

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный
технический университет



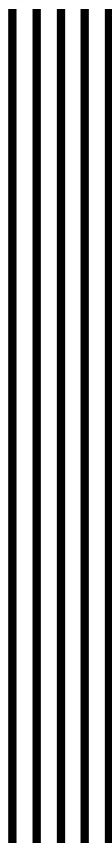
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к практическим занятиям
по дисциплине
«Математическое моделирование и
вычислительная техника»**

для магистрантов технических специальностей

Часть 1

«Аналитическое моделирование»



Севастополь
2008

УДК 631.33

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математическое моделирование и вычислительная техника» для магистрантов технических специальностей: в 2 ч. / Сост. В.В. Кирюхин, Е.В. Козлова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. – Ч. 1: Аналитическое моделирование. – 55с.

Цель указаний – методическая помощь магистрантам технических специальностей факультетов РТ, ТАМППТ и МТС в выполнении домашних заданий и решению задач на практических занятиях по указанной дисциплине.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники (протокол № 9 от 28.05.08 г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Шушляпин Е.А., доктор технических наук, профессор кафедры технической кибернетики.

Ответственный за выпуск:

Скатков А.В., доктор техн. наук, проф., зав. кафедрой кибернетики и вычислительной техники.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Практическое занятие № 1. Контрольный тест	5
2. Практическое занятие №2. Дискретные и непрерывные марковские цепи	6
3. Практическое занятие № 3. Системы массового обслуживания (СМО) с отказами	12
4. Практическое занятие № 4. СМО с очередями: одномерный поток заявок	15
5. Практическое занятие № 5. СМО с очередями: многомерный поток заявок	19
6. Практическое занятие № 6. СМО с относительными приоритетами	22
7. Практическое занятие № 7. СМО с абсолютными приоритетами	26
8. Практическое занятие № 8. Контрольная работа	29
9. Практическое занятие № 9. Стохастические сети массового обслуживания	30
10. Практическое занятие № 10. Оценка трудоёмкости алгоритма методом марковских цепей	35
11. Практическое занятие № 11. Оценка трудоёмкости алгоритма сетевым методом	41
12. Практическое занятие № 12. Оценка маргинальных трудоёмкостей алгоритма	48
Библиографический список	55

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для оказания помощи магистрантам технических специальностей университета (факультетов радиоэлектроники, технологии автоматизации машиноприборостроения и транспорта, морских технологий и судовождения) в освоении принципов и методов математического моделирования в соответствии с программой дисциплины «Математическое моделирование и вычислительная техника». Указания ориентированы на студентов дневной формы обучения, однако ими могут воспользоваться и магистранты-заочники.

Указания разбиты на 12 разделов, по числу практических занятий, относящихся к математическому моделированию. Первое и восьмое занятия отводятся на выполнение контрольных работ (входной и текущий контроль, соответственно); на остальных студенты решают задачи, цель которых – закрепить знания, полученные из лекционного материала и рекомендованной литературы, и приобрести навыки работы с базовыми аналитическими моделями.

Раздел, соответствующий такому занятию, построен по стандартной схеме, включающей формулировку цели занятия, описание базовых теоретических сведений, список типовых задач для решения на занятии, пример решения типовой задачи, домашнее задание и список контрольных вопросов.

Логическая связь материала в пределах разделов дисциплины такова, что студент не может осознанно решать задачи текущего занятия, не решив задачи предыдущего. Далее, без усвоения материала и методов, рассматриваемых на практических занятиях, студент не сможет выполнить ни модульные контрольные задания, ни курсовую работу, предусмотренные рабочей программой дисциплины.

Численные расчеты, сопровождающие решение большинства задач, в основном элементарны, однако достаточно трудоёмки. Поэтому рекомендуется пользоваться калькулятором либо портативной ПЭВМ.

При выполнении домашних заданий и подготовке к контрольным работам рекомендуется использовать учебную и справочную литературу [1-5].

1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1. КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

Ниже приводятся формулировки типовых задач, предлагаемых студентам в качестве входного контрольного теста. Как это видно из формулировок, проверяются знания, которые должны были быть приобретены ими на младших курсах. Продолжительность теста – два академических часа. Напомним, что результаты входного тестирования не влияют ни на текущую, ни на итоговую оценки знаний по данной дисциплине. Эти результаты преподаватель далее использует для адаптации уровня преподнесения материала на лекциях и других занятиях.

Задача 1.1. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_4 \\ p_2 &= p_1 + 2p_4 \\ 2p_3 &= p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Задача 1.2.

Используя решение задачи 1.1, вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ дискретной случайной величины X , принимающей значения $x_1=-2$; $x_2=0$; $x_3=3$; $x_4=4$ с вероятностями p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , соответственно.

Задача 1.3.

Вычислить точку экстремума и определить его характер (минимум, максимум) для функции:

$$F(x) = \int_1^x \ln \frac{2}{z} dz.$$

Задача 1.4.

Составить блок – схему алгоритма вычисления корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при заданных значениях a , b , c .

2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2.

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

2.1. Цель занятия

Целью занятия является закрепление основных понятий теории непрерывных и дискретных марковских цепей и приобретение базовых навыков расчета их характеристик.

2.2. Краткие теоретические сведения

Случайный процесс $X(t)$ называется **марковским**, если для любого момента $t=t_0$ вероятность любого его значения (состояния) для $t>t_0$ зависит только от значения процесса в момент t_0 и не зависит ни от каких значений в моменты $t<t_0$.

Если функция X принимает только дискретные значения, то процесс при этом называется **марковской цепью**.

Если процесс $X(t)$ определен только для дискретных моментов t , то марковская цепь называется **дискретной**. Само время t при этом отсчитывается в эти дискретные моменты.

В случае если $X(t)$ определен на непрерывном (континуальном) множестве значений t , то марковская цепь называется **непрерывной**.

Марковская цепь называется **однородной**, если её свойства, как случайного процесса, не зависят от сдвигов по оси времени. (Свойство однородности цепи соответствует свойству стационарности общего случайного процесса).

Рассмотрим дискретную однородную марковскую цепь с конечным числом состояний (значений) $S_1, \dots, S_n$. Переходы из состояния в состояние происходят только в дискретные моменты $t=0,1,2,\dots$. Промежутки между такими моментами называются **тактами**; такты нумеруются так же, как и моменты, т.е. моменту 0 соответствует такт 0, и т.д.

Какая случайный процесс, такая цепь полностью определяется вектором $p(k)$ распределения вероятностей состояний в момент k :

$$p(k)=(p_1(k), \dots, p_i(k), \dots, p_n(k)),$$

где $p_i(k)$ – вероятность того, что цепь в момент k находится в состоянии S_i .

Для $k=0,1,\dots$ имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^n p_i(k) = 1. \quad (2.1)$$

Для вычисления любого $p(k)$ достаточно знать всего два объекта: вектор $p(0)=(p_1(0), \dots, p_i(0), \dots, p_n(0))$ начального распределения вероятностей состояний и матрицу

$$P = (p_{ij})_n^n,$$

где p_{ij} – вероятность перехода цепи из S_i в S_j за один такт.

Связь между векторами $p(k)$ и $p(k-1)$ устанавливается по формуле

$$p(k)=p(k-1)P. \quad (2.2)$$

Эта формула, в частности, позволяет по известным $p(0)$ и P вычислить $p(1)$, по $p(1)$ и P определить $p(2)$ и т.д., вплоть до произвольного $p(k)$. Если нас интересует, скажем, значение $p(10^6)$, то следуя этому алгоритму, через миллион шагов мы его получим.

Возникает вопрос: можно ли получить это значение, не прибегая к столь трудоёмким вычислениям? В своё время А.А. Марков положительно ответил на этот вопрос и указал на класс цепей, где это возможно.

Марковская цепь называется **неприводимой марковской цепью**, если из любого её состояния можно перейти в любое другое состояние за конечное число тактов.

Для неприводимой марковской цепи существуют пределы:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_i(k) = p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Числа p_i называются **финальными вероятностями** состояний цепи; соответственно вектор $p=(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$ называется **вектором финальных вероятностей**.

Вектор финальных вероятностей можно найти, полагая в формуле (2.2) $p(k)=p(k-1)=p$ и рассматривая полученное таким образом соотношение как уравнение относительно p . К этому уравнению необходимо добавить условие нормировки (2.1), где $p(k)=p$.

В результате получим систему уравнений для отыскания финальных вероятностей:

$$\left. \begin{aligned} p &= p \cdot P \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (2.4)$$

Финальные вероятности состояний существуют и для непрерывных марковских цепей, только необходимо учитывать специфику, создаваемую фактом континуальности времени. Именно,

здесь неприводимая цепь определяется как цепь, в которой из любого состояния можно перейти в любое другое за конечное время (а не за конечное число тактов); далее, матрица P здесь заменяется на матрицу

$$L = (l_{ij})_n^n,$$

где λ_{ij} – интенсивность переходов цепи из состояния S_i в S_j , имеющая смысл среднего количества переходов за единицу времени.

Сами финальные вероятности p_i определяются как

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

где $p_i(t)$ – вероятность пребывания цепи в состоянии S_i в момент t .

Компоненты p_i вектора $(p_1, \dots, p_n)$ финальных вероятностей вычисляются как корни системы уравнений Колмогорова:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_j l_{ji} &= p_i \sum_{j=1}^n l_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

В заключение заметим, что в системах (2.4) и (2.6) одно из первых n алгебраических уравнений является избыточным, и перед решением системы его (обычно самое громоздкое) необходимо удалить.

2.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 2.1. В понедельник прибор исправен, но за сутки с вероятностью 0,2 он выходит из строя, однако за следующие сутки его работоспособность восстанавливается с вероятностью 0,9. Вычислить:

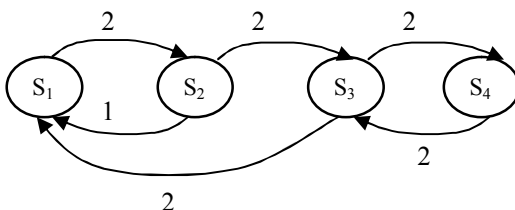
1. Вероятность того, что прибор будет исправен в четверг;
2. Финальную вероятность пребывания прибора в исправном состоянии.

Задача 2.2. Вычислить финальные вероятности записи чисел 0, 1, 2 и 3 на двухразрядный двоичный счетчик, если вероятность поступления единицы на его вход в каждом такте равна a .

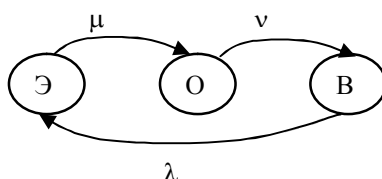
Задача 2.3. Вычислить финальные вероятности дискретной однородной марковской цепи с бистochasticкой матрицей переходов порядка n .

Примечание. **Бистochasticкой** называется матрица переходов, в которой сумма элементов любой её строки или любого столбца равна единице.

Задача 2.4. Вычислить финальные вероятности состояний непрерывной марковской цепи:

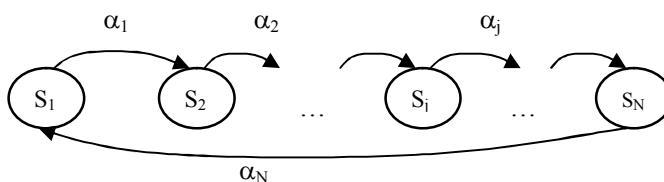


Задача 2.5. Цикл эксплуатации устройства проходит три состояния: Э – собственно эксплуатация; О – отказ; В – восстановление (ремонт). Интенсивности переходов между состояниями указаны на графе переходов:



Вычислить финальные вероятности $p_{\text{э}}$, $p_{\text{о}}$, и $p_{\text{в}}$ пребывания устройства соответственно в состояниях Э, О и В.

Задача 2.6. Вычислить финальные вероятности пребывания «марковского кольца» в состояниях $S_1, \dots, S_N$, если α_j – интенсивность выхода из состояния S_j :



2.4. Примеры решения типовых задач

Приведем решение задачи 2.1. Имеем дискретную марковскую цепь с двумя состояниями: S_1 – «прибор исправен», S_2 – «прибор отказал». Такт времени – сутки. Вектор $p(0)$ начального распределения вероятностей состояний: $p(0)=(1,0)$. Матрица P вероятностей переходов:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_1 & S_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Требуется вычислить $p_1(3)$ и финальную вероятность p_1 .
Для вычисления $p_1(3)$ воспользуемся формулой (2.2).

