

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет

МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ
Методические указания
к расчетно-графическому заданию
по дисциплине «ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ
РЕШЕНИЙ» для студентов специальности
7.091501 «Компьютерные системы и сети»
дневной и заочной форм обучения

Севастополь
2008

УДК 65.012 (075.8)

Методические указания к расчетно-графическому заданию на тему «Метод анализа иерархий» по дисциплине «Теория оптимальных решений» для студентов специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» дневной и заочной форм обучения./ Сост. Ю.Н. Щепин – Севастополь, Изд-во СевНТУ, 2008. – 28 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в овладении практическими навыками организации и проведения вариантного анализа при решении задачи принятия решения в условиях многокритериального описания выбираемого объекта.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники, протокол № 4 от 27.12.07 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Цуканов А.В., профессор кафедры «Менеджмент и экономико-математические методы», доктор технических наук.



СОДЕРЖАНИЕ

Цель расчетно-графического задания	4
Введение	4
1. Пример реализации метода анализа иерархий	5
1.1. Постановка задачи	5
1.2. Построение иерархии	5
1.3. Принцип дискриминации и сравнительных суждений	6
1.3.1. Попарные сравнения	6
1.3.2. Построение матрицы попарных сравнений второго уровня. Решение и согласованность	9
1.3.3. Вычисление вектора приоритетов для матрицы попарных сравнений второго уровня	10
1.3.4. Согласованность локальных приоритетов	12
1.3.5. Вычисление собственных характеристик обратно- симметричных матриц	14
1.3.6. Построение матриц попарных сравнений третьего уровня. Решение и согласованность	16
1.3.7. Согласованность всей иерархии	19
1.3.8. Синтез составных (глобальных) приоритетов методов решения нелинейных уравнений	20
2. Порядок выполнения расчетного задания	24
3. Форма отчетности	25
4. Пример постановки задачи для выполнения расчетного задания	26
5. Пример контрольного задания для студентов заочной формы обучения	27
6. Контрольные вопросы	27
Библиографический список	28

Цель расчетно-графического задания

Цель расчетно-графического задания: ознакомление и приобретение навыков решения многокритериальных оптимизационных задач принятия решений методом анализа иерархий.

Введение

При выполнении курсовых и дипломных проектов студенты неизбежно сталкиваются с необходимостью выбора одного приемлемого варианта решения из нескольких конкурирующих вариантов. Одним из требований к содержанию пояснительной записки к дипломному проекту студента специальности 7.091501 «Компьютерные системы и сети» обязательным является наличие раздела «Вариантный анализ». В качестве примеров можно привести выбор элементной базы, конфигурации информационной системы, системы программирования или языка программирования, структуры базы данных и так далее. Учитывая вышеизложенное, представляется целесообразным овладение студентами достаточно простого, но универсального в плане областей приложения метода анализа иерархий (МАИ).

МАИ является систематической процедурой для иерархического представления элементов, определяющих суть любой проблемы [1]. Метод состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений лица, принимающего решение (ЛПР), по попарным сравнениям. В результате может быть выражена относительная степень (интенсивность) взаимодействия элементов в иерархии. Эти суждения затем выражаются численно. МАИ включает процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений. Полученные таким образом значения являются оценками в шкале отношений и соответствуют так называемым жестким оценкам.

Решение проблемы представляет собой процесс поэтапного установления приоритетов. На первом этапе выявляются наиболее важные элементы проблемы, на втором – наилучший способ проверки наблюдений, испытания и оценки элементов; следующим этапом может быть выработка способа применения решения и оценка его качества. Весь процесс подвергается проверке и переосмыслению до тех пор, пока не будет уверенности, что процесс охватил все важные характеристики, необходимые для представления и решения проблемы. Процесс может быть проведен над последовательностью иерархий: в этом случае результаты, полученные в одной из иерархий, используются в качестве



входных данных при изучении следующей иерархии. МАИ систематизирует процесс решения такой многоступенчатой задачи.

1. Пример реализации метода анализа иерархий

Для наглядности последовательность этапов МАИ проиллюстрируем на примере выбора метода решения нелинейного уравнения.

1.1. Постановка задачи

Из множества известных методов решения нелинейных уравнений выбрать метод решения, обеспечивающий наилучшие оценки в соответствии с МАИ. Следует отметить, что необходимую информацию о содержании и особенностях методов решения нелинейных уравнений студенты получили при изучении дисциплины «Численные методы».

1.2. Построение иерархии

Одним из основных принципов построения МАИ является принцип идентичности и декомпозиции, который предусматривает структурирование проблем в виде иерархии или сети, что является первым этапом МАИ. На рисунке 1 представлен наиболее общий вид иерархии, которая строится с вершины (цели – с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят последующие уровни,) к самому низкому уровню (который обычно является перечнем альтернатив).

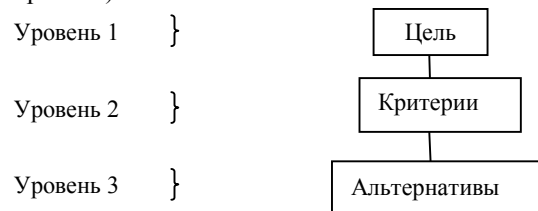


Рисунок 1 – Общий вид иерархии

Иерархия считается полной, если каждый элемент данного уровня функционирует как критерий для всех элементов нижестоящего уровня.

В результате реализации первого этапа МАИ любая, сколь угодно сложная проблема, может быть представлена в виде трехуровневой иерархии (цель – критерии – альтернативы), каждый из элементов иерархии при необходимости может быть представлен, в свою очередь, в виде трехуровневой иерархии и т.д.

Структурирование проблемы осуществляют участники процесса решения (например, группа экспертов или ЛПР). При структурировании представленной в п.1.1 задачи в качестве эксперта была привлечена старший преподаватель кафедры кибернетики и вычислительной техники, к.т.н. Козлова Е.В., читающая дисциплину «Численные методы». Для построения полной простой иерархии, представленной на рисунке 2, были определены цель, критерии и альтернативы.

