

**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический
университет**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
И АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
НА ЭВМ**

**Методические указания к индивидуальным занятиям
и подготовке к курсовой работе по дисциплине
«Прикладная математика»
для студентов специальности 7.091501
«Компьютерные системы и сети»
дневной формы обучения**

**Севастополь
2009**



УДК 519.688 (07)

Методические указания к индивидуальным занятиям и подготовке к курсовой работе по разделу «Решение задач линейного программирования и анализ оптимального решения на ЭВМ» дисциплины «Прикладная математика» для студентов специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» дневной формы обучения /Сост. Л.П. Луговская, Н.А. Скаткова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009. – 15 с.

Целью методических указаний является обеспечение эффективной работы студентов при изучении раздела «Линейное программирование» по дисциплине «Прикладная математика» и оказание помощи при выполнении курсовой работы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники (протокол № 5 от 19.01.2009 г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент – старший преподаватель кафедры высшей математики Ларионова Е.Н.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Решение задач линейного программирования на ЭВМ.....	4
1.1.	Постановка задачи.....	4
1.2.	Ввод исходных данных.....	4
1.3.	Поиск решения.....	6
2.	Анализ оптимального решения на ЭВМ.....	10
2.1.	Двойственная задача.....	10
2.2.	Анализ оптимального решения.....	10
2.3.	Анализ устойчивости оптимального решения.....	11
2.4.	Анализ допустимых пределов изменения параметров задачи...	14
	Библиографический список	15

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ЭВМ

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим пример задачи линейного программирования.

Планируется производство четырех типов изделий. Для изготовления продукции требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье и финансы. Количество ресурса каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа, называется нормой расхода. Нормы расхода, а также прибыль, получаемая от реализации одного изделия каждого типа, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Нормы расхода ресурсов при производстве продукции

Ресурс	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Изделие 4	Наличие
Трудовые ресурсы	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Финансы	4	6	10	13	100
Стоимость изделия	60	70	120	130	--

Математическая модель задачи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} F &= 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 16 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 110 \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 &\leq 100 \\ x_j &\geq 0; \quad j = \overline{1,4} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где x_j – количество выпускаемой продукции j -го типа; F – функция цели; в левых частях выражений ограничений указаны величины потребного ресурса, а правые части показывают количество имеющегося ресурса.

1.2. Ввод исходных данных

Для решения задачи с помощью Excel следует создать форму для ввода исходных данных и ввести их. Форма ввода показана на рисунке 1.

В ячейку F6 введено выражение целевой функции как суммы произведений значений прибыли от выпуска единицы продукции каждого типа на количество выпускаемой продукции соответствующего типа. Для наглядности на рисунке 2 представлена форма ввода исходных данных в режиме вывода формул.

В ячейки F8:F10 введены левые части ограничений для ресурсов каждого вида.

