

УДК 519.1

Основы теории графов: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Основы дискретной математики» для студентов дневного и заочного отделения специальности 7.080401 «Информационные управляющие системы и технологии» /Сост. С.В.Доценко, Е.Н.Татарченко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005. – 14 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Основы дискретной математики». Целью методических указаний является выработка у студентов практических навыков по решению основных задач теории графов.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Основы дискретной математики» для студентов специальности 7.080401 и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № _ от _____ 2005 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Кирюхин В.В., канд.физ.-мат.наук., проф.кафедры КиВТ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретический раздел	4
2. Примеры решения типовых задач	7
3. Задачи для упражнений	9
Библиографический список	12

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

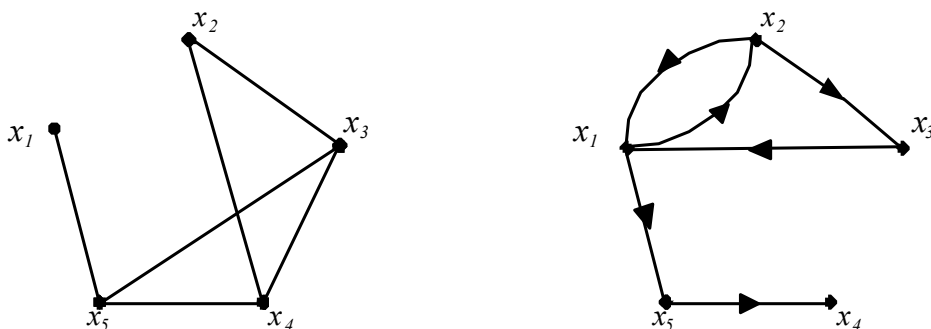
В настоящих методических указаниях, представляющих собой задачник для решения на практических занятиях и самостоятельной работы студентов, приведены лишь основные понятия и алгоритмы теории графов. Углубленное изучение алгоритмов теории графов и их применение для решения прикладных задач из различных областей знания будет рассмотрено в специальной дисциплине при последующем изучении. Однако, курс «Основы дискретной математики» без краткого ознакомления с этим разделом был бы неполным.

Граф G задается множеством точек или **вершин** $x_1, x_2, \dots, x_n$, которое может быть обозначено через X , и множеством линий или **ребер** $u_1, u_2, \dots, u_n$, которое обозначается через U , соединяющих между собой все или часть этих точек. Граф G полностью задается (и обозначается) парой (X, U) .

Если ребра из множества U ориентированы, что обозначается стрелкой, то они называются дугами, и граф будет **ориентированным**, иначе – **неориентированным**.

Ориентированный граф можно также задать с помощью множества вершин X и отображения Γ , которое показывает, как между собой связаны вершины.

На рисунке 1.1 приведены примеры ориентированного и неориентированного графов.



а) неориентированный граф,

б) ориентированный граф

Рисунок 1.1 – Примеры графов

Путем или **ориентированным маршрутом** ориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является вершиной следующей.

Так, на рисунке 1.2 последовательности дуг $(u_6, u_5, u_9, u_8, u_4)$; (u_1, u_6, u_5, u_9) и $(u_1, u_6, u_5, u_9, u_{10}, u_6, u_4)$ являются путями. Путь или маршрут можно изображать и последовательностью вершин.

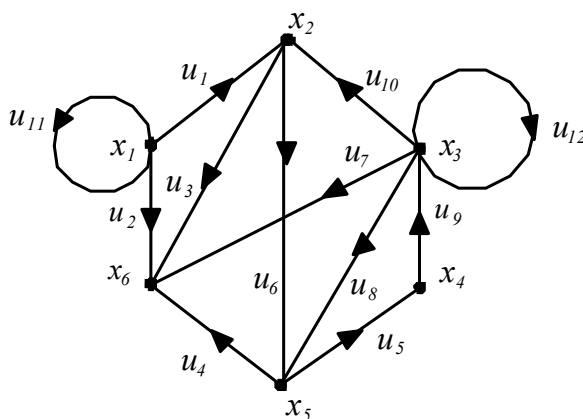


Рисунок 1.2 – Пример графа с петлями

Петлей называется дуга, начальная и конечная вершины которой совпадают. Так, на рисунке 1.2 дуги u_{11} и u_{12} являются петлями.

Для алгебраического задания графов удобно использовать матрицы.

Матрица смежности графа G обозначается через $A = [a_{ij}]$ и определяется следующим образом:

$a_{ij} = 1$, если в G существует дуга (x_i, x_j) ,

$a_{ij} = 0$, если в G нет дуги (x_i, x_j) .

Матрица смежности полностью определяет структуру графа.

Матрица инцидентий графа G с n вершинами и m дугами имеет размерность $m \times n$, обозначается как $B = [b_{ij}]$ и определяется следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если в G x_i является начальной вершиной дуги u_j ,

$b_{ij} = -1$, если в G x_j является конечной вершиной дуги u_j ,

$b_{ij} = 0$, если в G x_j не является конечной вершиной дуги u_j , или если u_j является петлей.

Так как каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один, равный -1 , либо все элементы столбца равны 0.

