



Министерство образования и науки
Украины
Севастопольский национальный технический
университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по изучению дисциплины “Теория вероятностей
и математическая статистика” и выполнению
контрольной работы

для студентов специальности 7.091501 –
«Компьютерные системы и сети».

заочной формы обучения

Севастополь
2008

2

УДК 519.2

Методические указания по изучению дисциплины “Теория вероятностей и математическая статистика” и выполнению контрольной работы для студентов специальности 7.091501 – «Компьютерные системы и сети» заочной формы обучения / Л.А. Литвинова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. –28с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» и выполнении контрольной работы

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры Кибернетики и вычислительной техники, протокол № 11 от 25 июня 2008 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент:

Обжерин Ю.Е., д.т.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики.



1. Цель и задачи дисциплины	4
2. Основные программные вопросы	4
3. Контрольная работа	5
3.1. Задание №1	6
3.1.1. Краткие теоретические сведения	6
3.2. Задание №2	9
3.2.1. Краткие теоретические сведения	9
3.3. Задание №3	12
3.3.1. Краткие теоретические сведения	12
3.4. Задание №4	14
3.4.1. Краткие теоретические сведения	15
Библиографический список	23
Приложение А	24
Приложение Б	25
Приложение В	26
Приложение Г	27

1. Цель и задачи дисциплины

Целью преподавания дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является изучение студентами

- основ теории вероятностей;
- элементов математической статистики.

В результате изучения дисциплины студент должен знать:

- основы построения теории вероятностей;
- законы распределения случайных величин, методы их анализа и генерации;
- предельные теоремы теории вероятностей;
- методы точечных и интервальных оценок параметров распределений случайных величин;
- критерии проверки статистических гипотез.

В результате изучения дисциплины студенты должны уметь:

- проводить расчеты с использованием основных правил теории вероятностей;
- проводить исследования статистических характеристик случайных величин;
- вычислять оценки параметров распределений случайных величин;
- использовать критерии для проверки статистических гипотез.

Изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» базируется на знаниях, полученных студентами при освоении дисциплин высшая математика.

2. Основные программные вопросы

1 Классическое определение вероятности случайного события. Схема случаев. Статистическая вероятность случайного события [1,2].

2 Аксиомы теории вероятностей. Правило сложения вероятностей случайных событий. Понятие условной вероятности случайного события. Правило умножения вероятностей случайных событий. Понятие независимых случайных событий. [1,2].

3 Формула полной вероятности. Формула Байеса [1,2].

4 Случайные величины. Определения. Закон распределения случайной величины. Формы представления закона распределения дискретной случайной величины [1,2].

5 Функция распределения случайной величины и ее свойства [1,2].



6 Функция распределения дискретной случайной величины. Вероятность попадания случайной величины на отрезок. Вероятность отдельного значения случайной величины [1,2].

7 Плотность распределения. Понятие элемента вероятности. Свойства плотности распределения [1,2].

8 Числовые характеристики случайной величины (математическое ожидание, мода, медиана). Понятие начального момента [1,2].

9 Понятие центрального момента. Дисперсия. Среднее квадратическое отклонение. Свойства математического ожидания и дисперсии [1,2].

10 Коэффициент асимметрии, эксцесс [1,2].

11 Модели повторных испытаний. Схема Бернулли. Биномиальное распределение [1,2].

12 Распределение Пуассона. Понятие простейшего потока [1,2].

13 Геометрическое распределение. Гипергеометрическое распределение [1,2].

14 Равномерное распределение. Показательное распределение [1,2].

15 Нормальное распределение [1,2].

16 Функция Лапласа. Свойства. Стандартное нормальное распределение. Логарифмически-нормальное распределение [1,2].

17 Система случайных величин. Функция распределения системы двух дискретных случайных величин. Свойства [1,2].

18 Система двух непрерывных случайных величин. Функция распределения. Плотность распределения. Элемент вероятности для системы двух случайных величин [1,2].

19 Зависимые и независимые случайные величины. Числовые характеристики системы двух случайных величин. [1,2,4].

20 Числовые характеристики функций случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия функции. Теоремы о числовых характеристиках функций случайных величин [1,2].

21 Типовые законы распределения функций случайных величин [1,2].

22 Предельные теоремы теории вероятностей [1,2].

23 Выборочный метод. Распределение выборки. Выборочное распределение. [2,3,4].

24 Статистические оценки параметров распределения [2,3,4].

25 Статистическая проверка гипотез. Критерий Пирсона [3,4].

3. Контрольная работа

Задание, для выполнения контрольной работы, включает теоретический вопрос и четыре задания по основным разделам курса.

Номер варианта для выполнения контрольной работы определяется путем вычисления остатка от деления по модулю 25 числа, определенного двумя последними цифрами зачетки. Например, XXXX21 - 21, XXXX72 - 22.

Содержание теоретического вопроса определяется из списка программных вопросов (см. п. 2 настоящего пособия). Номер теоретического вопроса соответствует номеру варианта контрольной работы.

3.1. Задание №1

В урне **a** белых и **b** черных шаров. Вынимается сразу **k** шаров. Найти $P(A)$ (см. приложение А).

Для выполнения задания №1 необходимо изучить вопросы:

- случайное событие, вероятность случайного события, понятие случая;
- классическое определение вероятности случайного события.