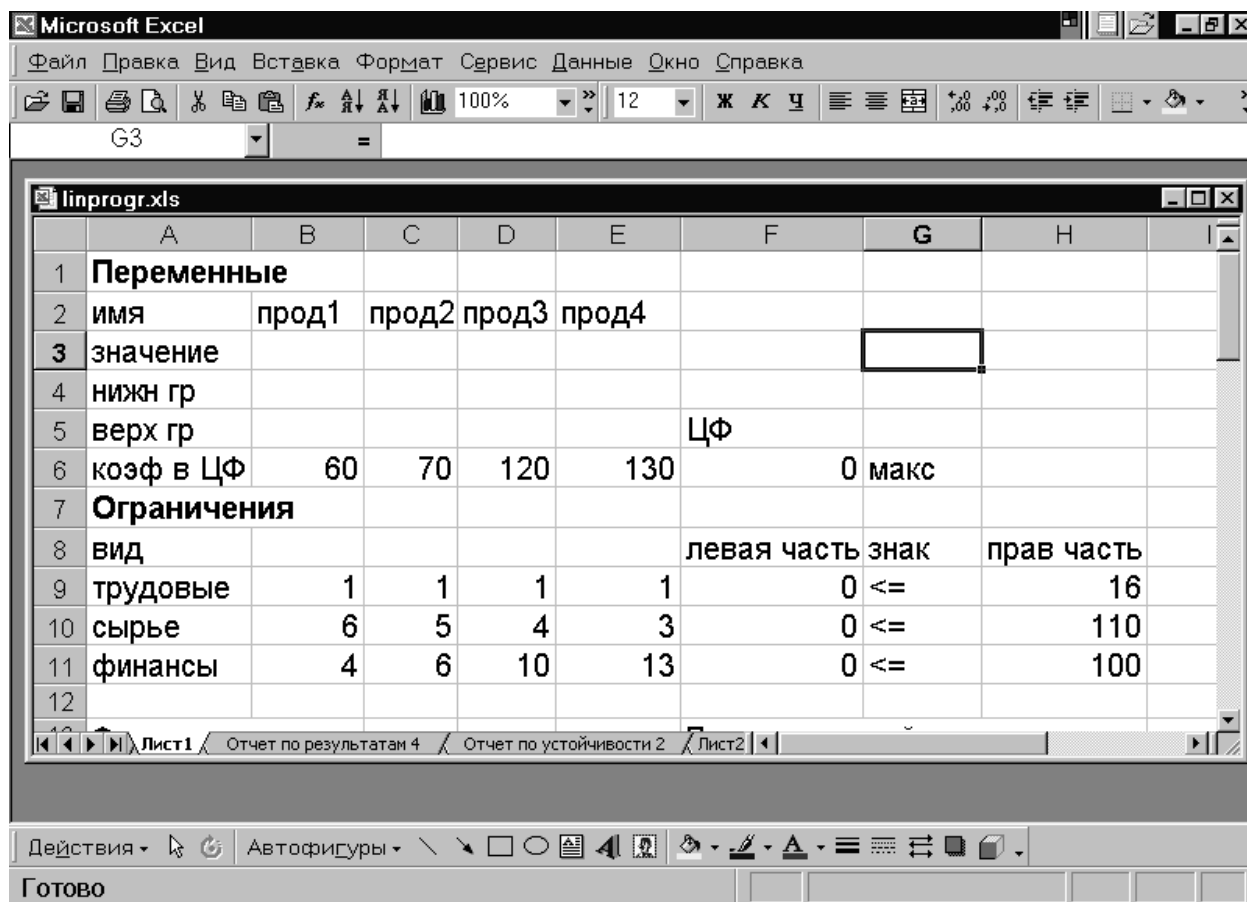


Рисунок 1- Форма ввода условий задачи линейного программирования

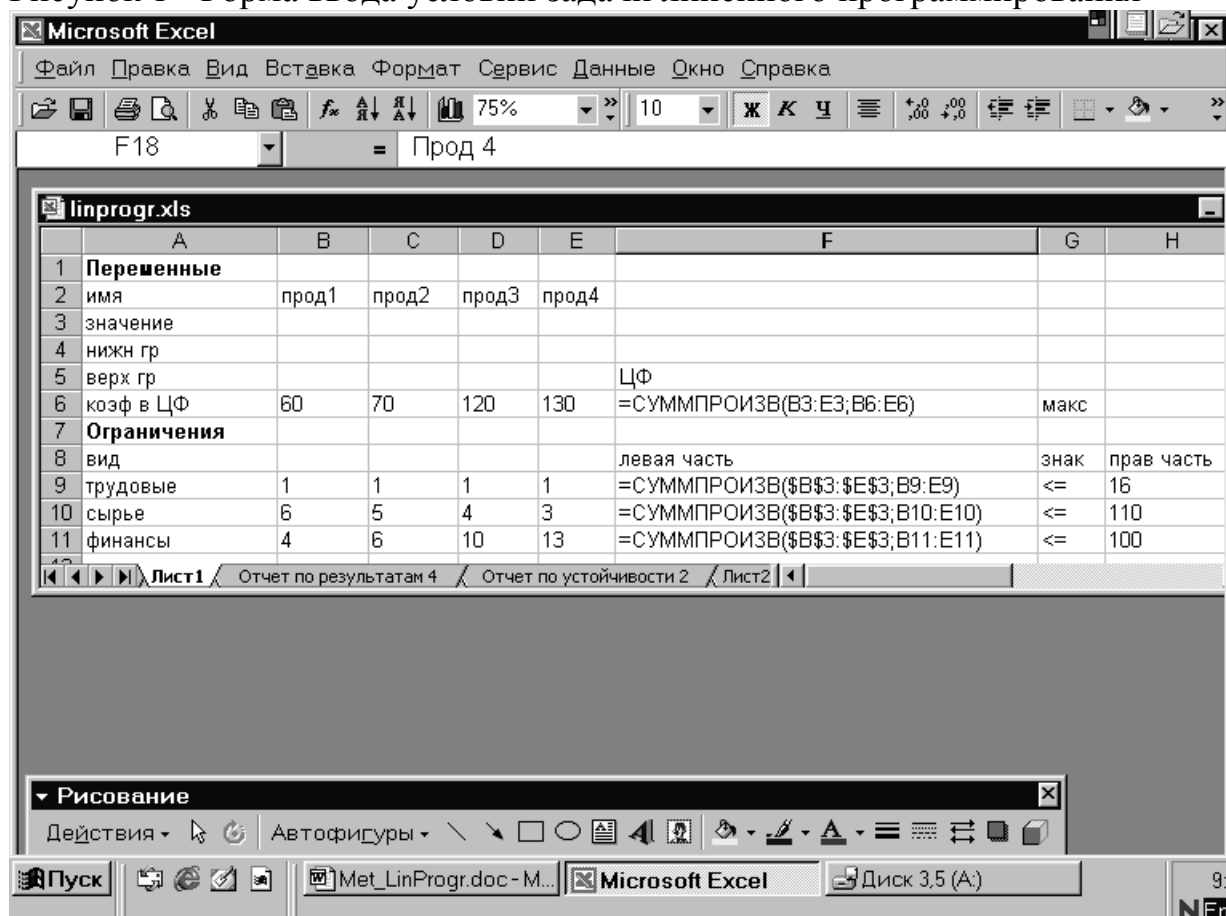


Рисунок 2 - Форма ввода исходных данных в режиме вывода формул

1.3. Поиск решения

Для решения задач линейного программирования в Excel используется мощный инструмент, называемый **Поиск решения**. Обращение к **Поиску решения** осуществляется из меню **Сервис**, на экран выводится диалоговое окно **Поиска решения** (рисунок 3).