Если граф G неориентирован, то его матрица инцидентий определяется также, кроме того, что все элементы, равные -1 , заменяются на 1.

Транспортная сеть – особый вид графа, для которого характерны следующие свойства:

- 1) транспортная сеть – конечный граф без петель;
- 2) у графа G существует единственная вершина x_0 , такая, что $\Gamma^{-1}(x_0) = \emptyset$, т.е. в эту вершину не входит ни одна дуга;
- 3) у графа G существует единственная вершина z , такая, что $\Gamma(z) = \emptyset$, т.е. из этой вершины не исходит ни одна дуга;
- 4) с каждой дугой сопоставлено положительное целое число, называемое пропускной способностью дуги.

Алгоритмы решения задачи о поиске кратчайшего пути на графе с ребрами единичной длины, а также решение задачи о поиске максимального потока через транспортную сеть приведены во втором разделе и показаны на конкретных примерах.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Граф рисунка 2.1 описать с помощью множеств отображений вершин, матриц смежности и инцидентности.

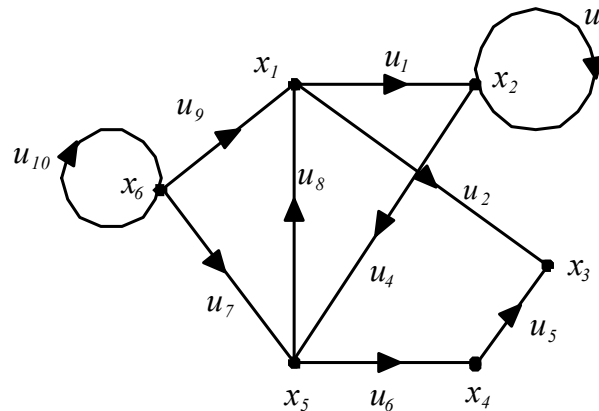


Рисунок 2.1 – Пример ориентированного графа

Множества отображений вершин:

$$\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3\}, \Gamma(x_2) = \{x_2, x_5\}, \Gamma(x_3) = \emptyset, \Gamma(x_4) = \{x_3\}, \Gamma(x_5) = \{x_1, x_4\}, \Gamma(x_6) = \{x_1, x_5, x_6\}.$$

Матрица смежности

$$A = \begin{vmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица инцидентности

$$B = \begin{vmatrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ x_2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2.2. Найти кратчайший путь из вершины s в вершину t на графе с ребрами единичной длины рисунка 2.2.

Постановка задачи о кратчайшем пути.

Пусть дан граф $G = (X, U)$, дугам которого приписаны веса (стоимости), обычно это целые положительные числа. Задача о кратчайшем пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины $s \in X$ до заданной конечной вершины $t \in X$, при условии, что такой путь существует. Задача решается наиболее просто, если все ребра графа имеют единичную длину (единичный вес).

Алгоритм поиска кратчайшего пути на графе с ребрами единичной длины.

1. Конечной вершине графа t присвоим индекс, равный 0, остальные вершины считаем неиндексированными.

2. λ_i - индекс помеченной вершины. Рассмотрим вершины, смежные с ней. Если смежная вершина не имеет пометки, то присвоим ей индекс, равный $\lambda_i + 1$. Если смежная вершина помечена и имеет индекс, равный λ_i , то индекс, равный $\lambda_i + 1$, присвоим ей только в том случае, если $\lambda_i + 1 < \lambda_i$.

3. Повторяем пункт 2 до тех пор, пока начальная вершина s не получит индекс.

Длина кратчайшего пути равна индексу начальной вершины, а сам путь формируем, двигаясь от начальной вершины s к конечной вершине t по смежным вершинам в порядке последовательного убывания их индексов.

Кратчайших путей на графе может быть несколько.

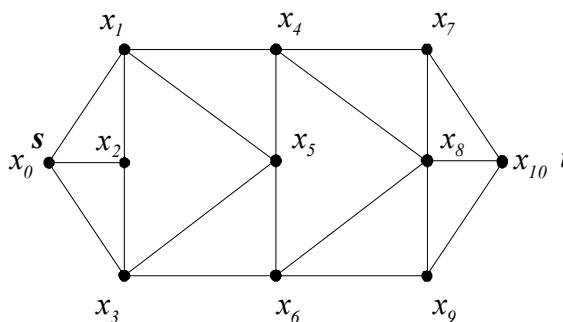


Рисунок 2.2 – Исходный граф к задаче 2.2

Решение:

1. Вершине t присваиваем индекс 0, остальные вершины считаем неиндексированными.

2. Смежными с вершиной t являются вершины x_7 , x_8 и x_9 , они получают индексы, равные 1.

3. Смежными с вершиной x_7 являются вершины x_4 и x_8 , но вершина x_8 проиндексирована, поэтому ее не рассматриваем, а вершина x_4 получает индекс, равный 2.

Продолжаем процесс расстановки индексов (см. рисунок 2.3), в ходе которого вершина s получает индекс, равный 4. Двигаясь по убыванию индексов, получаем кратчайшие пути:

$\mu_1 = (x_0, x_1, x_4, x_7, x_{10})$, $\mu_2 = (x_0, x_1, x_4, x_8, x_{10})$, $\mu_3 = (x_0, x_3, x_6, x_8, x_{10})$,
 $\mu_4 = (x_0, x_3, x_6, x_9, x_{10})$, на рисунке 2.3 они показаны пунктиром.