Имеем: $p(1) = p(0) \cdot P$,

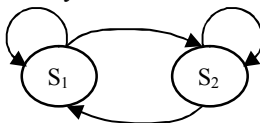
или
$$p(1) = (1, 0) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} = (0,8 \ 0,2),$$

$$p(2) = p(1)P = (0,8 \ 0,2) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} = (0,82 \ 0,18),$$

$$p(3) = p(2)P = (0,82 \ 0,18) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} = (0,818 \ 0,182).$$

Следовательно, $p_1(3) = 0,818$.

Вычислим далее p_1 . Чтобы убедиться, что эта вероятность существует, рассмотрим граф переходов марковской цепи, соответствующий нашей ситуации:



Из графа следует, что цепь неприводима, так что вектор $p = (p_1, p_2)$ финальных вероятностей существует. Находим его из системы (2.3):

$$\left. \begin{aligned} (p_1, p_2) \cdot P &= (p_1, p_2) \\ p_1 + p_2 &= 1 \end{aligned} \right\}, \text{ или}$$

$$\left. \begin{aligned} (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} &= (p_1, p_2) \\ p_1 + p_2 &= 1 \end{aligned} \right\}, \text{ т. е.}$$

$$\left. \begin{aligned} 0,8p_1 + 0,9p_2 &= p_1 \\ 0,2p_1 + 0,1p_2 &= p_2 \\ p_1 + p_2 &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Отбрасывая одно из первых двух уравнений, как лишнее, и решая оставшуюся систему, получим $p_1 = 0,8182$, $p_2 = 0,1818$.

Ответ: вероятность пребывания прибора в исправном состоянии в четверг равна 0,818, финальная вероятность этого состояния равна 0,8182.

Рассмотрим теперь решение задачи 2.5. Цепь неприводима, это очевидно из графа переходов. Финальные её вероятности p_3 , p_0 и p_B найдем, решая систему (2.5):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Э: } \mu p_3 = \lambda p_B \\ \text{О: } \mu p_0 = \mu p_3 \\ \text{В: } \lambda p_B = \mu p_0 \\ p_3 + p_0 + p_B = 1 \end{array} \right\}$$

Отбросив, например, первое уравнение и решая оставшуюся систему, получим:

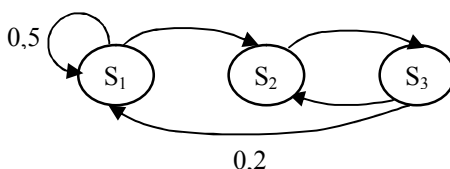
$$p_0 = \frac{1}{\mu} / A, \quad p_3 = \frac{1}{\mu} / A, \quad p_B = \frac{1}{\lambda} / A,$$

где $A = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}$. Аналогично решаются остальные задачи.

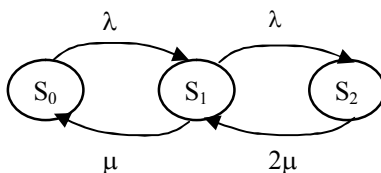
2.5. Домашнее задание

Решить задачи 2.7 и 2.8. и подготовиться к занятию «СМО с отказами»

Задача 2.7. Вычислить финальные вероятности состояний дискретной марковской цепи:



Задача 2.8. Вычислить финальные вероятности состояний непрерывной марковской цепи:



2.6. Контрольные вопросы

1. Какой случайный процесс называется марковским?
2. Что такое марковская цепь? Дискретная марковская цепь? Непрерывная марковская цепь?
3. Какими двумя объектами полностью определяется дискретная марковская цепь, как случайный процесс?
4. Какая марковская цепь называется неприводимой?
5. Что такое вектор финальных вероятностей состояний марковской цепи?
6. Что такое матрица вероятностей переходов дискретной марковской цепи?
7. Что такое матрица интенсивностей переходов непрерывной марковской цепи?

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3.

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО) С ОТКАЗАМИ

3.1. Цель занятия

Целью занятия является закрепление основных понятий и соотношений, следующих из модели системы массового обслуживания с отказами, и приобретение навыков решения задач для СМО с отказами.

3.2. Элементы теории

Рассмотрим СМО М/М/Н/0. Это N-канальная система массового обслуживания без накопителя, на вход которой поступает простейший поток заявок интенсивностью λ ; заявка, пришедшая в момент, когда хотя бы один канал свободен, немедленно занимает этот канал и обслуживается там случайное время, распределенное по экспоненциальному закону со средним значением ϑ , так что интенсивность μ обслуживания в канале равна $\mu = \frac{1}{\vartheta}$; заявка, пришедшая в момент, когда все N каналов заняты, получает отказ и теряется.

Основными характеристиками для подобных СМО являются вероятность простоя P_0 , вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ заявок в обслуживании и среднее число R занятых каналов – загрузка системы. Все характеристики вычисляются для стационарного режима СМО.

Используя формулы Эрланга для финальных вероятностей состояний СМО М/М/Ν/0, можно получить следующие выражения для перечисленных характеристик:

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^N \frac{c^i}{i!} \right)^{-1}, \quad (3.1)$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{c^N}{N!} \cdot P_0, \quad (3.2)$$

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{c^i}{(i-1)!}}{\sum_{i=0}^N \frac{c^i}{i!}}, \quad (3.3)$$

где $c = \frac{\lambda}{\mu}$. Заметим, что для СМО с отказами параметр ρ может

принимать любые действительные положительные значения; при этом, благодаря наличию потока отказов, в системе возможен стационарный режим.

3.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 3.1. На трёхканальный телефонный коммутатор поступает простейший поток вызовов интенсивностью 2 мин⁻¹. Разговор продолжается экспоненциальное время, в среднем равное двум минутам. Вычислить:

- 1) вероятность отказа при наборе номера,
- 2) вероятность простоя коммутатора и
- 3) загрузку коммутатора.

Задача 3.2. Система ПВО имеет два канала наведения истребителей на цель, причем вероятность поражения цели ракетой истребителя равна 0,9. Время наведения ракеты на цель – экспоненциальное со средним одна минута. Найти вероятность поражения цели, если интенсивность потока целей – три бомбардировщика в две минуты.

Задача 3.3. В условиях задачи 3.2., каково должно быть в среднем время наведения, чтобы вероятность поражения цели средствами ПВО была не меньше 0,8?

Задача 3.4. На одноканальный счётчик поступает поток частиц с интенсивностью 2000 с^{-1} . Каково должно быть среднее время реакции счётчика на регистрацию одной частицы, чтобы процент пропущенных частиц не превышал 1 %?

Задача 3.5. В условиях задачи 3.4, какова должна быть разрядность счётчика (в двоичных разрядах), если цикл его работы равен одному часу?

Задача 3.6. Два сотрудника ГАИ дежурят на шоссе, по которому движется простейший поток транспортных средств интенсивностью 300 час^{-1} . Правила дорожного движения нарушает каждый 20-й водитель. Сотрудник фиксирует нарушение и штрафует водителя в среднем за 6 минут. Определить количество ненаказанных нарушителей за смену (8 часов).

3.4. Пример решения типовой задачи

Решим, например, задачу 3.2.

Вероятность $P_{\text{пор}}$ поражения цели системой ПВО можно оценить по формуле:

$$P_{\text{пор}} = (1 - P_{\text{отк}}) 0,9, \quad (3.4)$$

где $P_{\text{отк}}$ – вероятность пропуска цели системой наведения. У нас эта система может рассматриваться как СМО М/М/2/0, тогда $P_{\text{отк}}$ можно вычислить по формуле (3.2) с учетом (3.1), т.е.

$$P_{\text{отк}} = \frac{c}{2!} \left(1 + c + \frac{c^2}{2!} \right)^{-1}, \quad (3.5)$$

где $c = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot g = \frac{3}{2} \text{ мин}^{-1} \cdot 1 \text{ мин} = 1,5$. Вычисления $P_{\text{отк}}$ дают $P_{\text{отк}} = 0,31$.

Подставив это значение в (2.4), получим $P_{\text{пор}} = 0,62$.

3.5. Домашнее задание

Решить задачи 3.7 – 3.9 и подготовиться к занятию «СМО с очередями: одномерный поток заявок».

Задача 3.7. В условиях задачи 3.6, каким должно быть в среднем время «обслуживания» нарушителя, чтобы число ненаказанных сократилось вчетверо?

Задача 3.8. Определить значение ρ для СМО М/М/Н/0, при котором вероятность простоя СМО равна вероятности занятости не более двух каналов.

Задача 3.9. Решить задачу 3.2. для случая трёхканальной системы наведения истребителей на цель, и сравнить результаты решения задач 3.2. и 3.9.

3.6. Контрольные вопросы

1. Что такое СМО М/М/Н/0?
2. Какой поток заявок (событий) называется простейшим?
3. Как определяется свойство ординарности потока? Свойство последствия?
4. Что такое интенсивность потока заявок?
5. Как связаны между собой среднее время и интенсивность обслуживания?
6. Какие характеристики обслуживания в СМО с отказами Вам известны?
7. Всегда ли в СМО с отказами возможен стационарный режим? Почему?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4. СМО ОЧЕРЕДЯМИ: ОДНОМЕРНЫЙ ПОТОК ЗАЯВОК

4.1 Цель занятия

Целью занятия является освоение понятий и методов решения задач для систем массового обслуживания без потерь с однородным (одномерным) потоком заявок.

4.2. Основные теоретические сведения

Рассмотрим СМО М/М/Н, т.е. N-канальную систему массового обслуживания, на вход которой поступает простейший поток заявок интенсивностью λ . Заявки поступают в накопитель неограниченной ёмкости и выбираются из него на обслуживание в порядке «первый пришёл – первым обслужен» на любой свободный канал. Каждая заявка проводит в таком канале случайное время, распределённое по показательному закону со средним θ , после чего покидает СМО.

Подобная система называется системой без потерь, поскольку каждая заявка, пришедшая в СМО, будет обслужена. (Мы не рассматриваем здесь системы с так называемыми «нетерпеливыми» заявками, которые могут уходить из накопителя по истечении некоторого времени и, следовательно, быть потерянными для СМО).

Условием существования стационарного режима в рассматриваемой СМО является выполнение неравенства

$$R < N, \quad (4.1)$$

где R – величина, имеющая смысл *среднего количества каналов, занятых обслуживанием* в таком режиме:

$$R = \lambda \cdot g, \text{ или } R = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (4.2)$$

где $\mu = \frac{1}{g}$ – интенсивность обслуживания заявок в канале.

Обычно R в таких системах называется *загрузкой СМО*.

Кроме загрузки основными характеристиками СМО являются:

Вероятность p_0 простоя системы – вероятность того, что все N каналов СМО свободны;

Средняя длина l очереди – среднее число заявок в накопителе, ожидающих начала обслуживания;

Среднее число m заявок в СМО – среднее суммарное количество заявок в накопителе и в каналах системы;

Среднее время w ожидания – среднее время, проводимое заявкой в накопителе в ожидании начала обслуживания;

Среднее время u пребывания – среднее время нахождения заявки в СМО.

В стационарном режиме все эти характеристики могут быть вычислены, если известны финальные вероятности p_i состояний СМО, $i=0, 1, 2, \dots$, где p_i – вероятности того, что в системе пребывает ровно i заявок. Для СМО $M/M/N$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{R_i}{i!} p_0 & \text{при } i < N \\ p_i &= \frac{R_i}{N!} \frac{p_0}{N^i - N} & \text{при } i \geq N \end{aligned}, \quad (4.3)$$

где p_0 , вероятность простоя, вычисляется по формуле

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^N \frac{R^i}{i!} + \frac{R^{N+1}}{N!(N-R)} \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Используя (4.3), можно показать, что

$$l = \frac{R^{N+1}}{(N-1)!(N-R)^2} p_0. \quad (4.5)$$

Далее, очевидно, что

$$m = l + R. \quad (4.6)$$

Если известно l , то w можно вычислить по формуле Литтла:

$$m = \frac{l}{\lambda}. \quad (4.7)$$

Аналогично, при известном m

$$u = \frac{m}{\lambda}. \quad (4.8)$$

В случае одноканальной СМО, т. е. при $N=1$, характеристики (4.1) – (4.8) можно непосредственно выразить через параметры λ и ϑ . Условие (4.1) приобретает вид

$$\rho < 1, \quad (4.9)$$

где $c = \lambda \cdot \vartheta$ – загрузка канала, или вероятность его занятости, следовательно, вероятность p_0 его простоя равна

$$p_0 = 1 - \rho, \quad (4.10)$$

что можно проверить по формуле (4.4), полагая в ней $N=1$.