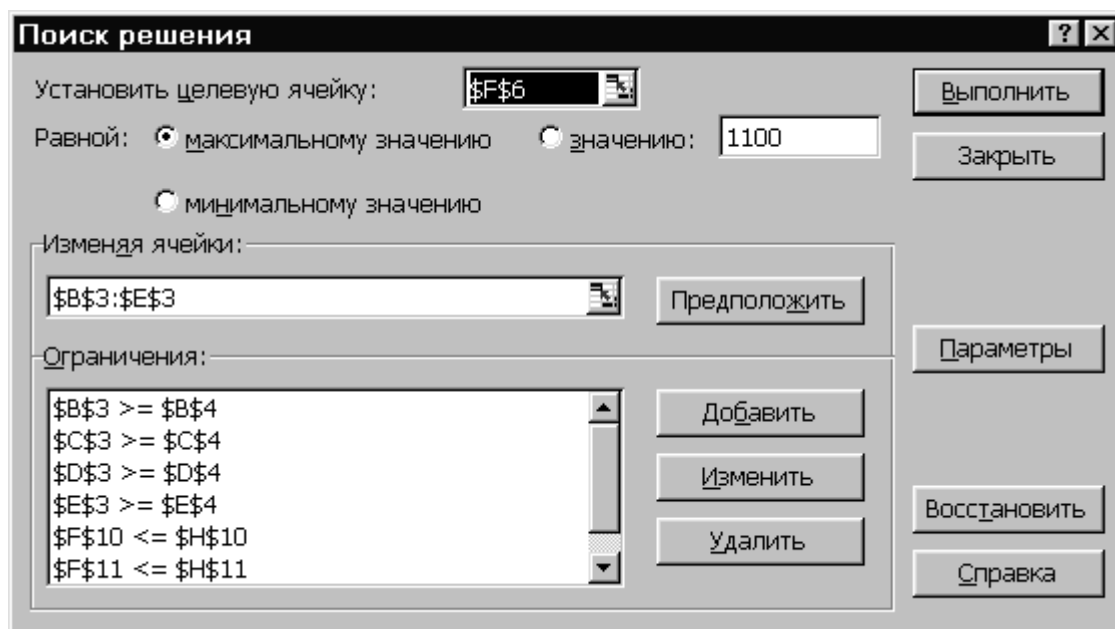


Рисунок 3 – Окно **Поиска решения**

Ввод условий задачи для поиска ее решения состоит из следующих шагов:

- 1) Назначить целевую функцию, для чего установить курсор в поле **Установить целевую ячейку** окна **Поиск решения** и щелкнуть в ячейке F6 в форме ввода;
- 2) Включить переключатель значения целевой функции, т.е. указать ее **Равной Максимальному значению**;
- 3) Ввести адреса изменяемых переменных (x_j): для этого установить курсор в поле **Изменяя ячейки** окна **Поиск решения**, а затем выделить диапазон ячеек B3:E3 в форме ввода;
- 4) Нажать кнопку **Добавить** окна **Поиск решения** для ввода ограничений задачи линейного программирования; на экран выводится окно **Добавление ограничения** (рисунок 4) :

- ввести граничные условия для переменных x_j ($x_j \geq 0$), для этого в поле **Ссылка на ячейку** указать ячейку B3, соответствующую x_1 , выбрать из списка нужный знак ($\geq$), в поле **Ограничение** указать ячейку формы ввода, в которой хранится соответствующее значение граничного условия, (ячейка B4), нажать кнопку **Добавить**; повторить описанные действия для переменных x_2 , x_3 и x_4 ;
- ввести ограничения для каждого вида ресурса, для этого в поле **Ссылка на ячейку** окна **Добавление ограничения** указать ячейку

F9 формы ввода, в которой содержится выражение левой части ограничения, наложенного на трудовые ресурсы, в полях **Ограничение** указать знак $\leq$ и адрес H9 правой части ограничения, нажать кнопку **Добавить**; аналогично ввести ограничения на остальные виды ресурсов;

- после ввода последнего ограничения вместо **Добавить** нажать **ОК** и возвратиться в окно **Поиск решения**.

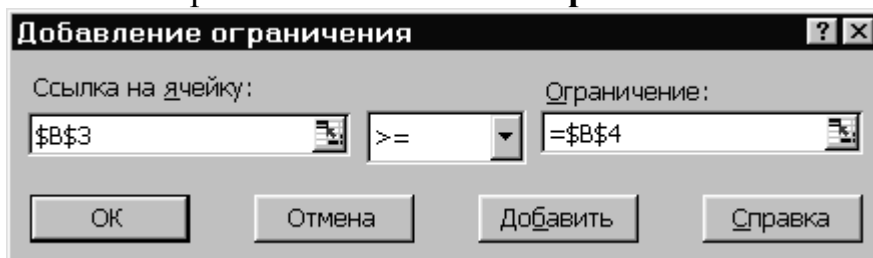


Рисунок 4 – Окно добавления ограничений

Решение задачи линейного программирования начинается с установки параметров поиска:

- в окне **Поиск решения** нажать кнопку **Параметры**, на экран выводится окно **Параметры поиска решения** (рисунок 5);
- установить флажок **Линейная модель**, что обеспечивает применение симплекс-метода;
- указать предельное число итераций (по умолчанию – 100, что подходит для решения большинства задач);
- установить флажок **Показывать результаты итераций**, если необходимо просмотреть все этапы поиска оптимального решения;
- нажать **ОК**, возврат в окно **Поиск решения**.