Целью задачи принятия решения в данном примере является выбор наиболее эффективного метода решения нелинейных уравнений. Альтернативами выбора являются следующие методы:

- М₁. Метод половинного деления;
- М₂. Метод простой итерации;
- М₃. Метод Ньютона-Рафсона (классический);
- М₄. Метод секущих.

В результате обсуждения для дальнейшего рассмотрения был отобран следующий список из пяти критериев (обозначим их буквой «А» с соответствующим номером):

- А₁. Скорость сходимости метода;
- А₂. Вычислительная сложность алгоритма решения;
- А₃. Шаговость метода;
- А₄. Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения;
- А₅. Гарантия сходимости.

1.3. Принцип дискриминации и сравнительных суждений

Цель второго этапа МАИ – установить приоритеты критериев и оценить каждую из альтернатив по критериям, выявив самую важную из них.

1.3.1. Попарные сравнения

В МАИ элементы одного уровня иерархии сравниваются попарно по отношению к их воздействию («весу» или «интенсивности») на общую для них характеристику. Например, строится матрица для сравнения относительной важности критериев на втором уровне по отношению к общей цели на первом уровне. Подобные матрицы должны быть построены для попарных сравнений каждой альтернативы на третьем уровне по отношению к критериям второго уровня.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – элементы одного уровня иерархии. При проведении попарных сравнений в основном ставятся следующие вопросы относительно элементов A_i и A_k :

- какой из них важнее или имеет большее воздействие?



- какой из них более вероятен?
- какой из них предпочтительнее?

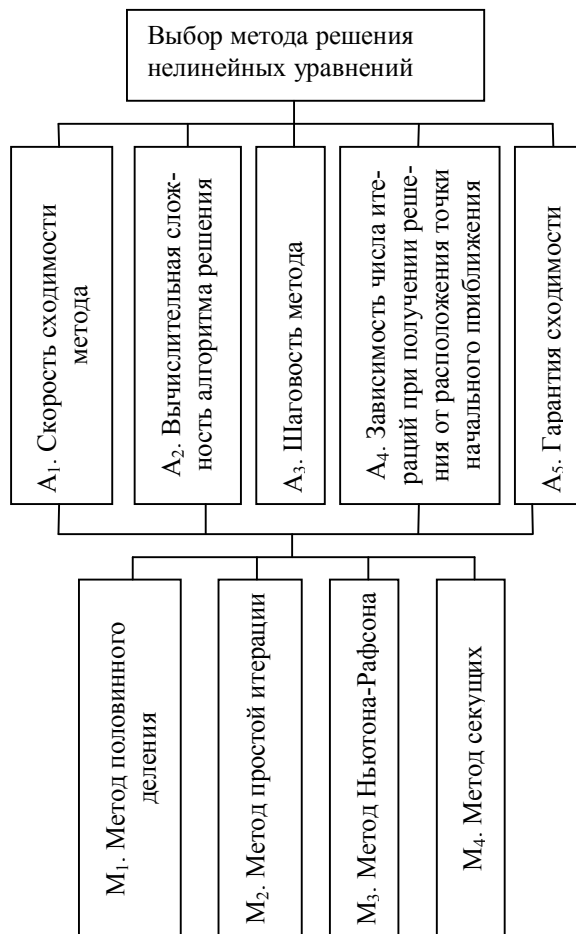


Рисунок 2 – Полная простая иерархия

При этом каждому субъективному суждению необходимо дать количественную оценку, пользуясь шкалой относительной важности. Количественные оценки, вводимые при попарных сравнениях, строят исходя из некоторых эмпирических правил, опирающихся на основание опыта.

При любом подходе к разрешению задачи сравнения важное

значение имеет выбор шкалы сравнений. Главное требование – шкала сравнений должна быть проста и естественна.

Так как единица является стандартом измерения, то верхняя граница должна быть не слишком далека от нее, хотя и достаточно отдалена для того, чтобы более или менее выразительно представить наш диапазон способности различать. Поэтому и число сравниваемых объектов должно быть достаточно мало. Обычные пределы – это 7 ± 2 единиц.

Опишем один из способов того, как практически придать количественное наполнение сравнению объектов, действий или обстоятельств. В таблице 1 представлена в общем виде матрица попарных сравнений (матрица A).

Таблица 1– Общий вид матрицы попарных сравнений

	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ik}	...	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nk}	...	a_{nn}

Пусть даны элементы A_1, A_2 , и т. д. Матрица попарных сравнений размером $n \times n$ строится по следующим правилам:

- если элементы A_i и A_k одинаково важны, заносим в позиции (A_i, A_k) и (A_k, A_i) матрицы число 1,
- если элемент A_i незначительно важнее элемента A_k , заносим в позицию (A_i, A_k) число 3, а в позицию (A_k, A_i) – обратное ему число $1/3$;
- если элемент A_i значительно важнее элемента A_k , заносим в позицию (A_i, A_k) число 5, а в позицию (A_k, A_i) – обратное ему число $1/5$;
- если элемент A_i явно важнее элемента A_k , заносим в позицию (A_i, A_k) число 7, а в позицию (A_k, A_i) – обратное ему число $1/7$;



- если элемент A_i по своей значимости абсолютно превосходит элемент A_k , заносим в позицию (A_i, A_k) число 9, а в позицию (A_k, A_i) – обратное ему число $1/9$.

Числа 2, 4, 6 и 8 используются для облегчения компромиссов между оценками, слегка отличающимися от основных чисел.

Таким образом, мы получаем таблицу сравнений, которой соответствует обратносимметричная матрица размером $n \times n$. Поскольку элемент A_i находится в отношении безразличия к самому себе, все элементы главной диагонали матрицы попарных сравнений имеют значения, равные единице.