Далее, формула (4.3) примет вид

$$p_i = c^i (1 - c). \quad (4.11)$$

Наконец, характеристики (4.5) – (4.8) выражаются соответственно как

$$l = \frac{c^2}{(1-c)}, \quad (4.12)$$

$$m = \frac{c}{(1-c)}, \quad (4.13)$$

$$w = \frac{\lambda \vartheta^2}{(1-c)}, \quad (4.14)$$

$$u = \frac{\vartheta}{(1-c)}. \quad (4.15)$$

4.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 4.1. В бункер станка на обработку поступает простейший поток интенсивностью 9 деталей в минуту. Станок обрабатывает в среднем 10 деталей в минуту. Вычислить загрузку

станка, а также среднее количество деталей в бункере и среднее время пребывания детали в системе – в стационарном режиме.

Задача 4.2. Вычислить среднее время ожидания клиентом разговора на трёхканальном переговорном пункте, если число заказов в час равно 24, а средняя продолжительность разговора – 5 минут.

Задача 4.3. В условиях задачи 4.2, интенсивность потока заказов возросла до 36 час^{-1} , или на 50%. Сколько времени будет ожидать клиент?

Задача 4.4. Два сотрудника ГАИ дежурят на шоссе с простейшим трафиком 300 час^{-1} ; правила нарушает каждый 30-й водитель. Один сотрудник фиксирует нарушения и ставит автомобили в очередь, другой выписывает штраф в среднем за 4 минуты. Вычислить среднее время задержки нарушителя у поста ГАИ и среднее число автомобилей нарушителей у поста.

Задача 4.5. В условиях задачи 4.4, во сколько раз увеличится количество задержанных автомобилей у поста, если число нарушителей в потоке возрастет на 25%? на 50%?

4.4. Пример решения типовой задачи

Приведём решение задачи 4.2. Имеем СМО М/М/3, загрузка R которой, согласно (4.2), равна

$$R = 24 \text{ час}^{-1} \cdot \frac{1}{12} \text{ час} = 2,$$

т.е. условие стационарности (4.1) выполнено, поскольку $N=3$.

Искомое время, w , найдем по формуле (4.7), где в соответствии с (4.5),

$$l = \frac{R^{3+1}}{(3-1)!(3-R)^2} p_0,$$

а p_0 , согласно (4.4), равно, при $R=2$,

$$p_0 = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{3!(3-2)} \right)^{-1} = 0,111,$$

так что

$$l = \frac{2^4}{2 \cdot 1^2} \cdot 0,111 = 0,888.$$

$$\text{Тогда } w = \frac{0,888}{24 \text{ час}^{-1}} = 0,037 \text{ час} = 2,22 \text{ мин.}$$

4.5. Домашнее задание

Решить задачи 4.6, 4.7 и подготовиться к занятию «СМО с очередями: многомерный поток заявок».

Задача 4.6. Решить задачу 4.1 для случая двух станков; сравнить результаты решения.

Задача 4.7. Вычислить полное среднее время передачи сообщения средней длиной 24 Кбит по информационному каналу пропускной способностью 48 Кбит/с, если поток передаваемых сообщений – простейший, интенсивностью 3 сообщения в 2 секунды.

4.6. Контрольные вопросы

1. Что такое СМО М/М/М?
2. Как выглядит условие существования стационарного режима для СМО без потерь?
3. Что такое вероятность простоя СМО?
4. Что такое время ожидания в СМО? Время пребывания?
5. Как связаны между собой время ожидания и длина очереди?
6. При каких условиях в СМО справедлива формула Литтла?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5. СМО С ОЧЕРЕДЯМИ: МНОГОМЕРНЫЙ ПОТОК ЗАЯВОК

5.1 Цель занятия

Целью занятия является освоение методов расчета характеристик систем массового обслуживания с многомерным входящим потоком заявок.

5.2. Основные теоретические сведения

Здесь рассматривается СМО М/Г/1, т.е. одноканальная система без потерь с простейшим потоком заявок и произвольным временем обслуживания. Входящий поток представляет собой смесь из n потоков, в которой i -й поток характеризуется своими интенсивностью λ_i и средним временем ϑ_i обслуживания заявок из этого потока; кроме ϑ_i , считается известным второй начальный момент $\vartheta_i^{(2)}$ времени обслуживания, $i=1, \dots, n$. Все заявки поступают в общий накопитель и выбираются из него на обслуживание в порядке «первый пришел – первый обслужен».

Условие существования стационарного режима здесь –

$$R < 1, \quad (5.1)$$

где $R = \rho_1 + \dots + \rho_n$ и $\rho_i = \lambda_i \vartheta_i$, $i = 1, \dots, n$.

При соблюдении неравенства (5.1) характеристики СМО для стационарного режима вычисляются по следующим формулам:

– **среднее время w_i ожидания** в очереди для заявки i -го потока

$$w_i = w = \frac{\overline{T_0}}{1 - R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.2)$$

где

$$\overline{T_0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \vartheta_i^{(2)} \quad (5.3)$$

– **среднее остаточное время обслуживания;**

– **среднее время u_i пребывания** в СМО заявки i -го потока

$$u_i = w + \vartheta_i; \quad (5.4)$$

– **средняя длина l_i очереди заявок** i -го потока

$$l_i = w \lambda_i; \quad (5.5)$$

– **среднее число m_i заявок** i -го потока в СМО

$$m_i = l_i + \rho_i.$$

Из формулы (5.2), в частности, следует, что все заявки, независимо от типа (номера) потока, ждут в очереди в среднем одинаковое время w .

5.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 5.1. По информационному каналу с пропускной способностью 2400 бит/с передаются сообщения трёх типов: управляющие пакеты постоянной длины 6 байт с интенсивностью 5 пакетов в 2 секунды, диалоговые сообщения экспоненциальной случайной длины со средней 60 байт и телеграммы с равномерно-случайной длины в диапазоне 600 – 1800 бит. Интенсивность диалога – 2 с^{-1} , интенсивность телеграмм – вчетверо меньше. Вычислить среднюю задержку в канале сообщений всех трёх типов.

Задача 5.2. Блок-пост на въезде в зону проверяет простейший поток из легковых (Л), грузовых (Г) автомашин и автобусов (А), поступающих с интенсивностями соответственно 60, 12 и 6 час^{-1} за случайное время, равномерно распределённое от 6 до 30 секунд для Л и Г и от 1 до 5 минут для А. Вычислить среднее время задержки транспорта каждого типа у блок-поста.

Задача 5.3. Общая нагрузка R СМО многомерным потоком равна 0,45. Интенсивность каждого потока возросла в два раза. Во сколько раз β при этом возрастёт время ожидания?

Задача 5.4. Загрузка СМО М/М/1 равна 0,45. Время обслуживания всех заявок из различных потоков увеличилось в два раза. Во сколько раз γ возросло при этом время ожидания?

5.4. Пример решения типовой задачи

Приведем решение задачи 5.1. Сначала необходимо проверить, существует ли в канале стационарный режим. Загрузка R канала равна $R = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$, где ρ_1 – нагрузка управляющими пакетами, ρ_2 – диалоговыми сообщениями и ρ_3 – телеграммами, $\rho_i = \lambda_i \vartheta_i$, $i = 1, 2, 3$.

У нас: $\lambda_1 = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_2 = 2 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_3 = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ с}^{-1}$.

Вычислим далее ϑ_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\vartheta_1 = \frac{6 \cdot 8 \text{ бит}}{2400 \text{ бит/с}} = 0,02 \text{ с},$$

$$\vartheta_2 = \frac{60 \cdot 8 \text{ бит}}{2400 \text{ бит/с}} = 0,2 \text{ с},$$

$$\vartheta_3 = \frac{(600 + 1800)/2 \text{ бит}}{2400 \text{ бит/с}} = 0,5 \text{ с}.$$

Тогда $R = \lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2 + \lambda_3 \vartheta_3 = 2,5 \text{ с}^{-1} \cdot 0,02 \text{ с} + 2 \text{ с}^{-1} \cdot 0,2 \text{ с} + 0,5 \text{ с}^{-1} \cdot 0,5 \text{ с} = 0,7$, т.е. $R = 0,7 < 1$, и стационарный режим в канале существует. (см. условие (5.1)).

Среднее время w ожидания вычисляем по формуле (5.2).

Сначала определим среднее остаточное время $\overline{T_0}$ по формуле (5.3).

$$\text{Для пакетов} \quad \vartheta_2^{(2)} = \vartheta_1^2 = (0,02 \text{ с})^2 = 0,0004 \text{ с}^2;$$

для диалоговых сообщений

$$\vartheta_2^{(2)} = 2 \cdot \vartheta_2^2 = 2 \cdot (0,2 \text{ с})^2 = 0,08 \text{ с}^2;$$

для телеграмм

$$\vartheta_3^{(2)} = T_{\max}^2 + T_{\max} \cdot T_{\min} + T_{\min}^2,$$

где $T_{\max} = 1800 \text{ бит} / 2400 \text{ бит/с} = 0,75 \text{ с}$, $T_{\min} = 600 \text{ бит} / 2400 \text{ бит/с} = 0,25 \text{ с}$, так что

$$\vartheta_3^{(2)} = 0,75^2 + 0,75 \cdot 0,25 + 0,25^2 = 0,27 \text{ с}^2,$$

и, согласно формуле (5.3)

$$\overline{T_0} = \frac{1}{2} (2,5 \cdot 0,0004 + 2 \cdot 0,08 + 0,5 \cdot 0,27) \approx 0,15 \text{ с}.$$

Тогда, по (5.2)

$$w = \frac{1}{1 - 0,7} \cdot 0,15c = 0,5c,$$

и искомые задержки пакетов, диалоговых сообщений и телеграмм, согласно (5.4), равны соответственно:

$$u_1 = 0,5 + 0,02 = 0,529 \text{ (с)},$$

$$u_2 = 0,5 + 0,2 = 0,7 \text{ (с)},$$

$$u_3 = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ (с)}.$$

5.5. Домашнее задание

Решить задачи 5.5, 5.6 и подготовиться к занятию «СМО с относительными приоритетами».

Задача 5.5. Решить задачу 5.1 для случая, когда длины сообщений всех трёх типов распределены по экспоненциальному закону с той же средней длиной, и сравнить результаты решений.

Задача 5.6. Решить задачу 5.4 для СМО M/D/1 при прочих равных условиях и сравнить результаты решений.

5.6. Контрольные вопросы

1. Что такое многомерный (n-мерный) входящий поток заявок?
2. Как выглядит условие существования стационарного режима для СМО G/G/1 при многомерном входящем потоке?
3. Что такое среднее остаточное время $\overline{T}_0$ обслуживания?
4. Как вычисляется $\overline{T}_0$ при известных параметрах λ_i и $\mathcal{G}_1^{(2)}$ СМО M/G/1 ?
5. Одинаковы ли средние времена ожидания для различных типов заявок в многомерном потоке?
6. Одинаковы ли средние длины очередей заявок различных типов?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6. СМО С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

6.1. Цель занятия

Целью занятия является приобретение навыков расчета основных характеристик систем массового обслуживания с приоритетными потоками заявок в режиме относительных приоритетов.

6.2. Основные теоретические сведения

Основная цель введения приоритетов в системах массового обслуживания – это уменьшение времени ожидания заявок одних типов за счет увеличения этого времени у других.

Приоритет – это преимущество в очереди на обслуживание в канале. Формально для n -мерного входящего потока приоритет определяется номером i типа заявки: чем меньше i , тем больше (старше) приоритет.

Для организации обслуживания в СМО с n приоритетами создаются n накопителей, в которых могут находиться очереди $O_1, \dots, O_k, \dots, O_n$ заявок соответствующих приоритетов. Правило приоритетного обслуживания таково: заявка из очереди O_{k+1} не обслуживается до тех пор, пока есть хотя бы одна заявка в очереди O_k , $k=1,2,\dots,k-1$. В пределах очереди O_k заявки выбираются на обслуживание в порядке «первый пришел – первый обслужен». Приоритет называется **относительным**, если никакая заявка не может прервать обслуживание любой другой заявки.