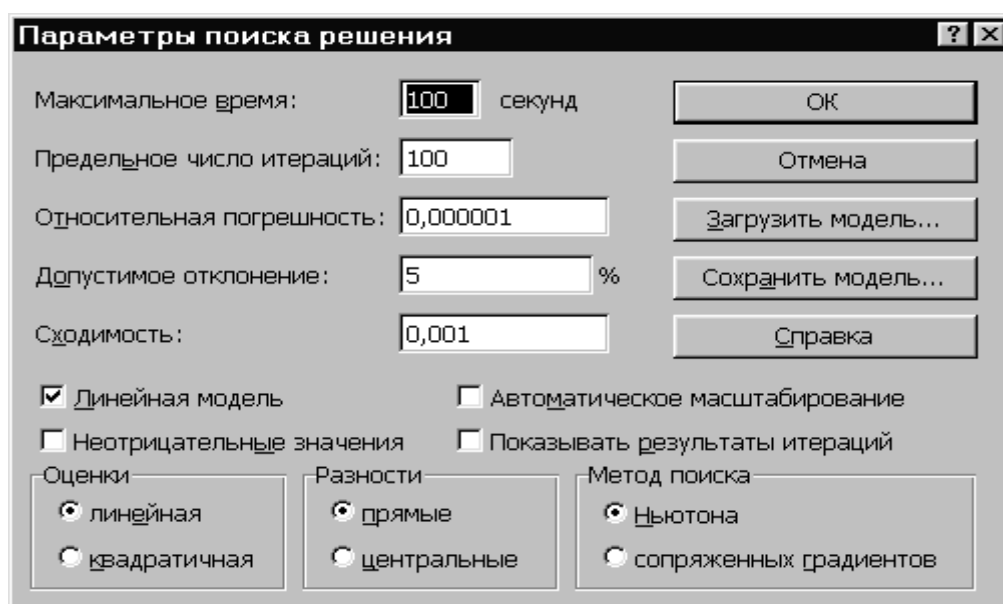


Рисунок 5 – Окно задания параметров поиска решения

Для решения задачи нажать кнопку **Выполнить** в окне **Поиск решения**, на экране – окно **Результаты поиска решения** (рисунок 6), в котором содержится сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности**

выполнены. Если условия задачи несовместны, то выводится сообщение **Поиск не может найти подходящего решения.** Если целевая функция не ограничена, то появляется сообщение **Значения целевой ячейки не сходятся.**

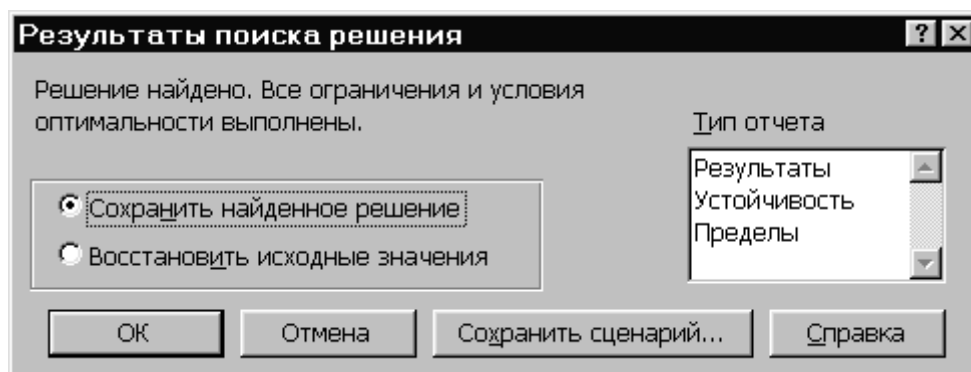


Рисунок 6 – Окно результатов поиска решения

Для рассматриваемого примера решение найдено и результат оптимального решения задачи выводится в форме ввода: значение целевой функции, соответствующее максимальной прибыли и равное 1320, указывается в ячейке F6 формы ввода, оптимальный план выпуска продукции $x_1=10$, $x_2=0$, $x_3=6$, $x_4=0$ указывается в ячейках B3:C3 формы ввода (рисунок 7).

