



Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине
«Теория информации и кодирование».
Часть 3 «Помехоустойчивые коды»
для студентов направления подготовки
0915 – "Компьютерная инженерия"
дневной и заочной форм обучения

Севастополь
2010

УДК 621.391.23

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория информации и кодирование». Часть 3 «Помехоустойчивые коды» для студентов направления подготовки 0915 – «Компьютерная инженерия» дневной и заочной форм обучения. /Сост. Щепин Ю.Н. – Севастополь, Изд-во СевНТУ, 2010. – 32с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в освоении методов построения помехоустойчивых кодов.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники, протокол № 10 от 17.06.10 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Апраксин Ю.К., профессор кафедры кибернетики и вычислительной техники, доктор технических наук.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Основные понятия и определения.....	4
2. Блочные коды.....	5
2.1. Общие принципы введения избыточности.....	5
2.2. Исправление ошибок.....	5
2.3. Связь корректирующей способности кода с кодовым расстоянием.....	6
2.4. Показатели качества корректирующего кода.....	8
2.5. Групповые коды.....	9
2.5.1. Построение группового кода Хэмминга (7, 4).....	12
2.5.2. Исправление всех двойных и одиночных ошибок (код 8, 2).....	17
2.5.3. Исправление одиночных или обнаружение двойных ошибок (код 8, 4).....	22
3. Список задач.....	26
4. Контрольные вопросы.....	32
Библиографический список.....	33

Цель работы

Цель практических занятий: ознакомление с принципами кодирования информации и приобретение навыков построения помехоустойчивых кодов.

Введение

Методические указания адресованы студентам очной и заочной форм обучения направления подготовки 0915 – «Компьютерная инженерия», изучающим дисциплину «Теория информации и кодирование».

Необходимыми условиями успешного изучения данной дисциплины являются хорошие знания по курсам «Высшая математика», «Дискретная математика», «Прикладная теория цифровых автоматов» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

В соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория информации и кодирование» студенты при изучении раздела «Помехоустойчивое кодирование» должны приобрести практические навыки применения основных положений этого раздела: научиться строить помехоустойчивые коды, демонстрировать процесс обнаружения и исправления ошибок.

Каждый раздел настоящих методических указаний содержит краткое введение, которое не исчерпывает необходимый минимум теоретических положений для успешного решения списка задач. Прежде, чем приступать к решению задач, необходимо изучить соответствующие теоретические положения, пользуясь конспектом лекций и рекомендованной литературой, а также найти ответы на все предлагаемые контрольные вопросы.

1. Основные понятия и определения

С некоторыми основными понятиями и определениями по разделу «Кодирование информации» студенты ознакомлены ранее при изучении раздела «Эффективные коды» [9].

Помехоустойчивое кодирование базируется на теореме Шеннона: при любой скорости передачи информации, меньшей пропускной способности канала, существует такой код, при котором вероятность ошибочного декодирования будет сколь угодно мала. Задача поиска такого кода решается с учётом сложности операций кодирования и декодирования.

Борьба с помехами при передаче кодовых слов реализуется путём введения избыточности – дополнительных (проверочных, корректирующих) символов (разрядов) в кодовую последовательность. Коды, позволяющие обнаруживать и (или) исправлять ошибки, называются *помехоустойчивыми* или *корректирующими*.

Существуют *блочные* и *непрерывные* корректирующие коды. Блочные коды бывают *разделимыми* и *неразделимыми*. В разделимых кодах чётко различаются информационные и проверочные символы. В неразделимых кодах это сделать невозможно. Наиболее многочисленный класс разделимых кодов составляют *линейные* коды. В разделимых линейных кодах контрольные символы образуются как линейные комбинации информационных символов.

Например, пусть некоторый символ первичного алфавита представлен безыбыточным кодовым словом $a_1a_2\dots a_n$, где $a_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1, n}$, то есть все n разрядов являются информационными. Чтобы построить кодовое слово с проверкой на чётность, надо определить значение дополнительного проверочного разряда «с» по формуле

$$c = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n,$$

где $\oplus$ – линейная операция сложения по модулю 2. Построенный таким образом код длиной $(n+1)$ обнаруживает все одиночные ошибки. Правильно переданное кодовое слово такого кода содержит четное

число единиц. Количество единиц в кодовом слове называется его *весом*.

Коды, в которых информационные и корректирующие разряды расположены по строго определенной системе и всегда занимают в кодовых комбинациях строго определенные места, называются *систематическими* кодами. Систематические коды являются равномерными, то есть все комбинации кода с заданными корректирующими способностями имеют одинаковую длину.

Другие необходимые понятия и определения будут введены далее по тексту.

2. Блочные коды

2.1. Общие принципы введения избыточности

Здесь и далее рассматриваются только двоичные коды.

На вход кодера канала поступает последовательность из k информационных символов (k -разрядное двоичное слово). На выходе кодера получается n двоичных символов (n -разрядное двоичное слово), при этом $n > k$. Всего можно сформировать 2^k входных последовательностей и 2^n – выходных последовательностей. Входные последовательности числом 2^k называются *разрешёнными*, остальные $(2^n - 2^k)$ последовательностей – *запрещёнными* последовательностями.

Каждая из 2^k разрешённых кодовых комбинаций может быть на приёмном конце воспринята как любая из 2^n комбинаций. Таким образом, всего случаев передачи $2^n \times 2^k$. В это число входит:

- 2^k случаев безошибочной передачи (разрешенные комбинации);
- $2^k (2^k - 1)$ случаев перехода в другие разрешённые комбинации (*необнаруживаемые ошибки*);
- $2^k (2^n - 2^k)$ случаев перехода в неразрешённые комбинации (*обнаруживаемые ошибки*).

У подавляющего большинства существующих помехоустойчивых кодов указанные условия являются следствием их алгебраической структуры. Поэтому их называют *алгебраическими* кодами.

2.2. Исправление ошибок

Основная идея: всё множество 2^n комбинаций разбивается на 2^k непересекающихся подмножеств, количество случаев перехода в неразрешённые кодовые комбинации $2^k (2^n - 2^k)$. Каждое подмножество содержит $(2^n - 2^k) / 2^k$ запрещённых кодовых комбинаций. Если переда-

ваемая комбинация трансформировалась в «свое» подмножество, то ошибка будет исправлена. Всего таких случаев насчитывается

$$\frac{2^k(2^n - 2^k)}{2^k} = 2^n - 2^k.$$

Взаимно независимые ошибки задаются вероятностью p неверной передачи двоичного сигнала. Количество искажённых сигналов R называется *кратностью ошибки*. Значение вероятности появления ошибки кратности R вычисляется по формуле

$$p_R = C_n^R p^R (1-p)^{n-R}.$$

При $p \ll 1$ наиболее вероятны ошибки низкой кратности.