3.1.1. Краткие теоретические сведения

Теория вероятностей – это раздел математики, в котором изучаются закономерности в случайных явлениях.

Определение 1. Случайное явление – это явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта (испытания, эксперимента) протекает каждый раз несколько по-иному.

Определение 2. Случайным событием называют всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Например, бросается монета. Выпадение герба – случайное событие.

Далее для краткости, слово случайное будем опускать, и говорить просто событие. Случайные события будем обозначать прописными буквами латинского алфавита.

Определение 3. Достоверное событие (Ω) – это такое событие, которое в результате опыта неизбежно должно произойти.

Например, в урне находятся шары белого цвета. Событие $A = \{\text{вынут белый шар}\}$ – достоверное.

Определение 4. Невозможное событие – это такое событие, которое в данном опыте вообще не может произойти.

В случае урны с шарами белого цвета событие $B = \{\text{вынут шар красного цвета}\}$ – невозможное.

Случайные события обладают той или другой степенью возможности, т. е. одни более возможны, а другие менее возможны. Для сравнения событий между собой по степени их возможности их связывают с числами. Чем событие более возможно, тем больше число и, наоборот, чем менее возможно, тем меньше число. Это число называют вероятностью случайного события A и обозначают $P(A)$. За единицу измерения принимают вероятность достоверного события Ω , т. е. вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$.



Противоположным достоверному событию является невозможное событие $\emptyset$ и $P(\emptyset) = 0$. Тогда вероятность любого события должна удовлетворять условию $0 \leq P(A) \leq 1$.

На практике вычисление вероятностей событий иногда представляет достаточно сложную задачу. В данном пособии будут рассмотрены различные подходы к решению задачи вычисления вероятностей случайных событий.

Для опытов, обладающих симметрией возможных исходов, применяется способ непосредственного вычисления вероятностей событий, который получил название схемы случаев.

Определение 5. Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта неизбежно должно появиться хотя бы одно из них.

Например, при бросании монеты события {герб} и {решка} образуют полную группу. При бросании игральной кости события {1}, {2}, {3}, {4}, {5} и {6} составляют полную группу.

Определение 6. Несколько событий в данном опыте называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Например, при бросании монеты события {герб} и {решка} несовместны.

Определение 7. Несколько событий в данном опыте называются равновероятными, если по условиям симметрии есть основания полагать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое.

Например, при бросании монеты события {герб} и {решка} являются равновероятными, если монета идеальная.

Пусть проводится опыт, в результате которого может появиться событие из некоторой группы.

Определение 8. Группа событий, которые образуют полную группу, несовместны и равновероятны, называют случаями. При этом говорят, что опыт сводится к схеме случаев.

Определение 9. Случай называют благоприятным некоторому событию A, если появление этого случая влечет за собой появление события A.

Например, бросается игральная кость. Событие $A = \{\text{появление четного числа очков}\}$. Тогда из всех возможных исходов {1}, {2}, {3}, {4}, {5} и {6}, которые являются случаями. Случаи {2}, {4} и {6} являются благоприятными событию A.

Таким образом, если опыт сводится к схеме случаев, то для вычисления $P(A)$ используется формула

$$P(A) = \frac{m_A}{n}, \quad (1)$$

где m_A – число случаев, благоприятных событию A, n – общее число случаев.

Задача 1. В урне a белых и b черных шаров. Найти вероятность того, что вынутый наудачу шар будет белого цвета.

Пусть $A = \{\text{вынут белый шар}\}$. По условию a – количество случаев благоприятных событию, (a+b) – общее количество случаев. Тогда вычисляем вероятность события A по формуле (1)

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

Из урны вынимается и откладывается один шар – он белого цвета. Найти вероятность того, что второй шар, вынутый из урны, будет белым.

Пусть событие $B = \{\text{вынут белый шар}\}$. Используя формулу (1), получаем

$$P(B) = \frac{a-1}{a+b-1}.$$

Задача 2. В коробке 6 одинаковых и пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке. Пусть $A = \{\text{номера кубиков располагаются в возрастающем порядке}\}$. Для подсчета всех возможных исходов используем формулу из раздела математики «Комбинаторика», т. е. $n=6!$.

Из всех возможных исходов только один будет благоприятным событию A. Следовательно, по формуле (1) получим

$$P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{6*5*4*3*2*1} = \frac{1}{720}.$$

Использование формулы (1), приводит к необходимости подсчета всех возможных исходов опыта и исходов, которые благоприятны некоторому событию. Для решения указанных задач целесообразно привлекать комбинаторные формулы.

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ различные элементы некоторого множества. Опыт состоит в выборе m элементов из этого множества. Формулы комбинаторики позволяют определить общее число различных комбинаций m элементов из n элементов.

Условия выбора элементов определяются при постановке опыта. Обычно различают две схемы выбора элементов.

Первая схема состоит в том, что элементы после их извлечения из множества не возвращаются в него.

При выборе элементов по второй схеме, каждый элемент после выбора опять возвращается в исходное множество, и все элементы тщательно перемешиваются.