Количество использованных для выпуска продукции ресурсов выводится в ячейки F9:F11: трудовых – 16, сырья – 84, финансов – 100.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные							
2	имя	прод1	прод2	прод3	прод4			
3	значение	10	0	6	0			
4	нижн гр							
5	верх гр					ЦФ		
6	коэф в ЦФ	60	70	120	130	1320	макс	
7	Ограничения							
8	вид					левая часть	знак	прав часть
9	трудовые	1	1	1	1	16	<=	16
10	сырье	6	5	4	3	84	<=	110
11	финансы	4	6	10	13	100	<=	100
12								

Рисунок 7 – Результаты решения задачи линейного программирования

Если при установке параметров в окне **Параметры поиска решения** (рисунок 5) был установлен флажок **Показывать результаты итераций**, то будут показаны последовательно все шаги поиска. На экран будет выводиться окно **Текущее состояние поиска решения** (рисунок 8). При этом текущие значения переменных и функции цели будут показаны в форме ввода. Так, результаты первой итерации поиска решения исходной задачи представлены в форме ввода на рисунке 9.

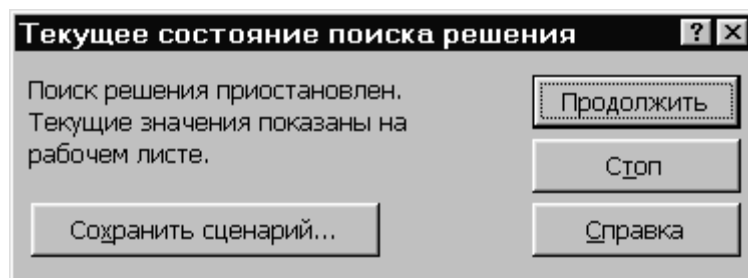


Рисунок 8 – Окно текущего состояния поиска решения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Переменные								
2	имя	прод1	прод2	прод3	прод4				
3	значение	0	0	0	7,6923				
4	нижн гр								
5	верх гр					ЦФ			
6	коэф в ЦФ	60	70	120	130	1000	макс		
7	Ограничения								
8	вид					левая часть	знак	прав часть	
9	трудовые	1	1	1	1	7,692308	<=	16	
10	сырье	6	5	4	3	23,07692	<=	110	
11	финансы	4	6	10	13	100	<=	100	
12									

Готово

Рисунок 9 – Отображение результатов первой итерации поиска решения

Чтобы продолжить поиск решения, следует нажимать кнопку **Продолжить** в окне **Текущее состояние поиска решения**.

2. АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Двойственная задача

Прежде чем, перейти к анализу результатов решения, представим исходную задачу в форме

$$\left. \begin{aligned} F &= 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 &= 16 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 &= 110 \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 &= 100 \\ x_j &\geq 0; \quad y_i \geq 0; \quad i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,4}; \end{aligned} \right\} \quad (2),$$

введя дополнительные переменные y_i , представляющие собой величины неиспользованных ресурсов.

Составим для исходной задачи двойственную задачу и введем дополнительные двойственные переменные v_i .

$$\left. \begin{aligned} F_d &= 16z_1 + 110z_2 + 100z_3 \rightarrow \min \\ z_1 + 6z_2 + 4z_3 - v_1 &= 60 \\ z_1 + 5z_2 + 6z_3 - v_2 &= 70 \\ z_1 + 4z_2 + 10z_3 - v_3 &= 120 \\ z_1 + 3z_2 + 13z_3 - v_4 &= 130 \\ z_i &\geq 0; \quad v_j \geq 0; \quad i = \overline{1,3} \quad j = \overline{1,4} \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

Анализ результатов поиска решения позволит увязать их с переменными исходной и двойственной задач.

С помощью окна **Результаты поиска решения** можно вызвать отчеты трех типов, позволяющие анализировать найденное оптимальное решение:

- результаты,
- устойчивость,
- пределы.

Для вызова отчета в поле **Тип отчета** выделить название нужного типа и нажать **ОК**.

2.2. Анализ оптимального решения

Отчет по результатам (рисунок 10) состоит из трех таблиц:

- таблица 1 содержит сведения о целевой функции; в столбце **Исходно** указывается значение целевой функции до начала вычислений;
- таблица 2 содержит значения искомых переменных x_j , полученных в результате решения задачи (оптимальный план выпуска продукции);
- таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

Для ограничений в графе **Формула** приведены зависимости, которые были введены при задании ограничений в окне **Поиск решения**; в графе **Значение** указаны величины использованного ресурса; в графе **Разница** показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью, то в графе **Состояние** выводится сообщение **связанное**; при неполном использовании ресурса в этой графе указывается **не связан**. Для граничных условий приводятся

аналогичные величины с той лишь разницей, что вместо неиспользованного ресурса показана разность между значением переменной x_j в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием ($x_j \geq 0$).

