей теоретических моделей исследования операций с практическими (прикладными) задачами.

2. Замечены случаи недопонимания отдельными студентами тонкостей тех или иных методов оптимизации.

3. Просматривается отсутствие у большинства обучаемых практики проведения исследований и их теоретического обеспечения.

4. Имеется функциональная недостаточность наличествующих учебных пособий как центрального, так и местного изданий при самостоятельном или дистанционном (заочном) обучении.

Поэтому в настоящих методических указаниях представлена, по возможности полная, типовая последовательность проведения исследования операций: от содержательной постановки задачи к математической модели, на основании которой выполняется оптимизация, с использованием широкого ассортимента методов, завершая исследованиями устойчивости полученного решения на заданном множестве исходных данных. Приводится интерпретация результатов исследований в терминах содержательной постановки задачи.

Авторы считают необходимым выразить благодарность студентам М.Р. Валентюк, М.Г. Нестеровой, Н.А. Погребной 3-го курса 2004/2005 гг., которые оказали ощутимую помощь в сборе, художественной обработке и оформлении материалов настоящих методических указаний.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

Транспортная задача является одной из самых распространенных специальных задач линейного программирования. К подобному типу задач сводятся задачи организации транспортных потоков, формирование оптимальных сетей коммуникаций, управления разнообразными производственными и технологическими процессами, организации бесперебойной и целенаправленной работы комплексов оборудования. Наиболее распространенным примером транспортной задачи является задача планирования работы системы коммуникаций.

1.1. Содержательная постановка транспортной задачи

Классическая транспортная задача формулируется следующим образом:

Имеется m пунктов производства (поставщиков) и n пунктов потребления (потребителей) однородного продукта.

Заданы величины:

- объем производства (запас) i -го поставщика, $i = [1, m]$;
- объем потребления (спрос) j -го потребителя, $j = [1, n]$;
- стоимость перевозки (транспортные затраты) единицы продукта от i -го поставщика к j -му потребителю.

Требуется составить такой план перевозок, при котором все запасы (объемы) производства были бы реализованы, и при этом общая стоимость всех перевозок была бы минимальна.

Для примера возьмем задачу, исходные данные к которой представлены в таблице 1.1, в которой обозначено $a_i = \{11, 11, 8\}$ – вектор производственных запасов; $b_j = \{5, 9, 9, 7\}$ – вектор потребления; $c_{ij} = \{\{7, 8, 5, 3\}, \{2, 4, 5, 9\}, \{6, 3, 1, 2\}\}$ – транспортные затраты на перевозку от поставщика к потребителю.

Таблица 1.1 - Таблица исходных данных

	a_i				
	7	8	5	3	11
	2	4	5	9	11
	6	3	1	2	8
b_j	5	9	9	7	

1.2. Основные свойства транспортных задач

- 1) Коэффициенты целевой функции неотрицательны (стоимости перевозок не могут быть отрицательными величинами);
- 2) Величины элементов вектора производственных запасов и вектора потребления неотрицательны.

При этом справедлив ряд утверждений:

- базисное решение закрытой модели транспортной задачи содержит $m+n-1$ базисных компонент;
- в силу специфики содержательной постановки транспортной задачи допустимое решение называется планом, базисное допустимое решение называется опорным планом, оптимальное решение называется оптимальным планом.

1.3. Построение математической модели задачи

Математическая модель транспортной задачи в терминах линейного программирования имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} * x_{ij} \rightarrow \min, \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, j = 1, \dots, n; x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы $\sum_{i=1}^m a_i$ и суммарные потребности $\sum_{j=1}^n b_j$ совпадают, называется сбалансированной, т.е. соблюдается условие баланса. В этом случае, в ограничениях математической модели будет находиться знак равенства, а сама модель называется *закрытой*. В противном случае – не сбалансированной. Не сбалансированная задача приводится к сбалансированной.

В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, вводится фиктивный $n+1$ потребитель, потребности которого $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$.

В случае, когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, вводится фиктивный $m+1$ поставщик, запасы которого $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$.

Стоимость перевозки единицы груза как к фиктивному потребителю, так и стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика полагают равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Прежде чем решать транспортную задачу, необходимо проверить, соблюдается ли условие баланса, и если необходимо, то привести задачу к сбалансированному виду.

Рассмотрим изложенное выше на примере, условие транспортной задачи имеет вид:

				a_i	
	7	8	5	3	11
	2	4	5	9	11
	6	3	1	2	8
b_j	5	9	9	7	

Для данной задачи условием баланса будет являться следующее равенство: $5+9+9+7=11+11+8$, $30=30$, т.е. суммарные запасы равны суммарным потребностям.

Значит, задача разрешима.

Рассмотрим другой пример:

	a_i				
	18	2	9	7	60
	30	4	1	55	40
	9	6	1	12	100
	6	4	6	3	50
b_j	2	3	3	16	

Тогда, проверяя его на сбалансированность, получим $2+3+3+16 < 60+40+100+50$, $34 < 250$.

Условие баланса не выполняется. Приведем план к сбалансированному виду. Для этого необходимо к минимальному из векторов добавить ещё один элемент и разницу сумм векторов a_i и b_j записать на это место. Получившийся при этом свободный столбец заполнить нулями.

Для исходной задачи сбалансированное условие выглядит следующим образом:

	a_i					
	18	2	9	7	0	60
	30	4	1	55	0	40
	9	6	1	12	0	100
	6	4	6	3	0	50
b_j	2	3	3	16	226	

$$\sum_{i=1}^m a_i = 250, \quad \sum_{i=1}^n b_i = 250, \quad \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^m a_i = 250 = 250.$$

Теперь мы видим, что условие баланса выполняется.

2. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

2.1. Экономическая интерпретация задачи

На Украине имеется 3 авиационных завода: Киевский, Харьковский и Винницкий. Каждый завод производит соответственно 11, 11, 8 пассажирских авиалайнеров в год. Эту продукцию нужно продать в европейские страны, такие как Германия, Франция, Италия и Бельгия, объемы заказов кото-

рых соответственно равны 5, 9, 9, 7. Стоимость перевозки авиалайнеров от определенного пункта производства к определенному пункту потребления указана в таблице 2.1 (значения c_{ij}). Требуется распределить поставляемую продукцию по странам таким образом, чтобы минимизировать общие расходы транспортировки.

Таблица 2.1 Таблица исходных данных в экономической интерпретации

Заводы	Страны				Количество выпускаемой продукции
	Германия	Франция	Италия	Бельгия	
Киевский	7	8	5	3	11
Харьковский	2	4	5	9	11
Винницкий	6	3	1	2	8
Потребность страны в авиалайнерах	5	9	9	7	

2.2. Описание алгоритма решения задачи

Метод потенциалов является модификацией симплекс-метода решения задачи линейного программирования применительно к транспортной задаче. Он позволяет, отталкиваясь от некоторого допустимого решения, получить оптимальное решение за конечное число итераций.

Потенциал – это число, характеризующее удобство расположения пункта производства или потребления относительно текущего плана и заданной матрицы стоимостей.

Методы решения транспортной задачи сводятся к простым операциям с транспортной таблицей, которая имеет вид:

$$X = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & \dots & n & a_i \\ \hline 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & x_{ij} & \dots & \dots \\ m & c_{m1} & \dots & c_{mn} & a_m \\ \hline b_j & b_1 & \dots & b_n & = \end{array}$$

Базисными клетками транспортной таблицы являются клетки с отличными от нуля положительными перевозками, остальные клетки - свободные. Базисные клетки образуют опорный план транспортной задачи, если выполняются два условия:

- 1) сумма перевозок в каждой строке равна запасу a_i в данной строке;
- 2) сумма перевозок в каждом столбце равна соответствующему спросу b_j ;
- 3) из базисных клеток нельзя составить цепочку.

Цепочкой в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 90°.

Идеи, положенные в основу метода потенциалов состоит в следующем. Для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует единственный цикл, положительная вершина которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные - в базисных. Если цена такого цикла отрицательна, то план можно улучшить перемещением перевозок по данному циклу. Количество единиц груза, которое можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла (если переместить большее число единиц груза, возникнут отрицательные перевозки). Если циклов с отрицательной ценой нет, то это означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно, т.е. оптимальный план найден.

Для начала рассмотрим сам алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов:

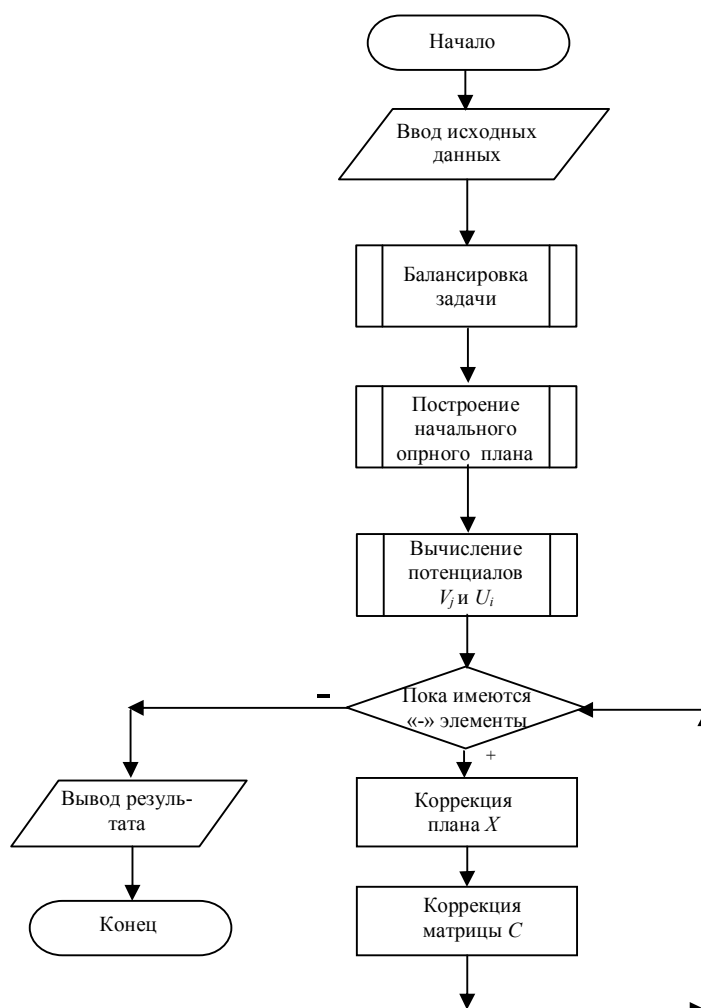


Рисунок 2.1 – Структурная схема алгоритма метода потенциалов

1. Проверка условия баланса и при необходимости балансировка задачи.

2. Построение начального опорного плана (любым из 3-х рассматриваемых ниже способов), который должен быть невырожден.

3. Итерация, которая включает в себя проверку на оптимальность решения, определение вводимой в базис коммуникации и коммуникации выводимой из него. Что производится путем построения цепочки по методу вычеркивания.

4. Корректировка значения целевой функции и матрицы потенциалов.

Структурная схема данного алгоритма представлена на рисунке 2.1.

Алгоритм, как видно из рисунка, складывается из предварительного этапа и конечного числа однотипных итераций. На предварительный этап мы вынесем алгоритм, который рассчитывает потенциалы на каждом шаге. Рассмотрим функциональные части алгоритма детально.

Предварительный этап

Определяется невырожденный опорный план и рассчитывается начальное значение целевой функции. Рассчитываются потенциалы пунктов производства и потребления. Для чего составляется система уравнений:

$$\begin{cases} U_1 = 1; \\ C_{ij} = V_j - U_i; \\ i = [1, \dots, m], j = [1, \dots, n] \end{cases}$$

где C_{ij} – элемент матрицы C , которому в плане X соответствует ненулевая коммуникация; V_j – потенциал j -го пункта потребления (потенциал столбца); U_i – потенциал i -го пункта производства (потенциал строки).

На основании полученных потенциалов выполняется корректировка матрицы C .

Элементы этой матрицы рассчитываются по формуле: $C_{0ij} = C_{ij} - (V_j - U_i)$. Из последней формулы следует, что элементы матрицы C_0 , которые соответствовали ненулевым коммуникациям плана X , будут нулевыми после пересчета. Последнее может являться дополнительной проверкой правильности нахождения потенциалов.

Уравнения для расчета потенциалов решаются последовательно так, чтобы каждое уравнение содержало только одну неизвестную.

Если все элементы матрицы C_k ($k = [0, 1, 2, \dots]$) не отрицательны, то это говорит о достижении оптимального решения. В противном случае план подлежит улучшению.

Этап коррекции плана

Среди всех элементов матрицы C_k отыскивается самый отрицательный элемент δ .

Соответствующая ему коммуникация будет вводиться в опорный план. В нем на эту позицию помещается нуль с индексом «+».

Для того, чтобы определить выводимую из базиса коммуникацию, строится цепочка по методу вычеркивания. Она является замкнутой, начинается и заканчивается 0^+ . Цепочка индексируется «-» либо «+» поочередно, начиная с 0^+ .

Из элементов плана с индексами выбирается минимальный элемент Θ . Осуществляется построение нового опорного плана, в ходе которого значения Θ прибавляются к элементам цепочки, отмеченным «+», и вычитаются из элементов, отмеченных «-».