Рассмотрим СМО M/G/1, в которую поступает простейший n -мерный поток заявок с параметрами $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$, $(\vartheta_1^{(2)}, \dots, \vartheta_n^{(2)})$.

Условие существования стационарного режима здесь – такое же, как и в бесприоритетной СМО с многомерным потоком, и определяется неравенством (5.1).

Если это условие выполняется, то характеристики системы вычисляются по следующим формулам:

$$w_k = \frac{\overline{T_0}}{(1 - R_{k-1})(1 - R_k)}, \quad (6.1)$$

$$\text{где } \overline{T_0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \vartheta_i^{(2)}, \quad (6.2)$$

$$R_k = \rho_1 + \dots + \rho_k, \quad (6.3)$$

$$R_0 = 0, \quad R_n = R; \quad (6.4)$$

$$u_k = w_k + \vartheta_k, \quad (6.5)$$

$$l_k = w_k \cdot \lambda_k, \quad (6.6)$$

$$m_k = u_k \cdot \lambda_k, \quad k=1, \dots, n. \quad (6.7)$$

Можно показать, что между временами w_k ожидания заявок в СМО с относительными приоритетами справедливы соотношения:

$$w_1 < w_2 < \dots < w_n \quad (6.8)$$

$$\text{и} \quad w_1 < w < w_n, \quad (6.9)$$

где w – среднее время ожидания в беспriorитетной СМО, вычисляемое по формуле (5.2).

6.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 6.1. Решить задачу 5.1 при условии, что пакетам, диалоговым сообщениям и телеграммам назначены соответственно относительные приоритеты 1, 2 и 3, и сравнить результаты решений.

Задача 6.2. Решить задачу 5.2 при условии, что автобусам назначен приоритет перед легковыми и грузовыми автомобилями, и сравнить результаты решений.

Задача 6.3. Загрузка СМО тремя идентичными по параметрам потоками равна 0,9. Вычислить, во сколько раз времена ожидания для потоков 2-го и 3-го приоритетов больше этого времени для 1-го потока – при введении относительных приоритетов.

Задача 6.4. Загрузка СМО М/М/1 двумя одинаковыми по параметрам потоками равна 0,8. Во сколько раз необходимо уменьшить среднее время обслуживания заявки 2-го приоритета, чтобы её время ожидания сравнялось со временем ожидания заявки 1-го приоритета в прежней СМО?

Задача 6.5. Решить задачу 6.4 при условии, что уменьшается в два раза не среднее время обслуживания, а интенсивность потока заявок 2-го приоритета.

6.4. Пример решения типовой задачи

Рассмотрим задачу 6.1, поскольку для её решения подготовлена «база» в виде решения задачи 5.1 (см. п. 5.4.).

Назначение приоритетов не изменяет загрузку R и остаточное время $\overline{T}_0$, так что и здесь $R \equiv R_3 = 0,7 < 1$, и стационарный режим существует; $\overline{T}_0 = 0,15\text{с}$.

Согласно формуле (6.3), $R_1 = \rho_1 = 0,05$, $R_2 = \rho_1 + \rho_2 = 0,45$.

Времена ожидания w_1 , w_2 и w_3 вычисляем по формуле (6.1):

$$w_1 = \frac{\overline{T}_0}{1 - R_1} = \frac{0,15\text{с}}{1 - 0,05} \approx 0,158\text{с},$$

$$w_2 = \frac{\overline{T}_0}{(1 - R_1)(1 - R_2)} = \frac{0,15\text{с}}{(1 - 0,05)(1 - 0,45)} \approx 0,27\text{с},$$

$$w_3 = \frac{\overline{T_0}}{(1-R_2)(1-R_3)} = \frac{0,15c}{(1-0,45)(1-0,7)} \approx 0,91c,$$

а искомые времена задержки u_1 , u_2 и u_3 – по формуле (6.5):

$$u_1 = w_1 + g_1 = 0,158c + 0,02c = 0,178c,$$

$$u_2 = w_2 + g_2 = 0,27c + 0,2c = 0,47c,$$

$$u_3 = w_3 + g_3 = 0,91c + 0,5c = 1,41c.$$

Сравнивая эти величины с подобными в решении задачи 5.1, видим, что время для пакетов уменьшилось в три раза, время для телеграмм возросло на 41 %.

6.5. Домашнее задание

Решить задачи 6.6 и 6.7 и подготовиться к занятию «СМО с абсолютными приоритетами».

Задача 6.6. В аэропорт с одной посадочной полосой прибывает поток самолетов местных и дальних рейсов с интенсивностями соответственно 5 и 1 самолетов в час. Посадка дальних рейсов производится в первую очередь. Время посадки – постоянное, длительностью 6 и 12 минут соответственно для местных и дальних рейсов. Оценить среднее время ожидания посадки для обоих типов рейсов и среднее число ждущих посадки самолётов в окрестности аэропорта.

Задача 6.7. Одноканальная СМО обслуживает три идентичных по параметрам потока с тремя относительными приоритетами. Построить графики функций $f_1(R)$ и $f_2(R)$ от загрузки R , $R < 1$, где $f_1 = \frac{w_2}{w_1}$ и $f_2 = \frac{w_3}{w_1}$; w_1 , w_2 и w_3 – времена ожидания для заявок 1, 2 и 3 приоритетов соответственно.

6.6. Контрольные вопросы

1. С какой целью в СМО вводятся приоритеты?
2. Каково основное правило приоритетного обслуживания?
3. Что такое относительный приоритет?
4. Изменится ли загрузка и остаточное время обслуживания в приоритетной СМО по сравнению с беспriorитетной?
5. Каким образом ранжируются по величине времена ожидания заявок в потоках с увеличением номера приоритета?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7. СМО С АБСОЛЮТНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

7.1. Цель занятия

Целью занятия является приобретение навыков расчета основных характеристик систем массового обслуживания с абсолютными приоритетами.

7.2. Основные расчётные соотношения

В системах массового обслуживания с абсолютными приоритетами сохраняется тот же порядок обслуживания, что и при относительных приоритетах, с существенным, однако, дополнением: заявка, поступившая в СМО в момент, когда канал занят заявкой более низкого приоритета, прерывает обслуживание последней и занимает канал. Заявка, обслуживание которой прервано, ставится в начало своей очереди и ждёт момента, когда сложатся условия для её обслуживания. При наличии таковых канал либо продолжает обслуживать заявку с места, на котором произошло прерывание (СМО с дообслуживанием), либо начинает её обслуживание с самого начала (СМО с возобновлением обслуживания).

Рассмотрим СМО M/G/1 с n абсолютными приоритетами, т.е. систему, в которой заявка потока k прерывает обслуживание заявки потока $k+1$, $k=1,2,\dots,n-1$. В случае СМО с дообслуживанием в стационарном режиме справедливы следующие оценки для характеристик:

$$w_k = \frac{R_{k-1}}{(1-R_{k-1})} g_k + \frac{1}{(1-R_{k-1})(1-R_k)} \sum_{i=1}^k p_i g_i^{(2)}, \quad (7.1)$$

$$u_k = w_k + g_k, \quad (7.2)$$

$$l_k = w_k \cdot \lambda_k, \quad (7.3)$$

$$m_k = u_k \cdot \lambda_k, \quad k=1,\dots,n, \quad (7.4)$$

где, как и прежде, w_k и u_k – соответственно среднее время ожидания и пребывания в СМО заявки k -го приоритета, l_k и m_k – соответственно средняя длина очереди и среднее количество заявок в СМО, $k=1,\dots,n$.

Для СМО M/G/1 в стационарном режиме действует закон сохранения времени ожидания: для любой дисциплины обслуживания имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n c_i w_i = \text{const}, \quad (7.5)$$

$$\text{где } \text{const} = \frac{1}{2(1-R)} \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i^{(2)}. \quad (7.6)$$

Этот закон впервые сформулировал Л. Клейнрок. Впоследствии справедливость закона была установлена и для более общих условий.

7.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 7.1. Каждый из 3000 кассиров запрашивает центральный компьютер системы резервирования и продажи билетов в среднем один раз в 5 минут. Компьютер обслуживает запрос за экспоненциальное время, в среднем равное 50 миллисекундам, если он исправен. Однако из-за неисправностей в среднем один раз в час он «зависает» на 3 минуты. Оценить среднее время ответа компьютера кассиру.

Задача 7.2. Отправка телеграммы-молнии имеет абсолютный приоритет перед срочной, а срочная телеграмма – абсолютный приоритет перед обычной. Определить среднее время ожидания отправки телеграмм всех трёх категорий, если поток «молний» следует с интенсивностью 1 час^{-1} , срочных $1/10 \text{ мин}^{-1}$ и обычных – $1/3 \text{ мин}^{-1}$, а оператор отправляет телеграмму за экспоненциальное время, в среднем равное 2 минутам.

Задача 7.3. Загрузка СМО заявками первого потока втрое больше загрузки заявками второго. После введения приоритета время ожидания для заявок первого потока уменьшилось вдвое. Во сколько раз при этом увеличилось время ожидания для заявок второго потока?

Указание. Воспользуйтесь законом (7.5).

Задача 7.4. Известно, что среднее время w ожидания для заявок двух потоков в беспriorитетной СМО определяется как

$$w = \frac{\overline{T_0}}{1 - c_1 - c_2}, \text{ а среднее время } w_1 \text{ ожидания для заявок 1-го}$$

приоритета в той же СМО с приоритетами – как $w_1 = \frac{\overline{T_0}}{1 - c_1}.$

Пользуясь законом (7.5), вывести формулу среднего времени w_2 ожидания для заявок 2-го приоритета и сравнить её с известной (формула (6.1)).

7.4. Пример решения типовой задачи

Рассмотрим задачу 7.1. Имеем СМО М/М/1 с двумя потоками в режиме абсолютных приоритетов:

1-й поток – это поток неисправностей компьютера с интенсивностью $\lambda_1 = 1 \text{ час}^{-1} = \frac{1}{60} \text{ мин}^{-1}$ и средним временем обслуживания (т.е. устранения неисправности) $\vartheta_1 = 3 \text{ мин}$;

2-й поток – это запросы кассиров с интенсивностью $\lambda_2 = \frac{3000}{5} \text{ мин}^{-1} = 10 \text{ с}^{-1}$ и средним временем обслуживания $\vartheta_2 = 50 \text{мс} = 5 \cdot 10^{-2} \text{с}$.

Необходимо вычислить u_2 , если возможен стационарный режим. Общая загрузка R СМО равна $\rho_1 + \rho_2$,

где $\rho_1 = \lambda_1 \vartheta_1 = \frac{1}{60} \text{ мин}^{-1} \cdot 3 \text{ мин} = 0,05$, $\rho_2 = \lambda_2 \vartheta_2 = 10 \text{ с}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{с} = 0,5$, так что

$R = 0,05 + 0,5 = 0,55 < 1$, и стационарный режим существует.

Тогда искомое $u_2 = w_2 + \vartheta_2$ (формула (7.2)), где w_2 вычисляется по формуле (7.1) при $\vartheta_1^{(2)} = 2\vartheta_1^2$, $\vartheta_2^{(2)} = 2\vartheta_2^2$, т.е.

$$w_2 = \frac{R_1}{(1-R_1)} \vartheta_2 + \frac{1}{(1-R_1)(1-R_2)} (\lambda_1 \cdot 2 \cdot \vartheta_1^2 + \lambda_2 \cdot 2 \cdot \vartheta_2^2),$$

где $R_1 = \rho_1$, $R_2 = R$.

Подставляя сюда исходные и вычисленные выше данные, получим $w_2 = 21,11 \text{с}$, так что искомое среднее время u_2 ответа компьютера кассиру равно

$$u_2 = 21,11 \text{с} + 0,05 \text{с} = 21,16 \text{с}.$$

7.5. Домашнее задание

Решить задачи 7.5–7.7 и подготовиться к контрольной работе.

Задача 7.5. Решить задачу 7.1. при условии, что компьютер абсолютно надёжен (т.е. нет неисправностей), и сравнить результаты решений.

Задача 7.6. Решить задачу 7.2. при условии, что никаким телеграммам при отправке предпочтение не отдаётся, и сравнить результаты решений.