Именно в графе **Разница** можно увидеть значения дополнительных переменных u_i исходной задачи в формулировке (2). Здесь $u_1 = u_3 = 0$, т.е. величины неиспользованных трудовых и финансовых ресурсов равны нулю. Эти ресурсы используются полностью. Вместе с тем, величина неиспользованных ресурсов для сырья $u_2 = 26$, значит, имеются излишки сырья.

linprogr.xls

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$F\$6	коэф в ЦФ ЦФ	0	1320

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$B\$3	значение прод1	0	10
\$C\$3	значение прод2	0	0
\$D\$3	значение прод3	0	6
\$E\$3	значение прод4	0	0

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
\$F\$11	финансы левая часть	100	\$F\$11 <= \$H\$11	связанное	0
\$F\$9	трудовые левая часть	16	\$F\$9 <= \$H\$9	связанное	0
\$F\$10	сырье левая часть	84	\$F\$10 <= \$H\$10	не связан.	26
\$B\$3	значение прод1	10	\$B\$3 >= 0	не связан.	10
\$C\$3	значение прод2	0	\$C\$3 >= 0	связанное	0
\$E\$3	значение прод4	0	\$E\$3 >= 0	связанное	0
\$D\$3	значение прод3	6	\$D\$3 >= 0	не связан.	6

Рисунок 10 – Отчет по результатам поиска решения

2.3. Анализ устойчивости оптимального решения

Отчет по устойчивости (рисунок 11) состоит из двух таблиц.

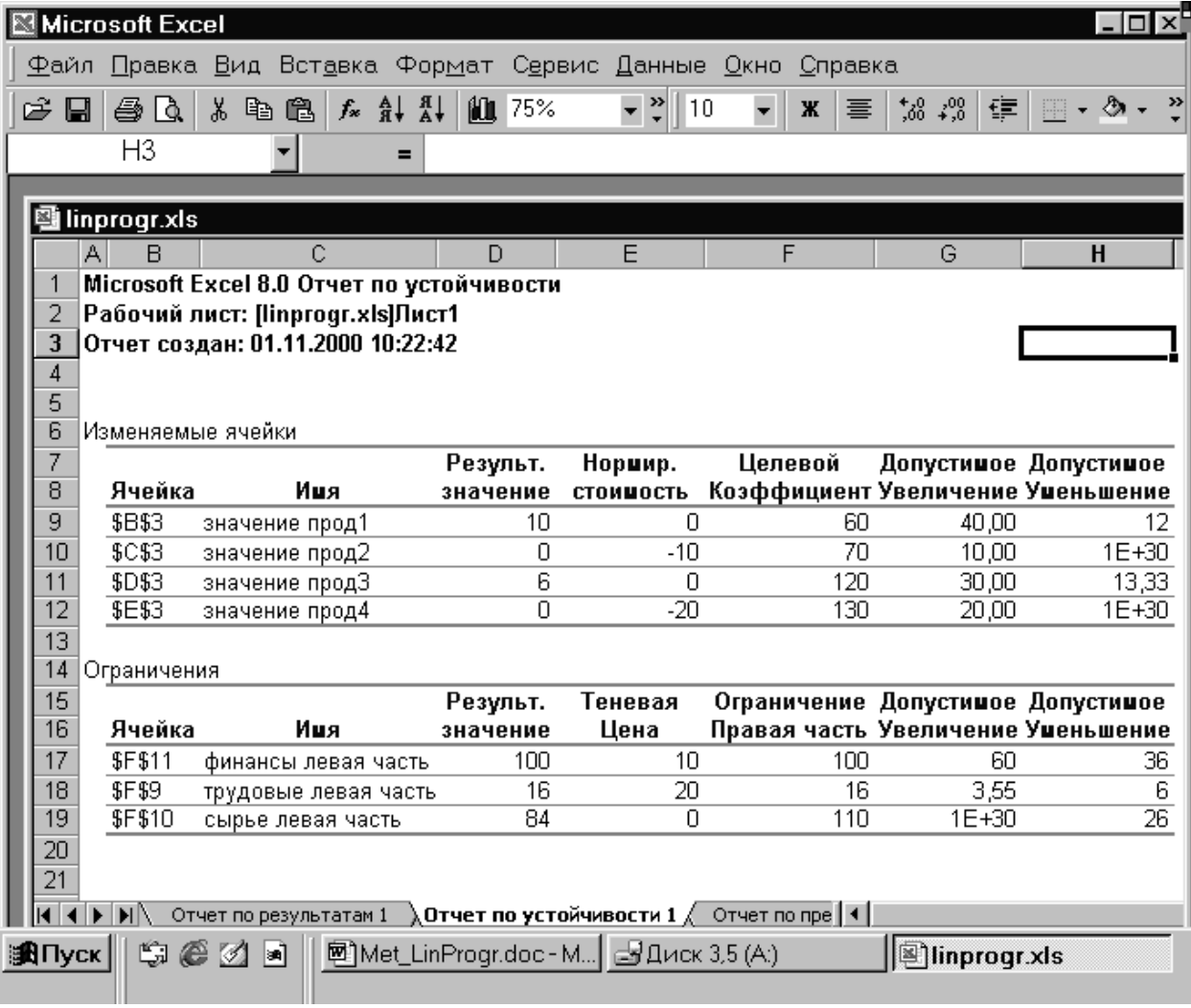
В таблице 1 приводятся следующие значения:

- результат решения задачи (оптимальный план выпуска);

- **Нормир. стоимость**, т.е. величины, показывающие, на сколько изменится целевая функция при принудительном включении единицы продукции соответствующего типа в оптимальный план;
- коэффициенты целевой функции;
- предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется оптимальный план выпуска.