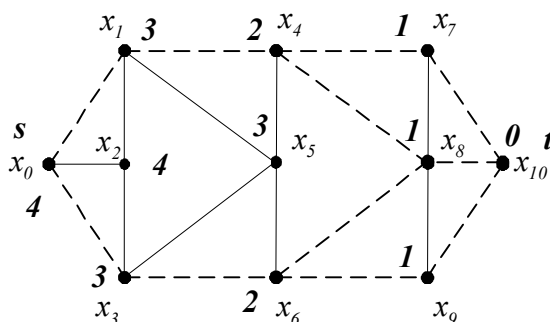


Рисунок 2.3 – Кратчайшие пути на графе задачи 2.2

2.3. Найти максимальный поток на транспортной сети рисунка 2.4.

Постановка задачи о поиске максимального потока.

Дана транспортная сеть, на которой обозначены пропускные способности дуг. (рисунок 2.4). Поток, проходящий по дугам, можно сравнить с жидкостью, протекающей по системе труб, имеющих разный диаметр (разную пропускную способность). При этом вещество не накапливается в узлах сети; количество входящего в узел вещества равно количеству вещества, исходящего из узла.

Дуга сети называется **насыщенной**, если поток через нее совпадает с пропускной способностью дуги. Поток в сети называется **полным**, если в нем есть хотя бы одна насыщенная дуга. Задача состоит в нахождении максимально возможного потока для данной транспортной сети.

Задачу поиска максимального потока на транспортной сети удобно разделить на две подзадачи:

- нахождение полного потока (в том случае, если начальный поток через сеть нулевой);
- коррекцию полного потока до максимального в соответствии с **алгоритмом Форда-Фалкерсона**.

Алгоритм Форда-Фалкерсона состоит из двух этапов:

- этапа разметки. Начальной вершине графа присваиваем метку 0. Далее вершине x_i присваиваем метку «+» и номер вершины $\Gamma^{-1}(x_i)$, т.е. номер той вершины, откуда мы пришли к вершине x_i , если по дуге $(\Gamma^{-1}(x_i), x_i)$ поток можно увеличить; или метку «-» и номер вершины $\Gamma^{-1}(x_i)$, т.е. номер той вершины, откуда мы пришли к вершине x_i , если по дуге $(\Gamma^{-1}(x_i), x_i)$ поток можно уменьшить (т.е. движение происходит против потока в дуге). Иначе вершина меток не получает. Получаем таким образом все возможные пути увеличения потока, рассматривая на каждом шаге новую вершину из множества непометенных вершин.

б) Если вершина z , т.е. выход транспортной сети, оказалась помеченной, то необходимо построить путь, двигаясь по последовательности индексов-меток. На этом пути необходимо скорректировать поток, двигаясь от входа сети к выходу, увеличивая поток на 1, если дуга имеет знак «+», и уменьшая его, если дуга имеет знак «-». Далее вновь переходим к этапу разметки, убирая метки от предыдущего этапа.

Если же при разметке вершина z не получила метку, то найденный поток является максимальным.

Ответом на решение задачи служит величина потока ϕ_{max} и пути его прохождения.

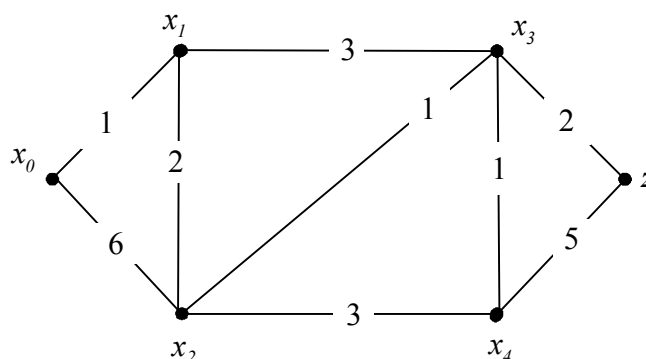


Рисунок 2.4 – Исходные данные к задаче 2.3

Решение:

1. Последовательно увеличиваем поток на транспортной сети, находя для этого соответствующие пути. Насыщенные дуги выделяем жирным, величина потока указывается над дугой.

$\mu_1 = (x_0, x_1, x_3, z)$, $\phi(\mu_1) = 1$ - рисунок 2.5.

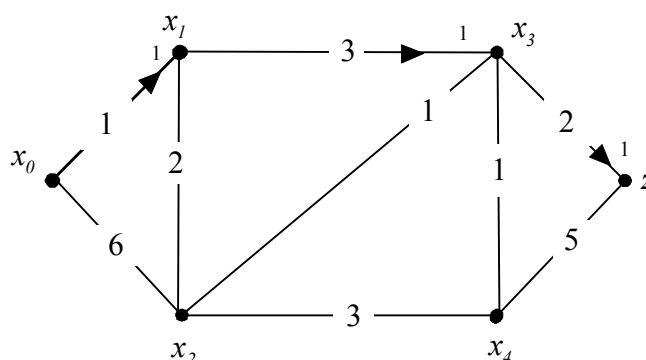


Рисунок 2.5 – Нахождение полного потока

2. Рассматриваем путь $\mu_2(x_0, x_2, x_4, x_3, z)$, $\phi(\mu_2) = 1$, $\phi = 2$ - рисунок 2.6.