В том случае, если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами являются m – элементные подмножества исходного множества. Общее число исходов N определяется посредством вычисления числа сочетаний из n элементов по m. Число соче-



ний из n элементов по m – это число способов, какими можно выбрать m различных элементов из n ; обозначается оно C_n^m и вычисляется по формуле:

$$N = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (2)$$

Задача 3. В урне a белых и b черных шаров. Вынимается сразу 5 шаров. Найти $P(A)$, если $A = \{\text{вынуты 2 белых и 3 черных шара}\}$. Общее число исходов определим по формуле (2)

$$N = C_{a+b}^5 = \frac{(a+b)!}{5!(a+b-5)!}.$$

Число благоприятных случаев определяется аналогично

- $m_1 = C_a^2$ - число случаев, когда 2 шара будут белыми;
- $m_2 = C_b^3$ - число случаев, когда 3 шара будут черными.

Тогда число благоприятных случаев

$$m_A = m_1 m_2 = C_a^2 C_b^3 = \frac{a(a-1)b(b-1)(b-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Окончательно по формуле (1) получим

$$P(A) = \frac{12ab(a-1)(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}.$$

3.2. Задание №2

В партии a деталей изготовлены на первом станке, b – на втором и c на третьем. Известно, что вероятности выпуска бракованной детали на первом, втором и третьем станке соответственно равны p_1 , p_2 и p_3 . Какова вероятность, что взятая наудачу деталь окажется бракованной (см. приложение Б).

Для выполнения задания №2 необходимо изучить вопросы:

- аксиомы теории вероятностей;
- правило сложения вероятностей случайных событий;
- правило умножения вероятностей случайных событий;
- формула полной вероятности;
- формула Байеса.

3.2.1. Краткие теоретические сведения

Современное построение теории вероятностей основывается на аксиомах и на теоретико-множественном определении события и его вероятности.

На основе аксиом получены важнейшие соотношения между вероятностями, в предположении, что все рассматриваемые события обладают определенными вероятностями. Эти соотношения называют иногда правилами теории вероятностей. Далее приводятся основные формулы и правила вычисления вероятностей случайных событий.

В частности, из правила сложения вероятностей следует, что если события $A_1, \dots, A_n$ попарно несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т. е., если

$$\sum_{i=1}^n A_i = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \quad (3)$$

то

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (4)$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (5)$$

Свойство противоположных событий часто применяется на практике. Иногда легче вычислить вероятность противоположного события $\bar{A}$, чем вероятность события A . Тогда вычисляют $P(\bar{A})$, и используют формулу (5):

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (6)$$

Если событие A и B совместны ($A \cap B \neq \emptyset$), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (7)$$

Формула (7) может быть обобщена и для более, чем двух совместных событий.

Условной вероятностью события B называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, P(A) \neq 0. \quad (8)$$

На практике формулу (8) записывают в виде

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B | A) \quad (9)$$

и называют правилом умножения вероятностей.

Следствием основных правил теории вероятностей – правила сложения и правила умножения – является формула полной вероятности [1]:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i),$$

где $P(H_i)$ – вероятности гипотез H_i ($H_i \cap H_j = \emptyset$ при $i \neq j$), $P(A | H_i)$

– условные вероятности события A .



Следствием правила умножения вероятностей и формулы полной вероятности является формула Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}.$$

Задача 4. Вероятность того, что при первом выстреле стрелок выбьет 10 очков, равна 0.1, 9 очков – 0.3, а вероятность выбить 8 или менее очков равна 0.6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

Пусть $A_1 = \{\text{выбьет 10 очков}\}$, $A_2 = \{\text{выбьет 9 очков}\}$. События A_1 и A_2 - несовместны. Тогда событие $C = (A_1 + A_2)$ состоит в том, что стрелок выбьет не менее 9 очков. Используя аксиому 2, получим $P(C) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.4$.

Задача 5. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы $p_1=0.8$, $p_2=0.7$, $p_3=0.9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Пусть $A = \{\text{хотя бы одно попадание при выстреле из трех орудий}\}$, $A_1 = \{\text{попадание из первого орудия}\}$, $A_2 = \{\text{попадание из второго орудия}\}$, $A_3 = \{\text{попадание из третьего орудия}\}$.

Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия не зависит от стрельбы из других орудий. Поэтому события A_1 , A_2 , и A_3 независимы. Вероятность промахов определяется с использованием формулы (6):

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.8 = 0.2, \quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0.7 = 0.3, \quad q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0.9 = 0.1.$$

Тогда окончательно получим $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0.994$.

Задача 6. В партии 20 деталей изготовлены на первом станке, 25 – на втором и 5 на третьем. Известно, что вероятности выпуска бракованной детали на первом, втором и третьем станке соответственно равны 0.02, 0.01 и 0.05. Какова вероятность, что взятая наудачу деталь окажется бракованной.

Пусть $A = \{\text{появление бракованной детали}\}$, гипотезы H_1 , H_2 , H_3 - события, состоящие в том, что взятая наудачу деталь была изготовлена соответственно на первом, втором и третьем станке. Из условия задачи имеем

$$P(H_1) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}, \quad P(H_2) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}, \quad P(H_3) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}.$$

Далее, известно, что

$$P(A|H_1) = 0.02, \quad P(A|H_2) = 0.01, \quad P(A|H_3) = 0.05.$$

Тогда по формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot 0.02 + \frac{1}{2} \cdot 0.01 + \frac{1}{10} \cdot 0.05 = 0.018.$$

3.3. Задание №3

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , если заданы значения дискретной случайной величины и вероятности их появления (см. приложение В).