В таблице 2 содержатся аналогичные данные для ограничений:

- величины использованных ресурсов;
- **Теневая цена**, показывающая, как изменится целевая функция при изменении величины соответствующего ресурса на единицу;
- допустимые значения приращений ресурсов, при которых сохраняется оптимальный план выпуска продукции.



Microsoft Excel 8.0 Отчет по устойчивости

Рабочий лист: [linprogr.xls]Лист1

Отчет создан: 01.11.2000 10:22:42

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3	значение прод1	10	0	60	40,00	12
\$C\$3	значение прод2	0	-10	70	10,00	1E+30
\$D\$3	значение прод3	6	0	120	30,00	13,33
\$E\$3	значение прод4	0	-20	130	20,00	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$F\$11	финансы левая часть	100	10	100	60	36
\$F\$9	трудовые левая часть	16	20	16	3,55	6
\$F\$10	сырье левая часть	84	0	110	1E+30	26

Рисунок 11 – Отчет по устойчивости оптимального решения

Отчет по устойчивости позволяет получить двойственные оценки.

Как известно, двойственные переменные z_i показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурса i -го типа на единицу. В отчете по устойчивости двойственная оценка называется **Теневой ценой**.

В нашем примере сырье не используется полностью и его ресурс $y_2=26$. Очевидно, что увеличение количества сырья, например, до 111 не повлечет за собой увеличения целевой функции. Следовательно, для второго ограничения двойственная переменная $z_2=0$. Таким образом, если по данному ресурсу есть резерв, то дополнительная переменная будет больше нуля, а двойственная оценка этого ограничения равна нулю.

В рассматриваемом примере трудовые ресурсы и финансы использовались полностью, поэтому их дополнительные переменные равны нулю ($y_1=y_3=0$). Если ресурс используется полностью, то его увеличение или уменьшение повлияет на объем выпускаемой продукции, и, следовательно, на величину целевой функции. Двойственные оценки ограничений на трудовые и финансовые ресурсы отличны от нуля, т.е. $z_1=20$, $z_3=10$.

Значения двойственных оценок находим в отчете по устойчивости, в таблице 2, в графе **Теневая цена**.

При увеличении (уменьшении) трудовых ресурсов на единицу целевая функция увеличится (уменьшится) на 20 единиц и будет равна

$$F=1320+20 \cdot 1=1340 \text{ (при увеличении).}$$

Аналогично, при увеличении объема финансов на единицу целевая функция будет

$$F=1320+10 \cdot 1=1330.$$

Здесь же, в графах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** таблицы 2, показаны допустимые пределы изменения количества ресурсов j -го вида. Например, для при изменении приращения величины трудовых ресурсов в пределах от -6 до $3,55$, как показано в таблице, структура оптимального решения сохраняется, т.е. наибольшую прибыль обеспечивает выпуск Прод1 и Прод3, но в других количествах.

Дополнительные двойственные переменные также отражены в отчете по устойчивости в графе **Нормир. стоимость** таблицы 1.

Если основные переменные не вошли в оптимальное решение, т.е. равны нулю (в примере $x_2=x_4=0$), то соответствующие им дополнительные переменные имеют положительные значения ($v_2=10$, $v_4=20$). Если же основные переменные вошли в оптимальное решение ($x_1=10$, $x_3=6$), то их дополнительные двойственные переменные равны нулю ($v_1=0$, $v_3=0$).

Эти величины показывают, насколько уменьшится (поэтому знак минус в значениях переменных v_2 и v_4) целевая функция при принудительном выпуске единицы данной продукции. Следовательно, если мы захотим принудительно выпустить единицу продукции вида Прод3, то целевая функция уменьшится на 10 единиц и будет равна $1320 - 10 \cdot 1 = 1310$.

Обозначим через Δc_j изменение коэффициентов целевой функции в исходной модели (1). Эти коэффициенты определяют прибыль, получаемую при реализации единицы продукции j -го вида.