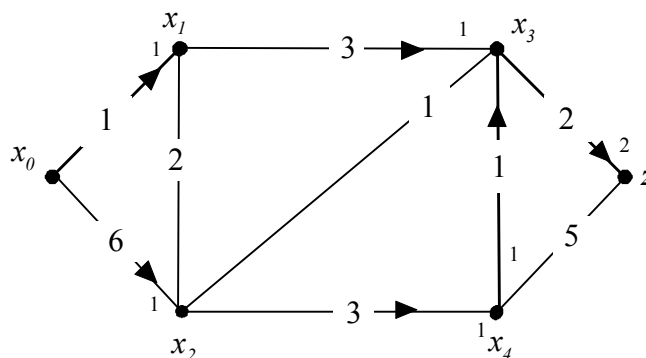


Рисунок 2.6 – Нахождение полного потока

3. Рассматриваем путь $\mu_3(x_0, x_2, x_4, z)$, $\phi(\mu_3) = 2$, $\phi = 4$ - рисунок 2.7.

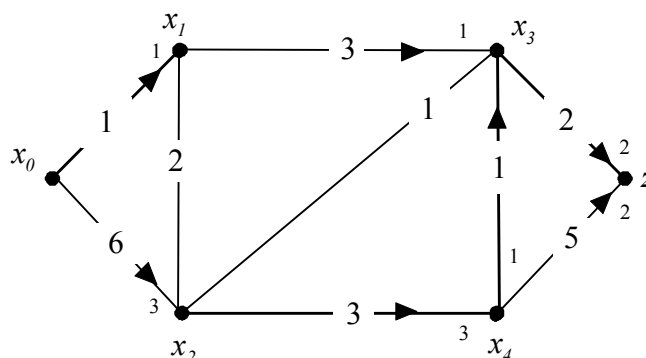


Рисунок 2.7 – Нахождение полного потока

4. На полученном на рисунке 2.7 графе производим разметку.

Сначала вершина x_0 получает метку 0. Смежными с ней являются вершины x_1 и x_2 . Вершина x_1 метку получить не может, так как дуга (x_0, x_1) является насыщенной, поток по ней увеличен быть не может, и развернуть поток невозможно. Вершина x_2 получает метку +0, так как по дуге (x_0, x_2) поток можно увеличить. (рисунок 2.8 а).

Переходим к вершине x_2 . Смежными с ней являются вершины x_1 , x_3 и x_4 . Вершина x_1 получает метку +2, так как по дуге (x_2, x_1) поток можно увеличить; вершина x_3 получает метку +2, так как по дуге (x_2, x_3) поток можно увеличить; вершина x_4 метки не получает, так как дуга (x_2, x_4) является насыщенной, и развернуть поток невозможно (рисунок 2.8 б).

Переходим к вершине x_1 . Все, смежные с ней, вершины имеют метки. Переходим к вершине x_3 . Смежными с ней являются вершины z и x_4 . Вершина z не

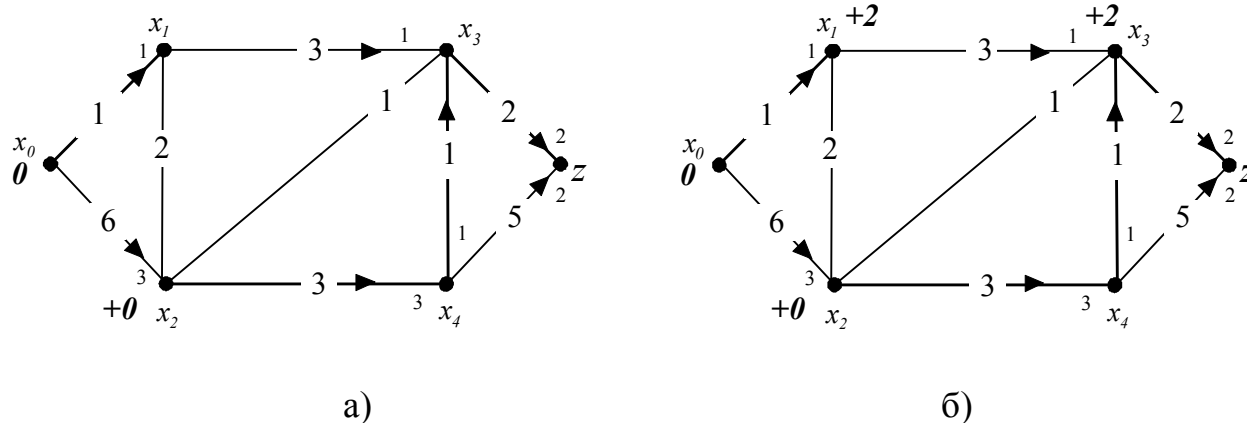


Рисунок 2.8 – Процесс разметки вершин графа

может быть помечена, так как дуга (x_3, z) является насыщенной, и развернуть поток невозможно. Вершина x_4 получает метку -3 , так как возможно идти против потока – рисунок 2.9.