Для решения задачи №3 необходимо изучить вопросы:

- законы распределения случайных величин;
- числовые характеристики случайных величин.

3.3.1. Краткие теоретические сведения

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Случайная величина X - это величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение.

Наиболее полной характеристикой случайной величины является закон распределения. Существует несколько форм задания закона распределения. Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в форме ряда распределения:

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Ряд распределения определен только для дискретной случайной величины. Наиболее общей формой закона распределения является функция распределения.

Определение 10. Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем заданное x :

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (10)$$

Определение 11. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют производную от функции распределения

$$f(x) = F'(x). \quad (11)$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X принимает значение, принадлежащее интервалу (a, b) , определяется равенством

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (12)$$

Если плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины известна, можно найти функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (13)$$



Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений.

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (14)$$

Для непрерывной случайной величины X формула (14) принимает вид

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (15)$$

Дисперсия случайной величины X есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины:

$$D_x = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (16)$$

а для непрерывной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (17)$$

Дисперсия случайной величины X является характеристикой рассеивания случайной величины около ее математического ожидания. На практике часто используют характеристику, называемую среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (18)$$

Задача 7. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , если задан ряд распределения:

X	2	3	5
P	0.3	0.1	0.6

Если $x \leq 2$, то $F(x) = P\{X < x\} = P(\emptyset) = 0$. Если $2 < x \leq 3$, то

$$F(x) = P\{X = 2\} = 0.3. \text{ Если } 3 < x \leq 5, \text{ то}$$

$$F(x) = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 0.4. \text{ Если } x > 5, \text{ то событие } \{X \leq 5\}$$

достоверно, следовательно, его вероятность равна единице и $F(x) = 1$.

Функция распределения аналитически записывается в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0.3, & 2 < x \leq 3, \\ 0.4, & 3 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5 \end{cases}.$$

Математическое ожидание вычисляется по формуле (14):

$$m_x = 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.6 = 3.9.$$

Дисперсию вычисляют по формуле (16):

$$D_x = (2 - 3.9)^2 \cdot 0.3 + (3 - 3.9)^2 \cdot 0.1 + (5 - 3.9)^2 \cdot 0.6 = 1.89.$$

Задача 8. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание m_x и дисперсию D_x случайной величины X .

Используем формулу (13).

Если $x \leq a$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^a 0 dx = 0$. Если $a < x \leq b$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}. \text{ Если } x > b, \text{ то}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^x 0 dx = 1.$$

Итак функция распределения случайной величины X выражается формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Математическое ожидание вычисляется по формуле (15):

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсию вычисляют по формуле (17):

$$D_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b (x - m_x)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3.4. Задание № 4

Необходимо обработать выборочные данные (см. приложение Г), используя методы математической статистики:

- построить статистическую функцию распределения;



- построить группированный статистический ряд;
- построить статистическую функцию плотности распределения и представить ее в форме таблицы и гистограммы;
- получить точечные оценки математического ожидания и дисперсии;
- используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о согласии выборочного распределения теоретическому распределению, сделать выводы (необходимо по результатам анализа гистограммы выбрать одно теоретическое распределение из трех: равномерного, показательного и нормального).

3.4.1. Краткие теоретические сведения

Математическая статистика - это наука, разрабатывающая методы обработки опытных данных, полученных в результате наблюдений над случайными явлениями.

Основу статистического исследования составляет множество данных, полученных по результатам измерения одного или нескольких признаков. Результаты наблюдений или измерений при этом интерпретируются совокупностью значений, принятых в результате n опытов некоторой случайной величиной X . Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют выборкой наблюдений объема n из генеральной совокупности.

Статистическая обработка данных выполняется поэтапно. Основные этапы статистической обработки данных приводятся ниже.

1. Выборочные данные упорядочиваются в порядке возрастания. Определяются значения $x_{\min}$ и $x_{\max}$. И записывается упорядоченная выборка:

$$(x_1 = x_{\min}, x_2, x_3, \dots, x_n = x_{\max}).$$

2. По упорядоченной статистической совокупности строится статистическая функция распределения. Статистической функцией распределения называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого выборочного значения x относительную частоту события $\{X < x\}$. Тогда по определению

$$F^*(x) = l_x / n, \quad (19)$$

где l_x - число наблюдений в выборке, меньших x . Если x изменяется, то изменяется и относительная частота, т.е. относительная частота l_x / n есть функция от x .