Задача 7.7. Вычислительная система (ВС) обслуживает простейший, интенсивностью 1 мин^{-1} , поток запросов пользователей, затрачивая на решение в среднем 36 секунд. Эта работа может быть прервана запросами от оператора ВС, следующими в среднем через

10 минут и обрабатываемыми за 6 секунд. В свою очередь, эти запросы могут прерываться сигналами от схем контроля ВС, поступающими с интенсивностью $0,6 \text{ час}^{-1}$, а неисправность устраняется в среднем за 10 минут. Оценить среднее время ответа ВС оператору и пользователю.

7.6. Контрольные вопросы

1. Чем режим абсолютных приоритетов отличается от режима относительных приоритетов?
2. Что такое СМО с дообслуживанием? С возобновлением обслуживания?
3. Можно ли считать СМО с возобновлением обслуживания системой без потерь? Почему?
4. С какой целью вводится режим абсолютных приоритетов?
5. Из каких двух составляющих, согласно формуле (7.1), складывается среднее время ожидания в СМО с абсолютными приоритетами?
6. Обслуживание заявок какого приоритета не прерывается в СМО с абсолютными приоритетами?
7. При каких условиях справедлив закон (7.5) сохранения времени ожидания?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Ниже приводятся формулировки типовых задач, решаемых магистрантами на данной контрольной работе.

Сама контрольная работа рассчитана на два академических часа и проводится по индивидуальному для каждого магистранта варианту. Каждый вариант включает в себя теоретический вопрос по первому зачетному модулю программы дисциплины и две задачи по типу задач, решённых на предшествующих практических занятиях.

Задача 8.1. По формулам Эрланга вычислить вероятность отказа в СМО М/М/2/0 при заданных числовых значениях интенсивности λ входящего потока и интенсивности μ обслуживания заявок в канале. Результат проверить с помощью уравнений Колмогорова.

Задача 8.2. Определить загрузку ρ СМО М/М/2/0, в которой вероятность отказа равна вероятности простоя.

Задача 8.3. Вычислить вероятность простоя СМО М/М/2/0 при заданных числовых значениях параметров λ и μ двумя способами: по формулам Эрланга и с помощью уравнений Колмогорова.

Задача 8.4. Вычислить среднюю длину очереди заявок в СМО М/М/1 при заданных числовых значениях интенсивности λ входящего потока и среднего времени θ обслуживания заявки.

Задача 8.5. Вычислить среднее время пребывания заявки в СМО М/Д/1 при заданных числовых значениях интенсивности λ входящего потока и среднего времени θ обслуживания заявки.

Задача 8.6. Вычислить среднее время ожидания в СМО М/М/1 при заданных числовых значениях параметров λ и θ .

Задача 8.7. Вычислить среднее время ожидания заявки 2-го приоритета в СМО М/М/1 при заданных числовых значениях параметров (λ_1, λ_2) , (θ_1, θ_2) при обслуживании двумерного входящего потока в режиме относительных приоритетов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9. СТОХАСТИЧЕСКИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.

9.1 Цель занятия

Целью занятия является приобретение навыков расчёта основных характеристик экспоненциальных стохастических сетей массового обслуживания применительно к моделям конкретных объектов и процессов.

9.2. Краткие теоретические сведения

Сетью массового обслуживания (СтМО) называется совокупность $n+1$ систем массового обслуживания (СМО), которые обмениваются между собой заявками. При этом система S_0 выделяется особо и называется **источником заявок**; её функция – генерировать в общем случайный поток заявок интенсивности λ_0 . Другие системы, $S_1, S_1, \dots, S_n$, представляют собой в общем случае многоканальные СМО с известным числом каналов $K_1, \dots, K_n$ и известными средними временами $\theta_1, \dots, \theta_n$ обслуживания заявок в них.

СтМО называется **стохастической**, если поток заявок от источника, маршруты передачи заявок и времена обслуживания их в СМО носят случайный характер.

Для стохастической СтМО считается, в частности, известной матрица

$$P = (p_{ij})_{n+1}^{n+1},$$

где p_{ij} – вероятность того, что заявка системы из S_i направляется в S_j .

Если ни одна заявка, поступившая в сеть, не теряется в процессе обслуживания, то такая СтМО называется *сетью без потерь*.

В СтМО, так же как и в СМО, возможно существование стационарного режима. Одним из признаков такого режима является равенство интенсивностей $\lambda_{вхi}$ и $\lambda_{выхj}$ входного и выходного потоков заявок для любой СМО S_i сети: $\lambda_{вхi} = \lambda_{выхj} = \lambda_i$.

Интенсивности λ_i потоков заявок, входящих в СМО S_i , вычисляются как корни системы линейных уравнений

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j p_{ji}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (9.1)$$

Решая эту систему, можно получить выражения вида

$$\lambda_i = \bar{b}_i \lambda_0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.2)$$

Коэффициент α_i при этом обычно называется коэффициентом передачи и имеет смысл среднего числа прохождений какой-либо заявки через СМО S_i в процессе обслуживания.

СтМО называется *открытой*, или *разомкнутой*, если интенсивность λ_0 не зависит от числа заявок, находящихся в сети. В разомкнутой СтМО существует стационарный режим (т.е. режим, в котором характеристики сети «не плывут» во времени), если выполняется условие

$$\lambda_0 < \lambda_{\max}, \quad (9.3)$$

$$\text{где} \quad \lambda_{\max} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{K_i}{\bar{b}_i \bar{g}_i} \right\}. \quad (9.4)$$

В этом режиме можно определить следующие не зависящие от времени сетевые характеристики: l – *среднюю суммарную длину очереди*, m – *среднее число заявок*, пребывающих в сети, w – *среднее время ожидания заявки в очередях*, и u – *среднее время пребывания заявки в СтМО*, а также одноименные узловые характеристики l_i , m_i , w_i и u_i – для всех систем (узлов) S_i , $i = 1, \dots, n$.

Указанные характеристики связаны соотношениями:

$$l = \sum_{i=1}^n l_i, \quad (9.5)$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (9.6)$$

$$w = \sum_{i=1}^n \delta_i w_i, \quad (9.7)$$

$$u = \sum_{i=1}^n \delta_i u_i. \quad (9.8)$$

Полезны также и связи между сетевыми характеристиками – «сетевые» формулы Литтла:

$$w = 1/\lambda_0, \quad (9.9)$$

$$u = m/\lambda_0. \quad (9.10)$$

Подчеркнем, что формулы (9.9) и (9.10) справедливы только для сетей, в которых отсутствуют потери заявок.

Стохастическая СтМО называется *экспоненциальной*, если поток заявок от источника – простейший, а времена обслуживания во всех системах сети распределены по экспоненциальному закону. Для экспоненциальной разомкнутой сети узловые характеристики можно вычислить по формулам:

$$l_i = \frac{K_i^{K_i-1}}{(K_i-1)!} \cdot \frac{c_i^{K_i+1}}{(1-c_i)^2} p_{0i}, \quad (9.11)$$

где $c_i = \lambda_0 \delta_i \vartheta_i / K_i$ (9.12)

$$p_{0i} = \frac{1}{\sum_{S=0}^{K_i} \frac{R_i^S}{S!} + \frac{R_i^{K_i+1}}{K_i!(K_i - R_i)}} \quad (9.13)$$

и

$$R_i = K_i \cdot \rho_i. \quad (9.14)$$

Далее,

$$m_i = l_i + R_i; \quad (9.15)$$

$$w_i = l_i / (\alpha_i \lambda_0); \quad (9.16)$$

$$u_i = m_i / (\alpha_i \lambda_0); \quad (9.17)$$

Величина ρ_i , вычисляемая по формуле (9.12), имеет смысл средней загрузки одного канала системы S_i , а величина R_i из (9.14) – полная загрузка СМО S_i . Очевидно, что $\rho_i < 1$ и $R_i < K_i$.

9.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 9.1.

Информационно-вычислительный центр располагает ксероксом – автоматом А, комплексом К из двух компьютеров и фильмотекой Ф. Подход к А свободный, а к К и Ф – только через регистратора Р. Клиент от входа О с одинаковой вероятностью направляется к одному из серверов А, К и Ф, а после обслуживания на нём – с одинаковой вероятностью снова посещает один из них либо направляется к выходу (покидает центр).

Изобразить граф соответствующей СтМО и записать матрицу вероятностей переходов в сети.

Задача 9.2.

В условиях задачи 9.1 определить максимальную интенсивность (9.4) входного потока, при которой в сети ещё возможен стационарный режим, если средние времена обслуживания, в минутах равны: $\vartheta_A=6$, $\vartheta_K=15$, $\vartheta_F=9$.

Задача 9.3.

Оценить среднее время (9.8) пребывания клиента в центре и среднее число (9.6) клиентов в нём в стационарном режиме, если интенсивность λ_0 потока клиентов – 3 час^{-1} .

Задача 9.4.

Изделие обрабатывается на конвейере из трёх станков и затем поступает в ОТК, откуда оно либо направляется на склад с вероятностью 0,8, либо возвращается на доработку в начало конвейера. Среднее время обработки на всех станках одинаково и равно 1 минуте, среднее время контроля – 6 секунд.

Коэффициент загрузки станков равен 0,5.

Определить среднее время выпуска изделия и среднее количество изделий, выпускаемых за час работы.

9.4. Пример решения типовой задачи

Решим задачу 9.1. Граф Г сети массового обслуживания, моделирующей функционирование информационно-вычислительного центра, представлен на рисунке 9.1.

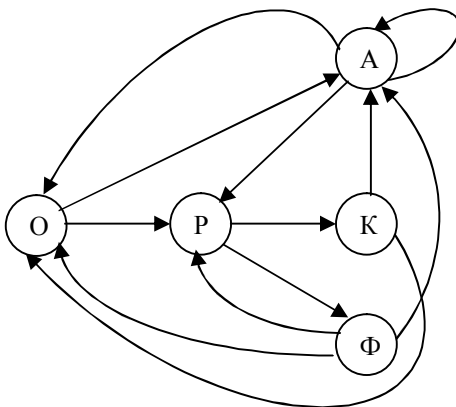


Рисунок 9.1. Граф сети массового обслуживания

Ему соответствует матрица P вероятностей переходов:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{О} & \text{А} & \text{К} & \text{Р} & \text{Ф} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{О} \\ \text{А} \\ \text{К} \\ \text{Р} \\ \text{Ф} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

9.5. Домашнее задание

Решить задачу 9.5 и подготовиться к занятию «Оценка трудоёмкости алгоритма методом марковских цепей».

Задача 9.5. Решить задачи 9.1–9.3 для случая, когда из центра удален регистратор Р, и сравнить результаты решений.

9.6. Контрольные вопросы

1. Что такое сеть массового обслуживания (СтМО)?
2. Какие системы входят в СтМО?

3. Каким параметром характеризуется источник заявок в СтМО?
4. Какими параметрами описываются рабочие СМО в СтМО?
5. Каков признак стационарного режима СтМО?
6. Каков смысл коэффициента α_i передачи СМО i ?
7. Что такое разомкнутая СтМО?
8. Как выглядит условие существования стационарного режима в разомкнутой СтМО?
9. Какими соотношениями связаны сетевые и узловые характеристики сети?
10. Как выглядят «сетевые» формулы Литтла? При каком условии они справедливы?
11. Какая СтМО называется экспоненциальной?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10. ОЦЕНКА ТРУДОЁМКОСТИ АЛГОРИТМА МЕТОДОМ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

10.1 Цель занятия

Целью занятия является овладение навыками формального описания алгоритма с применением графовой модели, определения трудоемкости выполнения отдельных блоков алгоритма и вероятностей переходов между ними, оценки средней трудоемкости алгоритма методом марковских цепей.

10.2. Краткие теоретические положения

Критериями оценки того или иного алгоритма обычно выбираются его сложность и трудоемкость.

Сложность алгоритма – это качество, оцениваемое объемом памяти, необходимым для реализации алгоритма. Сложность обычно измеряется в байтах. Не следует путать это понятие со сложностью структуры алгоритма (там основное – количество связей между элементами структуры).

В качестве **трудоемкости алгоритма** рассматривается количество операций, необходимых для его реализации. Количество операций обычно выражается в некоторых стандартных единицах.

Если алгоритм реализуется на компьютере, то, очевидно, что время его реализации пропорционально трудоемкости. Для конкретной реализации алгоритма, содержащего циклы или условные переходы,

трудоемкость Θ – случайная величина. Оценками этой случайной величины могут служить: θ – среднее значение трудоемкости, а также $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$, минимальное и максимальное значения трудоемкости, соответственно.