2.3. Связь корректирующей способности кода с кодовым расстоянием

Кодовое расстояние d (по Хеммингу) между двумя кодовыми комбинациями двоичного кода равно числу символов, в которых эти комбинации отличаются одна от другой. Чтобы получить значение кодового расстояния между двумя комбинациями двоичного кода, достаточно подсчитать число единиц в результате поразрядного сложения этих комбинаций по модулю 2, другими словами, расстояние между двумя двоичными кодовыми векторами равно весу вектора, полученного в результате сложения исходных векторов по модулю два. Например:

$$\begin{array}{rcl} \text{Cod 1} & & 0110010010 \\ \text{Cod 2} & \oplus & 0011110101 \\ \hline & & 0101100111 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Кодовое расстояние} \\ d_{12}=6 \end{array}$$

Если в коде имеется несколько кодовых слов, необходимо для каждой пары заданного множества кодовых слов вычислить кодовое расстояние, выбрать из полученных кодовых расстояний минимальное значение и определить по нему корректирующие способности исследуемого кода.

Рассмотрим на конкретных примерах связь корректирующей способности кода с минимальным кодовым расстоянием:

(1). Невозможность обнаружения ошибок. Пусть задан код из четырех двухразрядных двоичных кодовых слов ($n=2$):

$$\text{Cod 1}=00; \quad \text{Cod 2}=01; \quad \text{Cod 3}=10, \quad \text{Cod 4}=11.$$

Несложно подсчитать, что минимальное кодовое расстояние $d_{\min}=1$. Любая одиночная ошибка трансформирует конкретную кодовую комбинацию в другую разрешенную кодовую комбинацию, то есть все

возможные кодовые комбинации разрешены, избыточности нет, поэтому код не обладает корректирующей способностью.

(2). Обнаружение одиночной ошибки. Пусть код содержит четыре трехразрядных двоичных кодовых слова ($n=3$):

Cod 1=000; Cod 2=110; Cod 3=101; Cod 4=011.

Минимальное кодовое расстояние $d_{\min}=2$. При одиночной ошибке ни одна из разрешенных кодовых комбинаций с четным весом не переходит в другую разрешенную кодовую комбинацию. Данный код позволяет обнаруживать одиночные ошибки. Одиночная ошибка в каждой из разрешенных кодовых комбинаций приводит к появлению одного из запрещенных кодовых слов с нечетным весом:

100, 010, 001, 111.

Исправить такую ошибку невозможно.

В общем случае для обнаружения всех ошибок кратности R должно выполняться неравенство

$$d_{\min} \geq R + 1. \quad (2.1)$$

(3). Исправление одиночной ошибки. Пусть код включает два разрешенных кодовых слова: 000 и 111 с хэмминговым расстоянием $d=3$.

Подмножество последовательностей, в которые может трансформироваться некоторая разрешенная комбинация, не должно пересекаться с другими подмножествами: разрешенному кодовому слову 000 приписывается подмножество {100, 010, 001}, а разрешенному кодовому слову 111 – подмножество {011, 101, 110}, что соответствует одиночной ошибке при передаче разрешенного кодового слова. Декодирование осуществляется таким образом, чтобы любая запрещенная кодовая комбинация отождествлялась с наиболее «близкой» (по Хэммингу) разрешенной кодовой комбинацией (декодирование по методу максимального правдоподобия).

Для исправления одной ошибки необходимо $d_{\min} \geq 3$.

Если требуется исправить ошибки кратности S , необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$d_{\min} \geq 2S + 1. \quad (2.2)$$

Для обнаружения всех ошибок кратности R и одновременного исправления ошибок кратности S минимальное хэммингово расстояние нужно выбирать из условия

$$d_{\min} \geq R + S + 1, \quad (2.3)$$

при этом

$$R > S. \quad (2.4)$$

Пример 1

Определить корректирующие способности следующего кода:

```
101011100
011000011
110110101
```

Решение

Вычислим хэммингово расстояние между всеми парами двоичных кодовых комбинаций:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Cod 1} & 101011100 & \\
 \oplus & & \\
 \text{Cod 2} & 011000011 & \\
 \hline
 & 110011111 & d_{12}=7;
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \text{Cod 1} & 101011100 & \\
 \oplus & & \\
 \text{Cod 3} & 110110101 & \\
 \hline
 & 011101001 & d_{13}=5;
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Cod 2} & 011000011 & \\
 \oplus & & \\
 \text{Cod 3} & 110110101 & \\
 \hline
 & 101110110 & d_{23}=6.
 \end{array}$$

Вычислим минимальное кодовое расстояние:

$$d_{\min} = \min \{7, 5, 6\} = 5.$$

В соответствии с формулой (2.1) вычислим кратность обнаруживаемых ошибок, приравняв левую и правую части этого неравенства:

$$d_{\min} = R+1 \Rightarrow 5 = R+1 \Rightarrow R=4.$$

В соответствии с формулой (2.2) вычислим кратность исправляемых ошибок, приравняв левую и правую части:

$$d_{\min} = 2S+1 \Rightarrow 5 = 2S+1 \Rightarrow S=2.$$

В соответствии с формулой (2.3) вычислим кратность обнаруживаемых и исправляемых ошибок, приравняв левую и правую части, с учетом ограничения (2.4):

$$d_{\min} = R+S+1 \Rightarrow 5 = R+S+1 \Rightarrow R=3; \quad S=1.$$

Ответ:

Исследуемый код может обнаружить ошибки кратности 4, либо исправить ошибки кратности 2, либо обнаружить ошибки кратности 3 и одну из них исправить.

2.4. Показатели качества корректирующего кода

Пусть k – длина информационного двоичного кодового слова. При создании помехоустойчивого кода длина каждой комбинации увеличивается на $(n-k)$ двоичных разрядов, после чего по определенным правилам формируется помехоустойчивый код. Одним из показателей качества корректирующего кода является степень удлинения кодового

слова (относительная избыточность кода L), значение которой можно рассчитать по одной из двух формул:

$$L_n = \frac{n-k}{n}; \text{ либо } L_k = \frac{n-k}{k}.$$

Отношение k/n называется нормой кода.

Коды, обеспечивающие заданную корректирующую способность при минимально возможной избыточности, называются *оптимальными* или *плотноупакованными*.

Оценим наибольшее возможное число Q (объем кода) разрешённых комбинаций n -значного двоичного кода, обладающего способностью исправлять взаимно независимые ошибки кратности S .

Общее число различных исправляемых ошибок для каждой разрешённой комбинации составляет $\sum_{i=1}^s C_n^i$. Вместе с разрешенной комбинацией подмножество запрещенных комбинаций, представляющее эту разрешённую комбинацию, должно содержать:

$$1 + \sum_{i=1}^s C_n^i = \sum_{i=0}^s C_n^i$$

комбинаций.

Так как эти подмножества не пересекаются, то объем кода можно рассчитать по формуле Хэмминга

$$Q \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^s C_n^i}. \quad (2.5)$$

2.5. Групповые коды

Коды, в которых все кодовые комбинации образуют группу, называются *групповыми*.

Алгебра изучает выполнение алгебраических операций над элементами некоторого множества M .

Алгебраические структуры характеризуются законами композиции и аксиомами, которым эти законы подчинены. Суть алгебраической операции – сопоставление паре $x, y \in M$ элемента $z \in M$ (это определение внутреннего закона композиции). Внешние законы композиции: паре $x \in M$ и $\omega \in \Omega$ сопоставляется элемент $y \in M$.

В группе действует один внутренний закон композиции. Обозначим в общем случае знак композиции символом «*».