Функция $F^*(x)$ имеет число скачков равно числу различных выборочных значений. Величина скачка равна «кратности» l_i значения x_i в выборке, деленной на n . Функция $F^*(x)$ записывается в аналитической форме

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ l_1 / n, & x_1 < x \leq x_2 \\ \dots \\ l_n / n, & x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases} \quad (20)$$

3. Для построения группированного статистического ряда необходимо весь участок оси абсцисс, на котором расположены выборочные значения случайной величины X , разделить на участки или разряды. Число разрядов k обычно определяется эмпирическим путем. В частности, $k \approx \sqrt{n}$ при условии, что $5 \leq k \leq 25$. При этом длина одного разряда вычисляется по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Группированный статистический ряд – это таблица вида

X	$x_1 \div x_2$	$x_2 \div x_3$	$\dots$	$x_i \div x_{i+1}$	$\dots$	$x_{k-1} \div x_k$
P	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_i^*	$\dots$	p_k^*

В таблице x_i, x_{i+1} – границы i -ого разряда, $i=1, k$. Пусть v_i^* - число выборочных значений, попавших в i -ый разряд, тогда

$$p_i^* = v_i^* / n, \quad (21)$$

p_i^* - статистическая относительная частота, v_i^* - статистическая абсолютная частота. Статистическая плотность определяется по формуле

$$f_i^* = v_i^* / (h \cdot n). \quad (22)$$

Графическое изображение $f_i^*, i=1, k$ называют гистограммой.

4. Оценка математического ожидания случайной величины X вычисляется как среднее арифметическое ее выборочных значений

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (23)$$

Для получения несмещенной оценки дисперсии случайной величины X используется формула



$$D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2. \quad (24)$$

5. Для проверки гипотезы H_0 о согласии статистического распределения с предполагаемым теоретическим вычисляется значение критерия по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i^* - v_i)^2}{v_i}, \quad (25)$$

v_i - теоретическая частота, рассчитанная по предполагаемому закону;

v_i^* - статистическая частота, определенная по выборочным данным;

k - число разрядов.

С учетом (21) можно формулу (25) записать в виде

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}. \quad (26)$$

Вычисленное значение χ^2 сравнивается с теоретическим (табличным) значением $\chi^2(r, \alpha)$. Значение $\chi^2(r, \alpha)$ определяется по таблице распределения χ^2 , по заданному уровню значимости α ($\alpha = 0.05$) и числу степеней свободы $r = k - 3$.

При проверке согласия статистического распределения с равномерным законом распределения необходимо:

- оценить параметры a и b – концы интервала, в котором наблюдались значения X , по формулам

$$a^* = m_x^* - \sqrt{3}\sigma_x,$$

$$b^* = m_x^* + \sqrt{3}\sigma_x;$$

- найти плотность предполагаемого равномерного распределения

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*};$$

- найти теоретические частоты

$$n_1 = np_1 = n \frac{1}{b^* - a^*} (x_1 - a^*)$$

$$n_2 = n_3 = \dots = n_k = n \frac{1}{b^* - a^*} (x_i - x_{i-1})$$

$$n_k = n \frac{1}{b^* - a^*} (b^* - x_{k-1})$$

- сравнить вычисленное значение χ^2 с теоретическим $\chi^2(r, \alpha)$ (см. таблицы приложения 3 [1]), найденным по таблице, для принятия решения о гипотезе H_0 .

При проверке согласия статистического распределения с нормальным законом распределения необходимо:

- пронормировать X , т. е. перейти к случайной величине $Z = (X - m_x^*) / \sigma_x^*$, и вычислить концы разрядов $z_i = (x_i - m_x^*) / \sigma_x^*$, при этом $x_{\min} = -\infty, x_{\max} = \infty$;

- вычислить теоретические частоты $v_i = nP_i$,

- вычислить $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ - вероятность попадания случайной величины X в разряд (x_i, x_{i+1}) , $\Phi(z)$ функция Лапласа (см. таблицы приложения [1]);

- вычислить χ^2 по формуле;

- сравнить χ^2 с табличным значением $\chi^2(r, \alpha)$; при этом, если $\chi^2 < \chi^2(r, \alpha)$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности; если $\chi^2 > \chi^2(r, \alpha)$ - гипотеза отвергается.

При проверке согласия статистического распределения с показательным законом распределения необходимо:

- оценить параметр λ по формуле

$$\lambda^* = \frac{1}{m_x^*};$$

- найти теоретические частоты по формуле

$$P_i = e^{-x_i^* \cdot \lambda^*} - e^{-x_{i+1}^* \cdot \lambda^*};$$

- вычислить χ^2 по формуле;

- сравнить χ^2 с табличным значением $\chi^2(r, \alpha)$; при этом, если $\chi^2 < \chi^2(r, \alpha)$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0 о показательном распределении генеральной совокупности; если $\chi^2 > \chi^2(r, \alpha)$ - гипотеза отвергается.



Задача 9.

Проведен выборочный контроль деталей, изготовленных на токарном станке. Полученные значения диаметра в микронах представлены в табл. 1.

Таблица 1

42	45	41	39	42	40	43	40	41	44
42	42	41	40	42	42	41	43	39	40

Выполнить первичную статистическую обработку данных, представленных в табл. 1.

1. Пусть X – диаметр – непрерывная случайная величина. Тогда в таблице 1 представлены статистические данные наблюдений за случайной величиной X . Упорядочим данные в порядке возрастания:

$$X = \{39, 39, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 44, 45\}.$$

Получаем $x_{\min} = 39$, $x_{\max} = 45$.