Оценку величины θ полезно производить тогда, когда речь идет о массовом (многократном) применении алгоритма. Если, например, алгоритм реализуется большое число раз (N), то величина $N \cdot \theta$ может служить хорошей оценкой общего объема работ по применению алгоритма.

Однако если речь идет о малом или даже однократном применении алгоритма, более пригодны оценки $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$.

Хорошей моделью для оценки трудоемкости алгоритма является общепринятая запись алгоритма в виде некоторой блок-схемы (БСА). Однако, с нашей точки зрения содержательный смысл блоков и условных переходов несущественны, а важна трудоемкость блоков и вероятность переходов между ними. Рассмотрим, как с помощью этой модели можно оценить интересующие нас характеристики. Начнем с оценки $\theta = \bar{\Theta}$

В общем случае БСА можно представить в виде графа G с $(K+2)$ -я вершинами, где 0 и K соответствуют началу и концу алгоритма, а остальные K вершин – блокам БСА. Каждая вершина i характеризуется трудоемкостью θ_i ее выполнения. Переходы между блоками i и j обозначены в модели дугами (i, j) . Дуга характеризуется вероятностью перехода P_{ij} в процессе реализации алгоритма.

Будем считать P_{ij} постоянными и известными, также как и θ_i , $i=1, \dots, K$.

Естественно, должны выполняться условия:

$$\sum_{i=1}^K p_{ij} = 1, i = 1, \dots, K. \quad (10.1)$$

Предположим, что нам каким-то образом удалось определить числа n_i – среднее число прохождения блока i в процессе реализации алгоритма. Тогда величину θ легко оценить значением:

$$\theta = \sum_{i=1}^K \theta_i \cdot n_i. \quad (10.2)$$

Оценка вероятностей переходов P_{ij} – отдельная проблема, мы не будем ее касаться.

Приведем лишь примеры оценки в простейших случаях.

Пусть цикл задается блоком модификации, например, таким как на рисунке 10.1.

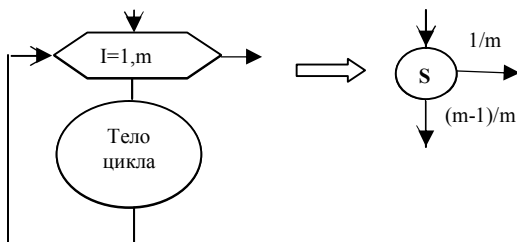


Рисунок 10.1. Блок модификации и соответствующий ему элемент графовой модели.

Второй простейший пример – разветвление:

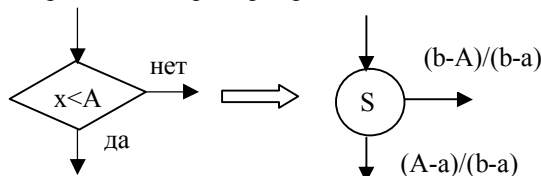


Рисунок 10.2. Блок анализа логического условия и соответствующий ему элемент графовой модели.

Это справедливо, если полагать, что случайная величина A распределена на отрезке $[a, b]$ равномерно.

Методы оценки трудоемкости алгоритмов, в общем случае, разнятся способом вычисления среднего значения числа проходов i -го блока (n_i).

Оценка средней трудоемкости алгоритма методом марковских цепей предполагает постоянство P_{ij} и независимость этих величин от того, каким образом процесс попал в вершину i .

Процесс реализации алгоритма в этом случае можно рассматривать как марковский процесс с $K+2$ состояниями, где состояние 1 является начальным, а состояние K – поглощающим. При этом числа $n_1, \dots, n_K$ можно рассматривать как **средние числа пребывания** марковского процесса в состояниях 1, 2, ..., K .

В соответствии с теорией марковских цепей, вычислять их можно как корни системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} n_1 = 1 + \sum_{j=1}^K p_{j1} \cdot n_j \\ n_i = \sum_{j=1}^K p_{ji} \cdot n_j \end{cases} \quad (10.3)$$

10.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 10.1. Задана модель алгоритма в виде последовательности описаний узлов граф-схемы алгоритма с указанием трудоемкости соответствующего узла.

Строка вида: $\theta \text{ I: J}$ соответствует безусловному переходу от узла номер I к узлу номер J с объявленной трудоемкостью θ , а строка вида $\theta \text{ I: J (P) M}$ расшифровывается как переход от узла номер I к узлу номер J с вероятностью P и к узлу номер M с вероятностью (1-P). Трудоемкость узла i равна θ_i . Символ K в модели определяет конечный узел.

Пример описания алгоритма:

Трудоемкость узла i	Описание межузлового перехода
	0 : 1
1	1 : 2
2	2 : 3 (0.5) 4
4	3 : 4
2	4 : 6 (0.4) 5
4	5 : 2
6	6 : 7
2	7 : 2 (0.9) 8
5	8 : K
	K

Требуется по предложенному описанию алгоритма построить соответствующую ему граф-схему и определить среднюю трудоёмкость этого алгоритма методом марковских цепей.

10.4. Пример решения типовой задачи

Рассмотрим пример решения типовой задачи. На рисунке 10.3 представлен алгоритм в виде блок-схемы и соответствующий ему граф.

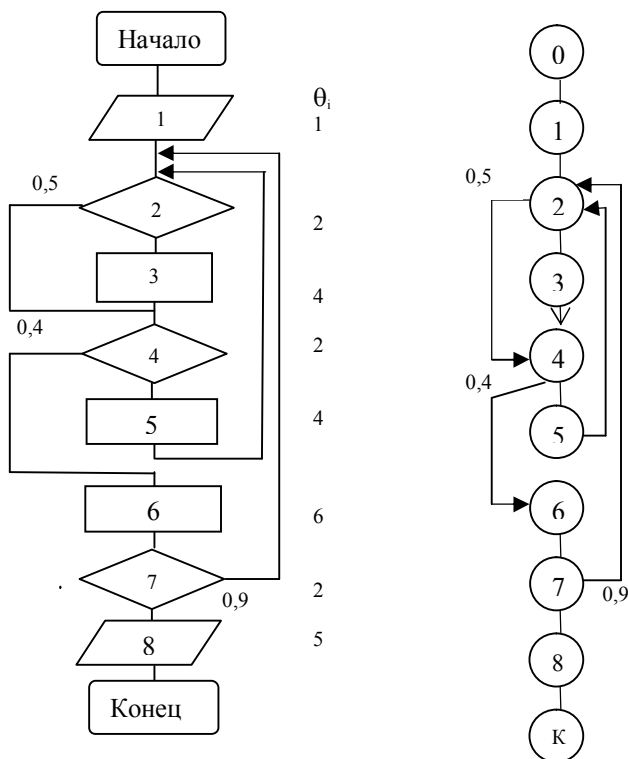


Рисунок 10.3. Блок-схема алгоритма и соответствующий ей граф переходов.

Составим систему уравнений (10.3) для модели БСА, представленной на рисунке 10.3. Решив их, найдем среднюю трудоемкость θ алгоритма по формуле (10.2).

Имеем:

$$\begin{cases} n_1=1 \\ n_2=n_1+n_5+0,9n_7 \\ n_3=0,5n_2 \\ n_4=n_3+0,5n_2 \\ n_5=0,6n_4 \\ n_6=0,4n_4 \\ n_7=n_6 \\ n_8=0,1n_7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l|l} n_i & \theta_i \\ \hline n_1 & 1 \\ n_2 & 25 \\ n_3 & 12,5 \\ n_4 & 25 \\ n_5 & 15 \\ n_6 & 10 \\ n_7 & 10 \\ n_8 & 1 \end{array}$$

Таким образом, средняя трудоёмкость рассматриваемого алгоритма: $\theta = \sum_{i=1}^8 u_i \cdot n_i = 296$.

10.5. Домашнее задание

Решить задачи 10.2 и 10.3 и подготовиться к занятию «Оценка трудоёмкости алгоритма сетевым методом».

Задача 10.2. По табличному описанию алгоритма изобразить граф-схему алгоритма:

Трудоёмкость узла θ_i	Описание межузлового перехода
	0 : 1
10	1 : 2
10	2 : 3 (0,6) 9
10	3 : 4 (0,9) 8
10	4 : 5
10	5 : 6
10	6 : 4 (0,8) 7
10	7 : 3 (0,2) 8
10	8 : 9
10	9 : К
	К

Задача 10.3. Оценить среднюю трудоёмкость алгоритма в условиях задачи 10.2.

10.6. Контрольные вопросы

1. Что понимается под сложностью алгоритма?
2. Что такое трудоёмкость алгоритма?
3. Является ли трудоёмкость алгоритма случайной величиной, если да, то почему?
4. При оценке средней трудоёмкости алгоритма методом марковских цепей предполагается ли постоянство вероятностей переходов из одной вершины в другую?
5. Должна ли присутствовать независимость вероятностей переходов из одной вершины в другую от того, каким образом процесс попал в исходную вершину?
6. Как определить среднее число прохождения блока i в процессе реализации алгоритма?

7. Как подсчитать среднюю трудоёмкость алгоритма, если известны средние трудоёмкости отдельных блоков и средние значения чисел прохождения этих блоков при реализации алгоритма?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11. ОЦЕНКА ТРУДОЁМКОСТИ АЛГОРИТМА СЕТЕВЫМ МЕТОДОМ

11.1 Цель занятия

Целью занятия является овладение навыками оценки средней трудоёмкости алгоритма сетевым методом.

11.2. Краткие теоретические положения

11.2.1 Сетевой метод оценки трудоёмкости для графа без циклов. Сетевой метод непосредственно применим только к графу без циклов. В таком графе вершины предварительно нумеруются так, чтобы начальная вершина имела наименьший номер, например, 0, а очередной номер i присваивается вершине, в которую входят дуги от уже пронумерованных вершин, с номерами, меньшими i .

Для такого графа величины n_i рассчитываются по формулам:

$$\begin{cases} n_1 = 1 \\ n_i = \sum_{j=1}^K p_{ji} \cdot n_j, \quad i = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (11.1),$$

а средняя трудоёмкость алгоритма соответственно равна

$$\theta = \sum_{i=1}^K \theta_i \cdot n_i. \quad (11.2)$$

Сетевой метод оценки алгоритма для графа с циклами.

Если граф, для оцениваемого алгоритма содержит циклы, то применяется предварительный метод сжатия циклов и замены их вершинами с эквивалентными трудоёмкостями.

Циклом называется совокупность вершин и дуг, охватываемых дугой обратной связи. Указанная совокупность дуг называется **телом цикла**. Циклы могут быть многократно вложены друг в друга.

Циклом первого ранга называется цикл, не содержащий внутри себя ни одного цикла. Очевидно, что тело цикла первого ранга – ориентированный граф без циклов.

Циклом второго ранга называется цикл, содержащий хоть бы один цикл первого ранга.

Циклом S-го ранга называется цикл, содержащий внутри себя хотя бы один цикл (S-1)-го ранга и, возможно, циклы меньших рангов. Процесс сжатия циклов в эквивалентные им по трудоемкости вершины начинается с самых внутренних циклов, т.е. с циклов первого ранга. Поскольку тело такого цикла – ориентированный граф без циклов, то к нему может быть применён сетевой метод оценки трудоемкости. После такой оценки все вершины этого подграфа, за исключением условной вершины цикла, легко «сжать» в одну вершину «С», присвоив ей трудоемкость i_c . Трудоемкость условной вершины «Y» обозначается θ_y .

Как показано на рисунке 11.1, в процессе сжатия циклов первого ранга можно выделить три типа циклов.

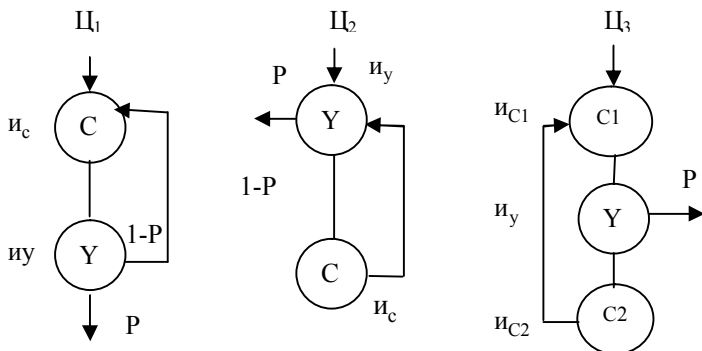


Рисунок 11.1. Типы циклов, встречающиеся в блок-схемах алгоритмов.