Если некоторое число элементов цепочки в результате этой операции становятся нулями, то все эти элементы, кроме одного, отмечаются символом ε , для того, чтобы план не потерял свойство опорности.

Элементы плана, не вошедшие в цепочку, переписываются в новый план без изменений. Корректируется значение целевой функции по формуле: $L = L - |\delta| \Theta$.

Отмечаются нулевые элементы матрицы C_k , соответствующие ненулевым коммуникациям, ε также считается ненулевой коммуникацией. Вычеркивается строка, соответствующая элементу δ . Если в процессе вычеркивания оказываются вычеркнутыми отмеченные элементы, то вычеркиваются столбцы, на которых они расположены. Если в ходе вычеркивания столбцов оказываются вычеркнуты другие базисные элементы, то вычеркиваются соответствующие строки. После окончания вычеркивания к вычеркнутым строкам прибавляется модуль δ , а от вычеркнутых столбцов вычитается.

Построение цепочки методом вычеркивания:

- в плане коммуникаций вычеркиваются строки, на которых находятся менее двух базисных элементов;
- 0^+ и ε — базисные элементы. Аналогично со столбцами, затем со строками и т. д. В результате остаются элементы, которые вычеркнуть не удастся — эти элементы и образуют цепочку.

2.3. Методы построения начального опорного плана. Примеры решения задач

Опорный план с точки зрения линейного программирования представляет собой дополнительное базисное решение, а с практической точки зрения — это план, удовлетворяющий условиям задачи и являющийся ее решением.

Опорный план транспортной задачи содержит не более $n+m-1$ отличных от нуля перевозок x_{ij}

Опорный план называется **вырожденным**, если число ненулевых перевозок x_{ij} меньше $(n+m-1)$, опорный план — **невырожден**, если число ненулевых перевозок больше или равно $(n+m-1)$, где n и m размеры матрицы C .

Популярными способами построение опорного плана являются:

- метод северо-западного угла;
- метод минимальной стоимости;
- метод Фогеля (метод штрафов).

Для каждого метода (если получившийся план невырожден) рассчитывается целевая функция:

$$L(X_0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Ниже рассмотрим по порядку алгоритмы всех трех методов.

2.3.1. Метод северо-западного угла

Строится пустая матрица плана X_0 , размером совпадающая с исходной матрицей C .

С левой стороны ее подписывается объем производства, а по нижнему краю – объемы потребления. Заполнение матрицы начинается с северо-западного угла (элемента с координатами $[1;1]$). Рассмотрим "северо-западный угол" незаполненной таблицы, то есть клетку, соответствующую первому поставщику и первому потребителю, находящуюся в левом верхнем углу.

Возможны три случая:

1. Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$. Это означает, что первый поставщик отгрузил весь произведенный продукт первому потребителю и его запас равен нулю, поэтому $x_{12} = x_{13} = \dots = x_{1n} = 0$. При этом неудовлетворенный спрос в первом пункте потребления равен $b'_1 = b_1 - a_1$.

2. Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, то есть спрос первого потребителя полностью удовлетворен и поэтому $x_{21} = x_{31} = \dots = x_{m1} = 0$, а остаток продукта в первом пункте производства равен $a'_1 = a_1 - b_1$.

3. В случае $a_1 = b_1$ из рассмотрения можно исключить и поставщика, и потребителя. Однако при этом план получается вырожденным, поэтому условно считается, что выбывает только поставщик, поэтому $x_{12} = x_{13} = \dots = x_{1n} = 0$, а спрос потребителя остается неудовлетворенным и равным нулю $b'_1 = 0$.

После этого рассматриваем северо-западный угол оставшейся незаполненной части таблицы и повторяем те же действия. В результате через $n+m-1$ шагов получим опорный план. После чего полученный план проверяется на невырожденность.

Коммуникации в плане X_0 представляют собой базис. И из ненулевых коммуникаций нельзя построить замкнутую цепочку. Как правило, план, построенный по методу северо-западного угла, является наихудшим из возможных решений ТЗ.

Пусть исходные данные имеют вид:

				a_i	
	7	8	5	3	11
	2	4	5	9	11
	6	3	1	2	8
b_j	5	9	9	7	

Начнем построение опорного плана со следующей заготовки:

				ai
				11
				11
				8
bj	5	9	9	7

На первом этапе построения опорного плана методом северо-западного угла находим в незаполненной таблице самый северо-западный угол, т.е. клетку, у которой координаты $[1;1]$. Затем сравниваем a_1 и b_1 , т. к. $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1 = 5$. Заполняем первую клетку плана:

				a_i	
	5			11	6
				11	
				8	
b_j	5	9	9	7	
	0				

Так как для первого столбца $b_j = 0$, то этот столбец не рассматривается. Снова находим самый северо-западный угол, т. е. клетку с координатами $[1;2]$. Сравниваем a_1 и b_2 , $a_1 < b_2$, значит $x_{12} = a_1 = 6$. Продолжаем заполнение плана:

				a_i		
	5	6		11	6	0
				11		
				8		
b_j	5	9	9	7		
	0	3				

Так как теперь для первой строки $a_i = 0$, то эта строка не рассматривается. Находим самый северо-западный угол, т. е. теперь уже клетку с координатами $[2;2]$. Сравниваем a_2 и b_2 , т. к. $a_2 > b_2$, т. е. $x_{22} = b_2 = 3$. Продолжаем заполнение плана:

				<i>ai</i>		
				11	6	0
				11	8	
				8		
<i>bj</i>	5	9	9			
	0	3				
		0				

Для второго столбца $b_j = 0$, этот столбец не рассматривается. Снова находим самый северо-западный угол, т. е. теперь уже клетку с координатами $[2;3]$. Сравниваем a_2 и b_3 , т. к. $a_2 < b_3$, т. е. $x_{23} = a_2 = 8$. Имеем:

				<i>ai</i>		
				11	6	0
				11	8	0
				8		
<i>bj</i>	5	9	9			
	0	3	1			
		0				

Для второй строки $a_i = 0$, значит, эта строка не рассматривается. Снова находим самый северо-западный угол, т. е. теперь уже клетку с координатами $[3;3]$. Сравниваем a_3 и b_3 , т. к. $a_3 > b_3$, т. е. $x_{33} = b_3 = 1$. Получаем:

				<i>ai</i>		
				11	6	0
				11	8	0
				8	7	
<i>bj</i>	5	9	9			
	0	3	1			
		0	0			

Для третьего столбца $b_j = 0$, этот столбец не рассматривается. Снова находим самый северо-западный угол, т. е. теперь уже клетку с координатами $[3;4]$. Сравниваем a_3 и b_4 , т. к. $a_3 = b_4$, т. е. $x_{34} = a_3 = b_4 = 7$. В результате построен план:

				<i>ai</i>		
				11	6	0
				11	8	0
				8	7	0
<i>bj</i>	5	9	9			
	0	3	1			
		0	0			

Проверим план на невырожденность: число ненулевых элементов в таблице равно 6, $n=3$, $m=4$, значит $6 \geq 3+4-1$. Условие выполняется, поэтому **план невырожден**. Значит, рассчитывается целевая функция:

$$L_0 = \sum \sum c_{ij} x_{ij} = 5 \times 7 + 6 \times 8 + 3 \times 4 + 5 \times 8 + 1 \times 1 + 2 \times 7 = 150.$$

2.3.2. Метод минимальной стоимости

Данный метод позволяет построить начальный опорный план, учитывая специфику матрицы C . Он позволяет сразу получить достаточно экономичный план, сокращая общее количество итераций при его оптимизации.

Строится матрица плана X_0 , размером совпадающая с исходной матрицей C .

Матрица стоимостей подвергается индексации в порядке возрастания. На месте минимального элемента ставится 1, а на месте следующего по значению элемента ставится 2 и т. д. Если при этом попадают 2 элемента с одинаковыми значениями, то рекомендуется нумеровать их в порядке их следования сверху вниз и слева направо. Однако следует отметить, что при индексации отсутствует правило выбора присвоения индекса к матрице стоимостей.

Согласно полученным индексам производится заполнение элементов опорного плана X_0 (начиная от минимального индекса в порядке их возрастания). При этом элементы и правила коррекции вычисляются также как и по методу северо-западного угла:

1. Если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$, $b'_j = b_j - a_i$.
2. Если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$, $a'_i = a_i - b_j$.
3. Если $a_i = b_j$, то $a'_i = 0$, $b'_j = 0$.

Пусть элементом с минимальным порядковым номером оказался элемент $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$.

Возможны три случая:

1. если $\min\{a_i, b_j\} = a_i$ то оставшуюся часть i -ой строки заполним нулями;
2. если $\min\{a_i, b_j\} = b_j$, то оставшуюся часть j -го столбца заполним нулями;
3. если $a_i = b_j$, то оставшиеся части столбца и строки заполним нулями.

Далее этот процесс повторяют с незаполненной частью матрицы. После чего полученный план проверяется на невырожденность. Исходные данные имеют вид:

				a_i	
	7	8	5	3	11
	2	4	5	9	11
	6	3	1	2	8
b_i	5	9	9	7	

Проставим индексы: на месте минимального элемента - 1, а на месте следующего по значению элемента - 2 и т. д. Встретив в таблице одинаковые элементы: $x_{21} = x_{34} = 2 = 2$, $x_{14} = x_{32} = 3 = 3$ и $x_{13} = x_{23}$ пронумеруем их в порядке следования по столбцам слева направо. Результат проведенных действий представлен ниже матрицей индексов:

	a_i			
	10	12	7	5
	2	6	8	12
	9	4	1	3
b_j	5	9	9	7

На следующем этапе начинаем заполнение опорного плана, начиная от минимального индекса в порядке их возрастания:

1. Находим самый минимальный индекс = 1, т.е. клетку, у которой координаты [3;3]. Затем сравниваем a_3 и b_3 , т. к. $a_3 < b_3$, то $x_{33} = a_3 = 8$. Заполняем первую клетку плана:

	a_i			
			8	
b_j	5	9	9	7
			1	

2. Так как для третьей строки $a_i = 0$, то эта строка не рассматривается. Снова находим самый минимальный индекс = 2, т. е. клетку с координатами [2;1]. Сравниваем a_2 и b_1 , $a_2 > b_1$, значит $x_{21} = b_1 = 5$. Продолжаем заполнение плана:

	a_i			
	5			
			8	
b_j	5	9	9	7
	0		1	

3. Для первого столбца $b_j = 0$, этот столбец не рассматривается. Снова находим самый минимальный индекс = 5, т. е. теперь уже клетку с координатами [1;4]. Сравниваем a_1 и b_4 , т. к. $a_1 > b_4$, т. е. $x_{14} = b_4 = 7$. Заполняем план:

	a_i			
				7
	5			
			8	
b_j	5	9	9	7
	0		1	0

4. Для четвертого столбца $b_j = 0$, этот столбец не рассматривается. Снова находим самый минимальный индекс = 6, т. е. теперь уже клетку с координатами $[2;2]$. Сравниваем a_2 и b_2 , т. к. $a_2 < b_2$, т. е. $x_{22} = a_2 = 6$.

Заполняем план:

				7	a_i			
					11	4		
	5	6			11	6		0
			8		8	0		
b_j	5	9	9	7				
	0	3	1	0				

5. Для второй строки $a_i = 0$, эта строка не рассматривается. Снова находим самый минимальный индекс = 7, т. е. теперь уже клетку с координатами $[1;3]$. Сравниваем a_1 и b_3 , т. к. $a_1 > b_3$, т. е. $x_{33} = b_3 = 1$. Заполняем план:

			1	7	a_i			
					11	4		3
	5	6			11	6		0
			8		8	0		
b_j	5	9	9	7				
	0	3	1	0				
			0					

6. Для третьего столбца $b_j = 0$, этот столбец не рассматривается. Снова находим самый минимальный индекс = 12, т. е. теперь уже клетку с координатами $[1;2]$. Сравниваем a_1 и b_2 , т. к. $a_1 = b_2$, т. е. $x_{12} = a_1 = b_2 = 3$. Получаем:

		3	1	7	a_i			
					11	4		3
	5	6			11	6		0
			8		8	0		
b_j	5	9	9	7				
	0	3	1	0				
		0	0					

Опорный план, полученный методом минимальной стоимости представлен ниже:

		3	1	7	a_i			
					11	4		3
	5	6			11	6		0
			8		8	0		
b_j	5	9	9	7				
	0	3	1	0				
		0	0					

Проверим план на вырожденность: число ненулевых элементов в таблице равно 6, $n=3$, $m=4$, значит $6 \geq 3+4-1$. Неравенство выполняется, поэтому план не вырожден. Рассчитаем целевую функцию:

$$L(X_0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 5 \times 2 + 3 \times 8 + 6 \times 4 + 5 \times 1 + 8 \times 1 + 3 \times 7 = 92.$$

2.3.3. Метод Фогеля (штрафов)

Строится пустая матрица плана X_0 , размером совпадающая с исходной матрицей C .

С левой стороны ее подписывается объем производства, а по нижнему краю – объемы потребления. Для каждой строки и столбца матрицы, значение поставок и потребления которых ненулевые, вычисляется **штраф** - положительная разница между минимальным элементом строки (или столбца) и следующим за ним по величине минимальным элементом этой же строки (или столбца).