2. По упорядоченной выборке статистических данных строим статистическую функцию распределения $F^*(x)$. В аналитической форме статистическая функция распределения имеет вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 39 \\ 2/20, & 39 < x \leq 40 \\ 6/20, & 40 < x \leq 41 \\ 10/20, & 41 < x \leq 42 \\ 16/20, & 42 < x \leq 43 \\ 18/20, & 43 < x \leq 44 \\ 19/20, & 44 < x \leq 45 \\ 20/20, & x > 45 \end{cases}$$

3. Для построения группированного статистического ряда определяем число разрядов по формуле $k \approx \sqrt{20} = 4.472$. Пусть число разрядов будет $k=5$. Тогда

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{45 - 39}{5} = 1.2.$$

Группированный статистический ряд записываем в форме таблицы:

Таблица 2

X	39-40.2	40.2-41.4	41.4-42.6	42.6-43.8	43.8-45
v_i^*	6	4	6	2	2

Во второй строке таблицы записаны v_i^* – абсолютные частоты попадания выборочных значений в выбранные разряды. Вычисляем статистические относительные частоты p_i^* и выборочные значения статистической плотности f_i^* для каждого разряда (x^* – границы разрядов). Результаты представляем в таблице 3:

Таблица 3

x^*	39-40.2	40.2-41.4	41.4-42.6	42.6-43.8	43.8-45
v_i^*	6	4	6	2	2
p_i^*	0.3	0.2	0.3	0.1	0.1
f_i^*	0.25	0.17	0.25	0.08	0.08

3. Вычисляем оценку математического ожидания по формуле(23):

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 41.45.$$

Для получения несмещенной оценки дисперсии используем формулу(24):

$$D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 = 2.47, \quad \sigma_x = 1.57.$$

4. Установим, противоречат ли опытные данные гипотезе, что с.в. X распределена по заданному теоретическому закону. Для проверки гипотезы будем использовать критерий Пирсона.

Пусть выдвигается нулевая гипотеза H_0 : с.в. X распределена по нормальному закону с параметрами равными m_x, σ_x .

Вычислим теоретические частоты, используя функцию Лапласа, по формуле

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

где

$$z_i = \frac{x_i^* - m_x}{\sigma_x}.$$



Получаем для первого разряда нормированные значения границ разрядов

$$z_1 = \frac{39.0 - 41.45}{1.57} = -1.559, z_2 = \frac{40.2 - 41.45}{1.57} = -0.795$$

и соответствующие им значения функции Лапласа (см. приложение [1,4]):

$$\Phi(-1.559) = -0.43943, \Phi(-0.795) = -0.28814.$$

Тогда для первого разряда получаем теоретическую частоту

$$p_1 = \Phi(-0.795) - \Phi(-1.559) = 0.151.$$

Аналогично получаем теоретические частоты для остальных разрядов. Результаты вычислений представлены в таблице 4.

Таблица 4

$z_i = \frac{x_i^* - m_x}{\sigma_x}$	$\Phi\left(\frac{x_i^* - m_x}{\sigma_x}\right)$	p_i
-1.559	-0.43943	0.151
-0.795	-0.28814	0.276
-0.032	-0.01197	0.279
0.732	0.26730	0.19
1.732	0.45728	0.03
2.258	0.48778	

Находим значение χ^2 по формуле (26):

$$\chi^2 = 7.51$$

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число разрядов $k=5$. Поэтому число степеней свободы r в данном случае будет равно 5 минус 3 (число на-

ложенных связей: условие $\sum_{i=1}^k p_i^* = 1$, генеральное среднее и σ_x совпадает с

m_x и σ_x^*), т.е. $r=5-3=2$. По таблице распределения χ^2 (см. приложение

[1,4]) и числу $r=2$ находим значение $\chi^2(r, \alpha) = 7.4$ для уровня значимости

$\alpha = 0.025$. Получили, что $7.51 > \chi^2_{\text{крит}} = 7.4$. Делаем вывод о том, что выдвинутая нулевая гипотеза о нормальности распределения с.в. X отвергается с вероятностью 0.975.

Пусть выдвигается нулевая гипотеза H_0 : с.в. X распределена по равномерному закону с параметрами равными a, b .

Вычисляем оценки параметров

$$a^* = m_x^* - \sqrt{3} \cdot \sigma_x^* = 41.45 - \sqrt{3} \cdot 1.57 = 38.727,$$

$$b^* = m_x^* + \sqrt{3} \cdot \sigma_x^* = 41.45 + \sqrt{3} \cdot 1.57 = 44.173$$

Находим плотность вероятности теоретического распределения

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*} = \frac{1}{44.173 - 38.727} = 0.184.$$

Вычисляем теоретические частоты

$$p_1 = 0.184 \cdot (40.2 - 38.727) = 0.135, p_2 = 0.184 \cdot (41.4 - 40.2) = 0.22,$$

$$p_3 = 0.184 \cdot (42.6 - 41.4) = 0.22, p_4 = 0.184 \cdot (43.8 - 42.6) = 0.22,$$

$$p_5 = 0.184 \cdot (44.173 - 43.8) = 0.068$$

Находим значение χ^2 по формуле (26):

$$\chi^2 = 6.234.$$

По таблице распределения $\chi^2(r, \alpha)$ (см. приложение [1,4]) и числу $r=2$ находим значение $\chi^2(r, \alpha) = 9.2$ для уровня значимости $\alpha = 0.01$. Получили, что $6.234 < \chi^2(r, \alpha) = 9.2$. Делаем вывод о том, что выдвинутая нулевая гипотеза о равномерности распределения с.в. X с вероятностью 0.99 не противоречит опытным данным.