1.3.2. Построение матрицы попарных сравнений второго уровня. Решение и согласованность

В нашем примере второй уровень иерархии содержит пять критериев (матрица размером 5×5 представлена таблицей 2). Каким образом элементы матрицы получили свои значения? Эксперту был задан вопрос: «При выборе метода решения нелинейных уравнений какой критерий является более значимым – Скорость сходимости метода (A_1) или Вычислительная сложность алгоритма решения (A_2)?». Был получен ответ «Скорость сходимости метода». Затем эксперту был задан вопрос: «Насколько важнее критерий A_1 относительно критерия A_2 ?». Был получен ответ: «Незначительно важнее». В результате элементу матрицы (A_1, A_2) присвоено значение 3, а элементу матрицы (A_2, A_1) – обратное значение $1/3$. Аналогично были проведены остальные попарные сравнения.

Таблица 2 – Матрица попарных сравнений второго уровня

Критерий		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	Скорость сходимости метода	1	3	1	2	1/3
A_2	Вычислительная сложность алгоритма решения	1/3	1	1	1/2	1/2
A_3	Шаговость метода	1	1	1	1	1/3
A_4	Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения	1/2	2	1	1	1/3
A_5	Гарантия сходимости	3	2	3	3	1

Общее число попарных сравнений, которые необходимо провести, вычисляется по формуле

$$\frac{n \times (n-1)}{2} = 5 \times (5-1)/2 = 10.$$

1.3.3. Вычисление вектора приоритетов для матрицы попарных сравнений второго уровня

Из группы матриц попарных сравнений формируется набор локальных приоритетов, которые выражают относительное влияние множества элементов на элемент примыкающего сверху уровня. Находят относительную силу (величину, ценность, желательность или вероятность каждого отдельного объекта) через «решение» матриц, каждая из которых обладает обратносимметричными свойствами. Для этого нужно вычислить множество собственных векторов для каждой матрицы, а затем нормализовать результат к единице, получая тем самым вектор приоритетов.

Вычисление оценки компонент собственного вектора можно произвести различными способами, например, сначала вычислить геометрическое среднее в каждой строке матрицы A по формуле

$$b_i = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik}}. \quad (1)$$

Полученный по формуле (1) столбец чисел нормализуется делением каждого числа b_i на сумму B всех чисел столбца, в результате получаем значения компонент вектора локальных приоритетов (3).

$$x_i = \frac{b_i}{B}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\text{где } B = \sum_{i=1}^n b_i.$$

Так как числа b_i нормализуются делением каждого числа на сумму всех чисел, очевидно

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (3)$$

Проведем вычисления компонент вектора локальных приоритетов для нашего примера (вычисления будем проводить с точностью до четвертого знака):



$$b_1 = \sqrt[5]{a_{11}a_{12} \dots a_{15}} = \sqrt[5]{1 \times 3 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{3}} = \sqrt[5]{2} = 1,1487;$$

$$b_2 = \sqrt[5]{a_{21}a_{22} \dots a_{25}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt[5]{0,833} = 0,6084;$$

$$b_3 = \sqrt[5]{a_{31}a_{32} \dots a_{35}} = \sqrt[5]{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{3}} = \sqrt[5]{0,3333} = 0,8027;$$

$$b_4 = \sqrt[5]{a_{41}a_{42} \dots a_{45}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{3}} = \sqrt[5]{0,3333} = 0,8027;$$

$$b_5 = \sqrt[5]{a_{51}a_{52} \dots a_{55}} = \sqrt[5]{3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 1} = \sqrt[5]{54} = 2,2206.$$

Просуммируем полученные значения:

$$B = 1,1487 + 0,6084 + 0,8027 + 0,8027 + 2,2206 = 5,5831.$$

Далее воспользуемся формулой (2):

$$x_1 = \frac{b_1}{B} = \frac{1,1487}{5,5831} = 0,2057;$$

$$x_2 = \frac{b_2}{B} = \frac{0,6084}{5,5831} = 0,1090;$$

$$x_3 = x_4 = \frac{b_3}{B} = \frac{b_4}{B} = \frac{0,8027}{5,5831} = 0,1438;$$

$$x_5 = \frac{b_5}{B} = \frac{2,2206}{5,5831} = 0,3977.$$

Проведем проверку по формуле (3):

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 0,2057 + 0,1090 + 0,1438 + 0,1438 + 0,3977 = 1,0.$$

Очевидно, погрешность вычислений компонент вектора локальных приоритетов для матрицы попарных сравнений второго уровня равна нулю. Если же условие (3) не выполняется, необходимо оценить погрешность вычислений по следующей формуле:

$$\delta_x = \frac{\left| 1 - \sum_{i=1}^n x_i \right|}{1} \times 100\%. \quad (4)$$

Анализ результатов этапа вычисления вектора приоритетов для матрицы попарных сравнений второго уровня. Полученные зна-

чения компонент x_i вектора локальных приоритетов критериев дают возможность ранжировать критерии в соответствии с предпочтениями ЛПР по убыванию полученных весов. Для рассматриваемого примера в таблице 3 критерии распределены в соответствии с «занятыми местами». Для ЛПР самым весомым является критерий «Гарантия сходимости», который «выигрывает» у ближайшего «преследователя» – критерия «Скорость сходимости метода»

$$(0,3977 - 0,2057) \times 100\% = 19,20\%.$$

Таблица 3 – Численные оценки предпочтений критериев ЛПР

Критерий		Место	Вес
A ₅	Гарантия сходимости	1	0,3977
A ₁	Скорость сходимости метода	2	0,2057
A ₃	Шаговость метода	3	0,1438
A ₄	Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения	3	0,1438
A ₂	Вычислительная сложность алгоритма решения	5	0,1090

Значение критерия, получившего самую низкую оценку («Вычислительная сложность алгоритма решения»), по мнению ЛПР, не является пренебрежимо малым, так как его вес составляет 10,9% от суммарного веса всех критериев. В противном случае критерии с пренебрежимо малыми весами следует исключить из рассмотрения и повторить п.п. 1.3.2 и 1.3.3. Критерии «Шаговость метода» и «Зависимость числа итераций...» получили по формуле (2) одинаковые значения весов и «разделили» третье место.