Выбирается строка (или столбец) с максимальным штрафом. В этой строке (или столбце) выбирается минимальный элемент, с которого и начинается заполнение опорного плана. При этом элементы и правила коррекции вычисляются *также как и по методу северо-западного угла*. Строка (или столбец), которые в процессе коррекции будут соответствовать нулевым значениям, исключаются из рассмотрения при пересчете штрафов.

Следует отметить, что пересчет штрафов ведется на каждом этапе коррекции. Производится заполнение элементов опорного плана X_0 также как и по методу северо-западного угла (или минимальной стоимости). Когда в процессе коррекции останется незаполненная часть строки (или столбца), она заполняется по правилу минимальной стоимости. После чего полученный план проверяется на невырожденность. Особенностью метода является то, что отсутствует правило выбора альтернативы при равенстве штрафов.

Метод дает решение, близкое к оптимуму или совпадения с ним.

Таблица исходных данных имеет вид:

				a_i	
	7	8	5	3	11
	2	4	5	9	11
	6	3	1	2	8
b_j	5	9	9	7	

1) Рассчитаем штрафы на первом этапе.

Начнем со столбцов: для 1-го – $6-2=4$; для 2-го – $4-3=1$; для 3-го – $5-1=4$; для 4-го – $3-2=1$.

Затем для строк: для 1-ой – $5-3=2$; для 2-ой – $4-3=1$; для 3-ей – $2-1=1$.

					штрафы
	7	8	5	3	2
	2	4	5	9	1
	6	3	1	2	1
штрафы	4	1	4	1	

Находим максимальный штраф – в 1-ом столбце, затем в этом столбце находим минимальный элемент – 2. Заполняем соответствующую ему ячейку опорного плана:

				a_i
				11
5				11
				8
b_j	5	9	9	7
	0			

- 2) Так как для первого столбца $b_j=0$, то дальше он не рассматривается. Рассчитаем штрафы на втором этапе:
Начнем со столбцов: для 2-го – $4-3=1$; для 3-го – $5-1=4$; для 4-го – $3-2=1$.

Затем для строк: для 1-ой – $5-3=2$; для 2-ой – $5-4=1$; для 3-ей – $2-1=1$.

					штрафы
	7	8	5	3	2
	2	4	5	9	1
	6	3	1	2	1
штрафы		1	4	1	

Находим максимальный штраф – в 3-ем столбце, затем в этом столбце находим минимальный элемент – 1. Заполняем соответствующую ему ячейку опорного плана:

				a_i
				11
5				11
		8		8
b_j	5	9	9	7
	0		1	

- 3) Так как для третьей строки $a_i=0$, то дальше она не рассматривается. Рассчитаем штрафы на третьем этапе:
Начнем со столбцов: для 2-го – $8-4=4$; для 3-го – $5-5=0$; для 4-го – $9-3=6$.

Затем для строк: для 1-ой – $5-3=2$; для 2-ой – $5-4=1$;

	7	8	5	3	штрафы
	2	4	5	9	2
	6	3	1	2	1
штрафы		4	0	6	

	7	8	5	3	штрафы
	2	4	5	9	2
	6	3	1	2	
штрафы		8	5	3	

Находим максимальный штраф – в 1-ом столбце, затем в этом столбце находим минимальный элемент – 8 (т.к. он там один). Заполняем соответствующую ему ячейку опорного плана:

	3			a_i	
	5	6		11	8
			8	11	6
				8	0
b_j	5	9	9	7	
	0	3	1		
		0			

- 4) Так как для первой строки $a_i=0$, то она не рассматривается.
Рассчитаем штрафы на пятом этапе:

	7	8	5	3	штрафы
	2	4	5	9	2
	6	3	1	2	4
штрафы			5	3	

Находим максимальный штраф – в 3-ем столбце, затем в этом столбце находим минимальный элемент – 5 (т.к. он там один). Заполняем соответствующую ему ячейку опорного плана:

	3	1		a_i	
	5	6		11	8
			8	11	6
				8	0
b_j	5	9	9	7	
	0	3	1		
		0	0		

- 5) Так как для третьего столбца $b_j=0$, то дальше он не рассматривается.

Рассчитывать штрафы на шестом этапе нет смысла, потому что остался только один элемент. Заполняем соответствующую ему ячейку опорного плана:

				a_i				
		3	1	7	11	8	7	0
	5	6			11	6	0	
			8		8	0		
b_j	5	9	9	7				
	0	3	1	0				
		0	0					

Получили опорный план методом штрафов. Проверим план на невырожденность: число ненулевых элементов в таблице равно 6, $n=3$, $m=4$, значит $6 \geq 3+4-1$. Неравенство выполняется, поэтому план невырожден. Рассчитаем целевую функцию:

$$L(X_0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 5 \times 2 + 3 \times 8 + 6 \times 4 + 1 \times 5 + 8 \times 1 + 7 \times 3 = 92.$$

2.4. Пример решения транспортной задачи методом потенциалов

Решить методом потенциалов задачу, условие которой представлено в таблице:

				a_i	
	7	8	5	3	11
	2	4	5	9	11
	6	3	1	2	8
b_j	5	9	9	7	

Проверим условие баланса:

$\sum_{i=1}^3 a_i = 11 + 11 + 8 = 30$; $\sum_{j=1}^4 b_j = 5 + 9 + 9 + 7 = 30$; $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, модель закрытого типа, поэтому задача разрешима без коррекции.

При решении данной задачи используем следующие обозначения и приемы:

- X_k – существенные элементы матрицы C_k обозначим чертой сверху;
- При вычислении матрицы C_k помещаем $(-\delta_k)$ справа от выделенных строк матрицы C_{k-1} , а δ_k ($\delta_k < 0$) – под выделенными столбцами;
- Минимальный элемент δ_k матрицы C_k ; обводим рамкой
- Элементы цепочки в плане X_k отмечаем знаком *;
- После каждой итерации выписываем значение целевой функции

$$L_k = L_{k-1} + \theta_k \delta_k.$$

Предварительный этап.

Определяем исходный опорный план с помощью метода северо-западного угла (алгоритм построения описан выше):

				<i>ai</i>		
	5	6			11	6
		3	8		11	8
			1	7	8	7
<i>bj</i>	5	9	9	7		
	0	3	1	0		
		0	0			

Проверим план на невырожденность: число ненулевых элементов в таблице равно 6, $n=3$, $m=4$, значит $6 \geq 3+4-1$. Неравенство выполняется, поэтому план не вырожден. Рассчитаем целевую функцию:

$$L_0 = \sum \sum c_{ij} x_{ij} = 5 \times 7 + 6 \times 8 + 3 \times 4 + 5 \times 8 + 1 \times 1 + 2 \times 7 = 150.$$

Находим предварительные потенциалы задачи. Вычисления производим в следующем порядке. В данном случае примем $u_1 = 0$, но возможны и другие варианты, например, $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ или $v_1 = 1$ – как более удобно для решения поставленной задачи, и тогда по формуле $c_{ij} = V_j - U_i$ находим

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11} + u_1 = 7 + 0 = 7; \quad v_2 = c_{12} + u_1 = 8 + 0 = 8; \\ u_2 &= v_2 - c_{22} = 8 - 4 = 4; \quad v_3 = c_{23} + u_2 = 5 + 4 = 9; \\ u_3 &= v_3 - c_{33} = 9 - 1 = 8; \quad v_4 = c_{34} + u_3 = 2 + 8 = 10. \end{aligned}$$

Теперь вычисляем элементы матрицы $C_{ij} = c_{ij} - (V_j - U_i)$, например, $C_{21} = C_{21} - (V_1 - U_2) = 2 - (7 - 4) = -1$ и т.д.

В результате получаем матрицу C_1 :

$$C_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & -4 & -7 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 7 & 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Т. к. в C_1 есть отрицательные элементы, план X_0 – неоптимальный.

Итерация 1.

Здесь первый этап отсутствует, т.к. матрица C_1 уже определена.

На втором этапе в матрице C_1 находим наибольший отрицательный элемент.

$\delta_1 = c_{14} = -7$. Перейдя к плану X_0 , строим цепочку из его базисных элементов, которая замыкается на x_{14} .

Элементы цепочки отмечены «*». Нечетные элементы по порядку следования $x_{12}^* = 6$, $x_{23}^* = 8$, $x_{34}^* = 7$. Определив минимальный элемент $\theta_1 = \min\{6, 8, 7\} = 6$, прибавим θ_1 ко всем четным элементам, а также к $x_{14} = 0$ и вычтем из всех нечетных элементов цепочки. X_1 – опорный план, так как число ненулевых перевозок в нем не изменилось и из них нельзя построить замкнутую цепочку. Получим X_0 :

$$X_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 6^* & 0 & 0^+ \\ \hline 0 & 3^* & 8^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1^* & 7^* \\ \hline \end{array} \quad \theta_1 = 6$$

$$X_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 0 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 9 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Целевая функция $L_1 = L_0 + \theta_1 \delta_1 = 150 - 7 * 6 = 108$.

Итерация 2.

Первый этап заключается в построении матрицы C_2 по матрице C_1 . В матрице C_1 чертой сверху отметим X_1 – существенные элементы. Вычеркиваем первую строку, содержащую наибольший отрицательный элемент $c_{14} = -7 = \delta_1$, находим в ней существенный нуль (т.е. $\bar{0}$), принадлежащий первому столбцу. Поэтому вычеркиваем также первый столбец и просматриваем, нет ли в нем еще существенных нулей. Поскольку таковых нет, процесс вычеркивания заканчивается.

Далее, из вычеркнутой строки вычтем $\delta_1 = -7$ (т.е. прибавим 7), а к выделенному столбцу прибавим $\delta_1 = -7$ (или вычтем 7). Получим матрицу C_2 . Т.к. она содержит отрицательные элементы, то предыдущий план нужно улучшить.

$$C_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bar{0} & 0 & -4 & -7 \\ \hline -1 & \bar{0} & \bar{0} & 3 \\ \hline 7 & 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} +7 \\ -7 \end{array}$$

$$C_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 7 & 3 & 0 \\ \hline -8 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

На втором этапе находим в плане X_1 элемент x_{21} , соответствующий $c_{21} = \delta_2 = -8$, и строим цепочку из базисных элементов этого плана, которая замыкается на x_{21} . Нечетные элементы по порядку следования $x_{23}^* = 2$; $x_{34}^* = 1$; $x_{11}^* = 5$. Выбрав $\theta_2 = \min\{2, 1, 5\} = 1$, прибавим θ_2 ко всем четным элементам, а также к x_{21} и вычтем из всех нечетных элементов цепочки. Получим новый улучшенный план X_2 .

$$X_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5^* & 0 & 0 & 6^* \\ \hline 0^+ & 9 & 2^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7^* & 1^* \\ \hline \end{array} \quad \theta_2 = 1$$

$$X_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 0 & 0 & 7 \\ \hline 1 & 9 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Целевая функция $L_2 = L_1 + \theta_2 \delta_2 = 108 - 8 \cdot 1 = 100$.

Последующие итерации проводим аналогично.

Итерация 3

Первый этап.

$$C_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bar{0} & 7 & 3 & 0 \\ \hline -8 & \bar{0} & \bar{0} & 3 \\ \hline 0 & 3 & \bar{0} & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} +8 \\ +8 \end{array}$$

-8 -8

$$C_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11 \\ \hline 8 & 3 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta_3 = -5$$

Второй этап.

$$X_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4^* & 0 & 0^+ & 7 \\ \hline 1^* & 9 & 1^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \theta_3 = 1$$

$$X_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 0 & 0 & 7 \\ \hline 1 & 9 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\theta_3 = \min\{1, 4\} = 1; L_3 = 95.$$

Итерация 4

Первый этап.

$$C_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bar{0} & -1 & -5 & \bar{0} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & 0 & 11 \\ \hline 8 & 3 & \bar{0} & 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} +5 \\ +5 \end{array}$$

-5 -5 -5

$$C_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 11 \\ \hline 3 & -2 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta_3 = -2$$

Второй этап.

$$X_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3^* & 0 & 1^* & 7 \\ \hline 2^* & 9^* & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0^+ & 8 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \theta_4 = 3$$

$$X_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 4 & 7 \\ \hline 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\theta_4 = \min\{8, 3, 9\} = 3; L_4 = 95 - 3 \cdot 2 = 89.$$

Итерация 5

Первый этап.

$$C_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 11 \\ \hline 3 & -2 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} +2 \\ +2 \end{array}$$

$$C_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 9 \\ \hline 5 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Все элементы $c_i \geq 0$. Следовательно, X_4 – искомое решение задачи. Целевая функция: $L_4 = L_3 + \theta_3 \delta_3 = 89$.

Структура коммуникаций имеет вид, представленный на рисунке 2.2.

2.5. Анализ модели на чувствительность

Целью проведения анализа модели на чувствительность является изучение влияния изменения отдельных параметров модели на оптимальное решение, получаемое при статических условиях. Очевидно, что такие изменения способны улучшать либо ухудшать решение. Поэтому существует возможность изменить условие задачи так, чтобы получить более оптимальное решение.