Понятие группы вводится с помощью следующих аксиом:

(1) *Замкнутость*. Введённая операция «*» применяется к любым двум элементам группы, в результате получается третий элемент группы:

$$x, y \in M, x*y=z \Rightarrow z \in M.$$

(2) *Ассоциативный закон*. Если $x, y, z \in M$, то $x*(y*z)=(x*y)*z$.

(3) Существует *нейтральный* элемент e такой, что $x*e=x$.

(4) Для каждого $x \in M$ существует *симметричный* элемент $(-x)$ такой, что $x*(-x)=e$.

Группа называется *конечной*, если множество её элементов конечно, и *бесконечной* – в противном случае. Количество элементов в конечной группе называется *порядком* группы.

Если операция, определённая в группе, коммутативна (то есть, для любых $x, y \in M$ выполняется равенство $x*y=y*x$), то такая группа называется коммутативной или абелевой.

При построении помехоустойчивых кодов множество всех n -разрядных двоичных векторов образует абелеву группу порядка 2^n относительно покомпонентного сложения по модулю 2. Нулевым элементом является n -разрядное двоичное кодовое слово $00\dots 0$. Относительно операции покомпонентного сложения по модулю 2 симметричным элементом для любого элемента x является сам элемент x , так как при поразрядном сложении по модулю 2 всегда $x \oplus x = 0$.

В дальнейшем для образования кодов будем использовать группы векторов относительно операции поразрядного сложения по модулю 2.

Не всякое множество векторов образует группу относительно этой операции. Например, множество $\{011, 110, 111\}$ не является группой, так как в нём нет нулевого элемента. Множество $\{000, 001, 110\}$ не является группой, т. к. не выполняется аксиома замкнутости:

$$001 \oplus 110 = 111 \notin M.$$

Множество $\{000, 001, 110, 111\}$ есть группа, так как

(1) Имеется нулевой элемент 000;

(2) Выполняется аксиома замкнутости:

$$001 \oplus 110 = 111 \in M;$$

$$001 \oplus 111 = 110 \in M;$$

$$110 \oplus 111 = 001 \in M.$$

Подмножество H группы M называется *подгруппой* группы M , если в нём удовлетворены аксиомы группы. Всякая подгруппа является группой относительно той операции, которая определена в группе.

Пусть в абелевой группе M задана подгруппа H . Для простоты назовём операцию, относительно которой образована группа, сложением (обозначим его символом «+»).

Если $x \notin H$ и $x \in M$, то множество элементов вида $x+H$, получающихся при сложении элемента x с каждым элементом из H , называется *смежным классом* группы M по подгруппе H , порождаемым элементом x .

Очевидно, элемент x принадлежит смежному классу, т. к. любая подгруппа содержит нулевой элемент. Можно показать, что два любых смежных класса либо совпадают, либо не имеют ни одного общего элемента.

Беря последовательно элементы $x_j \in M$, не вошедшие в уже образованные смежные классы, можно разложить всю группу на смежные классы по подгруппе H . Элементы x_j называются образующими.

Пример 2

Пусть $n=3$. Множество различных $2^3=8$ трехразрядных кодовых слов образует группу $M=\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

Выделим подгруппу H группы M ($H \subset M$), включающую два кодовых слова: $H=\{000, 111\}$. Построим таблицу разложения (таблица 1) группы M по подгруппе H с образующими элементами $\{001, 010, 100\}$.

Выберем первый образующий элемент $001 \notin H$ и построим первый смежный класс $\{001, 110\}$:

$$\begin{array}{rcl} & 000 & \\ \oplus & & \\ & \underline{001} & \\ & 001 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & 111 & \\ \oplus & & \\ & \underline{001} & \\ & 110 & \end{array}$$

Если нумеровать разряды кодового слова справа налево, то появление любой запрещенной комбинации из первого смежного класса приводит к необходимости коррекции значения первого разряда кодового слова.

Таблица 1 – Таблица разложения (групповая таблица).

		000	111	←Подгруппа $H \supset M$
Образующие элементы	001	001	110	←Смежный класс 1
	010	010	101	←Смежный класс 2
	100	100	011	←Смежный класс 3

Аналогично, с помощью образующего элемента 010, построим второй смежный класс $\{010, 101\}$, а с помощью образующего элемента 100 – третий смежный класс $\{100, 011\}$. При передаче кодового слова 000 одиночная ошибка может привести к появлению на приемном конце одной из запрещенных комбинаций $\{001, 010, 100\}$. Эта ошибка может быть скорректирована в соответствии с методом максимального

правдоподобия (хеммингово расстояние между разрешенной кодовой комбинацией 000 и соответствующими запрещенными комбинациями 001, 010, 100 равно единице).

При передаче разрешенной комбинации 111 одиночная ошибка может привести к появлению на приемном конце одной из запрещенных комбинаций {110, 101, 110}, с каждой из этих комбинаций разрешенная комбинация 111 имеет хеммингово расстояние, равное единице.

Все 8 элементов группы присутствуют и дальнейшее разложение невозможно.

2.5.1. Построение группового кода Хэмминга (7, 4)

Для построения группового кода задаются следующие исходные данные:

- (1) Объём кода Q (число различных разрешённых кодовых слов).
- (2) Данные о наиболее вероятных ошибках.

Вектором ошибки будем называть n -разрядную кодовую комбинацию, имеющую единицы в разрядах, подвергшихся искажению, и нули – во всех остальных разрядах. Любую искажённую кодовую комбинацию можно рассматривать как результат поразрядного сложения по модулю 2 разрешённой кодовой комбинации и вектора ошибки (в примере 2 векторами ошибки являются образующие элементы 001, 010, 100).

Определение числа избыточных символов

Шаг 1. Число k информационных разрядов определяется из неравенства

$$2^k - 1 \geq Q. \quad (2.6)$$

Шаг 2. Каждой из $2^k - 1$ ненулевых комбинаций k -разрядного безызбыточного кода надо поставить в соответствие комбинацию из n символов. Значения $(n-k)$ проверочных символов определяются в результате сложения по модулю 2 значений соответствующих информационных символов.

Такие коды называются *линейными, систематическими, групповыми* кодами.

Линейные, так как контрольные разряды образуются с помощью линейных операций над информационными разрядами. *Систематические*, так как информационные разряды не меняют свои позиции в кодовых комбинациях. Эти коды называются ещё и кодами *с проверкой на чётность*, так как значение проверочного символа вычисляется в

результате сложения некоторых информационных символов таким образом, чтобы суммарное число выбранных разрядов было чётным.

Можно показать, что если множество k -разрядных комбинаций в количестве 2^k (включая комбинацию $00\dots 0$) образует группу, то подмножество соответствующих n -разрядных 2^k кодовых слов, полученных по указанному правилу, образует подгруппу N группы M , состоящей из 2^n комбинаций n -разрядных кодовых слов.

Разложим группу 2^n всех n -разрядных векторов по подгруппе 2^k разрешённых кодовых слов. Помимо самой подгруппы N в разложении будет насчитываться $2^{n-k} - 1$ смежных классов. Если за образующие принять наиболее вероятные для заданного канала связи векторы ошибок, которые должны быть исправлены, то в каждом классе сгруппируются кодовые комбинации, полученные в результате воздействия одного и того же вектора ошибок.