Воспользуемся методом марковских цепей для оценки средней трудоемкости $\theta_{цi}$ каждого типа цикла.

Для цикла типа $Ц_1$ система уравнений относительно чисел n_c и n_y проходов вершин C и Y имеет вид:

$$\begin{cases} n_c = 1 + (1-p)n_y \\ n_y = n_c \end{cases} \quad (11.3)$$

В результате решения этой системы получим:

$$\begin{aligned} n_c &= n_y = 1/p \text{ и, по (11.2)} \\ \theta_{ц1} &= \theta_c n + \theta_y n_y = (\theta_c + \theta_y)/p. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Для цикла типа $Ц_2$:

$$\begin{cases} n_y = 1 + n_c \\ n_c = (1-p)n_y. \end{cases} \quad (11.5)$$

Результат решения системы (11.5):

$$n_y = 1/p, n_c = 1/p-1.$$

$$\text{Тогда } \theta_{ц2} = \theta_c n_c + \theta_y n_y = \theta_y/p + \theta_c(1/p-1) = (\theta_c + \theta_y)/p - \theta_c. \quad (11.6)$$

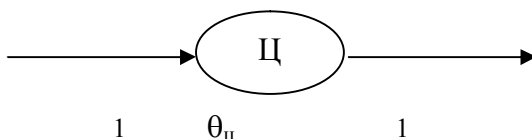
Для цикла типа Ц₃ система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} n_{c1} = 1 + n_{c2} \\ n_y = n_{c1} \\ n_{c2} = (1-p)n_y. \end{cases} \quad (11.7)$$

Отсюда, $n_y = n_{c1} = 1/p$, $n_{c2} = 1/p-1$.

$$\text{Тогда, } \theta_{ц3} = \theta_{c1} n_{c1} + \theta_y n_y + \theta_{c2} n_{c2} = (\theta_{c1} + \theta_y)/p - \theta_{c2}. \quad (11.8)$$

После такого подсчета все вершины цикла Ц_i сжимаются в одну вершину с трудоемкостью $\theta_{ц}$ и с вероятностями входа и выхода, равными 1.



После сжатия циклов первого ранга, они исчезают, а циклы второго ранга становятся циклами первого ранга, и т.д. Процесс повторяется до тех пор, пока все циклы не будут сжаты и не получен граф без циклов, к которому может быть применен сетевой метод.

11.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 11.1.

Задано описание алгоритма без циклов в виде граф-схемы с указанием трудоемкостей всех узлов.

Оценить среднюю трудоёмкость этого алгоритма сетевым методом.

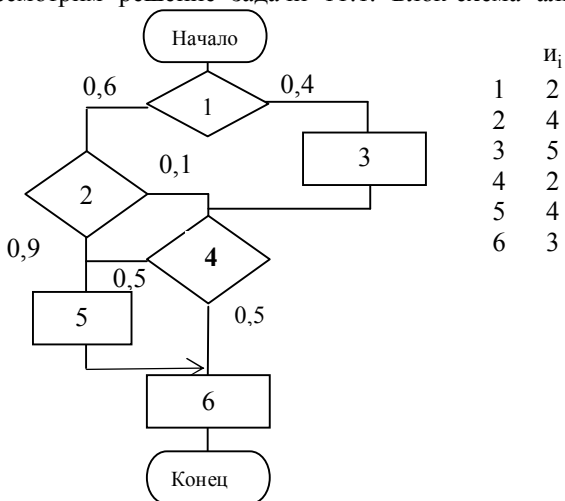
Задача 11.2.

Задано описание алгоритма, включающего в себя циклы, в виде граф-схемы с указанием трудоемкостей всех узлов.

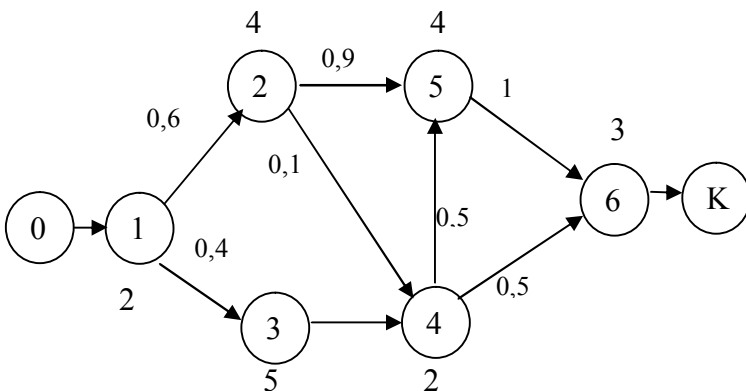
Оценить среднюю трудоёмкость этого алгоритма сетевым методом, используя поэтапную процедуру сжатия циклов.

11.4. Примеры решения типовых задач

Рассмотрим решение задачи 11.1. Блок-схема алгоритма имеет вид:



В соответствии с приведенной выше блок-схемой алгоритма построим граф-схему алгоритма, представляющую собой сеть:



Для построенного графа сети по формулам (11.1) имеем:

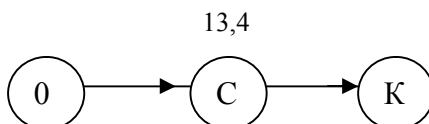
$$\left\{ \begin{array}{l} n_1=1, \\ n_2=0,6 \cdot n_1=0,6 \\ n_3=0,4 \cdot n_1=0,4 \\ n_4=n_3+0,1 \cdot n_2=0,4+0,06=0,46 \\ n_5=0,9 \cdot n_2+0,5 \cdot n_4=0,54+0,23=0,77 \\ n_6=n_5+0,5 \cdot n_4=0,77+0,23=1. \end{array} \right.$$

Используя полученные значения n_i , вычислим среднюю трудоёмкость алгоритма по формуле (11.2):

$$\theta_c = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,46 + 4 \cdot 0,77 + 3 \cdot 1 = 13,4.$$

Таким образом, все вершины графа, кроме начальной и конечной, можно заменить одной вершиной C и приписать ей трудоёмкость $\theta_c=13,4$.

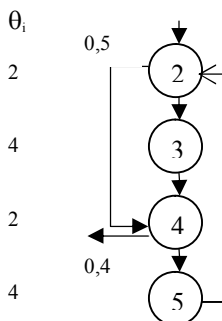
Полученная после преобразования сеть имеет вид:



Теперь решим задачу 11.2. применительно к алгоритму, блок-схема которого представлена на рисунке 10.3.

В соответствующей граф-схеме алгоритма можно выделить два цикла: цикл 1-го ранга – (2–3–4–5) и цикл 2-го ранга – (2–3–4–5–6–7).

Рассмотрим сначала цикл первого ранга, включающий в себя вершины 2, 3, 4 и 5, и относящийся к третьему типу циклов.



Вершины 2, 3 и 4 соответствуют вершине C_1 для типичной схемы цикла третьего типа (рисунок 11.1), вершина 5 – вершине C_2 , а

вершина 4 – условной вершине Y , определяющей выход из цикла. Вероятность выхода из цикла $p=0,4$.

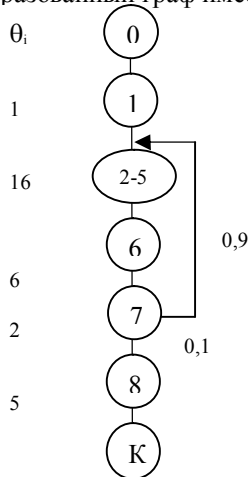
Трудоёмкость вершины C_1 вычислим следующим образом. Подграф, включающий вершины 2, 3 и 4, является сетью, поэтому к нему можно применить сетевой метод расчета трудоёмкости. В результате несложных расчётов получим:

$$n_2=1; n_3=0,5 \cdot n_2=0,5; n_4=n_3+0,5 \cdot n_2=1; \theta_{c_1}=2 \cdot 1+4 \cdot 0,5+2 \cdot 1=6.$$

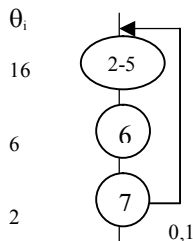
Трудоёмкость вершины $\theta_{c_2}=\theta_5=4$, а трудоёмкость условной вершины $\theta_y=\theta_4=2$. Тогда, согласно формуле (11.8),

$$\theta_{2-5}=(\theta_{c_1}+\theta_y)/p - \theta_{c_2}=(6+2)/0,4 - 4=16.$$

Вершины 2, 3, 4 и 5 в исходном графе можно заменить одной вершиной (2 – 5). Преобразованный граф имеет вид:



В преобразованном графе вершины (2-5), 6 и 7 образуют цикл, который относится к типу 1 (рисунок 11.1).

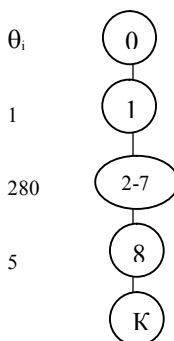


Подграф, включающий вершины (2-5), и 6, является сетью, поэтому к нему можно применить сетевой метод расчета

трудоемкости, т.е.: $n_{2,5}=1$; $n_6=n_{2,5}=1$; $\theta_c=16+6=22$. Трудоемкость условной вершины $\theta_y=\theta_7=2$. Тогда, согласно формуле (11.4),

$$\theta_{2-7}=(\theta_c+\theta_y)/p=(22+6)/0,1=280.$$

Вершины (2 – 5), 6 и 7 в графе можно заменить одной вершиной (2–7). Преобразованный граф не имеет циклов и представляет собой сеть:



В итоге получим среднюю трудоемкость алгоритма

$$\theta=\theta_1+\theta_{2-7}+\theta_8=1+280+5=286.$$

11.5. Домашнее задание

Решить задачи 11.3 и подготовиться к занятию «Оценка маргинальных трудоемкостей алгоритма».

Задача 11.3. В условиях задачи 10.3 оценить среднюю трудоемкость алгоритма сетевым методом.

11.6. Контрольные вопросы

1. Какой граф называется сетью?
2. Как оценить среднюю трудоемкость алгоритма, не содержащего циклов?
3. Какова основная идея сетевого метода оценки трудоемкости алгоритма, содержащего циклы?
4. Что такое ранг цикла?
5. Какие циклы называются циклами 1-го ранга? 2-го ранга? k-го ранга?
6. Какие основные типы циклов выделяются в граф-схемах алгоритмов?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12. «ОЦЕНКА МАРГИНАЛЬНЫХ ТРУДОЁМКОСТЕЙ АЛГОРИТМА»

12.1 Цель занятия

Целью занятия является овладение навыками оценки минимальной и максимальной трудоемкости алгоритма.

12.2. Основные теоретические положения

Маргинальными оценками называются оценки минимальной и максимальной трудоемкости алгоритма.

Задача определения маргинальных оценок ставится следующим образом. Для каждой вершины i граф-схемы алгоритма известны $\theta_{i\min}$ и $\theta_{i\max}$, соответственно минимальная и максимальная трудоемкости вершины, а также P_{ij} – вероятности перехода от вершины i к вершине j ($i=1,2,\dots,K$).

Требуется найти значения величин $A=\theta_{\min}$ и $B=\theta_{\max}$ – минимальной и максимальной, соответственно, трудоемкостей алгоритма по предлагаемой граф-схеме.

На графе D без циклов определить маргинальные трудоемкости не составляет особого труда.