Дополнительным фактором, понуждающим к проведению такого анализа является наличие погрешностей вычислений, которая обусловлена разрядностью ЭВМ. Таким образом, рассчитанное с использованием вычислительной техники «оптимальное» решение на самом деле будет лишь приближением к оптимуму. Полученный оптимальный план, комбинированный с матрицей издержек, есть Хорт:

					a_i
	7	8	5	3	11
			4	7	
	2	4	5	9	11
$X'_{opt}=$	5	6			
	6	3	1	2	8
		3	5		
b_j	5	9	9	7	

Умножаем элементы матрицы X^{opt} на соответствующие им в исходной матрице C элементы c_{ij} и, суммируя полученные результаты, получаем значение минимальных транспортных издержек, которое составит $L = \sum \sum c_{ij} x_{ij} = 89$ у.е. Структура коммуникаций имеет вид:

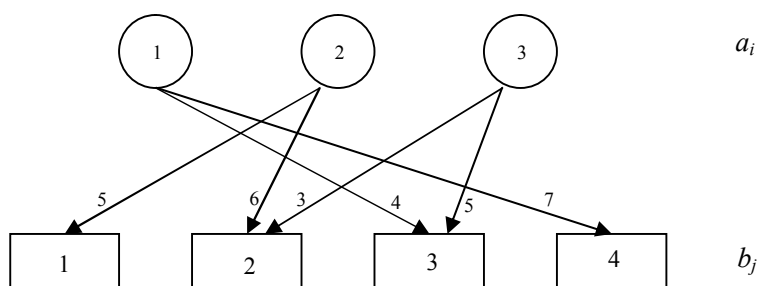


Рисунок 2.2 — Граф коммуникаций

Выполним анализ модели на чувствительность:

1) Определим пункт изменения объема производства, который является наиболее выгодным с точки зрения минимизации затрат на его перевозку потребителям. Целевую функцию L можно представить в виде суммы

$L = \sum_{i=1}^n L_i = L_1 + L_2 + L_3$, где L - значения минимальных транспортных издержек, вычисленные по строкам матрицы X^{opt} .

$$L_1 = 4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 = 41 \text{ [y.e.]},$$

$$L_2 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 44 \text{ [y.e.]},$$

$$L_3 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 14 \text{ [y.e.]}. \quad \square$$

Поэтому наиболее выгодно уменьшить объемы производимого продукта в пункте a_2 , так как L_2 вносит наибольший вклад в значения целевой функции. Увеличивать объемы производства выгоднее всего в пункте a_3 , так как перевозка продукта из данного пункта стоит дешевле, чем из других пунктов.

2) Решение транспортной задачи будем определять для векторов объема производства полученных путем вычитания из a_1 единицы и прибавления ее к a_3 до тех пор, пока не изменится хотя бы одна связь на графе коммуникаций. Результаты вычислительного эксперимента представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Условия и результаты вычислительного эксперимента.

	0	1	2	3	4
a_1	11	10	9	8	7
a_2	11	11	11	11	11
a_3	8	9	10	11	12
L , у.е.	89	91	81	77	73
ΔL , у.е.	0	2	8	12	16

Результаты вычислений показали, что, начиная с вектора $A = (7, 11, 12)$, структура оптимального решения будет изменяться. В этом случае имеем:

$X'_{opt} =$

					a_i
	7	8	5	3	7
	2	4	5	9	11
	6	3	1	2	12
b_j	5	9	9	7	

Оптимальное значение транспортных издержек составит $L' = \sum \sum c_{ij} x_{ij} = 73$ у. е.

Полученному опорному плану будет соответствовать граф коммуникаций, изображенный на рисунке 2.3.

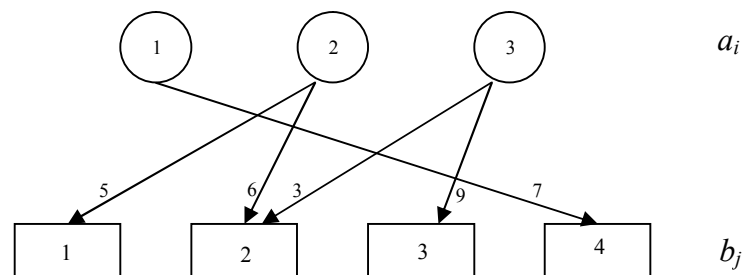


Рисунок 2.3 — Граф коммуникаций

Таким образом, с уменьшением объема производимого продукта в пункте a_1 на 4 единицы и увеличением на такую же величину объема производимого продукта в пункте a_3 транспортные расходы на перевозку удастся сократить еще на 16 у.е. При этом общая стоимость транспортных расходов составит 73 у.е.

3) Установим ориентировочные, а затем уточненные пределы изменения объема производимого продукта. Ориентировочные пределы устанавливаются из диапазона $0 \leq \Delta \leq \max a_i$ ($i=1,2,3$), которые для нашей задачи $0 \leq \Delta \leq 11$. Для определения уточненного диапазона Δ мы и изменяли условия задачи. По-

этому уточненный диапазон Δ будет находится в пределах $0 < \delta < 4$. График зависимости L от ΔL представлен на рисунке 2.4.

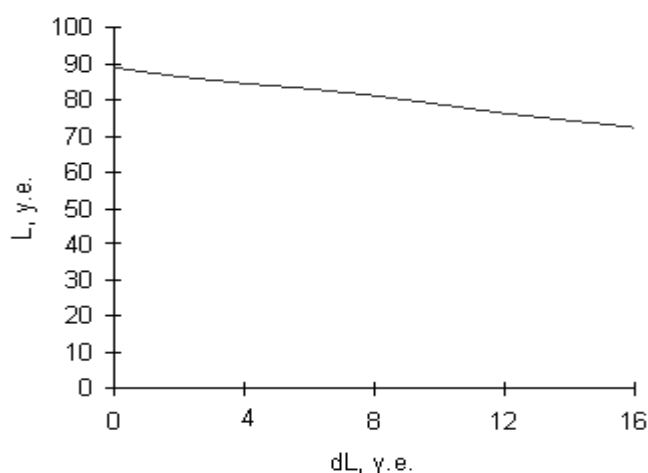


Рисунок 2.4 - График зависимости затрат на перевозки от изменения объемов производства

Из выполненного анализа модели на чувствительность можно сделать следующие выводы: 1) при $A = (7, 11, 12)$ структура оптимального решения изменится; 2) значение целевой функции L также значительно уменьшится (с 83 у.е. до 74 у.е.);

Следовательно, если на Киевском авиационном заводе уменьшить производство авиалайнеров с 11 до 7, а на Винницком заводе увеличить – с 8 до 12, то можно достичь более оптимального плана транспортировки товара за рубеж.

3. ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД

3.1. Экономическая интерпретация задачи

В Севастополе известно три завода по производству шампанских вин: завод «Золотая балка», «Севастопольский завод шампанских вин» и Инкерманский завод. Объем производства каждого завода составляет 410, 820 и 120 тысяч бутылок вина в месяц. Реализация продукции производится с помощью четырех фирм. Объемы заказов каждой фирмы различны и составляют 200, 300, 400 и 450 тысяч бутылок вина соответственно. Известна стоимость доставки продукции каждого завода в фирмы. Данные представлены в виде таблицы (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Таблица стоимости перевозки продукции

	Стоимость перевозок, (у.е./тыс.бук.)				Объем производ- ства (тыс. бук.)
	2,1	7	6	11	
	4	5,5	13	3	
	7,2	6	1,2	14	
Потребности, (тыс. бук.)	200	300	400	450	

Требуется найти такой план поставок, при котором весь товар будет вывезен из пунктов производства (заводы), в пунктах потребления (фирмы) будет полное удовлетворение спроса, и общая стоимость перевозок будет минимальной.

3.2. Основные этапы решения транспортной задачи венгерским методом

Предварительный этап

1. Проверка баланса производства и потребления, при необходимости задача приводится к сбалансированному виду.
2. В каждом столбце матрицы C отыскивается минимальный элемент. Затем этот элемент вычитается из всех элементов столбца. В результате преобразований получаем матрицу C' .
3. В каждой строке матрицы C' отыскивается минимальный элемент, который вычитается из всех элементов строки. В результате этих преобразований получается матрица C_0 .
4. На основании матрицы C_0 строится начальный план. Заполнение плана осуществляется по нулям матрицы C_0 , двигаясь по столбцам сверху вниз, слева направо.

При этом - $x_{ij} = \min \{a_i, b_j\}$. После заполнения элемента плана объемы производства и потребления корректируются по следующим правилам:

$$\begin{cases} a_i = a_i - x_{ij}, \\ b_j = b_j - x_{ij}. \end{cases}$$

5. Рассчитываются невязки по столбцам и по строкам:

$$\text{Невязка по строке} - \delta_i = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i=1, m, j=1, n.$$

$$\text{Невязка по столбцу} - \delta_j = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad i=1, m, j=1, n.$$

6. Рассчитывается суммарная невязка плана.

$$\Delta = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 * \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \delta_i + \sum_{j=1}^n \delta_j$$

Если суммарная невязка плана $\Delta=0$, то это говорит о получении оптимального решения. Если Δ не равно нулю, то переходим к этапу разметки.

Этап разметки

Символом «+» выделяются столбы с нулевыми невязками, символом «-» отмечаются нули матрицы C , которые являются существенными. Существенный ноль матрицы C есть нулевой элемент c_{ij} , которому в плане коммуникаций соответствует ненулевое значение x_{ij} .

Разметка выполняется каждый раз перед итерацией по-новому и сохраняется в процессе всей итерации.

Этап поиска

Целью поиска является нахождение в матрице C нуля, который бы находился в строке с положительной невязкой. Местом поиска является невыделенная часть матрицы C . Строка или столбец называется выделенным, если в процессе выполнения алгоритма они отмечены знаком «+».

Алгоритм поиска

Матрица C просматривается по невыделенным столбцам. Первый же встреченный при поиске ноль отмечают штрихом («'»). После этого анализируется его невязка по строке.

Если невязка положительная, то этот ноль и является искомым, следовательно, этап поиска заканчивается. Переходим к этапу коррекции плана.

Если невязка нулевая, то строку отмечают символом «+» и она считается выделенной. Выделенная строка просматривается по выделенным столбцам слева направо. Если на их пересечении стоит существенный ноль ($\bar{0}$), то этот ноль отмечают символом «*», а знак выделения над столбцом уничтожают, обводя скобками. Этот столбец считается невыделенным и в нем производится дальнейший поиск.

Этап эквивалентных преобразований

В невыделенной части матрицы C среди положительных элементов выбирается минимальный элемент h . Этот элемент прибавляется к выделенным столбцам и вычитается от невыделенных строк. В новую матрицу C переносятся отметки, проставленные на поисковом этапе.

После этапа эквивалентных преобразований продолжаем этап поиска/

Этап коррекции плана

Коррекции предшествует построение цепочки. Цепочка содержит обязательно нечетное число нулей и, в принципе, может состоять и из одного нуля. Построение цепочки начинается с последнего найденного нуля со штрихом. Затем по столбцу к нулю со звездочкой, а уже от него по строке к нулю со штрихом.

Для коррекции плана выбирается корректирующий элемент Θ . Он выбирается из невязки строки начала, δ_i из невязки конца цепочки δ_j и элементов плана X , соответствующих нулям со звездочкой, которые вошли в цепочку: $\Theta = \min\{\delta_i, \delta_j, x_{ij}^*\}$.

Коррекция плана:

Элемент Θ прибавляется к элементу x_{ij} , если в цепочке ему соответствовал элемент $c_{ij}=0'$, и отнимается от элемента x_{ij} , если в цепочке ему соответствовал элемент $c_{ij}=\bar{0}^*$.

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, \text{ не входят в цепочку,} \\ x_{ij} + \Theta, c_{ij} = 0', \\ x_{ij} - \Theta, c_{ij} = \bar{0}^*. \end{cases}$$

После коррекции плана рассчитывается невязка по строкам и столбцам, а также суммарная невязка.

Если $\Delta=0$, то это говорит о получении оптимального решения. Рассчитываем целевую функцию. Для этого находим сумму произведений ненулевых элементов плана X_{opt} на соответствующие им элементы исходной матрицы C .

Если $\Delta \neq 0$, то переходим к следующей итерации, которую начинаем с этапа разметки.

3.3. Пример решения транспортной задачи венгерским методом

Составляем матрицу C , исходя из условия задачи:

					a_i
C=	2.1	7	6	11	410
	4	5.5	1.3	3	820
	7.2	6	1.2	14	120
b_j	200	300	400	450	

Предварительный этап

1. Проверим сбалансированность задачи:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 410 + 820 + 120 = 1350$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = 200 + 300 + 400 + 450 = 1350$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \Rightarrow \text{задача сбалансирована.}$$

2. В каждом столбце матрицы C отыскиваем минимальный элемент.

					a_i
C=	2.1	7	6	11	410
	4	5.5	1.3	3	820
	7.2	6	1.2	14	120
	b_j	200	300	400	450

Затем этот элемент вычитаем из всех элементов столбца. В результате преобразований получаем матрицу C' .

$$C' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1.5 & 4.8 & 8 \\ \hline 1.9 & 0 & 11.8 & 0 \\ \hline 5.1 & 0.5 & 0 & 11 \\ \hline \end{array}$$

3. В каждой строке матрицы C' отыскиваем минимальный элемент, который вычитается из всех элементов строки.

$$C' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1.5 & 4.8 & 8 \\ \hline 1.9 & 0 & 11.8 & 0 \\ \hline 5.1 & 0.5 & 0 & 11 \\ \hline \end{array}$$

В данном случае минимальными элементами в строках являются нули. В результате получаем матрицу C_0 .

$$C_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1.5 & 4.8 & 8 \\ \hline 1.9 & 0 & 11.8 & 0 \\ \hline 5.1 & 0.5 & 0 & 11 \\ \hline \end{array}$$

4. На основании матрицы C_0 строим начальный план.