Для исправления любой ошибки достаточно определить класс смежности. Для определения класса смежности ему должна быть сопоставлена комбинация из $(n-k)$ контрольных разрядов, называемая *опознавателем* или *синдромом*. Каждый символ синдрома вычисляется на приёмном конце путем сложения по модулю 2 значений соответствующих информационных разрядов. Нулевое значение синдрома соответствует отсутствию ошибок. Исправление ошибок возможно лишь при наличии взаимно однозначного соответствия между множеством синдромов и множеством смежных классов, а, следовательно, и множеством векторов ошибок.

Таким образом, количество проверочных символов $(n-k)$ определяется числом опознавателей. Очевидно, число различных ошибок, исправляемых $(n-k)$ проверочными символами, не более $2^{n-k} - 1$.

Если требуется исправить все одиночные ошибки, то должно выполняться неравенство

$$2^{n-k} - 1 \geq C_n^1; \quad (2.7)$$

$$\text{двойные ошибки} - \quad 2^{n-k} - 1 \geq C_n^1 + C_n^2; \quad (2.8)$$

$$\text{ошибки кратности } S - \quad 2^{n-k} - 1 \geq C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^S = \sum_{i=0}^S C_n^i. \quad (2.9)$$

Приведённые формулы используются для определения длины кодового слова n . При этом нужно учитывать, что формулы определяют теоретический предел, который часто не достигается.

Составление таблицы опознавателей и определение проверочных равенств

Данную тему рассмотрим с помощью конкретного примера.

Пример 3

Требуется построить код для передачи 15 букв, способный исправить все одиночные независимые ошибки.

Р е ш е н и е

На основании (2.6) вычислим количество информационных разрядов помехоустойчивого кода:

$$2^k - 1 = 15 \Rightarrow k = 4.$$

На основании (2.7) определяем длину кодовых слов n :

$$2^{n-4} - 1 = n \Rightarrow n = 7.$$

Таким образом, требуется $(n-k)=(7-4)=3$ избыточных (проверочных) разряда. Сопоставим их значения возможным ошибкам (таблица 2) по следующему правилу: значение синдрома в двоичной позиционной системе счисления должно определять номер разряда кода, в котором произошла ошибка. Разряды пронумерованы справа налево. Нулевое значение синдрома означает отсутствие ошибки.

Коды, которые строятся по этому принципу, известны как *коды Хэмминга*.

В таблице 2 разряды кода a_i , $i = \overline{1, n}$, пронумерованы справа налево от 1 до $n=7$, а разряды синдрома c_j – от 1 до $(n-k)=3$. В соответствии с таблицей 2, поскольку младший разряд синдрома равен 1 при ошибках в 1, 3, 5 и 7 разрядах,

$$c_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7. \quad (2.10)$$

Если ошибка в указанных разрядах не произошла, значение первого разряда синдрома $c_1 = 0$; в противном случае, если ошибка произойдёт в одном из разрядов a_1, a_3, a_5, a_7 , то приведённая выше сумма по модулю 2 будет равна 1, что и будет признаком ошибки.

Таблица 2 – Таблица опознавателей

Номер разряда	Вектор ошибок							Синдром		
	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	c_3	c_2	c_1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
6	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
7	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Равенство (2.10) определит на приёмном конце значение младшего разряда синдрома. Аналогично строятся два других проверочных равенства для второго и третьего разрядов синдрома, в итоге получим:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \\ c_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \\ c_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \end{aligned} \right\}. \quad (2.11)$$

Проверочные равенства (2.11) определяют значения разрядов синдрома на приемном конце системы связи. Если значение синдрома $S=(c_3c_2c_1)=000$, ошибка при передаче очередного кодового слова не произошла, в противном случае значению синдрома в двоичной системе счисления надо поставить в соответствие десятичную цифру, которая определяет номер разряда, в котором произошла одиночная ошибка.

В семиразрядном кодовом слове в качестве проверочных удобно выбрать разряды, каждый из которых входит только в одно проверочное равенство $c_1=a_1$, $c_2=a_2$, $c_3=a_4$. В качестве информационных используются разряды a_3 , a_5 , a_6 , a_7 .

Тогда, в соответствии с (2.11), вычисление проверочных разрядов осуществляется по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \\ a_2 &= a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \\ a_4 &= a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \end{aligned} \right\}. \quad (2.12)$$

Равенства (2.12) используются на передающем конце системы связи для преобразования безызбыточного четырехразрядного кодового слова в семиразрядную комбинацию помехоустойчивого кода.

Таким образом, получены проверочные равенства для построения кода Хэмминга (7, 4), исправляющего все одиночные ошибки. В соответствии с (2.2) минимальное кодовое расстояние (по Хэммингу) равно $d_{\min}=2 \times 1 + 1 = 3$. А в соответствии с (2.1) кратность обнаруживаемых ошибок $R=3-1=2$, следовательно, этот код может также использоваться для обнаружения ошибок кратности 2.

Аналогично можно строить код Хэмминга для любого n , но наиболее эффективен он для $n=2^t-1$, где $t=3, 4, 5, \dots$. Для этих значений величина k/n (норма кода) достигает своего предельного значения. В этом случае в соответствии с (2.5) достигается оценка Хэмминга $Q=2^n/(n+1)$. Оптимальные значения n и k представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Норма кода Хэмминга, исправляющего одиночные ошибки

n	7	15	31	63	127
k	4	11	26	57	120
k/n	0,57	0,73	0,84	0,9	0,94

Пример 4

Для четырехразрядной кодовой комбинации 1010 построить семирязрядную комбинацию кода Хэмминга (7, 4). Нумерация разрядов – справа налево.

Решение

Нумерация информационных разрядов кода Хэмминга (7, 4) определяют значения разрядов заданного кодового слова следующим образом:

$$\begin{array}{cccc} a_7 & a_6 & a_5 & a_3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

В соответствии с равенствами (2.12) вычислим значения контрольных (проверочных) разрядов:

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0;$$

$$a_2 = a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1;$$

$$a_4 = a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$$

Ответ: Искомая семирязрядная комбинация помехоустойчивого кода Хэмминга (7, 4) имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccc} a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Проведем проверку построенного кодового слова в соответствии с системой равенств (2.11):

$$c_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0;$$

$$c_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

$$c_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$$

Нулевое значение синдрома $C=(c_3c_2c_1)=000$ свидетельствует о том, что комбинация 1010010 построена верно.

Пример 5

Принята комбинация 0010011 кода Хэмминга (7, 4), исправляющего все одиночные ошибки. Проверить, верно ли передано данное кодовое слово, и при необходимости, исправить ошибку. Нумерация разрядов – справа налево.