Переходим к вершине x_4 . Смежной с ней непомеченной вершиной является вершина z , она может быть отмечена, так как по дуге (x_4, z) можно увеличить поток.

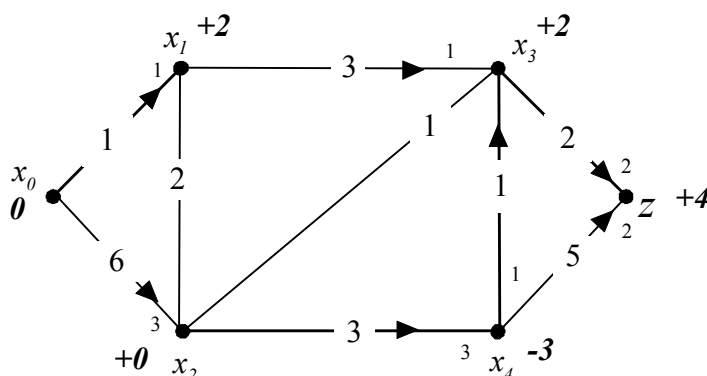


Рисунок 2.9 – Процесс разметки вершин графа

Вершина z оказалась отмеченной. Двигаясь по последовательности индекс-пометок $(+4, -3, +2, +0)$ получаем путь $\mu_4 = (x_0, x_2, x_3, x_4, z)$. Последовательно двигаясь по нему получаем:

- 1) в дуге (x_0, x_2) поток увеличиваем на 1, т.к. дуга имеет знак «+»;
- 2) в дуге (x_2, x_3) поток увеличиваем на 1, т.к. дуга имеет знак «+»;
- 3) в дуге (x_3, x_4) поток уменьшаем на 1, т.к. дуга имеет знак «-»;
- 4) в дуге (x_4, z) поток увеличиваем на 1, т.к. дуга имеет знак «+».

Суммарный поток получился равным 5, граф показан на рисунке 2.10, метки после коррекции потока стираются. Дуга (x_2, x_3) становится насыщенной.

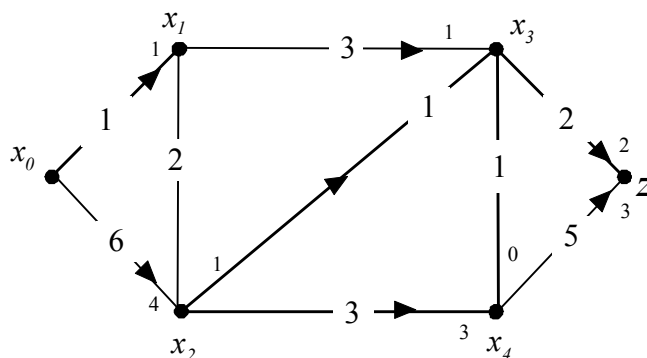


Рисунок 2.10 - Граф после коррекции потока

Вновь начинаем этап разметки.

Начальной вершине присваиваем метку 0; смежной с ней вершине x_2 присваиваем метку $+0$, так как по дуге (x_0, x_2) поток может быть увеличен.

Рассматриваем вершину x_2 . Смежными с ней являются вершины x_1 , x_3 и x_4 . Вершины x_3 и x_4 помечены быть не могут, так как соответствующие дуги являются насыщенными, а вершина x_1 получает метку $+2$. Продолжая разметку, получаем граф рисунка 2.11.

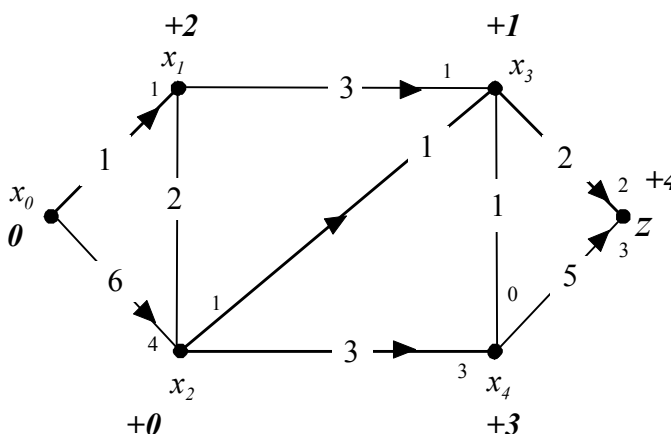


Рисунок 2.11 - Граф после разметки вершин

Вершина z получила метку, значит, поток по транспортной сети можно увеличить.

Двигаясь по последовательности индексов-пометок $(+4, +3, +1, +2, +0)$ получаем путь $\mu_5 = (x_0, x_2, x_1, x_3, x_4, z)$. Последовательно двигаясь по нему получаем:

- 1) в дуге (x_0, x_2) поток увеличиваем на 1, т.к. дуга имеет знак «+»;
- 2) в дуге (x_2, x_1) поток увеличиваем на 1, т.к. дуга имеет знак «+»;
- 3) в дуге (x_1, x_3) поток увеличиваем на 1, т.к. дуга имеет знак «+»;
- 4) в дуге (x_3, x_4) поток увеличиваем на 1, т.к. дуга имеет знак «+»;
- 5) в дуге (x_4, z) поток увеличиваем на 1, т.к. дуга имеет знак «+».