Пусть выдвигается нулевая гипотеза H_0 : с.в. X распределена по показательному закону с параметром равным λ .

Вычисляем оценку параметра

$$\lambda^* = \frac{1}{m_x^*} = \frac{1}{41.45} = 0.024.$$

Вычисляем теоретические частоты по формуле

$$p_i = e^{-x_i^* \cdot \lambda^*} - e^{-x_{i+1}^* \cdot \lambda^*}.$$

Получаем

$$p_1 = 0.011, p_2 = 0.011, p_3 = 0.011, p_4 = 0.01, p_5 = 0.01.$$

Находим значение χ^2 по формуле (26): $\chi^2 = 407.634$.

По таблице распределения $\chi^2(r, \alpha)$ (см. приложение [1,4]) и числу $r=2$ находим значение $\chi^2(r, \alpha) = 9.2$ для уровня значимости $\alpha = 0.01$. Получили, что $407.634 > \chi^2(r, \alpha) = 9.2$. Делаем вывод о том, что выдвинутая нулевая гипотеза о показательном распределении X отвергается с вероятностью 0.99.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С.Вентцель, Л.А. Овчаров; под ред. Е.С.Вентцель. - М.: Наука, 1988. – 480 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. - М.:Физматгиз, 1988. – 406 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей / В.Е. Гмурман. - М.: Радио и связь, 2004. – 404с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. - М.: Высшая шк., 2002. – 480с.

Таблица А.1 – Варианты к заданию №1.

Номер варианта	a	b	k	A
1	5	4	5	{3 белых и 2 черных}
2	7	3	6	{3 белых и 3 черных }
3	9	2	5	{4 белых и 1 черный }
4	11	3	6	{4 белых и 2 черных }
5	6	7	5	{3 белых и 2 черных }
6	8	4	7	{3 белых и 4 черных }
7	10	2	8	{6 белых и 2 черных }
8	3	7	6	{3 белых и 3 черных }
9	5	6	4	{2 белых и 2 черных }
10	7	2	5	{3 белых и 2 черных }
11	9	3	7	{5 белых и 2 черных }
12	4	7	6	{3 белых и 3 черных }
13	6	4	8	{4 белых и 4 черных }
14	8	3	6	{4 белых и 2 черных }
15	5	4	5	{3 белых и 2 черных }
16	8	5	7	{3 белых и 4 черных }
17	11	2	5	{3 белых и 2 черных }
18	3	6	4	{3 белых и 1 черных }
19	7	4	8	{5 белых и 3 черных }
20	11	5	6	{3 белых и 3 черных }
21	4	8	5	{3 белых и 2 черных }
22	5	3	4	{2 белых и 2 черных }
23	6	5	6	{3 белых и 3 черных }
24	7	4	7	{5 белых и 2 черных }
25	8	2	5	{3 белых и 2 черных }

ПРИЛОЖЕНИЕ А



ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1 – Варианты к заданию №2.

Номер варианта	a	b	c	p1	p2	p3
1	2	3	4	5	6	7
1	30	25	15	0.01	0.03	0.02
2	32	27	17	0.02	0.04	0.03
3	34	23	13	0.03	0.05	0.04
4	28	21	11	0.04	0.06	0.05
5	26	19	9	0.05	0.07	0.06
6	31	29	7	0.06	0.08	0.07
7	33	31	8	0.06	0.09	0.01
8	35	18	10	0.06	0.03	0.02
9	27	16	12	0.06	0.04	0.03
10	29	14	20	0.01	0.05	0.04
11	18	15	17	0.02	0.06	0.05
12	20	17	14	0.03	0.07	0.06
13	22	19	12	0.04	0.08	0.07
14	24	10	7	0.05	0.09	0.08
15	17	12	9	0.06	0.03	0.09
16	19	14	6	0.07	0.05	0.01
17	21	16	8	0.08	0.07	0.02
18	23	18	10	0.09	0.02	0.03
19	25	20	12	0.01	0.04	0.04
20	13	21	16	0.02	0.06	0.05
21	15	23	18	0.03	0.08	0.06
22	14	25	13	0.04	0.01	0.07
23	16	27	15	0.05	0.02	0.08
24	18	29	17	0.06	0.03	0.09
25	20	31	19	0.07	0.04	0.01

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Таблица В.1 – Варианты к заданию №3