1.3.4. Согласованность локальных приоритетов

Суждения ЛПР при проведении попарных сравнений должны быть, по возможности, идеально согласованными. Это означает выполнение следующих условий:

- Для любых i, k и l справедлива транзитивная (порядковая) согласованность

$$A_i \succ A_k, A_k \succ A_l \Rightarrow A_i \succ A_l, \quad (5)$$

где знак « $\succ$ » означает отношение предпочтения;

$i, k, l = 1, 2, \dots, n$, при этом $i \neq k \neq l$.

- Для любых i, k и l справедлива численная (кардинальная) согласованность:



$$a_{ik} \times a_{kl} = a_{il}. \quad (6)$$

Обсудим вопрос о том, как можно оценить согласованность наших суждений практически. Справедливо следующее утверждение, которое примем без доказательства.

ТЕОРЕМА. Положительная обратнo-симметричная матрица является согласованной тогда и только тогда, когда порядок матрицы и ее наибольшее собственное значение совпадают:

$$\lambda_{\max} = n.$$

Если элементы положительной обратнoсимметричной согласованной матрицы A изменить незначительно («пошевелить»), то максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ также изменится незначительно. Если $\lambda_{\max} \neq n$, всегда $\lambda_{\max} > n$. В качестве степени отклонения положительной обратнoсимметричной матрицы A от согласованной матрицы принимается следующее отношение:

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \quad (7)$$

которое называется индексом согласованности (ИС) матрицы A и является показателем близости этой матрицы к согласованной. Теперь необходимо сравнить значение индекса согласованности со значением случайной согласованности (величина, которая получилась бы при случайном выборе количественных суждений из шкалы 1/9; 1/8; 1/7, ..., 1/2, 1, 2, ..., 9 при образовании обратнoсимметричной матрицы). В таблице 4 представлены значения случайных согласованностей для матриц различных размерностей.

Таблица 4 – Случайная согласованность (СС)

Размер матрицы n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Если разделить ИС на число, соответствующее случайной согласованности матрицы того же порядка, получается отношение согласованности (ОС):

$$ОС = \frac{ИС}{СС} \times 100\%. \quad (8)$$

Величина отношения согласованности должна быть порядка 10% или менее, чтобы быть приемлемой. Если значение ОС выходит из этих пределов, то экспертам нужно исследовать задачу и пересмотреть суждения.

1.3.5. Вычисление собственных характеристик обратнoсимметричных матриц

Естественно встает вопрос о том, как находить наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ положительной обратнoсимметричной матрицы. Однако в общем случае эта задача хотя и разрешима, но технически достаточно сложна. Поэтому, желая содержательно, но относительно просто ответить на поставленный вопрос, мы вынуждены чем-то поступиться. Проще всего поступиться точностью вычислений, то есть искать приближенное значение наибольшего собственного числа. Существует несколько способов приближенного вычисления наибольшего собственного значения матрицы попарных сравнений [1], [2]. Воспользуемся одним из них [1]. Необходимо вычислить сумму элементов в каждом столбце матрицы согласно формуле

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

после чего воспользоваться формулой

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (10)$$

где x_i – значения компонент вектора локальных приоритетов (2).

Вернемся к нашему примеру и оценим отношение согласованности для матрицы попарных сравнений второго уровня (Таблица 2). По формуле (9)

$$y_1 = 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + 3 = 5,5833;$$

$$y_2 = 3 + 1 + 1 + 2 + 2 = 9;$$

$$y_3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 7;$$

$$y_4 = 2 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 3 = 7,5;$$

$$y_5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = 2,4999.$$



Согласно (10) наибольшее собственное значение матрицы по сравнений

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0,2057 \times 5,5833 + 9 \times 0,1090 + 7 \times 0,1438 + 7,5 \times 0,1438 + 2,4999 \times 0,3977 = 5,2602.$$

Как и ожидалось,

$$\lambda_{\max} = 5,2602 > n = 5.$$

Индекс согласованности согласно (7) равен

$$IC = \frac{5,2602 - 5}{5 - 1} = 0,0651,$$

а отношение согласованности с учетом того, что при $n=5$ случайная согласованность $CC=1,12$ (Таблица 4), по формуле (8) получает значение

$$OC = \frac{0,0651}{1,12} \times 100\% = 5,8\%.$$

Анализ результатов этапа исследования матрицы на согласованность. Необходимо выявить возможные нарушения транзитивной или кардинальной согласованности и предложить ЛПР способ, в результате применения которого значение отношения согласованности будет улучшено. Для примера исследуем бинарные отношения предпочтения между критериями A_5 , A_1 и A_2 (Таблица 2). В соответствии с (5)

$$A_5 \succ A_1, \quad A_1 \succ A_2 \Rightarrow A_5 \succ A_2,$$

следовательно, для этих трех критериев нарушение транзитивной согласованности отсутствует. В противном случае лицу, принимающему решение, надо предложить пересмотреть отношения предпочтения между этими критериями. Проверим кардинальную (численную) согласованность между этими критериями. В соответствии с (6) для этих трех критериев должно выполняться равенство

$$a_{51} \times a_{12} = a_{52}.$$

Согласно таблице 2 значения элементов $a_{51}=2$, $a_{12}=3$, $a_{52}=2$, то есть $2 \times 3 \neq 2$.

Можно порекомендовать ЛПР уменьшить значение элемента a_{51} до единицы, а элемента a_{12} – до двух, что не нарушит транзитивную согласованность:

$$A_5 \sim A_1, \quad A_1 \succ A_2 \Rightarrow A_5 \succ A_2,$$

где символ « $\sim$ » означает отношение равноценности. Только эти изменения приведут к уменьшению значения отношения согласованности до 4,17 % вместо 5,81%. Аналогичные исследования надо провести по

отношению к остальным тройкам критериев, что может привести к абсолютно согласованной матрице попарных сравнений. Однако в данном случае мы никаких изменений в матрицу, представленную таблицей 2, вносить не будем. Поскольку отношение согласованности не превышает 10%, будем считать матрицу попарных сравнений второго уровня удовлетворительно согласованной, в противном случае (повторимся еще раз) необходимо обратиться к ЛПР для пересмотра значений предпочтений данной матрицы.