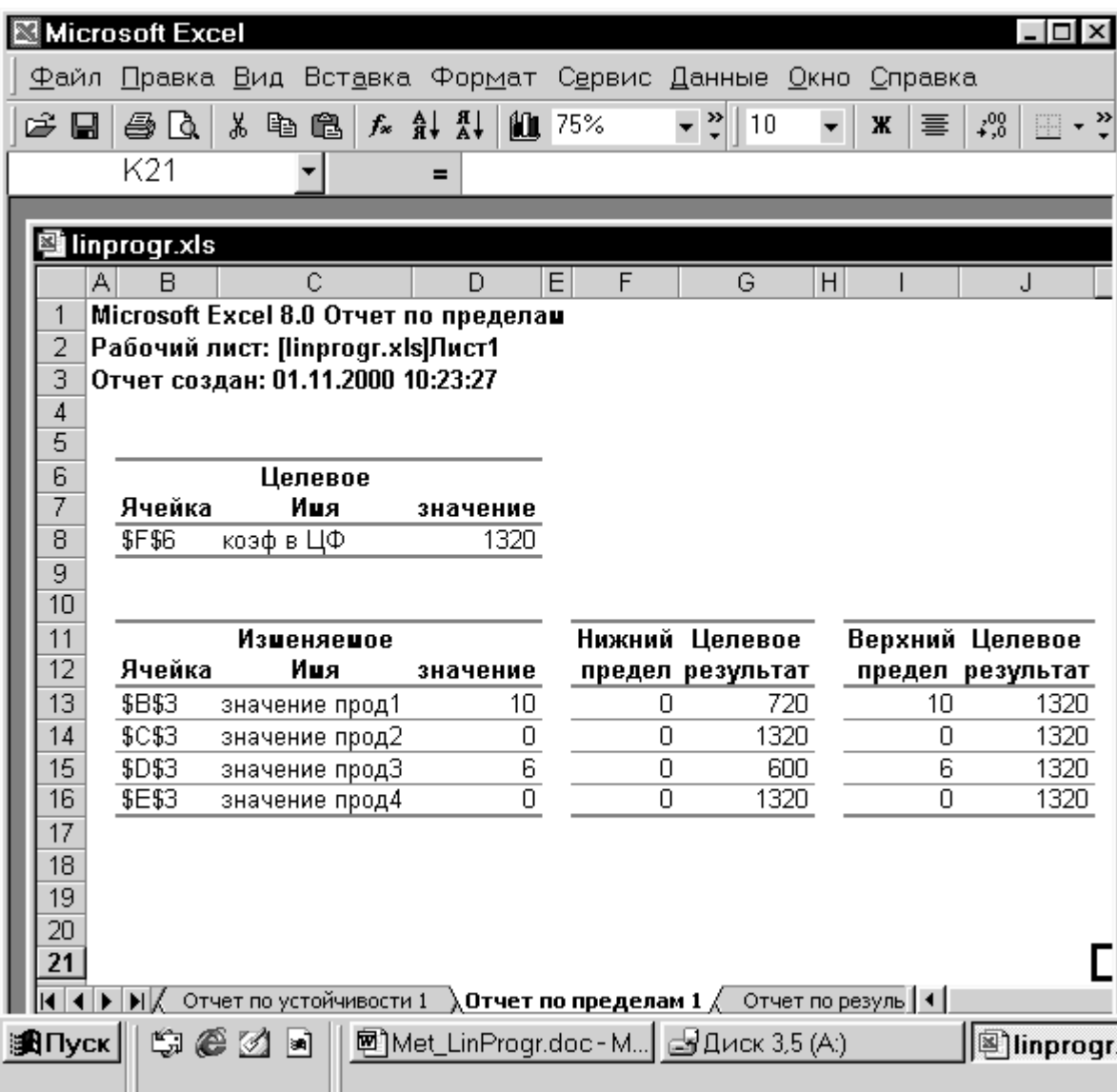
В графах **Допустимое увеличение** и **Допустимое Уменьшение** таблицы 1 отчета по устойчивости показаны пределы изменения Δc_j , при которых сохраняется структура оптимального плана, т.е. будет выгодно по-прежнему выпускать продукцию вида j . Например, при изменении Δc_1 в пределах $-12 \leq \Delta c_1 \leq 40$, как

показано в отчете, по-прежнему будет выгодно выпускать продукцию первого вида. При этом значение целевой функции будет $F=1320+x_1 \cdot \Delta c_j = 1320+10 \cdot \Delta c_j$.

2.4. Анализ допустимых пределов изменения параметров задачи

Отчет по пределам приведен на рисунке 12. В нем показывается, в каких пределах могут изменяться значения x_j , вошедшие в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения. Кроме этого, для каждого типа продукции приводятся значения целевой функции, получаемые при подстановке в оптимальное решение значения нижнего предела выпуска изделий соответствующего типа при неизменных значениях выпуска остальных типов. Например, если при оптимальном решении $x_1=10$, $x_2=0$, $x_3=6$, $x_4=0$ положить $x_1=0$ (нижний предел) при неизменных x_2 , x_3 и x_4 , то значение целевой функции будет равно $60 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 120 \cdot 6 + 130 \cdot 0 = 720$.

Далее приводятся верхние пределы изменения x_j и значения целевой функции при выпуске продукции, вошедшей в оптимальное решение на верхних пределах. Поэтому везде $F=1320$.



Целевое		
Ячейка	Имя	значение
\$F\$6	козф в ЦФ	1320

Изменяемое			Нижний	Целевое	Верхний	Целевое
Ячейка	Имя	значение	предел	результат	предел	результат
\$B\$3	значение прод1	10	0	720	10	1320
\$C\$3	значение прод2	0	0	1320	0	1320
\$D\$3	значение прод3	6	0	600	6	1320
\$E\$3	значение прод4	0	0	1320	0	1320

Рисунок 12 – Отчет по пределам изменений параметров задачи

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Степанов А. Г. Разработка управленческого решения средствами пакета Excel: учеб. пособие/ А.Г. Степанов. – СПб.:Изд-во СПбГУАП, 2001. - 172 с.
2. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: учеб. для вузов / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 436 с.
3. Таха Х. А. Введение в исследование операций, 6-е издание. [пер. с англ.]/ А.Х. Таха. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. - 912 с.
4. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике/ П.В. Конюховский. – СПб.: Изд-во «Питер», 2001. - 192 с.