Обозначим через A_i и B_i – минимальную и максимальную, соответственно, трудоемкости реализации алгоритма на момент прохождения блока i .

$$\begin{aligned} \text{По определению} \quad A_0 &= B_0 = 0; \\ A_i &= \min_{(j,i) \in D} \{A_j\} + \theta_{i\min}, \end{aligned} \quad (12.1)$$

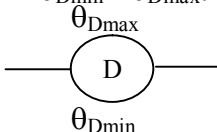
$$B_i = \max_{(j,i) \in D} \{B_j\} + \theta_{i\max}. \quad (12.2).$$

Дойдя до конечной вершины K , получим:

$$A = A_K = \min_{(j,K) \in D} \{A_j\}, \quad (12.3),$$

$$B = B_K = \max_{(j,K) \in D} \{B_j\}. \quad (12.4)$$

После этого граф-схему алгоритма можно заменить одной вершиной с маргинальными трудоемкостями $\theta_{D\min}$ и $\theta_{D\max}$:



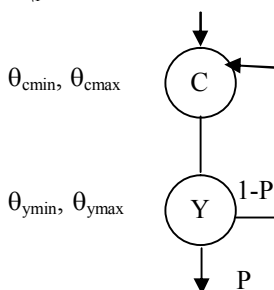
Для графа с циклами так же, как и при вычислении средней трудоёмкости, применяется сетевой метод, причем вершинам, соответствующим сжимаемым циклам присваиваются маргинальные оценки, равные:

$$\theta_{\text{цmin}} = A_c \cdot n_{\text{цmin}} \text{ и } \theta_{\text{цmax}} = B_c \cdot n_{\text{цmax}},$$

где A_c и B_c – соответственно минимальные и максимальные трудоёмкости тела цикла, а $n_{\text{цmin}}$ и $n_{\text{цmax}}$ – минимальные и максимальные числа прохождения цикла, соответственно.

Определим эти числа для всех типов циклов:

1. Цикл типа Ц₁:



Здесь $n_{\text{цmin}} = 1$, $A_c = \theta_{\text{cmin}} + \theta_{\text{ymin}}$

Чтобы оценить $n_{\text{цmax}}$, предположим, что число прохождений цикла распределено равномерно на интервале $[n_{\text{цmin}}, n_{\text{цmax}}]$ со средним $n_{\text{ц}} = 1/P$.

Тогда, для определения $n_{\text{цmax}}$ имеем следующее уравнение:

$$(n_{\text{цmin}} + n_{\text{цmax}})/2 = n_{\text{ц}}.$$

Заменив $n_{\text{ц}}$ на $1/P$, получим

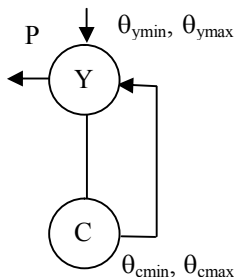
$$(1 + n_{\text{цmax}})/2 = 1/P.$$

Отсюда, $n_{\text{цmax}} = 2/P - 1$.

Далее, $B_c = \theta_{\text{cmax}} + \theta_{\text{ymax}}$, так что,

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\text{ц1min}} &= \theta_{\text{cmin}} + \theta_{\text{ymin}} \\ \theta_{\text{ц1max}} &= (\theta_{\text{cmax}} + \theta_{\text{ymax}}) * (2/P - 1) \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

2. Цикл типа Ц₂:



Для этого типа цикла $n_{cmin}=0$, $\theta_{ц2min}=\theta_{ymin}$.

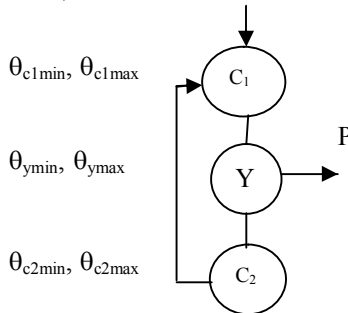
Аналогично случаю, рассмотренному выше, предположим, что число прохождений цикла распределено равномерно на интервале $[n_{цmin}, n_{цmax}]$ со средним $n_{ц}=1/P-1$.

Тогда $(n_{цmin}+n_{цmax})/2=n_{ц}$.

Произведя замену, $n_{цmax}/2=1/P-1$, получим $n_{цmax}=2/(P-2)$, так что,

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{ц2min}=\theta_{ymin} \\ \theta_{ц2max}=(\theta_{cmax}+\theta_{ymax}) \cdot (2/P-1) \end{array} \right\}. \quad (12.6)$$

3. Цикл типа Ц₃:



Действуя аналогично предыдущему, можно показать, что здесь

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{ц3min}=\theta_{c1min}+\theta_{ymin} \\ \theta_{ц3max}=(\theta_{c1max}+\theta_{ymax}) \cdot (2/P-1)+\theta_{c2max} \cdot (1/P-2). \\ \text{Или иначе:} \\ \theta_{ц3max}=2 \cdot (\theta_{c1max}+\theta_{ymax}+\theta_{c2max})/P-(\theta_{c1max}+\theta_{ymax}+2 \cdot \theta_{c2max}). \end{array} \right\}. \quad (12.7)$$

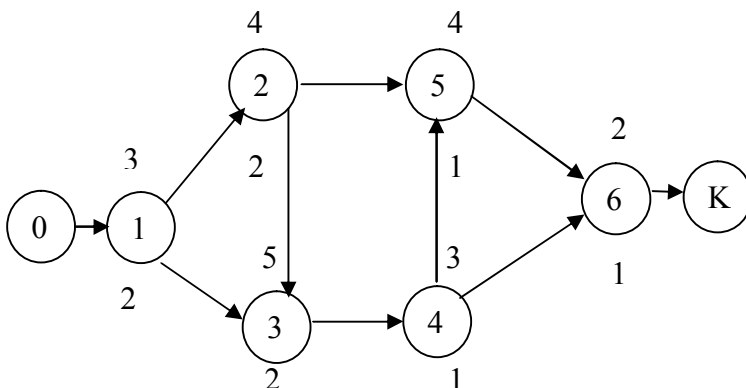
12.3. Типовые задачи для решения на занятии

Задача 12.1. Задано описание алгоритма без циклов в виде граф-схемы с указанием маргинальных трудоемкостей всех узлов. Оценить минимальную и максимальную трудоемкости этого алгоритма.

Задача 12.2. Задано описание алгоритма, включающего в себя циклы, в виде граф-схемы с указанием маргинальных трудоемкостей всех узлов. Оценить минимальную и максимальную трудоемкости этого алгоритма, используя поэтапную процедуру сжатия циклов.

12.4. Примеры решения типовых задач

Рассмотрим пример определения минимальной и максимальной трудоемкости алгоритма, заданного граф-схемой без циклов, где около каждой вершины, кроме начальной (0) и конечной (K), проставлены отметки её минимальной (снизу) и максимальной (сверху) трудоемкости:

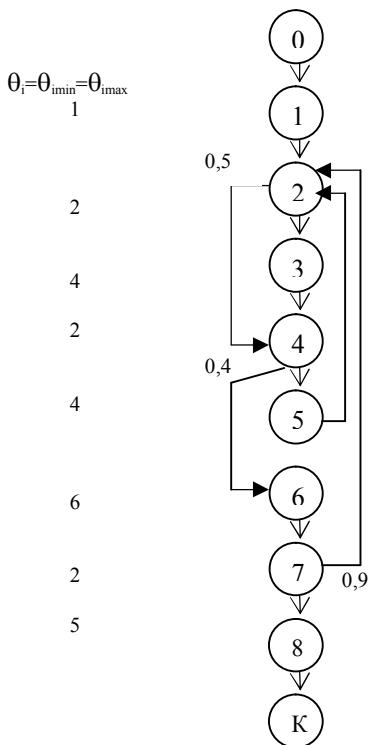


В результате применения процедуры, определённой формулами (12.1) – (12.4), получим:

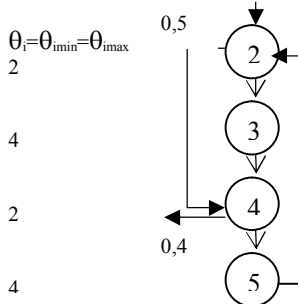
$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0, \\
 A_1 &= A_0 + 2 = 2, \\
 A_2 &= A_1 + 2 = 4, \\
 A_3 &= \min \{A_1, A_2\} + 2 = 4, \\
 A_4 &= A_3 + 1 = 5, \\
 A_5 &= \min \{A_2, A_4\} + 1 = 5, \\
 A_6 &= \min \{A_4, A_5\} + 1 = 6, \\
 A_K &= A_6 = 6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 0, \\
 B_1 &= B_0 + 3 = 3, \\
 B_2 &= B_1 + 4 = 7, \\
 B_3 &= \max \{B_1, B_2\} + 5 = 12, \\
 B_4 &= B_3 + 3 = 15, \\
 B_5 &= \max \{B_2, B_4\} + 4 = 19, \\
 B_6 &= \max \{B_4, B_5\} + 2 = 21, \\
 B_K &= B_6 = 21.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим пример оценки минимальной и максимальной трудоемкости алгоритма:



В этой граф-схеме можно выделить цикл типа Ц₃:



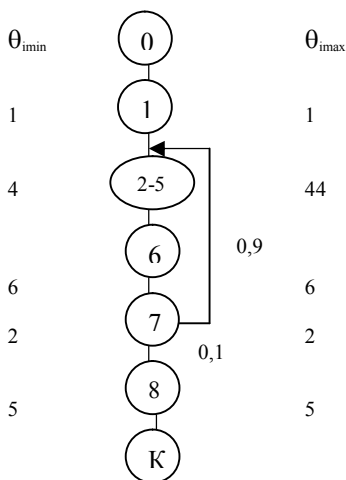
Используя формулу (12.7), получим:

$$\theta_{ц3min} = 2 + 2 = 4,$$

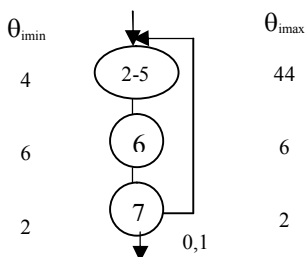
$$\theta_{ц3max} = 2 * (6 + 2 + 4) / 0.4 - (6 + 2 + 8) = 44.$$

После этого цикл заменяем вершиной (2-5) с соответствующими маргинальными трудоёмкостями/

Граф-схема алгоритма после этой замены примет вид:



В преобразованном графе вершины (2-5), 6 и 7 образуют цикл, который относится к типу 1.



Вершины (2-5) и 6 образуют тело C цикла, маргинальные трудоёмкости которого равны

$$\theta_{Cmin} = 4 + 6 = 10 \text{ и } \theta_{Cmax} = 44 + 6 = 50.$$

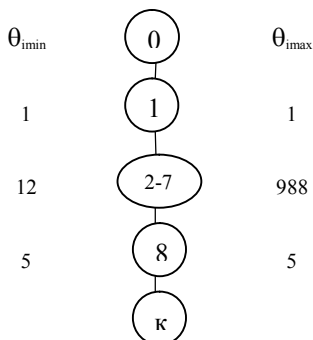
Вершина 7 – условная вершина Y , для которой $\theta_{Ymin} = \theta_{Ymax} = 2$.

Вероятность выхода из цикла $p = 0,1$.

Используя формулу (12.5) получим:

$$\theta_{Ц1min} = 10 + 2 = 12 \text{ и } \theta_{Ц1max} = (50 + 2) \cdot (2 / (0,1 - 1)) = 52 \cdot 19 = 988.$$

В итоге преобразований граф-схема алгоритма примет вид:



В итоге получим маргинальные трудоёмкости алгоритма:

$$\theta_{\min} = A_K = 1 + 12 + 5 = 18,$$

$$\theta_{\max} = B_K = 1 + 988 + 5 = 994.$$

То есть, случайная величина, определяющая трудоемкость алгоритма, распределена в диапазоне [18, 994] со средним значением равным 296.

12.5. Домашнее задание

Решить задачу 12.3.

Задача 12.3. В условиях задачи 10.2 оценить маргинальные трудоёмкости алгоритма, если известно, что средние, минимальные и максимальные трудоёмкости отдельных блоков равны между собой.

12.6. Контрольные вопросы

1. Что собой представляют маргинальные трудоёмкости?
2. В каких случаях полезно производить вычисление маргинальных трудоёмкостей?
3. Какова основная идея применения сетевого метода для вычисления маргинальных оценок трудоёмкости алгоритма, содержащего циклы?
4. Является ли значение средней трудоёмкости $\theta_{\text{ср}}$ точной серединой отрезка $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Советов Б.Я. Моделирование систем. / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 2001. – 342с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 2001. – 576с.
3. Майоров С.А. Основы теории вычислительных систем / С.А. Майоров. – М.: Высш. шк., 1978. – 408с.
4. Методические указания к выполнению лабораторных работ по разделу «Стохастические сети массового обслуживания», дисциплина «Моделирование», «Математическое моделирование и вычислительная техника». / Сост. В.В. Кирюхин – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 12с.

Заказ № ____ от « ____ » _____ 2008 г. Тираж ____ экз.
Изд-во СевНТУ