1.3.6. Построение матриц попарных сравнений третьего уровня.

Решение и согласованность

Для каждого критерия проводятся попарные сравнения альтернатив и в соответствии с формулами (1) ... (10) реализуются этап синтеза локальных приоритетов z_j (j – номер альтернативы, $j = \overline{1, m}$, в нашем примере $m=4$) и исследование матрицы на согласованность аналогично тому, как это представлено в п.п. 1.3.2 – 1.3.5.

В таблице 5 проведены попарные сравнения альтернатив по критерию A_1 «Скорость сходимости метода».

Таблица 5 – Матрица попарных сравнений третьего уровня по критерию « A_1 . Скорость сходимости метода»

Альтернатива	M_1	M_2	M_3	M_4
M_1	1	1/2	1/3	1/3
M_2	2	1	1	2
M_3	1	1	1	1
M_4	3	1	1/2	1

По формулам (1), (2) вычислим сравнительную желательность альтернатив по первому критерию.

$$b_1 = \sqrt[4]{a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}} = \sqrt[4]{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \sqrt[4]{0,0556} = 0,4856;$$

$$b_2 = \sqrt[4]{a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}} = \sqrt[4]{2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1} = \sqrt[4]{1,0} = 1;$$

$$b_3 = \sqrt[4]{a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}} = \sqrt[4]{3 \times 2 \times 1 \times 2} = \sqrt[4]{12} = 1,8612;$$

$$b_4 = \sqrt[4]{a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}} = \sqrt[4]{3 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1} = \sqrt[4]{1,5} = 1,1067.$$

Просуммируем полученные значения:



$$B = 0,4856 + 1,0 + 1,8612 + 1,1067 = 4,4535.$$

Далее воспользуемся формулой (2), заменив идентификаторы x_i на z_j :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{b_1}{B} = \frac{0,4856}{4,4535} = 0,1090; \\ z_2 &= \frac{b_2}{B} = \frac{1,0}{4,4535} = 0,2245; \\ z_3 &= x_4 = \frac{b_3}{B} = \frac{1,8612}{4,4535} = 0,4179; \\ z_4 &= \frac{b_5}{B} = \frac{1,1067}{4,4535} = 0,2485. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Проведем проверку по формуле (3):

$$\sum_{j=1}^4 z_j = 0,1090 + 0,2245 + 0,4179 + 0,2485 = 0,9999.$$

Условие (3) не выполняется, поэтому по формуле (4) оценим погрешность вычислений значений компонент вектора локальных приоритетов для первой матрицы попарных сравнений третьего уровня, представленной таблицей 5:

$$\delta_x = \frac{|1 - 0,9999|}{1} \times 100\% = 0,01\%.$$

Получено удовлетворительное значение погрешности вычислений вектора локальных приоритетов.

С целью сокращения объема методических указаний для остальных четырех матриц попарных сравнений третьего уровня приведем результаты расчетов в таблице 6, опустив промежуточные вычисления.

Анализ результатов этапа вычисления векторов приоритетов для матриц попарных сравнений третьего уровня. Будем считать, что значения компонент z_j в формуле (11) означает, что по критерию «Скорость сходимости метода» альтернатива M_3 заняла первое место ($z_3=0,4179$), альтернатива M_4 – второе место ($z_4=0,2485$), альтернатива M_2 – третье место ($z_2=0,2245$), альтернатива M_1 – четвертое место ($z_1=0,1090$). С учетом полученных результатов для остальных матриц попарных сравнений третьего уровня представим в таблице 7 суммарное количество первых, вторых и так далее мест, занятых каждой альтернативой при вычислении значений компонент векторов локальных приоритетов.

Таблица 6 – Матрицы попарных сравнений третьего уровня

А ₂ . Вычислительная сложность алгоритма	М ₁	М ₂	М ₃	М ₄	Вектор приоритетов
М ₁	1	1	3	3	0,3898
М ₂	1	1	2	2	0,3183
М ₃	1/3	1/2	1	2	0,1710
М ₄	1/3	1/2	1/2	1	0,1209
					$\sum z_j = 1,0000$
					$\lambda_{\max} = 4,0732$
					ИС=0,0244
					ОС=2,71%
А ₃ . Шаговость метода	М ₁	М ₂	М ₃	М ₄	Вектор приоритетов
М ₁	1	1	1	2	0,2857
М ₂	1	1	1	2	0,2857
М ₃	1	1	1	2	0,2857
М ₄	1/2	1/2	1/2	1	0,1429
					$\sum z_j = 1,0000$
					$\lambda_{\max} = 4,0000$
					ИС=0,0000
					ОС=0,00%
А ₄ . Зависимость числа итераций...	М ₁	М ₂	М ₃	М ₄	Вектор приоритетов
М ₁	1	1/2	1/3	1/3	0,1061
М ₂	2	1	1/2	1/2	0,1838
М ₃	3	2	1	3	0,4502
М ₄	3	2	1/3	1	0,2599
					$\sum z_j = 1,0000$
					$\lambda_{\max} = 4,1975$
					ИС=0,0658
					ОС=7,31%



Продолжение таблицы 6

А ₅ . Гарантия сходимости	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	Вектор приоритетов
M ₁	1	2	2	2	0,4000
M ₂	1/2	1	1	1	0,2000
M ₃	1/2	1	1	1	0,2000
M ₄	1/2	1	1	1	0,2000
					$\sum z_j = 1,0000$
					$\lambda_{\max} = 0,0000$
					ИС=0,0000
					ОС=0,00%

Анализ количества мест, занятых каждой из альтернатив, свидетельствует о некотором превосходстве метода Ньютона-Рафсона (три первых места и по одному второму и третьему мест) над методом половинного деления (три первых места), далее следуют метод секущих и метод простой итерации. Однако окончательный вывод о превосходстве той или иной альтернативы сделать пока нельзя.