Р е ш е н и е

Нумерация информационных разрядов кода Хэмминга (7, 4) определяет значения разрядов заданного кодового слова следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

В соответствии с равенствами (2.11) вычислим значения синдрома:

$$c_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$$

$$c_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$

$$c_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1.$$

Получили ненулевое значение синдрома:

$$C=(c_3c_2c_1)=(110)_2=6_{10},$$

следовательно, ошибка произошла в шестом разряде. Исправим ошибку, сложив поразрядно по модулю 2 полученную комбинацию кода Хэмминга (7, 4) с соответствующим вектором ошибки:

$$\begin{array}{r} 0010011 \\ \oplus \\ 0100000 \\ \hline 0110011. \end{array}$$

Ответ: Верная комбинация помехоустойчивого кода Хэмминга (7, 4) имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc} a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Проведем проверку скорректированного кодового слова в соответствии с системой равенств (2.11):

$$c_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$$

$$c_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$$

$$c_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0.$$

Нулевое значение синдрома $C=(c_3c_2c_1)=000$ свидетельствует о том, что комбинация 0110011 скорректирована верно.

2.5.2.Исправление всех двойных и одиночных ошибок (код 8, 2)

При составлении таблицы опознавателей следует иметь в виду, что синдром двойной ошибки равен сумме по модулю 2 синдромов одиночных ошибок. С учётом этого обстоятельства значения синдромов представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Таблица синдромов для кода, исправляющего все одиночные и двойные ошибки

Номер разряда	Синдром						
	c_7	c_6	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1
1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0
8	0	1	1	0	0	1	1
9	1	0	0	0	0	0	0
10	1	0	1	0	1	0	1
11	1	1	0	1	0	1	0

Пояснения: Таблица строится таким образом, чтобы каждому последующему разряду сопоставить опознаватель с минимальным номером. Как и для одиночной ошибки, разрядам 1 и 2 сопоставляются те же синдромы (таблица 2, столбец «Синдром»). Третьему разряду сопоставить синдром 0000011 нельзя, т. к. этот синдром соответствует двойной ошибке в разрядах 1 и 2. Аналогично нельзя использовать синдромы 0000110 и 0000101. Ошибке в разряде 4 нельзя сопоставить код 0000111, т. к. синдром двойной ошибки (например, в 1 и 4 разрядах) в этом случае будет иметь код $0000001 \oplus 0000111 = 0000110$, т. е. будет совпадать с синдромом ошибки одновременно в разрядах 2 и 3. Остальные синдромы построены, исходя из аналогичных рассуждений (в таблице 4 приведены значения синдромов для одиннадцати разрядов).

Для исправления всех одиночных и двойных ошибок возможны коды (5, 1), (8, 2), (11, 4) и так далее. Эти коды уже не являются плотноупакованными.

Построим для примера код (8, 2), исправляющий все одиночные и двойные ошибки.

Так как $n=8$, усечем таблицу 4 на восьмом разряде (строка 8), столбец c_7 в этом случае является ненужным.

Отметим, что в таблице 4 первый разряд синдрома c_1 принимает единичное значение в случаях, когда происходит одиночная ошибка в разрядах 1, 5, и 8.

Аналогично можно провести анализ для остальных пяти разрядов и построить следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= a_1 \oplus a_5 \oplus a_8 \\ c_2 &= a_2 \oplus a_5 \oplus a_8 \\ c_3 &= a_3 \oplus a_5 \\ c_4 &= a_4 \oplus a_5 \\ c_5 &= a_6 \oplus a_8 \\ c_6 &= a_7 \oplus a_8 \end{aligned} \right\}. \quad (2.13)$$

Проверочные равенства (2.13) определяют значения разрядов синдрома на приемном конце системы связи. Если значение синдрома $C=(c_6c_5c_4c_3c_2c_1)$ отлично от нуля, при одиночной ошибке его значение совпадет с одним из синдромов таблицы 4; таким образом, одиночная ошибка будет опознана и исправлена. При ошибке в двух разрядах необходимо вычислить сумму по модулю 2 двух синдромов из таблицы 4, совпадающую по значению с синдромом C , вычисленным согласно (2.13), и внести коррекцию в соответствующие два разряда искаженной кодовой комбинации.

В соответствии с (2.13) правила построения кода на передающем конце определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_5 \oplus a_8 \\ a_2 &= a_5 \oplus a_8 \\ a_3 &= a_5 \\ a_4 &= a_5 \\ a_6 &= a_8 \\ a_7 &= a_8 \end{aligned} \right\}. \quad (2.14)$$

Каждый из разрядов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_7$ входит только в одно из проверочных равенств (2.13), поэтому целесообразно выбрать их в качестве проверочных (контрольных) разрядов, а разряды a_5 и a_8 – в качестве информационных.

Отметим, что для исправления всех двойных ошибок, согласно (2.2), минимальное кодовое расстояние (по Хэммингу) равно $d_{\min}=2 \times 2 + 1 = 5$ и, кроме того, согласно (2.1), этот код может также использоваться для обнаружения ошибок кратности от одной до четырех.

Пример 6

Для двухразрядной кодовой комбинации 10 построить восьмиразрядную комбинацию кода (8,2), исправляющего все одиночные и двойные ошибки. Нумерация разрядов – справа налево.

Решение

Нумерация информационных разрядов кода (8,2) определяет значения разрядов заданного кодового слова следующим образом:

$$\begin{array}{cc} a_8 & a_5 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

В соответствии с равенствами (2.14) вычислим значения контрольных (проверочных) разрядов:

$$a_1 = a_5 \oplus a_8 = 0 \oplus 1 = 1;$$

$$a_2 = a_5 \oplus a_8 = 0 \oplus 1 = 1;$$

$$a_3 = a_5 = 0;$$

$$a_4 = a_5 = 0;$$

$$a_6 = a_8 = 1;$$

$$a_7 = a_8 = 1.$$

Ответ: Искомая восьмиразрядная комбинация помехоустойчивого кода (8, 2) имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccccc} a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Проведем проверку построенного кодового слова в соответствии с системой равенств (2.13):

$$c_1 = a_1 \oplus a_5 \oplus a_8 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

$$c_2 = a_2 \oplus a_5 \oplus a_8 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

$$c_3 = a_3 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 = 0;$$

$$c_4 = a_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 = 0;$$

$$c_5 = a_6 \oplus a_8 = 1 \oplus 1 = 0;$$

$$c_6 = a_7 \oplus a_8 = 1 \oplus 1 = 0.$$

Нулевое значение синдрома $C = (c_6 c_5 c_4 c_3 c_2 c_1) = 000000$ свидетельствует о том, что комбинация 11100011 построена верно.

Пример 7

Приняты две комбинации

$$\text{Cod 1} = 01100011,$$

$$\text{Cod 2} = 11110001$$

кода Хэмминга (8, 2), исправляющего все одиночные и двойные ошибки. Проверить, верно ли переданы данные кодовые слова, и при необходимости, исправить ошибки. Нумерация разрядов – справа налево.

