

УДК 517.1:531.3

Р.А. Спасский*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА С УРАВНЕНИЕМ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА**

Вводятся аналитические достаточные условия минимума функционала от функций y, y', y'' . Получено асимптотически устойчивое решение уравнения Эйлера-Пуассона, реализующее минимум некоторого критерия качества переходного процесса системы автоматического регулирования.

В [1] поставлена задача о нахождении достаточных условий экстремума функционала, зависящего от функции y и ее производных высокого порядка.

Целью данной статьи является решение ранее поставленной задачи для частного вида функционала

$$\Phi = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx \quad (1)$$

при соблюдении известного уравнения Эйлера-Пуассона.

1. Преобразование приращения функционала и получение достаточных условий его минимума

Согласно формуле Тейлора [2] для функции $F(x, y, y', y'')$

$$\begin{aligned} \Delta F = F(x, y + \varepsilon z, y' + \varepsilon z', y'' + \varepsilon z'') - F(x, y, y', y'') = & \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' + \frac{\partial}{\partial y''} z'' \right) F(x, y, y', y'') + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' + \frac{\partial}{\partial y''} z'' \right)^2 F(x, y, y', y'') + \frac{\varepsilon^3}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' + \frac{\partial}{\partial y''} z'' \right)^3 F(x, y + \theta z, y' + \theta z', y'' + \theta z''), \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1, \varepsilon$ – сколь угодно малая постоянная величина, а новая переменная величина z удовлетворяет граничным условиям

$$z(a) = 0, z(b) = 0, z'(a) = 0, z'(b) = 0. \quad (2)$$

Следовательно, приращение функционала (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' + \frac{\partial}{\partial y''} z'' \right) F dx + \frac{\varepsilon^2}{2!} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' + \frac{\partial}{\partial y''} z'' \right)^2 F dx + \\ + \frac{\varepsilon^3}{3!} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' + \frac{\partial}{\partial y''} z'' \right)^3 F(x, y + \theta z, y' + \theta z', y'' + \theta z'') dx. \end{aligned}$$

При использовании метода интегрирования по частям и граничных условий (2) получается

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} z + \frac{\partial F}{\partial y'} z' + \frac{\partial F}{\partial y''} z'' \right) dx = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \right) z dx. \quad (3)$$

Наконец, с учетом формулы (3) в окрестности экстремали, определяемой уравнением Эйлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0, \quad (4)$$

с точностью до второй степени малой величины ε справедливо, что

$$\text{sign} \Delta \Phi = \text{sign} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' + \frac{\partial}{\partial y''} z'' \right)^2 F(x, y, y', y'') dx.$$

Нужно отметить, что согласно теореме о среднем значении определенного интеграла его знак всегда совпадает со знаком подынтегральной функции, знаком квадратичной формы

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' + \frac{\partial}{\partial y''} z''\right)^2 F(x, y, y', y''),$$

которая имеет следующую матрицу

$$W = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$a_{11} = F_{yy}, \quad a_{22} = F_{y'y'}, \quad a_{33} = F_{y''y''},$$

$$a_{12} = F_{yy'}, \quad a_{21} = F_{y'y}, \quad a_{13} = F_{yy''}, \quad a_{31} = F_{y''y}, \quad a_{23} = F_{y'y''}, \quad a_{32} = F_{y''y'}.$$

Теорема. Пусть производные от функции $F(x, y, y', y'')$ по переменным y, y', y'' до второго порядка включительно непрерывны при любых значениях x экстремали.

Тогда при соблюдении уравнения Эйлера–Пуассона, согласно критерию Сильвестра для минимума (1) достаточно

$$F_{yy} > 0, \quad F_{yy}F_{y'y'} - F_{yy'}^2 > 0, \quad \det W > 0. \quad (6)$$

Замечание. Характерная особенность предлагаемого подхода в нахождении аналитических условий экстремума функционала состоит в рассмотрении квадратичной формы с переменными коэффициентами.

2. Нахождение асимптотически устойчивого решения уравнения Эйлера–Пуассона с соблюдением достаточных условий экстремума функционала

Используем следующий интегральный критерий [3, 4] качества системы автоматического регулирования

$$\Phi = \int_0^{\infty} (x^2 + \gamma_1 \dot{x}^2 + \gamma_2 \ddot{x}^2) dt \quad (7)$$

с граничными условиями

$$x(0) = \tilde{x}(0), \quad x(\infty) = \tilde{x}(\infty) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{\tilde{x}}(0), \quad \dot{x}(\infty) = \dot{\tilde{x}}(\infty) = 0, \quad (8)$$