Рассмотрим первый столбец.

Элемент c_{11} равен нулю, поэтому найдем элемент

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{410, 200\} = 200.$$

В плане X на место элемента x_{11} запишем его значение.

После этого корректируем объемы производства и потребления:

$a_1 = 410 - 200 = 210$ - объем производства первого пункта.

$b_1 = 200 - 200 = 0$ - объем потребления первого пункта.

$$X_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 200 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 410 \mid 210 \\ 820 \\ 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 200 & 300 & 400 & 450 \\ \hline 0 & & & \end{array}$$

Так как в первом пункте потребления спрос $b_1 = 0$, то нет смысла дальше рассматривать первый столбец.

Рассмотрим второй столбец.

Элемент c_{22} равен нулю, поэтому найдем элемент

$$x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{820, 300\} = 300.$$

В плане X на место элемента x_{22} запишем его значение.

После этого корректируем объемы производства и потребления:

$a_2 = 820 - 300 = 520$ - объем производства второго пункта.

$b_2 = 300 - 300 = 0$ - объем потребления второго пункта.

$X_0 =$	200				410 210
		300			820 520
					120
	<u>200</u>	<u>300</u>	400	450	
	0	0			

Так как во втором пункте потребления спрос $b_2 = 0$, то нет смысла дальше рассматривать второй столбец.

Рассмотрим третий столбец.

Элемент c_{33} равен нулю, поэтому найдем элемент $x_{33} = \min\{a_3, b_3\} = \min\{120, 400\} = 120$.

В плане X на место элемента x_{33} запишем его значение.

После этого корректируем объемы производства и потребления:

$a_3 = 120 - 120 = 0$ - объем производства третьего пункта.

$b_3 = 400 - 120 = 280$ - объем потребления третьего пункта.

$X_0 =$	200				410 210
		300			820 520
			120		120 0
	<u>200</u>	<u>300</u>	<u>400</u>	450	
	0	0	280		

Рассмотрим четвертый столбец.

Элемент c_{24} равен нулю, поэтому найдем элемент $x_{24} = \min\{a_2, b_4\} = \min\{520, 450\} = 450$.

В плане X на место элемента x_{24} запишем его значение.

После этого корректируем объемы производства и потребления:

$a_2 = 520 - 450 = 70$ - объем производства второго пункта.

$b_4 = 450 - 450 = 0$ - объем потребления четвертого пункта.

$X_0 =$	200				410 210
		300		450	820 520 70
			120		120 0
	<u>200</u>	<u>300</u>	<u>400</u>	<u>450</u>	
	0	0	280	0	

Построив начальный план X_0 , рассчитаем невязки по столбцам и по строкам:

Невязки по строкам:

$$\delta_1 = 410 - 200 = 210.$$

$$\delta_2 = 820 - 300 - 450 = 70$$

$$\delta_3 = 120 - 120 = 0.$$

Невязки по столбцам:

$$\delta_1 = 200 - 200 = 0.$$

$$\delta_2 = 300 - 300 = 0.$$

$$\delta_3 = 400 - 120 = 280.$$

$$\delta_4 = 450 - 450 = 0.$$

5. Рассчитаем суммарную невязку плана. $\Delta = 210 + 70 + 280 = 560$

Так как $\Delta \neq 0$, то переходим к первой итерации, которую начнем с этапа разметки.

Первая итерация.

Этап разметки

Символом «+» выделим столбцы с нулевыми невязками.

	+	+		+
	0	1.5	4.8	8
$C_0 =$	1.9	0	11.8	0
	5.1	0.5	0	11

Символом «-» отметим существенные нули матрицы C_0 .

	+	+		+
	$\bar{0}$	1.5	4.8	8
$C_0 =$	1.9	$\bar{0}$	11.8	$\bar{0}$
	5.1	0.5	$\bar{0}$	11

Этап поиска

В невыделенной части матрицы C_0 , т.е. в третьем столбце, первый же встреченный ноль отмечаем штрихом.

	+	+		+
	$\bar{0}$	1.5	4.8	8
$C_0 =$	1.9	$\bar{0}$	11.8	$\bar{0}$
	5.1	0.5	$\bar{0}'$	11

Анализируем его невязку по строке: $\delta_3 = 0$. Так как невязка нулевая, то отмечаем эту строку символом «+».

	+	+		+
	$\bar{0}$	1.5	4.8	8
$C_0 =$	1.9	$\bar{0}$	11.8	$\bar{0}$
	5.1	0.5	$\bar{0}'$	11

+

Просмотрим третью строку по выделенным столбцам слева направо. Так как ни в одном из выделенных столбцов на третьей строчке не стоит существенный ноль ($\bar{0}$), то переходим к этапу эквивалентных преобразований.

Этап эквивалентных преобразований

В невыделенной части матрицы C_0 среди положительных элементов выбираем минимальный элемент h .

$$h = \min\{4.8; 11.8\} = 4.8$$

Элемент h прибавляется к выделенным столбцам и вычитается от невыделенных строк.

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & + & & + & & + \\ \hline \bar{0}+4.8- & 1.5+4.8- & 4.8- & 8+4.8- \\ 4.8 & 4.8 & 4.8 & 4.8 \\ \hline 1.9+4.8- & \bar{0}+4.8- & 11.8- & \bar{0}+4.8- \\ 4.8 & 4.8 & 4.8 & 4.8 \\ \hline 5.1+4.8 & 0.5+4.8 & \bar{0}' & 11+4.8 \end{array} & + \end{array}$$

В итоге получим:

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & + & & + & & + \\ \hline \bar{0} & 1.5 & 0 & 8 \\ \hline 1.9 & \bar{0} & 7 & \bar{0} \\ \hline 9.9 & 5.3 & \bar{0}' & 15.8 \end{array} & + \end{array}$$

После этапа эквивалентных преобразований продолжаем этап поиска.

Этап поиска

Просматриваем невыделенную часть матрицы, и первый же встреченный ноль отмечаем штрихом.

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & + & & + & & + \\ \hline \bar{0} & 1.5 & 0' & 8 \\ \hline 1.9 & \bar{0} & 7 & \bar{0} \\ \hline 9.9 & 5.3 & \bar{0}' & 15.8 \end{array} & + \end{array}$$

Анализируем его невязку по строке: $\delta_1 = 210$. Так как невязка ненулевая, следовательно, этап поиска заканчивается. Переходим к этапу коррекции плана.

Этап коррекции плана

Начинаем этот этап с построения цепочки. В данном случае цепочка состоит из одного элемента.

	+	+	+	
	$\bar{0}$	1.5	$\bar{0}'$	8
$C_1 =$	1.9	$\bar{0}$	7	$\bar{0}$
	9.9	5.3	$\bar{0}'$	15.8

Для коррекции плана выбираем корректирующий элемент Θ . Выбираем его из невязки строки начала цепочки и из невязки конца цепочки.

$$\Theta = \min \{210; 280\} = 210.$$

Коррекция плана:

Прибавляем $\Theta = 210$ к элементам x_{ij} , которым в цепочке соответствовал элемент $c_{ij} = 0'$, и отнимем $\Theta = 210$ от элементов x_{ij} , которым в цепочке соответствовал элемент $c_{ij} = \bar{0}'$.

$X_1 =$	200		0+210	
		300		450
			120	

После коррекции плана рассчитываем невязки по строкам и столбцам, а также суммарную невязку.

Невязки по строкам:

$$\delta_1 = 410 - 200 - 210 = 0,$$

$$\delta_2 = 820 - 300 - 450 = 70,$$

$$\delta_3 = 120 - 120 = 0.$$

Невязки по столбцам:

$$\delta_1 = 200 - 200 = 0,$$

$$\delta_2 = 300 - 300 = 0,$$

$$\delta_3 = 400 - 210 - 120 = 70,$$

$$\delta_4 = 450 - 450 = 0.$$

$X_1 =$	200		210		0
		300		450	70
			120		0
	0	0	70	0	$\Delta = 70 + 70 = 140$

Первая итерация закончилась, и так как $\Delta \neq 0$, то продолжаем решение. Переходим ко второй итерации.

Вторая итерация.

Этап разметки

Отмечаем «+» столбцы с нулевыми невязками, символом «-» отмечаем нули матрицы C_2 , которые являются существенными.

$$C_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & + \\ \hline \bar{0} & 1.5 & \bar{0} & 8 \\ 1.9 & \bar{0} & 7 & \bar{0} \\ 9.9 & 5.3 & \bar{0} & 15.8 \end{array} \end{array}$$

Этап поиска

Просматриваем матрицу C_2 по невыделенным столбцам. Первый встреченный ноль отмечаем штрихом («'»).

$$C_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (+) & + & + \\ \hline \bar{0} & 1.5 & \bar{0}' & 8 \\ 1.9 & \bar{0} & 7 & \bar{0} \\ 9.9 & 5.3 & \bar{0} & 15.8 \end{array} \end{array}$$

Затем анализируем невязку этого нуля по строке. Так как невязка нулевая, то отмечаем строку «+».

$$C_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (+) & + & + \\ \hline \bar{0} & 1.5 & \bar{0}' & 8 \\ 1.9 & \bar{0} & 7 & \bar{0} \\ 9.9 & 5.3 & \bar{0} & 15.8 \end{array} \end{array} +$$

Просматриваем выделенную первую строку по выделенным столбцам. На пересечении выделенной строки и первого выделенного столбца стоит существенный ноль ($\bar{0}$), следовательно, выделение над этим столбцом снимаем (обводим «+» в скобки).

$$C_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (+) & + & + \\ \hline \bar{0}^* & 1.5 & \bar{0}' & 8 \\ 1.9 & \bar{0} & 7 & \bar{0} \\ 9.9 & 5.3 & \bar{0} & 15.8 \end{array} \end{array} +$$

Теперь поиск ведем в первом столбце. Так как в этом столбце больше нет нулей, то продолжаем поиск в оставшейся невыделенной части матрицы C_2 . Первый встреченный неотмеченный ноль выделяем штрихом.

$$C_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (+) & + & + \\ \hline \bar{0}^* & 1.5 & \bar{0}' & 8 \\ 1.9 & \bar{0} & 7 & \bar{0} \\ 9.9 & 5.3 & \bar{0}' & 15.8 \end{array} \end{array} +$$

Невязка нуля по строке нулевая, следовательно, третью строку выделяем «+».

	(+)	+	+	
$C_2 =$	$\bar{0}^*$	1.5	$\bar{0}'$	8
	1.9	$\bar{0}$	7	$\bar{0}$
	9.9	5.3	$\bar{0}'$	15.8

На пересечении выделенной третьей строки и выделенных столбцов существенных нулей нет, значит, продолжаем поиск в оставшейся невыделенной части матрицы C .

Но в невыделенной части матрицы C_2 нет больше неотмеченных нулей. Это говорит о том, что этап поиска закончился неудачно. Переходим к этапу эквивалентных преобразований.

Этап эквивалентных преобразований

В невыделенной части матрицы C_2 среди положительных элементов выбираем минимальный элемент h . $h = \min\{1.9; 7\} = 1.9$

		+	+	
$C_3 =$	$\bar{0}^*$	1.5+1.9	$\bar{0}'$	8+1.9
	1.9-1.9	$\bar{0}$	7-1.9	$\bar{0}$
	9.9	5.3+1.9	$\bar{0}'$	15.8+1.9

Выполнив преобразование, получаем:

		+	+	
$C_3 =$	$\bar{0}^*$	3.4	$\bar{0}'$	9.9
	0	$\bar{0}$	5.1	$\bar{0}$
	9.9	7.2	$\bar{0}'$	17.7

Продолжаем этап поиска. Появившийся в результате преобразований ноль отмечаем штрихом.

		+	+	
$C_3 =$	$\bar{0}^*$	3.4	$\bar{0}'$	9.9
	0'	$\bar{0}$	5.1	$\bar{0}$
	9.9	7.2	$\bar{0}'$	17.7

Для этого элемента невязка по строке положительна. Значит, этап поиска закончился.