Таблица 7 – Суммарное количество первых, вторых и так далее мест, занятых каждой из альтернатив

Альтернатива	Место			
	1	2	3	4
M ₁ . Метод половинного деления	3	-	-	2
M ₂ . Метод простой итерации	1	2	2	-
M ₃ . Метод Ньютона-Рафсона	3	1	1	-
M ₄ . Метод секущих	-	3	-	2

1.3.7. Согласованность всей иерархии

Чтобы оценить согласованность всей иерархии, надо воспользоваться следующей формулой:

$$ОС_{Иерархии} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times ИС_i}{CC(m)} \times 100\%, \quad (12)$$

где x_i – значение i -ой компоненты вектора локальных приоритетов второго уровня, вычисленное в соответствии с (2);

ИС _{i} – значение i -го индекса согласованности матриц попарных сравнений третьего уровня;

СС(m) – значение случайной согласованности для $m = 4$.

Согласно (12)

$$ОС_{иерархии} = \frac{0,2057 \times 0,0144 + 0,1090 \times 0,0244 + 0,1438 \times 0,0000}{0,9} \times 100\% + \frac{0,1438 \times 0,0658 + 0,3977 \times 0,0000}{0,9} \times 100\% = 1,51\%.$$

Значение отношения согласованности всей иерархии, меньшее 10%, является удовлетворительным. В противном случае необходимо найти причины несогласованности и предложить ЛПР меры по устранению несогласованности.

1.3.8. Синтез составных (глобальных) приоритетов методов решения нелинейных уравнений

В таблице 8 для наглядности представлены исходные данные для расчета значений компонент вектора глобальных приоритетов, полученные на предыдущих этапах МАИ.

Таблица 8 – Исходные данные для расчета глобальных приоритетов

	X ₁ (0,2057)	X ₂ (0,1090)	X ₃ (0,1438)	X ₄ (0,1438)	X ₅ (0,3977)
$z_i^{M_1}$	0,1090	0,3898	0,2857	0,1061	0,4000
$z_i^{M_2}$	0,2245	0,3183	0,2857	0,1838	0,2000
$z_i^{M_3}$	0,4179	0,1710	0,2857	0,4502	0,2000
$z_i^{M_4}$	0,2485	0,1209	0,1429	0,2599	0,2000

Для выявления составных, или глобальных, приоритетов методов решения нелинейных уравнений в таблице 8 локальные приоритеты альтернатив располагаются по отношению к каждому критерию; каждый столбец векторов альтернатив умножается на приоритет соответствующего критерия и результаты складываются вдоль каждой строки:

$$V^{M_j} = \sum_{i=1}^n x_i \times z_i^{M_j}. \quad (13)$$



С целью получения данных для дальнейшего проведения анализа рекомендуется, в обязательном порядке, при вычислениях по формуле (13) представлять промежуточные результаты вычислений.

$$\left. \begin{aligned} V^{M_1} &= 0,2057 \times 0,1090 + 0,1090 \times 0,3898 + 0,1438 \times 0,2857 + \\ &\quad + 0,1438 \times 0,1061 + 0,3977 \times 0,40000 = 0,0224 + 0,0425 + \\ &\quad + 0,0411 + 0,0153 + 0,1591 = 0,2804; \\ V^{M_2} &= 0,2057 \times 0,2245 + 0,1090 \times 0,3183 + 0,1438 \times 0,2857 + \\ &\quad + 0,1438 \times 0,1838 + 0,3977 \times 0,2000 = 0,0462 + 0,0347 + \\ &\quad + 0,0411 + 0,0264 + 0,0795 = 0,2279; \\ V^{M_3} &= 0,2057 \times 0,4179 + 0,1090 \times 0,1710 + 0,1438 \times 0,2857 + \\ &\quad + 0,1438 \times 0,4502 + 0,3977 \times 0,20000 = 0,0860 + 0,0186 + \\ &\quad + 0,0411 + 0,0647 + 0,0795 = 0,2899; \\ V^{M_4} &= 0,2057 \times 0,2485 + 0,1090 \times 0,1209 + 0,1438 \times 0,1429 + \\ &\quad + 0,1438 \times 0,2599 + 0,3977 \times 0,20000 = 0,0511 + 0,0132 + \\ &\quad + 0,0205 + 0,0374 + 0,0795 = 0,2017. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Значения компонент векторов локальных приоритетов матриц парных сравнений второго и третьего уровней можно рассматривать как простые распределения вероятностей выбора соответственно критериев и альтернатив, так как они представлены неотрицательными вещественными числами и подчиняются равенству (3). В таком случае вычисления по формуле (13) можно рассматривать как прямое линейное преобразование простых распределений случайных величин, в результате которого получается простое распределение вероятностей V^{M_j} , $j = \overline{1,4}$, следовательно, должно выполняться свойство

$$\sum_{i=1}^n V^{M_j} = 1. \quad (15)$$

Проверим свойство (15):

$$\sum_{i=1}^4 V^{M_j} = 0,2804 + 0,2279 + 0,2899 + 0,2017 = 0,9999.$$

Ранее, в параграфе 1.3.6, для такого значения была вычислена погрешность, значение которой 0,01% является удовлетворительным.

Анализ результатов этапа синтеза глобальных приоритетов методов решения нелинейных уравнений. Результаты вычислений по формуле (13) можно трактовать как значения функции полезности для

каждой из альтернатив. Теперь можно ранжировать альтернативы по убыванию значений функции полезности: на первом месте стоит альтернатива M_3 (Метод Ньютона-Рафсона), которая «выигрывает» у альтернативы M_1 (Метод половинного деления)

$$(0,2899 - 0,2804) \times 100\% = 0,95\%.$$

Альтернатива M_1 «выигрывает» у альтернативы M_2 (Метод простой итерации)

$$(0,2804 - 0,2279) \times 100\% = 5,25\%.$$

Наконец, альтернатива M_2 «выигрывает» у альтернативы M_4 (Метод секущих)

$$(0,2279 - 0,2017) \times 100\% = 2,62\%.$$

Таким образом, подтвердились сделанные на основе таблицы 7 (параграф 1.3.6) предположения о «выигрышах» альтернатив M_3 и M_1 , но не подтвердились прогнозы по поводу альтернатив M_4 и M_2 .