Суммарный поток получился равным 6, граф показан на рисунке 2.12, метки после коррекции потока стираются. Дуга (x_3, x_4) становится насыщенной.

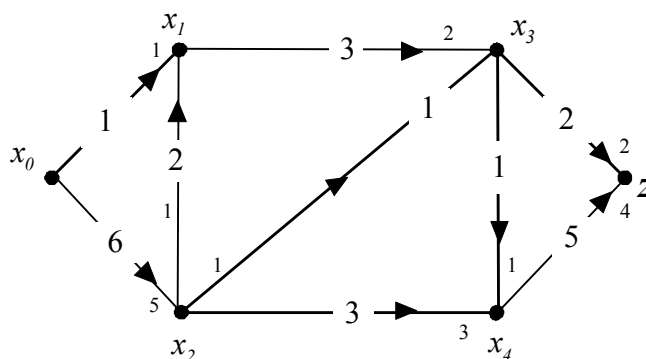


Рисунок 2.12 - Граф после коррекции потока

Возвращаемся к этапу разметки. Граф после выполнения разметки показан на рисунке 2.13.

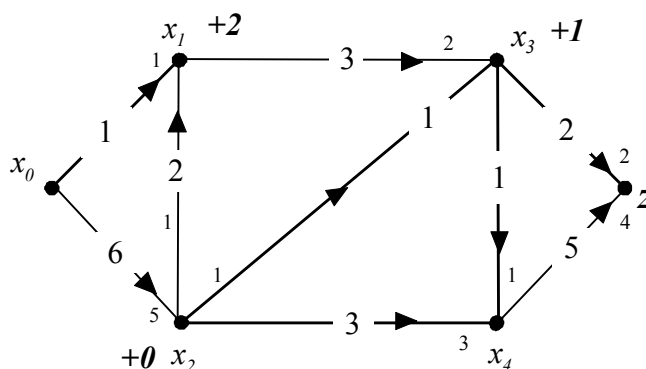


Рисунок 2.13 - Граф после этапа разметки

На рисунке 2.13 после разметки вершина z не получила пометки. Значит, полученный поток является максимальным - $\phi_{max} = 6$.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

3.1. Описать графы рисунков 3.1 и 3.2 с помощью матриц смежности, инцидентности и множеств отображений вершин.

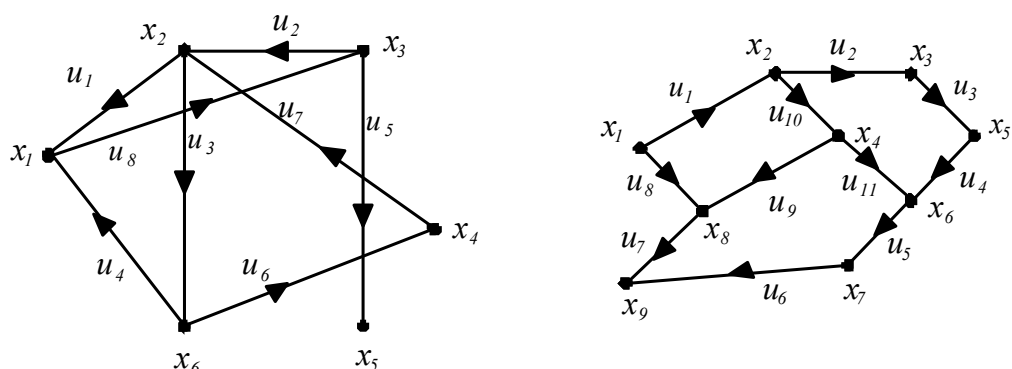


Рисунок 3.1 – Данные к задаче 3.1

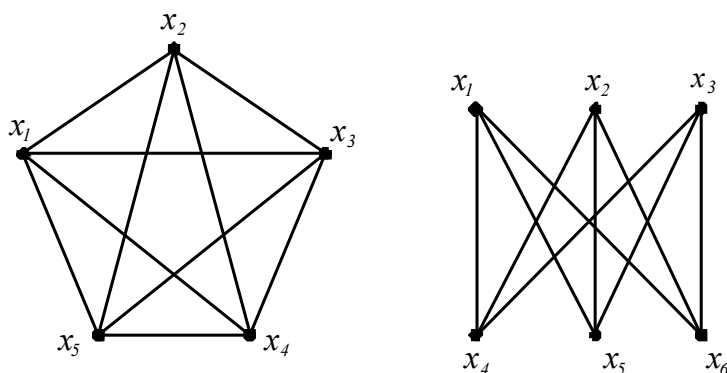


Рисунок 3.2 – Графы к задаче 3.1

3.2. Для графа, приведенного на рисунке 3.3 найти:

- матрицу смежности;
- матрицу инцидентности;
- множества отображений вершин;
- $\Gamma^{-1}(x_2)$, $\Gamma^2(x_2)$, $\Gamma^3(x_2)$, $\Gamma^{-2}(x_2)$.