Решение

Нумерация информационных разрядов кода Хэмминга (8, 2) определяют значения разрядов заданного кодового слова следующим образом:

	a_8	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
Cod 1 =	0	1	1	0	0	0	1	1
Cod 2 =	1	1	1	1	0	0	0	1

Проверка первого кодового слова

Для первого кодового слова (Cod 1) в соответствии с равенствами (2.12) вычислим значение синдрома:

$$c_1 = a_1 \oplus a_5 \oplus a_8 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$

$$c_2 = a_2 \oplus a_5 \oplus a_8 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$

$$c_3 = a_3 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 = 0;$$

$$c_4 = a_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 = 0;$$

$$c_5 = a_6 \oplus a_8 = 1 \oplus 0 = 1;$$

$$c_6 = a_7 \oplus a_8 = 1 \oplus 0 = 1.$$

Получили ненулевое значение синдрома:

$$\begin{array}{rcccccc} & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ C = & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Согласно таблице 4 такое значение синдрома совпадает со значением синдрома одиночной ошибки в восьмом разряде; эту ошибку необходимо исправить, просуммировав по модулю 2 ошибочную кодовую комбинацию Cod 1 с вектором ошибки в восьмом разряде:

Cod 1	$\oplus$	0	1	1	0	0	0	1	1
Вектор ошибки (a_8)		1	0	0	0	0	0	0	0
Верная комбинация		1	1	1	0	0	0	1	1

Проверка второго кодового слова

Для второго кодового слова (Cod 2) в соответствии с равенствами (2.13) вычислим значение синдрома:

$$c_1 = a_1 \oplus a_5 \oplus a_8 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$$

$$c_2 = a_2 \oplus a_5 \oplus a_8 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0;$$

$$c_3 = a_3 \oplus a_5 = 0 \oplus 1 = 1;$$

$$c_4 = a_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 1 = 1;$$

$$c_5 = a_6 \oplus a_8 = 1 \oplus 1 = 0;$$

$$c_6 = a_7 \oplus a_8 = 1 \oplus 1 = 0.$$

Получили ненулевое значение синдрома:

$$\begin{array}{rcccccc} & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ C = & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Согласно таблице 4 такое значение синдрома не совпадает ни с одним значением синдрома одиночной ошибки, но является результатом поразрядного сложения по модулю 2 синдромов, соответствующих ошибкам во втором и пятом и разрядах:

$$\begin{array}{rcccccc} & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ C(a_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C(a_5) & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \oplus & & & & & & \\ C = & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Исправим ошибки, сложив поразрядно по модулю 2 полученную комбинацию Cod 2 с соответствующими векторами ошибок:

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{Cod 2} & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \text{Вектор ошибки (a}_2\text{)} & \oplus & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \text{Вектор ошибки (a}_5\text{)} & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Верная комбинация} & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Ответ: В обоих случаях было передано одно и тоже кодовое слово. Верная комбинация помехоустойчивого кода (8, 2) имеет следующий вид:

$$\begin{array}{rcccccccc} a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Проверка синдрома на равенство нулю для данного кодового слова проведена в примере 6.

2.5.3. Исправление одиночных или обнаружение двойных ошибок (код 8, 4)

Построим групповой код объемом 15 слов, способный исправлять одиночные либо обнаруживать двойные ошибки.

Согласно формуле (2.3) при условии (2.4) код должен обладать минимальным хэмминговым расстоянием

$$d_{\min}=2+1+1=4.$$

Такой код можно построить в два этапа. Сначала строим код заданного объема, способный исправлять одиночные ошибки – это код Хэмминга (7, 4), построенный в примере 3. Затем добавляем еще один проверочный разряд a_8 , который обеспечивает четность числа единиц в разрешенных комбинациях.

Таким образом, получаем код (8, 4). В процессе кодирования (на передающем конце системы связи) надо сформировать значения проверочных разрядов на основе равенств (2.12) и нового равенства для вычисления значения разряда a_8 :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \\ a_2 &= a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \\ a_4 &= a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \\ a_8 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \end{aligned} \right\}. \quad (2.15)$$

После получения очередного кодового слова на приемном конце необходимо вычислить значения разрядов синдрома кода (7, 4), как это выполнено в равенствах (2.11) и организовать проверку на четность полученного кодового слова (обозначим это значение через V):

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \\ c_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \\ c_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \\ V &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_8 \end{aligned} \right\}. \quad (2.16)$$

Обозначив синдром кода (7, 4) через C , а результат общей проверки на четность – через $V = \bigoplus_{i=1}^8 a_i$, и пренебрегая возможностью возникновения ошибок кратности 3 и выше, запишем алгоритм декодирования:

- при $C=0$ и $V=0 \Rightarrow$ ошибок нет;
- при $C=0$ и $V=1 \Rightarrow$ ошибка в восьмом разряде;
- при $C \neq 0$ и $V=0 \Rightarrow$ двойная ошибка (коррекция блокируется, необходимо послать запрос повторной передачи);
- при $C \neq 0$ и $V=1 \Rightarrow$ одиночная ошибка, осуществляется ее исправление.

Пример 8

Для четырехразрядной кодовой комбинации 1010 требуется построить восьмиразрядную комбинацию кода (8, 4), исправляющего одиночные либо обнаруживающего двойные ошибки. Нумерация разрядов – справа налево.

Р е ш е н и е

В примере 4 для этого безызбыточного кодового слова (1010) согласно (2.12) определены значения проверочных разрядов a_1 , a_2 , a_4 и построена семиразрядная комбинация кода Хэмминга (7, 4), исправляющего все одиночные ошибки:

$$\begin{array}{ccccccc} a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Вычислим значение дополнительного проверочного разряда a_8 согласно (2.16):

$$a_8 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Ответ: Искомая восьмиразрядная комбинация помехоустойчивого кода (8, 4), исправляющего одиночные либо обнаруживающего двойные ошибки, имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc} a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

В примере 4 проверка значений разрядов синдрома C выполнена, $C=000$. Проведем общую проверку на четность построенного кодового слова:

$$V = \bigoplus_{i=1}^8 a_i = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0.$$

Нулевое значение синдрома $C=(c_3c_2c_1)=000$ и результат общей проверки на четность $V=0$ свидетельствуют о том, что комбинация 11010010 построена верно.

Пример 9

Приняты три комбинации кода (8, 4), исправляющего одиночные либо обнаруживающего двойные ошибки (нумерация разрядов – справа налево):

$$\text{Cod 1} = 00011001,$$

$$\text{Cod 2} = 10111101,$$

$$\text{Cod 3} = 10111001.$$

Проверить, верно ли передано каждое из данных кодовых слов, и при необходимости, исправить ошибку.

Решение

В соответствии с равенствами (2.16) вычислим значение синдрома S и выполним общую проверку на четность (вычислим значение V) первого кодового слова $Cod\ 1=00011001$:

$$\begin{aligned}c_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0; \\c_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0; \\c_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0; \\V &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_8 = \\&= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1.\end{aligned}$$

Получили нулевое значение синдрома $S=(c_3c_2c_1)=0$ и значение $V=1$, следовательно, произошла ошибка в восьмом разряде. На передающем конце было отправлено кодовое слово

Cod 1	$\oplus$	00011001
Вектор ошибки a_8		10000000
Верная комбинация		10011001

Те же действия выполним для второго кодового слова $Cod\ 2=10111101$:

$$\begin{aligned}c_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1; \\c_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0; \\c_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1; \\V &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_8 = \\&= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0.\end{aligned}$$

Получили ненулевое значение синдрома $S=(c_3c_2c_1)=101$ и значение $V=0$, следовательно, произошла двойная ошибка.