где $\tilde{x}(t)$ – координата асимптотически устойчивого решения экстремали $x(t)$ уравнения Эйлера–Пуассона (4) функционала (7):

$$\gamma_2 x^{(4)} - \gamma_1 \ddot{x} + x = 0. \quad (9)$$

Воспользовавшись методом факторизации, замены многочлена произведением многочленов более низких степеней, можно записать характеристическое уравнение $\gamma_2 \lambda^4 - \gamma_1 \lambda^2 + 1 = 0$ дифференциального уравнения (9) в виде $(A\lambda^2 + B\lambda + 1)(A\lambda^2 - B\lambda + 1) = 0$,

где

$$\gamma_1 = B^2 - A, \quad \gamma_2 = A^2. \quad (10)$$

Поэтому уравнение Эйлера–Пуассона (9) примет вид

$$[A^2 D^4 - (B^2 - 2A)D^2 + 1]x = 0. \quad (11)$$

Здесь $D = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Справедлива также следующая формула, получающаяся из (11):

$$[(AD^2 + BD + 1)(AD^2 - BD + 1)]x = 0. \quad (12)$$

При этом дифференциальное уравнение $(AD^2 + BD + 1)\tilde{x} = 0$ имеет характеристическое уравнение $A\lambda^2 + B\lambda + 1 = 0$ с корнями λ_1, λ_2 . Аналогично, другое дифференциальное уравнение $(AD^2 - BD + 1)y = 0$ имеет характеристическое уравнение $A\lambda^2 - B\lambda + 1 = 0$ с корнями λ_3, λ_4 .

Важно отметить, что при $A > 0, B > 0, B^2 - 4A > 0$ справедливы неравенства

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad \lambda_4 > 0.$$

Но согласно формуле (12) и граничным условиям (8) можно записать, что

$$[(AD^2 + BD + 1)(AD^2 - BD + 1)](C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}) = [(AD^2 + BD + 1)(AD^2 - BD + 1)]\tilde{x} = 0,$$

где $C_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Следствием последнего соотношения являются дифференциальные уравнения

$$(AD^2 - BD + 1)[(AD^2 + BD + 1)]\tilde{x} = 0, \quad (AD^2 + BD + 1)[(AD^2 - BD + 1)]\tilde{x} = 0.$$

При этом очевидно, что справедливо лишь первое из этих уравнений.

В итоге получается одна важная зависимость

$$[A^2 D^4 - (B^2 - 2A)D^2 + 1]\tilde{x} = (AD^2 - BD + 1)[(AD^2 + BD + 1)]\tilde{x} = 0.$$

Таким образом, решение уравнения $(AD^2 + BD + 1)\tilde{x} = 0$ находится среди решений Эйлера–Пуассона, асимптотически устойчивых при

$$A > 0, \quad B > 0, \quad B^2 - 4A > 0. \quad (13)$$

Кроме того, согласно формул (10) функционал (7) записывается в виде

$$\Phi = \int_0^{\infty} (x^2 + (B^2 - 2A)\dot{x}^2 + A^2\ddot{x}^2) dt. \quad (14)$$

Действительно, для матрицы W имеем (5):

$$F_{xx} = 2, \quad F_{\dot{x}\dot{x}} = 2(B^2 - 2A), \quad F_{\ddot{x}\ddot{x}} = 2A^2, \quad F_{x\dot{x}} = F_{\dot{x}\ddot{x}} = 0, \quad F_{x\ddot{x}} = F_{\ddot{x}\ddot{x}} = 0, \quad F_{\ddot{x}\ddot{x}} = F_{\ddot{x}\ddot{x}} = 0.$$

Итак, последнее из неравенств (13) входит в достаточные условия (6) минимума функционала, а асимптотически устойчивое решение уравнения Эйлера–Пуассона гарантирует минимум функционала (14).

В перспективе дальнейших исследований необходимо рассмотреть систему автоматического регулирования, в которой уравнение $(AD^2 + BD + 1)\tilde{x} = 0$ соответствует абсолютно инвариантной регулируемой координате $\tilde{x}$.

Библиографический список

1. Спасский Р.А. Уравнения Эйлера и неравенства Сильвестра как достаточные условия экстремума функционала / Р.А. Спасский // Вестник СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: сб. науч. тр. — Севастополь, 2007. — Вып. 80. — С. 5–8.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. / Г.М. Фихтенгольц. — М.: ГИТТЛ, 1947. — 690 с.
3. Спасский Р.А. Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных автоматических систем с малым параметром при производной / Р.А. Спасский // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления: сб. науч. тр. — М.: Наука, 1975. — 344 с.
4. Спасский Р.А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики / Р.А. Спасский. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. — 176 с.

Поступила в редакцию 2.11.2007 г.