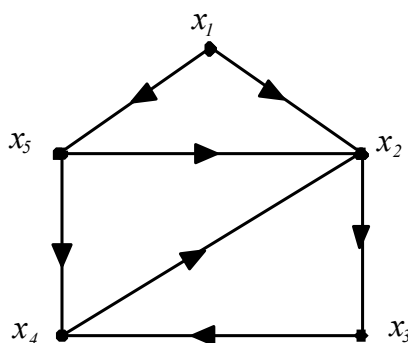


Рисунок 3.3 – Граф задачи 3.2

3.3. По заданным матрицам инцидентности изобразить графы, составить для них матрицы смежности и записать множества отображений вершин.

$$B_1 = \begin{pmatrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \\ u_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ u_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ u_5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ u_7 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Построить матрицы смежности и инцидентности по заданным множествам отображений вершин, а затем нарисовать граф:

а) $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3\}$, $\Gamma(x_2) = \{x_4, x_5\}$, $\Gamma(x_3) = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$, $\Gamma(x_5) = \{x_2, x_4, x_6\}$, $\Gamma(x_6) = \{x_1, x_7\}$, $\Gamma(x_6) = \{x_3, x_4\}$;

б) $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3, x_6\}$, $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_5\}$, $\Gamma(x_3) = \emptyset$, $\Gamma(x_4) = \{x_1, x_3, x_5\}$, $\Gamma(x_5) = \{x_6\}$, $\Gamma(x_6) = \{x_1, x_5\}$;

в) $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3\}$, $\Gamma(x_3) = \{x_4, x_5\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_1, x_3, x_2, x_5\}$, $\Gamma(x_5) = \emptyset$.

3.5. Найти кратчайший путь из вершины А в вершину В на графе с ребрами единичной длины рисунка 3.4.

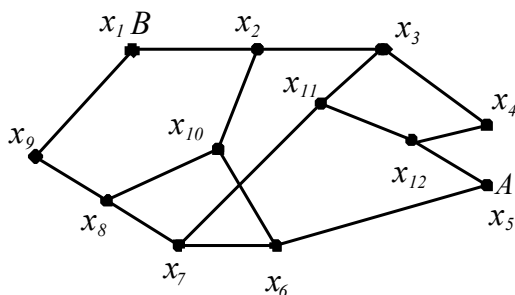


Рисунок 3.4 – Граф задачи 3.5

3.6. На графе с ребрами единичной длины рисунка 3.5 найти кратчайшие пути из вершины x_0 в вершины x_{14} , x_{17} и x_{18} .

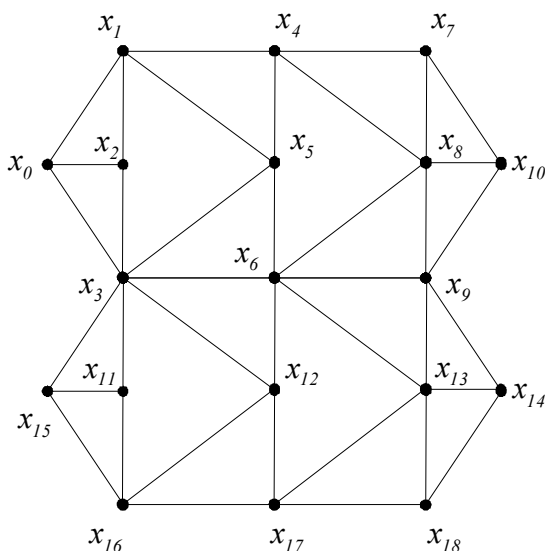
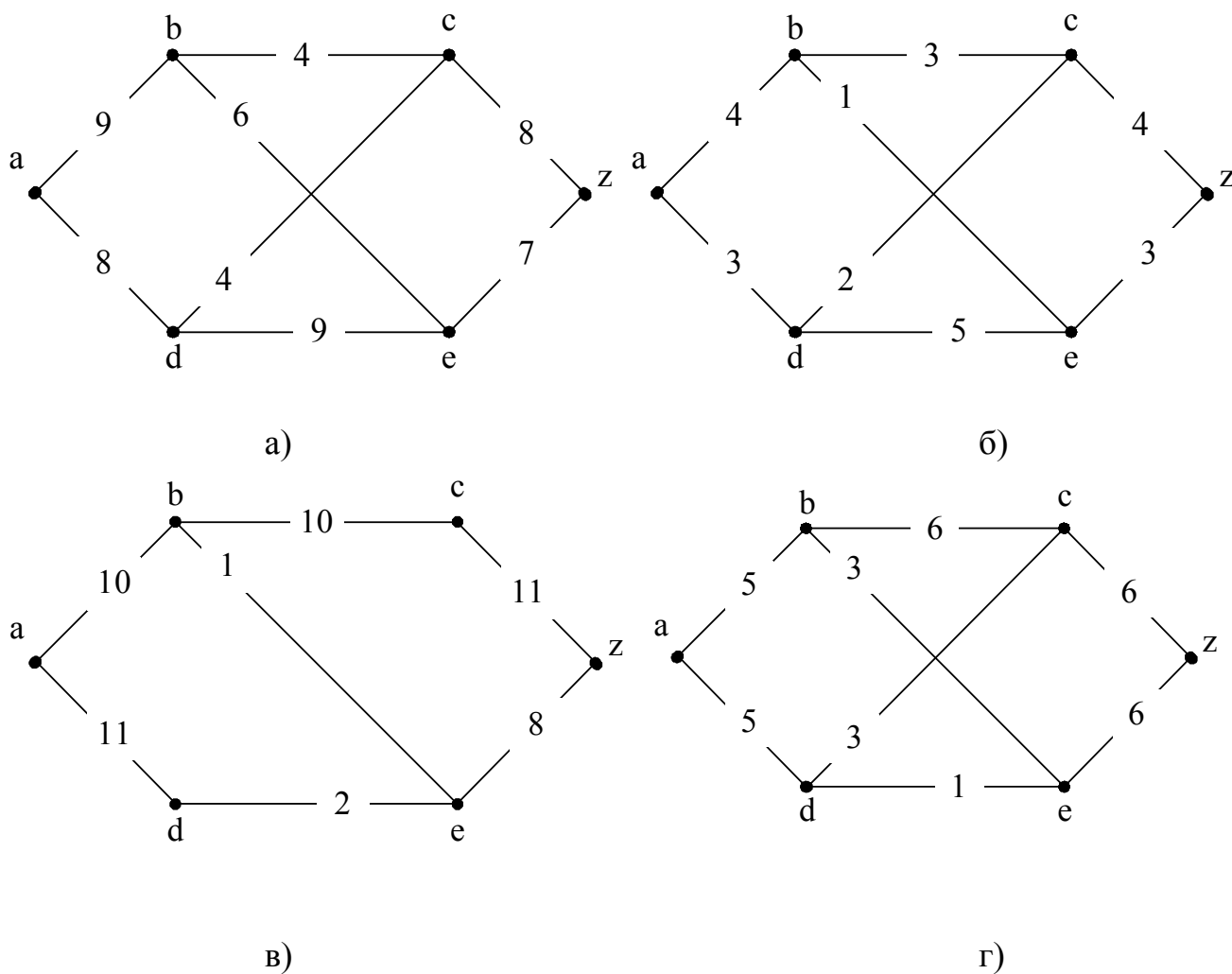