В соответствии с равенствами (2.16) вычислим значения синдрома S и выполним общую проверку на четность третьего кодового слова $Cod\ 3=10111001$:

$$\begin{aligned}c_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0; \\c_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1; \\c_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1; \\V &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_8 = \\&= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.\end{aligned}$$

Получили ненулевое значение синдрома $S=(c_3c_2c_1)=(110)_2=6_{10}$ и значение $V=1$, следовательно, произошла одиночная ошибка в шестом разряде.

На передающем конце было отправлено кодовое слово

$$\begin{array}{r}
 \text{Cod 3} \\
 \hline
 \text{Вектор ошибки } a_6 \\
 \hline
 \text{Верная комбинация}
 \end{array}
 \oplus
 \begin{array}{r}
 10111001 \\
 \hline
 00100000 \\
 \hline
 10011001
 \end{array}$$

Ответ:

При передаче первого кодового слова Cod 1=00011001 произошла ошибка в восьмом разряде.

При передаче второго кодового слова Cod 2=10111101 произошла двойная ошибка, в связи с чем необходимо послать запрос на повторную передачу этого кодового слова.

При передаче третьего кодового слова Cod 3=10111001 произошла одиночная ошибка в шестом разряде.

В первом и третьем случаях верное кодовое слово – 10011001.

З а м е ч а н и е: Убедитесь, что при передаче кодового слова 10011001 могла произойти двойная ошибка, приведшая к приему второго кодового слова Cod 2=10111101.

3. Список задач

3.1. Чему равны значность и вес каждой из следующих комбинаций:

- a) 00100101; b) 01001; c) 0000000; d) 101; e) 0001010;
 f) 11011010; g) 10110; h) 111111; j) 010; k) 1110101.

3.2. Определить минимальное кодовое расстояние, необходимое для обнаружения в коде ошибки кратности

- a) два;
 b) три;
 c) четыре;
 d) пять.

3.3. Определить минимальное кодовое расстояние, необходимое для исправления в коде ошибки кратности

- a) два;
 b) три;
 c) четыре;
 d) пять.

3.4. Определить минимальное кодовое расстояние, необходимое для кода, обладающего следующими корректирующими способностями:

- a) обнаружения ошибок кратности два и исправления одиночных ошибок;

- b) обнаружения ошибок кратности три и исправления одиночных ошибок;
 - c) обнаружения ошибок кратности три и исправления двойных ошибок;
 - d) обнаружения ошибок кратности четыре и исправления одиночных ошибок;
 - e) обнаружения ошибок кратности пять и исправления тройных ошибок.
- 3.5. Код состоит из четырех кодовых слов: 11110, 00011, 01001, 10001. Способен ли данный код обнаружить одиночную ошибку?
 - 3.6. Код состоит из четырех кодовых слов: 11110, 10001, 01111, 00101. Способен ли данный код исправить одиночную ошибку?
 - 3.7. Построить четырехзначный двоичный код, обнаруживающий одиночную ошибку.
 - 3.8. Определить количество проверочных разрядов ($n-k$) для построения систематического кода, исправляющего одиночную ошибку и содержащего $k=5$ информационных разрядов.
 - 3.9. Определить максимальное количество информационных разрядов k систематического кода, исправляющего одиночную ошибку, если допустимая длина всего кода $n=10$ символов.
 - 3.10. Определить минимально возможную длину кодовой комбинации n систематического кода, исправляющего одиночную ошибку, если количество информационных разрядов $k=11$.
 - 3.11. Определить количество корректирующих разрядов ($n-k$) для построения кода, обнаруживающего все трехкратные ошибки, если допустимая длина кода $n=15$.
 - 3.12. Требуется передать систематическим кодом, обнаруживающим трехкратные ошибки, все комбинации пятизначного двоичного кода. Чему равна общая длина такого кода n ?
 - 3.13. Построить систематический код с кодовым расстоянием $d=4$, способный передавать 64 сообщения. Какое количество символов n содержит полная комбинация такого кода?
 - 3.14. Определить количество информационных разрядов в систематическом коде длиной $n=15$ символов, если кодовое расстояние между комбинациями кода $d=5$?
 - 3.15. Определить число корректирующих разрядов систематического кода, исправляющего все тройные ошибки, если общая длина кода равна 21.
 - 3.16. Какое количество символов первичного алфавита Q можно передать двоичным кодом длиной $n=35$ символов и минимальным кодовым расстоянием $d_{\min}=9$?

3.17. Чему равна длина кодовых комбинаций равномерного двоичного кода с минимальным кодовым расстоянием $d_{\min}=4$, если этим кодом необходимо передавать 8 состояний объектов контролируемой системы?

Рекомендации – при решении задач 3.8, ..., 3.17 необходимо иметь в виду, что для обнаружения и исправления одиночной ошибки соотношение между числом информационных разрядов k и числом корректирующих разрядов $(n-k)$ должно определяться условием (2.7), откуда следует неравенство

$$2^k \leq \frac{2^n}{n+1}. \quad (2.17)$$

Для практических расчетов при определении числа контрольных разрядов $(n-k)$ для кодов, исправляющих одиночные либо обнаруживающих двойные ошибки ($d_{\min}=3$) удобно пользоваться следующим выражением*:

$$(n-k)_{1(2)} = [\log_2(n+1)]. \quad (2.18)$$

Аналогично для кодов, обнаруживающих все трехкратные ошибки ($d_{\min}=4$)

$$2^k \leq \frac{2^{n-1}}{n},$$

откуда

$$(n-k)_{1(3)} \geq 1 + \log_2(n+1). \quad (2.19)$$

Для кодов длиной n символов, исправляющих одну или две ошибки ($d_{\min}=5$), с учетом (2.8)

$$(n-k)_2 \geq \log_2(C_n^1 + C_n^2 + 1), \quad (2.20)$$

для практических расчетов можно пользоваться выражением

$$(n-k)_2 = \left\lceil \log_2 \frac{n^2 + n + 1}{2} \right\rceil. \quad (2.21)$$

Для кодов, исправляющих три ошибки ($d_{\min}=7$), с учетом (2.9)

$$(n-k)_3 = \left\lceil \log_2 \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{6} \right\rceil. \quad (2.22)$$

* В выражениях (2.18), (2.21), (2.22), (2.23) квадратные скобки означают, что берется значение, округленное до ближайшего целого сверху. Индекс при $(n-k)$ показывает количество ошибок, исправляемых данным кодом, а число в круглых скобках при индексе – число обнаруживаемых ошибок.