Этап коррекции плана

Построение цепочки начинаем от последнего найденного нуля со штрихом по столбцу к нулю со «*», а от $\bar{0}^*$ по строке к $\bar{0}'$.

$$C_3 = \begin{array}{cc|cc} & & + & + & \\ \hline \bar{0}^* & 3.4 & \bar{0}' & 9.9 & + \\ \hline 0' & \bar{0} & 5.1 & \bar{0} & \\ \hline 9.9 & 7.2 & \bar{0}' & 17.7 & + \\ \hline \end{array}$$

Выбираем корректирующий элемент Θ : $\Theta = \min\{70; 70; 200^*\} = 70$

Коррекция плана:

Элемент Θ вычитается из x_{ij} , если в матрице C_3 ему соответствует $\bar{0}^*$; и прибавляется к x_{ij} , если ему соответствует $\bar{0}'$. При этом $\bar{0}^*$ и $\bar{0}'$ входят в цепочку.

$$X_2 = \begin{array}{cc|cc} 200-70 & & 210+70 & & 0 \\ \hline 0+70 & 300 & & 450 & 0 \\ \hline & & 120 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta=0 \end{array}$$

В результате получаем:

$$X_2 = \begin{array}{cc|cc} 130 & & 280 & & 0 \\ \hline 70 & 300 & & 450 & 0 \\ \hline & & 120 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta=0 \end{array}$$

Рассчитываем невязку по столбцам и по строкам, а также суммарную невязку.

Суммарная невязка $\Delta=0$, следовательно, мы получили оптимальное решение. Переходим к расчету целевой функции.

Для этого найдем сумму произведений ненулевых элементов плана X_2 на соответствующие им элементы исходной матрицы C :

$$L = 2,1 \times 130 + 4 \times 70 + 5,5 \times 300 + 6 \times 280 + 1,2 \times 120 + 3 \times 450 = 5377.$$

Построим граф коммуникаций.

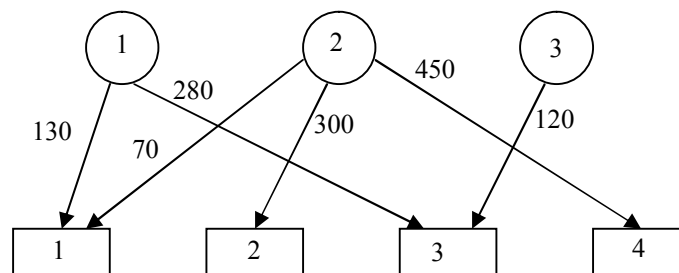


Рисунок 3.1 – Граф коммуникаций

3.4. Анализ модели на чувствительность

При решении задач венгерским методом и методом потенциалов анализ на чувствительность проводится по одной схеме. Полученный ранее оптимальный план, скомбинированный с матрицей издержек, представлен в таблице 3.2.

Таблица 3.2 - Оптимальный план Хорт, скомбинированный с матрицей издержек

130	2.1		7	280	6		11
70	4	300	5.5		13	450	3
	7.2		6	120	1.2		14

Умножаем элементы матрицы Хорт на соответствующие им в исходной матрице C элементы i , суммируя полученные результаты, получаем значение минимальных транспортных издержек, которое составит $L=5377$ у.е.

Структура коммуникаций представлена на рисунке 3.1.

Выполним анализ модели на чувствительность, следуя указанным ниже пунктам.

1) Определим пункт, изменение объема производства в котором является наиболее выгодным с точки зрения минимизации затрат на его перевозку потребителям.

Целевую функцию L можно представить в виде суммы

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = L_1 + L_2 + L_3,$$

где L_i - значения минимальных транспортных издержек, вычисленные по строкам матрицы Хорт.

$$L_1 = 2.1 \cdot 130 + 6 \cdot 280 = 1953 [\text{y.e.}]$$

$$L_2 = 4 \cdot 70 + 5.5 \cdot 300 + 3 \cdot 450 = 3280 [\text{y.e.}]$$

$$L_3 = 1.2 \cdot 120 = 144 [\text{y.e.}]$$

Наиболее выгодно уменьшить объемы производимого продукта в пункте A_2 , так как L_2 вносит наибольший вклад в значения целевой функции. Увеличить объемы производства выгоднее всего в пункте A_3 , так как перевозка продукта из данного пункта стоит дешевле, чем из других пунктов.

2) Установим ориентировочные, а затем уточненные пределы изменения объема производимого продукта.

Ориентировочные пределы устанавливаются из диапазона $0 < \Delta \leq \max a_i (i = 1, 3)$.

Так как $a_1 = 410, a_2 = 820, a_3 = 120$, то $\max a_i (i = 1, 3) = a_2 = 820$. Значит, для нашей задачи - $0 < \Delta \leq 820$.

Для определения уточненного диапазона Δ требуется изменить условия задачи согласно выводам, сделанным выше, и решать транспортную задачу для каждого нового вектора объемов производства A . Значение Δ , начиная с которого структура решения транспортной задачи изменяется, будет его уточненным верхним пределом.

Решение транспортной задачи будем определять для следующих векторов объема производства:

- 1) $A = (410, 819, 121)$
- 2) $A = (410, 818, 122)$
- 3) $A = (410, 817, 123)$
- 4) $A = (410, 816, 124)$
- 5) $A = (410, 815, 125)$

Остальные условия задачи остаются без изменения. Результаты вычислений показали, что, начиная с вектора $(410, 750, 190)$, структура оптимального решения будет изменяться. Она будет определяться планом в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Измененный оптимальный план

200	0	210	0
0	300	0	450
0	0	190	0

Измененному оптимальному плану соответствует новый граф коммуникаций, представленный на рисунке 3.2

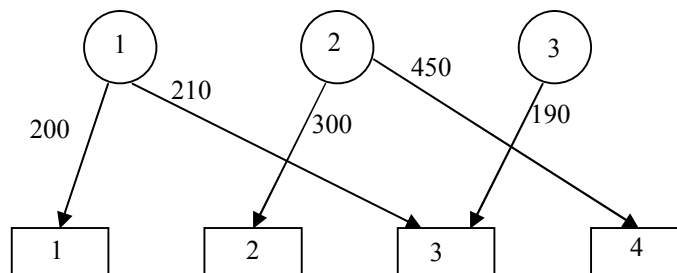


Рисунок 3.2 – Граф коммуникаций измененного оптимального плана

Оптимальное значение транспортных издержек составит $L' = 4908$ у.е. Поэтому уточненный диапазон Δ будет находиться в пределах $0 < \Delta < 70$.

3) Найдем зависимость оптимального решения и оптимального значения целевой функции от изменений компонент вектора объемов производства.

Условия и результаты вычислительного эксперимента приведены в таблице 3.4, а графическое изображение – на рисунке 3.3.

Таблица 3.4 - Условия и результаты вычислительного эксперимента

Δ	0	1	2	...	69	70
a_1	410	410	410	...	410	410
a_2	820	819	818	...	751	750
a_3	120	121	122	...	189	190
ΔL , у.е.	0	6.7	13.4	...	462.3	469
L , у.е.	5377	5370.3	5363.6	...	4914.7	4908

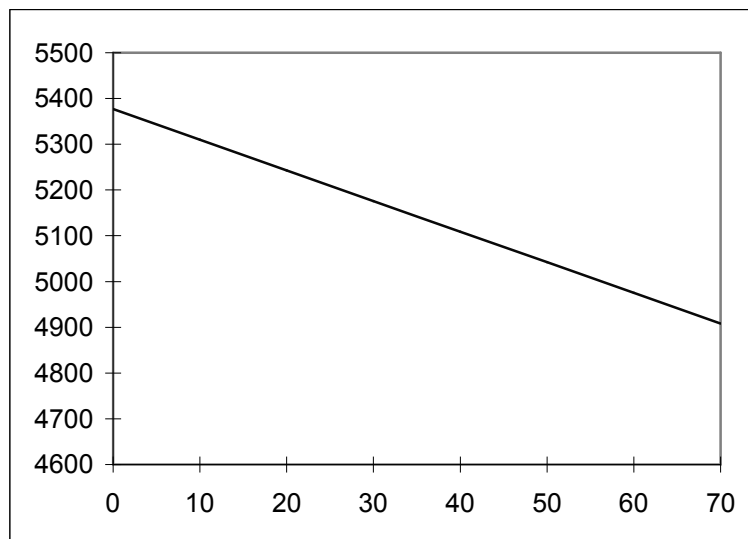


Рисунок 3.3 – График зависимости затрат на перевозки от изменения объемов производства

Таким образом, можно порекомендовать руководителям, ответственным за организацию производственного процесса, уменьшить объем производства шампанских вин на 69 тыс. бутылок «Севастопольским заводом шампанских вин» и увеличить на такую же величину объема шампанского на Инкерманском заводе. При этом транспортные расходы на перевозку удастся сократить еще на 462,3 у.е. При этом общая стоимость транспортных расходов составит 4914,7 у.е., и потребности фирм в различных сортах фирм будут удовлетворены в полном объеме.

4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ

4.1. Экономическая интерпретация задачи

Для выхода в сеть INTERNET провайдер предоставляет три линии доступа ($i=1..3$). Скорость передачи информации по этим линиям (a_i) составляет значения соответственно в 45, 36 и 70 Mb/мин. Доступ к этим линиям имеют

четыре пользователя ($j=1..4$), скорость приема информации которых (b_j) равна соответственно 20, 60, 55 и 45 Мб/мин. Стоимость передачи 1 Мб информации по i - линии к j - пользователю определяется элементами матрицы стоимостей c_{ij} (в экю). Линии связи между провайдером и пользователями имеют ограниченные пропускные способности, задаваемые элементами матрицы d_{ij} . Требуется составить план коммуникаций, обеспечивающий минимальную стоимость работы всех пользователей в сети INTERNET.

$C=$	$i \setminus j$	1	2	3	4	a_j	$D=$			
	1	2	5	3	4	45		32	32	32
	2	6	1	2	5	36		32	32	32
	3	3	4	3	8	70		32	32	32
	b_j	20	60	55	45					

4.2. Описание алгоритма решения задачи

Алгоритм решения транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями коммуникаций состоит из предварительного этапа и ряда однотипных итераций. Как нам известно, для разрешимости транспортной задачи необходимо, чтобы выполнялось условие баланса, т. е. объем производства должен быть равен объему потребления.

Предварительный этап.

В каждом столбце матрицы C разыскивают минимальный элемент и вычитают его из всех элементов данного столбца. Аналогичная операция выполняется построчно для полученной матрицы. В результате получается матрица C_0 , в каждой строке и столбце которой имеется ноль. Затем строится начальный план X_0 . Он строится по столбцам матрицы C_0 для нулевых элементов. Формирование начального плана X_0 выполняется с учетом матрицы ограничений D .

$$x_{ij}^0 = \min\{d_{ij}, a_i, b_j\},$$

$$a_i = a_i - x_{ij}^0, \quad b_j = b_j - x_{ij}^0.$$

Если для матрицы X_0 суммарная невязка

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

то X_0 – оптимальный план транспортной задачи. Если же $\Delta_0 > 0$, то переходят к первой итерации.

Каждая итерация алгоритма, в общем случае, включает три этапа: начинается первым этапом (Поиск корректирующего нуля), затем несколько раз могут повторяться первый и третий (Коррекция матрицы C) этапы, а

заканчивается итерация вторым этапом (Коррекция плана X), либо устанавливается неразрешимость задачи.

Перед каждой итерацией необходимо произвести разметку матрицы C . При разметке отмечают одной точкой и чертой существенные неполные нули, для которых $x_{ij} \neq 0$ и $x_{ij} < d_{ij}$, а двумя точками и чертой - существенные полные нули, где $x_{ij} = d_{ij}$. Столбцы с нулевыми невязками называются выделенными. Отметки остаются неизменными в процессе итераций и переносятся в другую матрицу при выполнении третьего этапа.

Первый этап (поиск)

Целью поиска является нахождение в невыделенной части матрицы C нуля, расположенного в строке с положительной невязкой.

Невыделенные столбцы рассматриваются в порядке слева-направо, сверху-вниз для определения неполных нулей, которые могут быть как существенными, так и несущественными ($x_{ij} = 0$). Первый же встреченный такой ноль отмечают апострофом и анализируют невязку по строке. Если невязка нулевая, то строка выделяется и просматривается слева-направо на предмет наличия в выделенных столбцах существенных нулей. Если такой ноль найден, его отмечают символом “*”, а знак выделения над столбцом уничтожают. Этот столбец теперь считается невыделенным и по нему осуществляется поиск. За конечное число шагов процесс выделения неполных нулей матрицы C заканчивается одним из следующих трех исходов:

1. Найден неполный ноль в строке с положительной невязкой, тогда переходим ко второму этапу.
2. Все неполные нули выделены, а среди невыделенных элементов матрицы C имеются либо положительные, либо среди дважды выделенных элементов C – отрицательные элементы. В этом случае переходим к третьему этапу.
3. Все неполные нули выделены, все невыделенные элементы отрицательны, а все дважды выделенные – положительны. Это означает неразрешимость задачи.

Второй этап (коррекция плана X)

Состоит в построении цепочки из нулей матрицы C , отмеченных штрихами и звездочками: от последнего найденного нуля со штрихом по столбцу к нулю со звездой, далее по строке к нулю со штрихом и т. д. После построения цепочки определяется корректирующий элемент по правилу:

$$\theta = \min\{\delta_i, \delta_j, (r'_{ij}, \dots), (x_{ij}^*, \dots)\}$$

где δ_i - невязка плана по строке начала цепочки, δ_j - невязка плана по столбцу конца цепочки, $(r'_{ij} = d'_{ij} - x'_{ij}, \dots)$ - резервы насыщения, вычисляемые для каждого элемента плана, отмеченного в цепочке штрихом, $(x_{ij}^*, \dots)$ - элементы, стоящие в плане на позициях, отмеченных в цепочке символом «*». Цепочка может быть незамкнутой и состоять из одного элемента. После определения θ план коммуникаций корректируется. Элементы цепочки со штрихом увеличиваются на θ , а со звездочкой – уменьшаются на θ .