Однако, «выигрыш» занявшей первое место альтернативы M_3 по сравнению с занявшей последнее место альтернативой M_4 составляет всего

$$(0,2899 - 0,2017) \times 100\% = 8,82\%,$$

что для данного метода анализа иерархий соизмеримо с допустимой ошибкой, поэтому нельзя сделать вывод о существенных преимуществах или недостатках одного из рассматриваемых методов решения нелинейных уравнений. Тем не менее, представляет интерес проанализировать, с использованием количественных оценок, за счет каких критериев каждый из методов получил примерно одинаковые значения функции полезности.

Анализ вкладов критериев в окончательные результаты. Для вычисления $q_i^{M_j}$ («вклада» i -го критерия в значение функции полезности V^{M_j}) воспользуемся значениями промежуточных результатов в формуле (13) и подставим их в формулу:

$$q_i^{M_j} = \frac{x_i \times z_i^{M_j}}{V^{M_j}} \times 100\%, \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,4}. \quad (16)$$

У альтернативы M_3 , «Метод Ньютона-Рафсона», значение функции полезности $V^{M_3} = 0,2899$ образовалось с учетом (16) из следующих «вкладов» критериев:

$$A_1. \text{ Скорость сходимости метода } - q_1^{M_3} = \frac{0,0860}{0,2899} \times 100\% = 29,67\% ;$$

$A_2.$ Вычислительная сложность алгоритма решения –

$$q_2^{M_3} = \frac{0,0186}{0,2899} \times 100\% = 6,42\% ;$$



А₃. Шаговость метода – $q_3^{M_3} = \frac{0,0411}{0,2899} \times 100\% = 14,18\%$;

А₄. Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения –

$$q_4^{M_3} = \frac{0,0647}{0,2899} \times 100\% = 22,32\%;$$

А₅. Гарантия сходимости – $q_5^{M_3} = \frac{0,0795}{0,2899} \times 100\% = 27,42\%$.

Таким образом, в оценку метода Ньютона-Рафсона внесли примерно одинаковый вклад три критерия – «Скорость сходимости метода», «Гарантия сходимости» и «Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения».

В таблице 9 представлены «вклады» критериев в значение функции полезности V^{M_j} .

Таблица 9 – «Вклады» критериев в значение функции полезности

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
$q_i^{M_1}$	7,99%	15,16%	14,66%	5,46%	56,74%
$q_i^{M_2}$	20,27%	15,23%	18,03%	11,58%	34,88%
$q_i^{M_3}$	29,67%	6,42%	14,18%	22,32%	27,42%
$q_i^{M_4}$	25,33%	6,54%	10,16%	18,54%	39,41%

Из таблицы 9 следует:

- Метод половинного деления (M₁) основной «вклад» (56,74%) получил за счет критерия «А₅. Гарантия сходимости»;
- Метод простой итерации (M₂) наибольший «вклад» (34,88%) также получил за счет критерия «А₅. Гарантия сходимости», остальные критерии, за исключением критерия «А₄. Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения», внесли примерно одинаковые «вклады»;
- Метод Ньютона-Рафсона (M₃) проанализирован выше;
- Метод секущих (M₄) наибольший «вклад» (39,41%) также получил за счет критерия «А₅. Гарантия сходимости», далее следуют «вклады» критериев «А₁. Скорость сходимости метода» (25,33%) и «А₄. Зависимость числа итераций при получении решения от расположения точки начального приближения» (25,33%).

Результаты проведенного анализа необходимо представить эксперту и ЛПР для возможного пересмотра количественных и качествен-

ных оценок предпочтений и повторной реализации некоторых или всех этапов МАИ.

Рассмотренный в разделе 1 пример реализации МАИ приведен с целью иллюстрации решения многокритериальной задачи выбора оптимального решения и, главное, – с целью освоения приемов анализа результатов на каждом этапе МАИ.

Ниже представлены рекомендации по выполнению расчетного задания, примеры постановки задач на содержательном и формальном уровнях и контрольные вопросы, ответить на которые можно, изучив библиографические источники.

2. Порядок выполнения расчетного задания

2.1. Получить у преподавателя задание, которое предполагает принятие решения о выборе из множества альтернатив наиболее предпочтительной с учетом представленных исходных данных, пользуясь методом анализа иерархии и на интуитивном уровне.

2.2. Дать оценку предложенным альтернативам на интуитивном уровне (без применения МАИ) и зафиксировать свой выбор.

2.3. Построить иерархию, начиная с вершины (цели – с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, по которым зависят последующие уровни) к самому нижнему уровню (перечень альтернатив). При выборе критериев следует ограничивать их количество числом 7 ± 2 .

2.4. Построить множество матриц попарных сравнений для каждого из нижних уровней – по одной матрице для каждого элемента примыкающего сверху уровня. Этот элемент называют направляемым по отношению к элементу, находящемуся на нижнем уровне, так как элемент нижнего уровня влияет на расположенный выше элемент. В полной простой иерархии любой элемент воздействует на каждый элемент примыкающего сверху уровня. Элементы любого уровня сравниваются друг с другом относительно их воздействия на направляемый элемент. Таким образом, получается квадратная матрица суждений.

Попарные сравнения проводятся в терминах доминирования одного из элементов над другим. Эти суждения выражаются затем в целых числах (параграф 1.3.1, с.9). Если элемент A_i доминирует над элементом A_k, то клетка, соответствующая строке i и столбцу k, заполняется целым числом, а клетка, соответствующая строке k и столбцу i, заполняется обратным к нему числом (дробью). Если считается, что A_i и A_k одинаковы, в обе позиции ставится единица.

2.5. Пользуясь формулами (1) и (2), вычислить для каждой матрицы второго и третьего уровней векторы локальных приоритетов.



2.6. Пользуясь формулами (7) ... (10), определить отношения согласованности ОС для каждой матрицы второго и третьего уровней.