Для кодов, исправляющих S ошибок ($d_{\min}=2k+1$), с учетом (2.9) можно пользоваться следующей приближенной формулой:

$$(n-k)_s = \left\lceil \log_2 \frac{n^s + n^{s-1} + \dots + 1}{s!} \right\rceil. \quad (2.23)$$

3.18. Определить корректирующие способности следующего кода:

a) 1101001010 b) 101010101 c) 1110100100 d) 10011010110
 0110010111 011001011 1101010111 11000101010
 1011100001 110111100 0001110101 01110011101

e) 000110010 f) 1001101000 g) 001000011 h) 00111010101
 111011001 0100011110 010101010 10001100010
 010111101 1001101000 100110100 01100101001

3.19. Заданы подмножества M_1, M_2, M_3 двоичных кодовых слов. Какие из этих подмножеств являются группами, а какие – не являются? Объясните причины.

a)

M_1	M_2	M_3
00000		0001110
11100		1110001
00011		1111111
11111	00000	
01000	0	
10100	110010	
01001	001101	
	11111	
	1	

b)

M_1	M_2	M_3
001101	00000	0000
0	11001	0
110010	00110	0010
1	11111	1
111111		1101
1		0
		1111
		1
		1001
		0
		1011
		1
		0111
		0

c)

M_1	M_2	M_3
000000	00000	1101110
001101	11100	0010001
010001	00011	1111111
011100	11111	1110001
110010	01000	0011111
111111	10100	
	10111	
	01011	

d)

M_1	M_2	M_3
00000	0011010	00000
11010	1100101	00101
11100	0110101	11010
01110	0101111	10010
	1001010	10111
	1111111	11111

3.20. Для заданного четырехразрядного кодового слова построить комбинацию кода Хэмминга (7,4), исправляющего одиночные ошибки. Нумерация разрядов кодовых слов – справа налево.

- a) 0011; b) 0101; c) 0100; d) 0111;
e) 1001; f) 1011; g) 1101; h) 1100.

Показать процесс исправления ошибок в третьем и шестом разрядах

3.21. Получены две комбинации кода Хемминга (7,4), исправляющего одиночные ошибки. Проверить, верно ли передана каждая из комбинаций, и при необходимости, исправить ошибку. Нумерация разрядов кодового слова – справа налево.

- a) 1100001; b) 1101001; c) 1100110; d) 1100010;
0100100. 1010101. 0011010. 1001100.

- e) 0110100; f) 1110101; g) 0101010; h) 0001100.
0101011. 0101101. 0101111. 0011110.

3.22. Построить систематический код (6,3), исправляющий одиночные ошибки.

3.23. Для двухразрядной кодовой комбинации построить восьмиразрядную комбинацию кода (8, 2), исправляющего все одиночные и двойные ошибки. Нумерация разрядов – справа налево.

- a) 01;
b) 11.

3.24. Для одноразрядной кодовой комбинации построить пятиразрядный код (5, 1), исправляющий все одиночные и двойные ошибки. Нумерация разрядов – справа налево.

3.25. Получены три комбинации систематического кода (8,2), исправляющего все одиночные и двойные ошибки. Проверить, верно ли передана каждая из комбинаций, и при необходимости, исправить ошибку. Нумерация разрядов кодового слова – справа налево.

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| a) 01110011 | b) 01111100 | c) 00011111 | d) 10001111 |
| 10011111 | 11100011 | 01101100 | 11101100 |
| 11111100 | 00001101 | 11110011 | 11100011 |
| e) 00011111 | f) 01100001 | g) 11101100 | h) 00011111 |
| 11001100 | 00001111 | 11100011 | 11110011 |
| 01100011 | 11111100 | 10011110 | 01011100 |

3.26. Для заданного четырехразрядного кодового слова построить комбинацию кода (8,4), обнаруживающего двойные ошибки или исправляющего одиночные ошибки. Нумерация разрядов кодового слова – справа налево.

- a) 0011; b) 0101; c) 0100; d) 0001;
e) 1101; f) 1100; g) 1000; h) 1111.

Показать процесс исправления ошибки в третьем разряде.
Показать процесс обнаружения двойной ошибки.

3.27. Получены четыре комбинации кода (8,4), обнаруживающего двойные ошибки или исправляющего одиночные ошибки. Проверить, верно ли передана каждая из комбинаций, и при необходимости, исправить ошибку. Нумерация разрядов кодового слова справа налево.

a) 01101111	b) 01100001	c) 00111110	d) 01001011
00110100	11000111	00110011	11010001
01100010	10101010	10010110	00101010
10011001	11011000	11100110	11101111

e) 11010010	f) 11100111	g) 10011110	h) 11011001
00001101	11100001	001011001	10110011
11111000	10110000	01111000	11001111
11011011	10101101	11011100	01010101

4. Контрольные вопросы

- 4.1. Сформулируйте и поясните основную теорему Шеннона о кодировании для канала с помехами.
- 4.2. Какие коды называются корректирующими?
- 4.3. Что подразумевают под кратностью ошибки?
- 4.4. Как определяется расстояние между кодовыми комбинациями?
- 4.5. Как определяется минимальное кодовое расстояние?
- 4.6. Как связаны корректирующие способности кода с кодовым расстоянием?
- 4.7. Каким образом вводится избыточность при построении помехоустойчивого кода?
- 4.8. В чем сущность помехоустойчивого кодирования?
- 4.9. Что понимается под значностью и весом кодовой комбинации?
- 4.10. Что понимается под разделимыми блочными кодами?
- 4.11. Что понимается под систематическими и несистематическими блочными кодами?
- 4.12. Какой помехоустойчивый код называется линейным?
- 4.13. Как происходит исправление ошибки помехоустойчивого кода?
- 4.14. Представьте основные положения алгебры групп.
- 4.15. Что такое вектор ошибки?
- 4.16. Что такое вес вектора ошибки?
- 4.17. Какими показателями можно оценить качество корректирующих кодов?
- 4.18. Как строится код, исправляющий все одиночные ошибки?
- 4.19. Что составляет суть методики построения корректирующих кодов Хэмминга?

- 4.20. Проиллюстрируйте процесс исправления ошибки в коде (7, 4).
- 4.21. Постройте кодирующее и декодирующее устройства кода Хэмминга (7, 4).
- 4.22. Как строится код, исправляющий все одиночные и двойные ошибки (8, 2)?
- 4.23. Как строится код (8, 4), обнаруживающий двойные ошибки или исправляющий одиночные ошибки?

Библиографический список

1. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации/В.И.Дмитриев. – М.: Высшая школа, 1989. – 320с.
2. Кузьмин И.В., Кедрус В.А. Основы теории информации и кодирования/Кузьмин И.В., Кедрус В.А. – Киев: Вища школа, 1977. – 280с.
3. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи/Р. Фано – М.: Мир, 1965. – 438с.
4. Хэмминг Р.В. Теория кодирования и теория информации/Р.В. Хэмминг – М.: Радио и связь, 1983. – 176с.
5. Цымбал В.П. Задачник по теории информации и кодированию/В.П. Цымбал. – К.: Вища шк., 1976. – 276с.
6. Цымбал В.П. Теория информации и кодирование/В.П.Цымбал. – К.: Вища шк., 1992. – 261с.
7. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике/К.Шеннон – М.: Иностранная литература, 1963.
8. Методические указания к практическим занятиям, часть 1, по дисциплине «Теория информации и кодирование» на тему «Вычисление информационных характеристик систем связи» для студентов специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» дневной и заочной форм обучения./Сост. Щепин Ю.Н. – Севастополь, Изд-во СевНТУ, 2003. – 24с.
9. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория информации и кодирование». Часть 2 «Эффективные коды» для студентов направления подготовки 0915 – "Компьютерная инженерия" дневной и заочной форм обучения/Сост. Щепин Ю.Н. – Севастополь, Изд-во Сев НТУ, 2010. – 28 с.

Заказ № ____ от « ____ » _____ 2010 г. Тираж ____ экз.
Изд-во СевНТУ