Рисунок 3.5 – Исходный граф к задаче 3.6

3.7. На транспортных сетях рисунка 3.6 найти максимальные потоки.



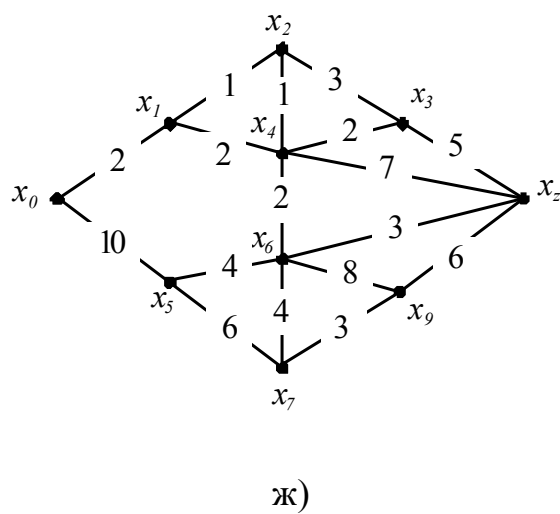
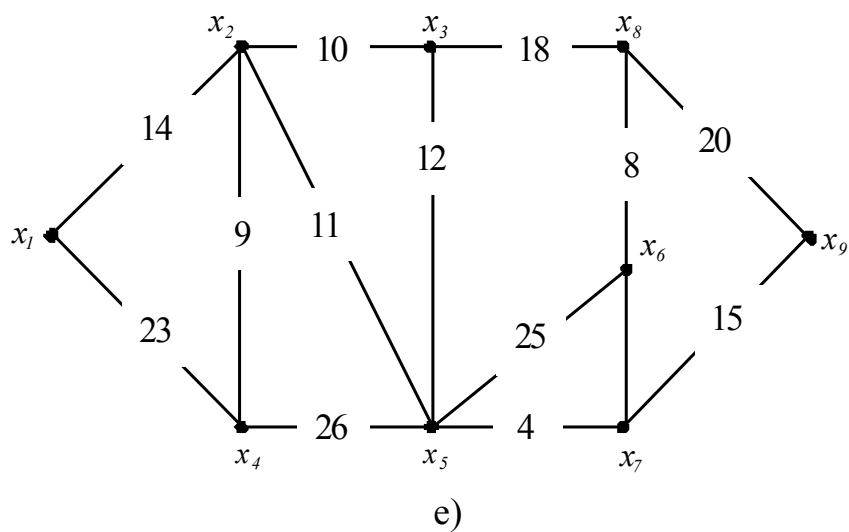


Рисунок 3.6 – Транспортные сети к задаче 3.7

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов/ И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев. – Лейпциг: Тайбнер, М.: Наука, 1981. – 718 с.
2. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики/ Ю.М.Коршунов. – М.: Энергия, 1972. – 376 с.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход/ Н.Кристофидес. – М.: Мир, 1978. - 432 с.
4. /Книжка Доценко «Дискретная математика»