2.7 Если для некоторой матрицы отношение согласованности превышает 10%, имеет место нарушение численной (кардинальной, $a_{ik}a_{kl}=a_{il}$) или/и транзитивной (порядковой) согласованности. В этом случае качество суждений следует улучшить, возможно, пересмотрев способ, следуя которому задаются вопросы при проведении попарных сравнений. Если это не поможет улучшить согласованность, то, вероятно, задачу следует более точно структурировать, т.е. сгруппировать элементы под более значащими критериями, после чего вновь выполнить пункты 2.4 – 2.6.

2.8. По формуле (12) вычислить согласованность всей иерархии. В случае нарушения согласованности определить причину.

2.9. Реализовать иерархический синтез для взвешивания собственных векторов весами критериев и вычислить сумму по всем соответствующим взвешенным компонентам собственных векторов уровня иерархии, лежащего ниже (13). Произвести выбор альтернативы.

2.10. Провести анализ результатов. Сравнить полученный результат с интуитивным выбором, объяснить возможные несовпадения.

2.11. С группой студентов, определенных преподавателем, выполнить пункты 2.3 – 2.4 для принятия коллективного решения. При этом каждый студент выступает в роли эксперта с правом решающего голоса. При построении матриц попарных сравнений спорные вопросы рекомендуется решать голосованием (по критерию большинства голосов), либо путем вычисления геометрического среднего.

2.12. Для полученных в п.2.10 исходных данных реализовать пункты 2.5, 2.6, 2.8.

2.13. Провести анализ результатов коллективного решения и сравнительный анализ результатов коллективного и индивидуального решений на каждом этапе МАИ.

3. Форма отчетности

Расчетное задание в виде пояснительной записки представляется к защите.

Пояснительная записка оформляется на листах формата А4 на одной стороне каждого листа и содержит следующее:

- титульный лист, оформленный в соответствии с требованиями высшей школы;
- содержание;
- постановка задачи;
- ход выполнения работы;

- анализ результатов;
- заключение;
- библиографический список;
- приложение (в случае необходимости).

4. Пример постановки задачи для выполнения расчетного задания

Семья решает вопрос о покупке дома. После предварительного рассмотрения возможных вариантов для окончательного решения выбраны три альтернативы (дома А, Б, В).

4.1. Характеристика альтернатив.

Дом М₁. Находится на улице Частника, построен в 1975 году. Дом газифицирован и телефонизирован. Площадь дома 130 кв.м. В доме 7 комнат. Площадь двора 5 «соток», имеется плодоносящий сад. На покупку дома можно взять кредит с низкой процентной ставкой. Дом требует ремонта. Остановки общественного транспорта удалены от дома.

Дом М₂. Находится на улице Истомина, построен в 1987 году. Дом газифицирован и телефонизирован. Площадь дома 180 кв.м. В доме 10 комнат. Площадь двора 10 «соток», имеются хозяйственные постройки, плодоносящий сад, уютная беседка. В кредите на покупку дома отказано. Дому требуется косметический ремонт. Остановки общественного транспорта находятся недалеко от дома.

Дом М₃. Находится на улице Н. Музыки (рядом с Историческим бульваром), построен в 2000 году, находится в отличном состоянии. Дом не газифицирован и не телефонизирован. Площадь дома 220 кв.м. В доме 13 комнат. Площадь двора 3 «сотки», сада нет. На покупку дома можно взять кредит с высокой процентной ставкой. Остановки общественного транспорта удалены от дома.

4.2. Требуется произвести выбор дома для покупки в трех вариантах:

- на интуитивном уровне (обосновать выбор);
- методом анализа иерархии (индивидуальное решение);
- методом анализа иерархий (коллективное решение).

Провести сравнительный анализ индивидуального решения с использованием МАИ с решением на интуитивном уровне.

На каждом этапе реализации МАИ произвести сравнительный анализ результатов индивидуального и коллективного решений.

Точность расчетов – до четвертого знака после запятой.



5. Пример контрольного задания для студентов заочной формы обучения

Задана трехуровневая иерархия (цель – критерии A_i – альтернативы M_k) и матрицы попарных сравнений второго и третьего уровней. Используя МАИ, определить оптимальную альтернативу, проверить согласованность каждой матрицы и согласованность всей иерархии. Оценить погрешности вычислений. Вычисления проводить с точностью до четвертого знака.

Уровень 2

A_i	A_1	A_2
A_1	1	3
A_2	1/3	1

Уровень 3

A_1	M_1	M_2	M_3	M_4
M_1	1	7	3	1/8
M_2	1/7	1	4	3
M_3	1/3	1/4	1	6
M_4	8	1/3	1/6	1

A_2	M_1	M_2	M_3	M_4
M_1	1	1/9	3	6
M_2	9	1	1/3	1/4
M_3	1/3	3	1	1/7
M_4	1/6	4	7	1

6. Контрольные вопросы

- Что собой представляет метод анализа иерархий?
- Какие этапы включает метод анализа иерархий?
- Какая иерархия называется полной?
- Представьте в общем виде декомпозицию задачи в иерархию.
- В чем заключается свойство обратносимметричной матрицы?
- Сколько суждений необходимо провести для обратносимметричной матрицы?
- Что собой представляет шкала относительной важности элементов по отношению к общей цели?
- Какие вопросы следует задавать при проведении попарных сравнений элементов (критериев, альтернатив, сценариев)?
- Представьте последовательность процедур синтеза локальных приоритетов.
- По каким формулам вычисляется наибольшее собственное значение матрицы попарных сравнений?
- Как вычисляется значение индекса согласованности?
- Что собой представляет случайная согласованность?
- Как вычисляется значение отношения согласованности?
- Как вычисляется согласованность всей иерархии?
- Как выявляются составные (глобальные) приоритеты?

Библиографический список

1. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ./ Т. Саати, К. Кернс – М.: Радио и связь, 1991.
2. Шикин Е.В. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие/ Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. – М.: Дело, 2000. – 440с.

Заказ № ____ от « ____ » _____ 2008 г. Тираж ____ экз.
Изд-во СевНТУ