Третий этап (коррекция матрицы C)

На этом этапе производят преобразование матрицы C в матрицу C' . Корректирующий элемент выбирается как минимальный из дважды выделенных отрицательных по модулю и невыделенных положительных. Затем он вычитается из элементов матрицы C , расположенных в невыделенных строках и прибавляется к элементам C , расположенным в выделенных столбцах. Если в результате коррекции дважды выделенный элемент становится нулём, то его отмечают звёздочкой и снимают символ выделения над столбцом. Далее снова переходят к первому этапу.

4.3. Пример решения ТЗ с ограниченными пропускными способностями

Приводим задачу к сбалансированному виду:

$$C =$$

2	5	3	4	45
6	1	2	5	36
3	4	3	8	70
0	0	0	0	29
20	60	55	45	

$$D =$$

32	32	32	32
32	32	32	32
32	32	32	32
32	32	32	32

Предварительный этап

$$X_0 =$$

20				25
	32			4
		32		38
	28	1		0
0	0	22	45	

$$C_0 =$$

0	3	1	2
5	0	1	4
0	1	0	5
0	0	0	0

Итерация 1

$$X_1 =$$

20				25
	32			4
	22	32		16
	6	23		0
0	0	0	45	

$$C_1 =$$

0	2	0	1
5	-1	0	3
0	0	-1	4
1	0	0	0

Итерация 2

$$X_2 =$$

20				25
	32			4
	28	32		10
		23	6	0
0	0	0	39	

$$C_2 =$$

0	2	0	1
6	0	1	4
0	0	-1	4
1	0	0	0

Итерация 3

 $X_3 =$

20			25	0
	32			4
	28	32		10
		23	6	0
0	0	0	14	

 $C_3 =$

0	1	0	1
7	0	2	4
0	-1	-1	3
2	0	1	0

Итерация 4

 $X_4 =$

13			32	0
	32			4
7	28	32		3
		23	6	0
0	0	0	7	

 $C_4 =$

0	1	0	1
7	0	2	4
0	-1	-1	3
2	0	1	0

Итерация 5

 $X_5 =$

13			32	0
	32			4
7	28	32	3	0
		23	6	0
0	0	0	4	

 $C_5 =$

3	4	3	0
10	3	5	4
0	-1	-1	0
5	3	4	0

Итерация 6

 $X_6 =$

13			32	0
	32		4	0
7	28	32	3	0
		23	6	0
0	0	0	0	

 $C_6 =$

3	5	4	0
10	4	6	4
0	0	0	0
5	4	5	0

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 459.$$

4.4. Анализ модели на чувствительность

Для данного типа задач должна быть исследована чувствительность модели применительно к изменению объёмов производства одного продукта. Для матрицы издержек C

13			32
	32		4
7	28	32	3
		23	6

получен оптимальный план X :

2	5	3	4
6	1	2	5
3	4	3	8
0	0	0	0

Значение целевой функции составит: $F=459$.

Выполним анализ модели на чувствительность.

Для начала определим пункт, изменение объёма производства в котором является наиболее выгодным с точки зрения минимизации затрат на его перевозку потребителям.

Целевую функцию F можно представить в виде суммы

$$F = \sum_{i=1}^m F_i = F_1 + F_2 + F_3,$$

где F_i – значения минимальных транспортных, вычисленные по строкам матрицы *Хорт*.

$$F_1 = 13 \times 2 + 32 \times 4 = 154.$$

$$F_2 = 32 \times 1 + 4 \times 5 = 52.$$

$$F_3 = 7 \times 3 + 28 \times 4 + 32 \times 3 + 3 \times 8 = 253.$$

Поэтому наиболее выгодно уменьшить объёмы передаваемой информации в пункте A_3 , так как F_2 вносит наибольший вклад в значения целевой функции, а увеличить объёмы выгоднее всего в пункте A_2 , так как стоимость связи данной линии стоит дешевле, чем с другими линиями.

Установим ориентировочные, а затем уточнённые пределы изменения объёма передаваемой информации.

Ориентировочные пределы устанавливаются из диапазона $0 < \Delta \leq \max a_i$ ($i=1,3$). Для определения уточнённого диапазона Δ требуется изменить условия задачи согласно выводам, вытекающим из предыдущего пункта и решать транспортную задачу для каждого нового вектора объёмов производства A . Значение Δ , начиная с которого структура решения транспортной задачи изменяется, будет верхним пределом.

Решение транспортной задачи будем определять для следующих векторов объёма производства:

- 1) $A = (45, 36, 70)$,
- 2) $A = (45, 37, 69)$,
- 3) $A = (45, 38, 68)$.
- 4) $A = (45, 39, 67)$,
- 5) $A = (45, 40, 66), \dots$

Остальные условия задачи остаются без изменения.

13			32
	32		4
7	28	32	3
		23	6

$$A = (45, 39, 70)$$

$$F = 459$$

13			32
	32		5
7	28	32	2
		23	6

$$A = (45, 37, 69)$$

$$F = 456$$

13			32
	32		6
7	28	32	1
		23	6

$$A = (45, 38, 68)$$

$$F = 453$$

13			32
	32		7
7	28	32	
		23	6

$$A = (45, 39, 67)$$

$$F = 450$$

План коммуникаций в оптимуме имеет вид, представленный на рисунке 4.1.

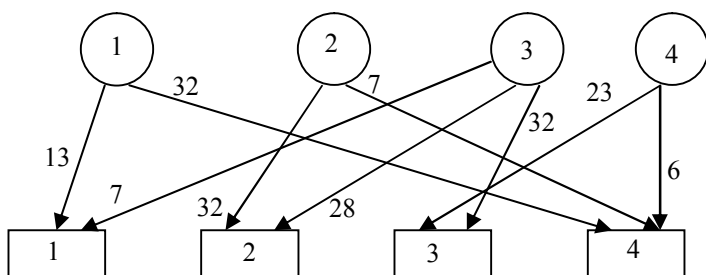


Рисунок 4.1 – План коммуникаций

Оптимальное значение целевой функции составит $F = 450$. Результаты вычислений показали, что, начиная с вектора $A = (45, 39, 67)$, структура оптимального решения будет изменяться (см. последнюю матрицу).

Поэтому уточнённый диапазон Δ будет находиться в пределах $0 < \Delta < 3$.

Таким образом, можно порекомендовать провайдером уменьшить стоимость передачи информации пользователю [4,2] с 7 до 4 и увеличить

стоимость передачи информации пользователю [4,3] с 0 до 3. При этом, учитывая ограниченные пропускные способности линий, общая стоимость уменьшится на 9, что приведет к увеличению времени, проводимого пользователями в сети, а, следовательно, к увеличению доходов провайдеров.

5. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

5.1. Содержательная постановка задачи

Задача о назначениях или задача выбора является частным случаем транспортной задачи (Т-задачи). Если обобщить этот метод для произвольной Т-задачи, получим один из наиболее распространенных методов решения – венгерский.

Постановка такой задачи следующая: предположим, что имеется n различных механизмов $A_1, A_2, \dots, A_n$ и работ $B_1, B_2, \dots, B_n$, каждый из которых может выполнять любую работу. Производительность механизма A_i при выполнении работы B_j обозначим C_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$). Требуется так распределить механизмы по работам, чтобы суммарный эффект от их пользования был максимален. Такая задача называется *задачей о назначениях* или *задачей выбора*.

Формально задача выбора записывается так.

Необходимо выбрать такую последовательность элементов $C_{1j1}, C_{2j2}, \dots, C_{njp}$ из матрицы

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

чтобы сумма $\sum_{k=1}^n C_{kj_k}$ была максимальна и при этом из каждой строки и столбца C был выбран только один элемент.

Отметим еще одну особенность задач транспортного типа: переход от задачи минимизации к задаче максимизации можно выполнить формальным преобразованием вида

$$C_{ij}^{(\max)} \rightarrow [C_{ij}^{(\min)}]^{-1}$$

Для примера возьмем задачу, исходные данные к которой представлены ниже

8	7	5	9	6
4	5	9	7	4
9	8	7	5	6
8	2	9	3	1
4	7	8	9	6

5.2. Экономическая интерпретация задачи

Севастопольский завод колбасных изделий “Маргейт” выпускает следующие виды вареной колбасы: Кальмиусская, Молочная, Сливочная, Докторская, Русановская. На изготовление каждого вида колбас нужен один рабочий. Навыки работников предприятия по производству различны. На их производство выделено 5 человек, что соответствует количеству видов. Чтобы добиться максимальной прибыли нужно распределить рабочих на производство по навыкам таким образом, чтобы в день они произвели максимальное количество колбас (таблица 5.2.1). Данные в таблице измеряются в тысячах килограмм.

Таблица 5.2.1 - Исходные данные для расчётов

Рабочие	Виды колбасных изделий				
	Кальмиусская	Молочная	Сливочная	Докторская	Русановская
1рабочий.	8	7	5	9	6
2рабочий.	4	5	9	7	4
3рабочий.	9	8	7	5	6
4рабочий.	8	2	9	3	1
5рабочий.	4	7	8	9	6

5.3. Основные понятия метода

1. Нулевые элементы $z_1, z_2, \dots, z_k$ матрицы C называются *независимыми нулями*, если для любого $1 \leq i \leq k$ строка и столбец на пересечении которых расположен элемент z_i , не содержат другие нули z_k (для всех $k \neq i$).
2. Две прямоугольные матрицы C и D называются *эквивалентными* ($C \sim D$), если $C_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ для всех i, j . Задачи выбора, определяемые эквивалентными матрицами, являются эквивалентными.
3. Элементы, расположенные в выделенных строках или столбцах, называются *выделенными элементами*.

Задача о назначениях представляет частный случай Т-задачи с единичными объемами производства и потребления, т.е. $\forall i \ a_i = 1, \forall j \ b_j = 1$ и $m=n$.

5.4. Описание алгоритма решения задачи

Алгоритм состоит из предварительного этапа и не более чем $(n-2)$ последовательно производимых итераций. Каждая итерация связана с эквивалентными преобразованиями матрицы, полученной в результате проведения предыдущей итерации, и с выбором максимального числа независимых нулей. Окончательным результатом итерации является увеличение числа независимых нулей на единицу.

Как только количество независимых нулей станет равным n , проблема выбора оказывается решенной, а оптимальный вариант определяется позициями независимых нулей в последней матрице.

Структурно алгоритм решения задачи назначения включает (укрупненно) следующие шаги:

1. Построение матрицы C .
2. Построение матрицы C_0 .
3. Подсчет количества 0^* . Если их количество равно n , то выводим результат, если нет – то корректируем матрицу C до тех пор, пока условие не выполнится.

Предварительный этап

Разыскивают максимальный элемент в j -м столбце и все элементы этого столбца последовательно вычитают из максимального. Эту операцию повторяют над всеми столбцами матрицы $C (1 \leq j \leq n)$. В результате образуется матрица с неотрицательными элементами, в каждом столбце которой имеется по крайней мере один нуль.

Рассматриваем i -ю строку полученной матрицы и из каждого её элемента вычитаем минимальный элемент этой строки. Меняя i от 1 до n , получаем матрицу C_0 с неотрицательными элементами, в каждом столбце и строке которой имеется, по крайней мере, один нуль. Отмечаем произвольный нуль в первом столбце звездочкой.

Затем просматриваем второй столбец, и если в нем есть нуль, расположенный в строке, где нет нуля со звездочкой, то отмечаем его звездочкой.

Аналогично просматриваем один за другим все столбцы матрицы C_0 . Очевидно, что нули матрицы C_0 , отмеченные звездочкой, являются по построению *независимыми*. На этом предварительный этап заканчивается.

(k+1)-я итерация. Допустим, что k -я итерация уже проведена и в результате получена матрица C_k . Если в матрице C_k имеется ровно n нулей со звездочкой, то процесс решения заканчивается. Если же число нулей со звездочкой меньше n , то переходим к $(k+1)$ -й итерации.

Когда количество независимых нулей будет равно размерности матрицы, оптимальное положение значений найдено, и можно строить план X и считать целевую функцию L .

Каждая итерация начинается первым и заканчивается вторым этапом. Между ними может несколько раз проводиться пара этапов: третий – первый.

Перед началом итерации знаком “+” выделяют столбцы матрицы C_k , которые содержат нули со звездочкой.

Первый этап (поиск невыделенных нулей).

Просматривают невыделенные столбцы матрицы C_k . Если среди них не окажется нулевых элементов, то переходят к третьему этапу.

Если же невыделенный нуль матрицы C_k обнаружен, то возможен один из двух случаев:

- строка, содержащая невыделенный нуль, содержит также и нуль со звездочкой;
- эта строка не содержит нуля со звездочкой.

В первом случае невыделенный нуль отмечают штрихом и выделяют строку, в которой он содержится, постановкой справа от нее знака “+”. Затем уничтожают знак “+”, обводя его кружком над тем столбцом, на пересечении которого с данной выделенной строкой содержится нуль со звездочкой.

Далее просматривают этот столбец, отыскивают в нем невыделенный нуль (нули), не отмеченный звездочкой, отмечают его штрихом и выделяют строку (строки), содержащую такой нуль (нули). Затем просматривают эту строку (строки), отыскивая в них нуль со звездочкой.

Этот процесс за конечное число шагов заканчивается одним из следующих исходов:

- все нули матрицы C_k выделены, то есть находятся в выделенных строках или столбцах. При этом переходят к третьему этапу;
- имеется невыделенный нуль в строке, где нет нуля со звездочкой. Тогда переходят ко второму этапу, отметив последний по порядку нуль штрихом.

Во втором случае, отметив невыделенный нуль штрихом, сразу переходят ко второму этапу.

Второй этап (Построение цепочки и коррекция плана)

Строят следующую цепочку из элементов матрицы C_k : от последнего найденного $0'$ по столбцу к 0^* и от него к $0'$ по строке. При этом цепочка всегда начинается и заканчивается $0'$. Далее над элементами цепочки, стоящими на нечетных местах ($0'$), ставим звездочки, уничтожая их над четными элементами (0^*). Затем уничтожаем все штрихи над элементами матрицы C_k и знаки +. При этом количество независимых нулей будет увеличено на единицу. $(k+1)$ -я итерация закончена.

Третий этап (Преобразования матрицы)

К этому этапу переходят после первого, если все нули матрицы C_k выделены, то есть находятся на выделенных строках или столбцах. В таком случае среди невыделенных элементов матрицы C_k выбирают минимальный и обозначают его $h > 0$. Далее вычитают h из всех элементов матрицы C_k , расположенных в невыделенных строках, и прибавляют ко всем элементам, расположенным в выделенных столбцах. Получают новую матрицу $C_k^{(1)}$, эквивалентную C_k .

Поскольку среди невыделенных элементов матрицы $C_k^{(1)}$ появятся новые нули (согласно определению), переходят к первому этапу, а вместо матрицы C_k рассматривают матрицу $C_k^{(1)}$. Завершив первый этап либо переходят ко второму этапу, либо вновь возвращаются к третьему этапу, если все нули матрицы $C_k^{(1)}$ оказываются выделенными.

В первом случае после проведения второго этапа итерация заканчивается, а во втором – после проведения третьего этапа получают матрицу $C_k^{(2)} \sim C_k^{(1)} \sim C_k$. В матрице $C_k^{(2)}$ будут невыделенные нули, и всю последовательность операций, начиная с первого этапа, надо повторить. После конечного числа повторений очередной первый этап обязательно закончится переходом на второй этап, и количество независимых нулей увеличится на единицу ($k+1$)-я итерация закончена.

5.5. Пример решения задачи выбора

Решим задачу о назначениях на основе описанного выше алгоритма. Исходная матрица выглядит следующим образом: $n=m=5$.

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 7 & 5 & 9 & 6 \\ \hline 4 & 5 & 9 & 7 & 4 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 5 & 6 \\ \hline 8 & 2 & 9 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Предварительный этап

Рассматриваем столбцы. В каждом из них находим максимальный элемент, и каждый элемент данного столбца последовательно из него вычитаем.

1-й столбец: $9 - 9 = 0$; $9 - 8 = 1$; $9 - 4 = 5$; $9 - 9 = 0$; $9 - 8 = 1$; $9 - 4 = 5$; и т.д.

2-й столбец: 8;

3-й столбец: 9;

4-й столбец: 9;

5-й столбец: 6.

Получаем матрицу:

$$C' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 0 & 6 & 5 \\ \hline 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Рассматриваем строки. В каждой находим минимальный элемент и последовательно вычитаем его из каждого элемента данной строки.

1-я строка: 0: $1-0=1$; $1-0=1$; $4-0=4$; $0-0=0$; $0-0=0$; и т.д.

2-я строка: 0;

3-я строка: 0;

4-я строка: 0;

5-я строка: 0.

Получаем матрицу:

$$C_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 0 & 6 & 5 \\ \hline 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Далее нужно найти независимые нули матрицы C_0 . Для этого произвольно первый найденный нуль отмечаем звездочкой (чаще всего просматривают первый столбцы слева-направо и сверху-вниз и берут первый попавшийся). Затем по-порядку просматривают все столбы и отмечают в них независимые нули.

Затем подсчитываем количество независимых нулей: если их количество совпадает с размерностью матрицы n , то никаких преобразований производить не нужно и можно смело строить оптимальный план X . Если же нет, то производим разметку: столбцы, в которых есть независимые нули, отмечаем “+”.

В нашем случае $n=5$, а количество $0^*=4$, следовательно, можно сделать вывод, что осталось $(n-1)$ итераций, то есть 1.

Получаем матрицу:

$$C_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 & 0^* & 0 \\ \hline 5 & 3 & 0^* & 2 & 2 \\ \hline 0^* & 0 & 2 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 0 & 6 & 5 \\ \hline 5 & 1 & 1 & 0 & 0^* \\ \hline + & & + & + & + \\ \hline \end{array}$$

Итерация первая

Первый этап.

Просматриваем невыделенный столбец. Первый попавшийся ноль, не отмеченный звездочкой, $[3,2]$ отмечаем штрихом и строку, на которой он находится, выделяем (знаком “+”) и просматриваем её: так как в ней есть 0^* ($[3,1]$), то снимаем выделение над столбцом, в котором он находится.

Просматриваем невыделенные столбцы (слева-направо и сверху-вниз), так как в них больше нет нулей, не отмеченных звездочкой, то переходим к третьему этапу (преобразование матрицы).

Согласно всем вышеперечисленным объяснениям можно разметить матрицу:

$$C_{\theta=}$$

	(+)	+	+	+	
1	1	4	0*	0	
5	3	0*	2	2	
0*	0'	2	4	0	+
1	6	0	6	5	
5	1	1	0	0*	

Преобразование матрицы.

Среди невыделенных элементов данной матрицы C (в таблице они залиты серым цветом) находим минимальный элемент $h=1$ и вычитаем его из всех элементов матрицы, расположенных в невыделенных строках и прибавляем к элементам, находящимся в выделенных столбцах (дважды выделенным).

$$C =$$

		+	+	+	
1	1	4	0*	0	
5	3	0*	2	2	
0*	0'	2	4	0	+
1	6	0	6	5	
5	1	1	0	0*	

Получаем матрицу (вся разметка при этом сохраняется):

$$C_1 =$$

		+	+	+	
0	0	4	0*	0	
4	2	0*	2	2	
0*	0'	3	5	1	+
0	5	0	6	5	
4	0	1	0	0*	

Рассматриваем невыделенные элементы матрицы (слева-направо и сверху-вниз) и первый попавшийся нуль отмечаем штрихом ($[1,1]$), строку выделяем символом “+” и просматриваем строку, так как в ней есть 0^* ($[1,4]$), то над 4-м столбцом снимаем выделение.

Получили матрицу:

$$C_1 =$$

		+	(+)	+	
0'	0	4	0*	0	+
4	2	0*	2	2	
0*	0'	3	5	1	+
0	5	0	6	5	
4	0	1	0	0*	

Опять находим свободный ноль ($[4,1]$), отмечаем его штрихом, выделяем строку и просматриваем её: в ней нет 0^* , следовательно, найденный нами ноль – искомый и мы должны перейти к этапу №2 – построению цепочки и коррекции плана.

Преобразованная матрица выглядит следующим образом:

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & + & & + \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0' & 0 & 4 & 0^* & 0 & + \\ \hline 4 & 2 & 0^* & 2 & 2 & \\ \hline 0^* & 0' & 3 & 5 & 1 & + \\ \hline 0' & 5 & 0 & 6 & 5 & + \\ \hline 4 & 0 & 1 & 0 & 0^* & \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

Построение цепочки и коррекция плана.

Строим цепочку по следующему алгоритму: от последнего нуля, отмеченного штрихом $[4,1]$ по столбцу к 0^* $[3,1]$, далее по строке к $0'$ $[3,2]$, так как в данном столбце нет 0^* , то построение цепочки закончено и можно преобразовывать матрицу.

Матрица с цепочкой выглядит следующим образом:

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & + & & + \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0' & 0 & 4 & 0^* & 0 & + \\ \hline 4 & 2 & 0^* & 2 & 2 & \\ \hline 0^* \uparrow \rightarrow & \rightarrow 0' & 3 & 5 & 1 & + \\ \hline 0' \uparrow & 5 & 0 & 6 & 5 & + \\ \hline 4 & 0 & 1 & 0 & 0^* & \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

Преобразовываем матрицу. Работаем с элементами цепочки: у $0'$ ($[4,1]$, $[3,2]$) заменяем «'» на «*», а 0^* $[3,1]$ заменяем просто на 0.

Следовательно, получим:

$$C_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 4 & 0^* & 0 \\ \hline 4 & 2 & 0^* & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0^* & 3 & 5 & 1 \\ \hline 0^* & 5 & 0 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 0 & 0^* \\ \hline \end{array}$$

Так как в данной матрице число $0^*=n=5$, то на этом решение заканчивается и можно утверждать, что оптимальное положение значений успешно найдено. Оптимальный план X в данном случае выглядит следующим образом:

$$X =$$

			1	
		1		
	1			
1				
				1

Целевая функция $L = 8+8+9+9+6=40$.

Распределение рабочих по производству ассортимента колбас имеет вид:

№ рабочего	Сорт колбасного изделия
1	- Докторская
2	- Сливочная
3	- Молочная
4	- Кальмиусская
5	- Русановская

5.6. Анализ модели на чувствительность

Применительно к данной задаче анализ на чувствительность осуществляется следующим образом: после оптимального распределения рабочих на производство выбираем рабочего с наименьшей производительностью и меняем ее с расчетом того, что оптимальный план не изменится, но целевая функция изменит свое значение в большую сторону.

Рассмотрим данный пример. По итогам расчетов исходной задачи, рабочий номер 5 производит наименьшее количество товара – 6 тыс.кг. Русановской колбасы в день. При последовательном увеличении его производительности с 6-ти до 9-ти заметим, что целевая функция при таком производстве постепенно возрастает на единицу, а оптимальный план остается неизменен. Следующие несколько таблиц иллюстрируют эти расчеты.

Вид исходных значений и оптимального решения поставленной задачи соответственно при увеличении производительности рабочего номер 5 с 6 до 7 тыс.кг. в день по данному виду колбасы.

8	7	5	9	6
4	5	9	7	4
9	8	7	5	6
8	2	9	3	1
4	7	8	9	7

			1	
		1		
	1			
1				
				1
8	8	9	9	7

Вид исходных значений и оптимального решения поставленной задачи соответственно при увеличении производительности рабочего номер 5 с 7 до 8 тыс.кг. в день.

8	7	5	9	6
4	5	9	7	4
9	8	7	5	6
8	2	9	3	1
4	7	8	9	8

			1	
		1		
	1			
1				
				1
8	8	9	9	8

Вид исходных значений и оптимального решения поставленной задачи соответственно при увеличении производительности рабочего номер 5 с 8 до 9 тыс.кг. в день.

8	7	5	9	6
4	5	9	7	4
9	8	7	5	6
8	2	9	3	1
4	7	8	9	9

			1	
		1		
	1			
1				
				1
8	8	9	9	9

При дальнейшем увеличении производительности рабочего будет происходить аналогичный прирост на единицу. Это делать нецелесообразно, так как в данных задачах максимальная производительность равна 9.

Следовательно, было выяснено, что необходимо увеличить производительность Русановской вареной колбасы с 6 до 9 тыс.кг. в день. Рабочего номер 5 необходимо обучить производить 9 тыс.кг. Тогда условная матрица будет иметь следующий вид:

8	7	5	9	6
4	5	9	7	4
9	8	7	5	6
8	2	9	3	1
4	7	8	9	9

После решения задачи о назначениях получим следующий оптимальный план:

			1	
		1		
	1			
1				
				1

Целевая функция $L = 8+8+9+9+9=43$.

Как видно в сравнении с решением данной задачи оптимальный план остался без изменений, но значение целевой функции возросло на 3 тыс. кг. в день.

Полученному опорному плану будет соответствовать распределение производства вида.

№ рабочего	Сорт колбасного изделия
1	- Докторская
2	- Сливочная
3	- Молочная
4	- Кальмиусская
5	- Русановская

Данный случай показал, как метод решения задач о назначениях может принести огромную пользу в коммерческой деятельности предприятий. В данном случае с распределением рабочих по их рабочим местам.

Таким образом, следует порекомендовать производителям колбас обучить рабочего номер 5 к производству максимального количества колбас, что приведет к увеличению доходов всего предприятия с 40 до 43 тыс. грн. в день.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа. / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М.: Наука, 1976. – 384с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: учебное пособие / Ю.П. Зайченко. – К.: Вища школа, 1979. - 392 с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций: сборник задач / Ю.П. Зайченко, С.А. Шумилова. – К.: Вища школа, 1990. - 239 с.
4. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций / П.В. Конюховский. – СПб. и др.: Питер, 2001. – 192 с.
5. Таха Х.А Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. – 912 с.

Заказ № _____ от “ _____ ” _____ 200 _____ . Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