Номер варианта	Значения дискретной случайной величины и вероятности их появления
1	X(3.0, 4.1, 4.9, 7.0, 6.4, 0.4), p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)
2	X(4.4, 7.5, 7.1, 8.5, 0.4, 6.1), p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)
3	X(6.2, 3.8, 4.7, 1.1, 6.6, 5.9), p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)
4	X(8.5, 5.1, 4.2, 7.6, 0.2, 5.2), p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)
5	X(5.7, 3.2, 1.4, 0.2, 6.5, 2.2), p(0.05, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)
6	X(7.7, 9.1, 2.7, 1.8, 2.8, 5.1), p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)
7	X(5.1, 0.8, 1.0, 8.4, 3.4, 6.0), p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)
8	X(1.8, 7.9, 2.9, 5.2, 7.2, 4.1), p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)
9	X(4.4, 2.8, 9.3, 7.9, 0.1, 9.9), p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)
10	X(4.3, 9.5, 4.9, 4.0, 0.5, 3.0), p(0.05, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)
11	X(2.3, 4.0, 0.7, 8.9, 6.3, 6.4), p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)
12	X(6.8, 3.6, 9.8, 4.8, 10.0, 1.9), p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)
13	X(8.9, 9.2, 5.2, 7.7, 2.8, 7.6), p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)
14	X(7.9, 9.6, 0.3, 2.6, 5.2, 4.6), p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)
15	X(4.8, 1.6, 9.2, 3.6, 3.2, 6.4), p(0.05, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)
16	X(5.9, 3.2, 3.4, 1.2, 7.8, 6.5), p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)
17	X(9.6, 9.7, 1.2, 8.2, 3.7, 9.8), p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)
18	X(1.3, 0.2, 6.0, 8.5, 4.6, 7.7), p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)
19	X(6.6, 2.8, 7.5, 4.2, 4.6, 6.0), p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)
20	X(3.3, 5.2, 7.0, 1.0, 6.3, 2.8), p(0.05, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)
21	X(9.6, 5.0, 1.8, 2.2, 4.6, 3.7), p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)
22	X(4.3, 6.8, 5.4, 0.2, 8.8, 2.8), p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)
23	X(3.2, 4.8, 4.9, 0.1, 6.4, 4.6), p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)
24	X(5.4, 6.2, 3.0, 5.1, 2.2, 7.8), p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)
25	X(3.7, 5.7, 2.8, 6.6, 6.2, 7.6), p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)



Таблица Г.1 – Варианты к заданию №4

Номер варианта	Выборочные значения
1	95,6,21, 77, 62, 46,3,71 ,93 ,68 ,84 ,55 ,64 ,89 ,66 ,26 ,18, 91,7,50
2	68, 11, 65, 92, 94, 27, 76,1,65 ,67, 92, 93, 10, 52, 25, 60,9,33 ,66 ,62
3	70, 15, 8, 25, 42, 43, 35, 27, 45, 18, 9, 40, 34, 61, 32, 5, 38,31, 28, 87
4	18, 85, 81, 60, 53, 27, 54, 50, 40, 7, 68, 34, 9, 64, 65, 5, 11, 31, 61, 62
5	22, 87, 27, 14, 65, 6, 92, 73, 9, 62, 51, 75, 27, 56, 95, 47, 8, 50, 38, 98
6	81, 86, 89, 75, 70,0,73, 86, 52, 43, 38,0,29, 81 ,75, 70, 87, 36 ,46 ,41
7	18, 47,2,46, 48, 50, 23, 94, 59, 23, 22, 98,7,26, 99, 18, 77, 37, 27, 95
8	47, 79,2,5,23, 69, 12, 75, 77, 43, 81, 20, 16, 40, 6,9,41, 46, 95, 37
9	86, 30, 63, 33, 45, 22, 57, 43, 23, 25,6,2,80, 47, 28, 35, 34,1,28, 67
10	61, 14, 76, 88,3,33, 50, 78, 64, 30, 81,9,63, 36, 34, 51, 74, 55,9,74
11	68, 44, 56, 17, 37, 62, 29, 46, 74, 11, 28, 56, 21, 35, 7, 65, 29,48, 85,8
12	79, 97, 8 ,36, 64, 4, 20, 70, 25, 66, 91, 81, 95, 10, 84, 69,4,47, 57, 86
13	26, 14, 29, 19, 87, 50,10,20, 65, 41, 27, 6, 50, 48, 63, 41, 7, 34, 23, 80
14	79, 52, 31, 78 ,18, 6, 63,9,72, 32,4,1,55, 10, 65,6,42, 61, 32, 65
15	12,0,55,22,39,92,93,41,9,72, 5 40, 71, 67, 40, 25, 74, 99, 29,8
16	28, 56,0,30, 98, 81, 80, 37, 20, 26, 24, 57, 97, 47, 14, 96, 14, 48,1,49
17	80,6, 48, 79, 86, 27, 25, 29, 39, 16, 85, 55, 67, 66, 16 ,10, 71, 90, 37,9
18	8,63,2,0,72, 36, 10, 13, 42, 41, 53, 74, 31, 18, 41, 97, 59,1,76, 39
19	74, 63, 3, 63, 80, 15, 59, 71, 66, 86,9,56, 42, 47, 76, 42, 19, 52. 16, 10
20	92,4,52, 19, 16, 71, 91, 64, 80, 18, 77, 52, 27, 20. 83, 63, 62, 67, 7, 40
21	51, 9, 84, 35, 13, 10, 48, 7, 44, 17, 67, 63, 35, 9, 40, 82, 66, 12, 71 21
22	88, 66, 7, 10, 34, 9, 48,6,11, 90, 57, 38, 72, 41, 66, 38, 59, 44,9,43
23	78, 82, 63, 55, 43, 10, 9, 59, 9, 70, 63, 79, 75, 88, 96, 8, 65, 37, 45, 65
24	62, 26, 81, 50,8,72, 36, 75, 96, 38, 28, 83, 33, 69, 5, 90, 59, 46, 39,65
25	75, 57, 67, 18, 84, 87, 24, 50, 18, 19, 5, 32, 2,70, 47, 83, 84, 8, 31, 70

Заказ № _____ от « _____ » _____ 2008 _____. Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ

