



Министерство образования и науки
Украины
Севастопольский национальный технический
университет

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению расчетно-графического
задания по дисциплине “Теория вероятностей
и математическая статистика”**

для студентов специальности 7.091501 –
«Компьютерные системы и сети».

дневной формы обучения

Севастополь
2008

2

УДК 519.2

Методические указания к выполнению расчетно-графического задания по дисциплине “Теория вероятностей и математическая статистика” для студентов специальности 7.091501 – «Компьютерные системы и сети». / Л.А. Литвинова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. –38с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в выполнении расчетно-графического задания по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры Кибернетики и вычислительной техники, протокол № 11 от 25 июня 2008 г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент:

Обжерин Ю.Е., д.т.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики.



Содержание	3
1. Цель расчетно-графического задания	4
2. Содержание задания	4
2.1. Задание 1	4
2.1.1.Краткие теоретические сведения	4
2.2. Задание 2	8
2.2.1. Краткие теоретические сведения	8
2.3. Задание 3	10
2.3.1.Краткие теоретические сведения	11
2.4. Задание 4	12
2.4.1.Краткие теоретические сведения	12
Библиографический список	20
Приложение А	21
Приложение Б	26
Приложение С	31
Приложение Д	38

1. Цель расчетно-графического задания

Закрепить знания лекционного курса и получить навыки в решении практических задач по основным разделам дисциплины:

- вычисление вероятностей случайных событий;
- случайные величины, законы распределения вероятностей, числовые характеристики случайных величин;
- основные теоремы теории вероятностей;
- обработка статистических данных методами математической статистики.

2. Содержание задания

Расчетно-графическое задание состоит из четырех заданий. Номер варианта определяется преподавателем. Результаты выполнения задания оформляются в форме письменного отчета. Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими пояснениями и ссылками на используемые теоремы и формулы.

Краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения заданий, и их содержание представлены в данном методическом пособии.

2.1. Задание 1

Для выполнения задания 1 необходимо изучить вопросы:

- основные понятия и определения теории вероятностей;
 - классическое определение вероятности;
 - формулы комбинаторики для вычисления числа возможных событий в опыте;
- и решить задачу №1 (см. приложение А, таб.А1) и задачу №2 (см. приложение А, таб.А2).

2.1.1. Краткие теоретические сведения

Для опытов, в которых появление любого исхода объективно одинаково возможно, т.е. обладающих симметрией возможных исходов, используется способ непосредственного вычисления вероятностей событий, который получил название схемы случаев.

Определение 1. Несколько событий в данном опыте образуют полную группу событий, если в результате опыта неизбежно должно появиться хотя бы одно из них.

Например, при бросании монеты события {герб} и {решка} образуют полную группу. При бросании игральной кости события {1}, {2}, {3}, {4}, {5} и {6} составляют полную группу.

Определение 2. Несколько событий в данном опыте называются попарно несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе.



Например, при бросании монеты события {герб} и {решка} - несовместны.

Определение 3. Несколько событий в данном опыте называются равновероятными, если по условиям симметрии есть основания полагать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Например, при бросании монеты события {герб} и {решка} являются равновероятными, если монета идеальная.

Пусть проводится опыт, в результате которого может появиться событие из некоторой группы.

Определение 4. Группу событий, которые образуют полную группу, несовместны и равновероятны, называют случаями. При этом говорят, что опыт сводится к схеме случаев.

Определение 5. Случай называют благоприятным некоторому событию А, если появление этого случая влечет за собой появление события А.

Например, бросается игральный кубок. Событие $A = \{\text{появление четного числа очков}\}$. Тогда из всех возможных исходов $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ и $\{6\}$, которые являются случаями. Случаи $\{2\}, \{4\}$ и $\{6\}$ являются благоприятными событию А.

Таким образом, если опыт сводится к схеме случаев, то для вычисления $P(A)$ используется формула

$$P(A) = \frac{m_A}{n}, \quad (1)$$

где m_A – число случаев, благоприятных событию А, n – общее число случаев. Далее рассмотрим задачи, для решения которых используется формула (1).

Задача 1. В урне а белых и b черных шаров. Найти вероятность того, что вынутый наудачу шар будет белого цвета.

Пусть $A = \{\text{вынут белый шар}\}$. По условию а – количество случаев благоприятных событию, $(a+b)$ – общее количество случаев. Тогда по формуле (1)

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

Из урны вынимается и откладывается один шар – он белого цвета. Найти вероятность того, что второй шар, вынутый из урны, будет белым.

Пусть событие $B = \{\text{вынут белый шар}\}$. Используя формулу (1), получаем

$$P(B) = \frac{a-1}{a+b-1}.$$

Задача 2. В коробке 6 одинаковых и пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке. Пусть $A = \{\text{номера кубиков располагаются в возрастающем порядке}\}$. Для подсчета всех возможных исходов используем формулу для вычисления числа всех возможных перестановок из n элементов, т.е. $n!$.

Из всех возможных исходов только один будет благоприятным событию А. Следовательно, по формуле (1) получим

$$P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{6*5*4*3*2*1} = \frac{1}{720}.$$

Использование формулы (1) приводит к необходимости подсчета всех возможных исходов опыта и исходов, которые благоприятны некоторому событию. Для решения указанных задач целесообразно привлекать комбинаторные формулы.

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ различные элементы некоторого множества Е. Опыт состоит в выборе m элементов из этого множества. Формулы комбинаторики позволяют определить общее число различных комбинаций m элементов из n элементов.

Условия выбора элементов определяются при постановке опыта. Обычно различают две схемы выбора элементов.

Первая схема состоит в том, что элементы после их извлечения из множества не возвращаются в него.

При выборе элементов по второй схеме, каждый элемент после выбора опять возвращается в исходное множество, и все элементы тщательно перемешиваются.

В том случае, если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами являются m – элементные подмножества исходного множества. Для определения числа всех возможных исходов опыта N следует использовать формулу комбинаторики для числа сочетаний. Число сочетаний из n элементов по m – это число способов, какими можно выбрать m различных элементов из n ; обозначается оно C_n^m и вычисляется по формуле:

$$N = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (2)$$

Задача 3. В урне а белых и b черных шаров. Вынимается сразу 5 шаров. Найти $P(A)$, если $A = \{\text{вынуты 2 белых и 3 черных шара}\}$. Общее число исходов определим по формуле (2)

$$N = C_{a+b}^5 = \frac{(a+b)!}{5!(a+b-5)!}.$$

Число благоприятных случаев определяется аналогично

- $m_1 = C_a^2$ - число случаев, когда 2 шара будут белыми;

- $m_2 = C_b^3$ - число случаев, когда 3 шара будут черными.

Тогда число благоприятных случаев



$$m_A = m_1 m_2 = C_a^2 C_b^3 = \frac{a(a-1)b(b-1)(b-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Окончательно по формуле (1) получим

$$P(A) = \frac{12ab(a-1)(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}.$$

Классическое определение вероятностей может быть обобщено на случай несчетного множества равновероятных исходов. С целью решения некоторых задач введено понятие геометрической вероятности.

Пусть отрезок m составляет часть отрезка M . На отрезок M наудачу поставлена точка. Предполагая, что вероятность попадания точки на отрезок m (случайное событие A) пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка M , можно определить искомую вероятность по формуле

$$P(A) = \frac{l_m}{l_M}, \quad (3)$$

где l_m - длина отрезка m ; l_M - длина отрезка M .

Пусть имеется совокупность точек на плоскости внутри некоторой области Ω . Опыт состоит в том, что в пределы области Ω «случайным образом» бросается точка U . Пусть также внутри области Ω имеется некоторая область A . Тогда вероятность попадания точки U в область A будет пропорциональна площади этой области, т.е.

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}}, \quad (4)$$

где S_A - площадь области A ; S_{Ω} - площадь области Ω .

Аналогично можно определить вероятность попадания точки в пространственную фигуру v , которая составляет часть фигуры

$$P(A) = \frac{V_v}{V_V}, \quad (5)$$

где V_v - объем области v ; V_V - объем области V .

В случае классического определения вероятность невозможного события равна нулю. Справедливо и обратное утверждение, т.е. если вероятность события равна нулю, то событие невозможно. При геометрическом же определении вероятности обратное утверждение не имеет места. Вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области Ω равна нулю, однако это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным [1].

Задача 4. Внутри эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ расположен круг $x^2 + y^2 = 9$. Найти вероятность попадания точки в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом.

Положим, что $A = \{\text{попадание точки в кольцо}\}$. Из аналитической геометрии известно, что каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и площадь определяется формулой } S_{эл} = \pi \cdot a \cdot b.$$

Уравнение окружности запишем в виде: $x^2 + y^2 = R^2$. Тогда площадь круга можно найти по формуле $S_{кр} = \pi \cdot R^2$. По условию имеем

$a = 5, b = 4, R = 3$. Найдем площадь кольца $S_{кол} = S_{эл} - S_{кр}$. Окончательно

$$P(A) = \frac{(S_{эл} - S_{кр})}{S_{эл}} = \frac{(\pi \cdot 5 \cdot 4 - \pi \cdot 3^2)}{\pi \cdot 5 \cdot 4} = 0.55.$$

2.2. Задание 2

Для выполнения задания 2 необходимо изучить вопросы:

- аксиомы теории вероятностей;
- правило сложения вероятностей случайных событий;
- понятие условной вероятности;
- правило умножения вероятностей случайных событий;
- формула полной вероятности;
- формула Байеса;

и решить задачу №1 (см. приложение Б, таб. Б1) и задачу №2 (см. приложение Б, таб. Б2).

2.2.1. Краткие теоретические сведения

Современное построение теории вероятностей основывается на аксиомах, сформулированных русским математиком А.Н. Колмогоровым [1].

Из аксиом можно вывести важнейшие соотношения между вероятностями, предполагая, что все рассматриваемые события обладают определенными вероятностями. Эти соотношения называют иногда правилами теории вероятностей. Далее приводятся формулировки основных правил теории вероятностей.

В частности, из правила сложения вероятностей следует, что если события $A_1, \dots, A_n$ попарно несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е., если



$$\sum_{i=1}^n A_i = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,$$

то

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (6)$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (7)$$

Свойство противоположных событий часто применяется на практике. Иногда легче вычислить вероятность противоположного события $\bar{A}$, чем вероятность события A . Тогда вычисляют $P(\bar{A})$, и используют формулу (7):

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (8)$$

Если событие A и B совместны ($A \cap B \neq \emptyset$), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Последняя формула может быть обобщена и для более, чем двух совместных событий.

Условной вероятностью события B называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, P(A) \neq 0. \quad (9)$$

На практике формулу (9) записывают в виде

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B|A) \quad (10)$$

и называют правилом умножения вероятностей.

Следствием основных правил теории вероятностей – правила сложения и правила умножения – является формула полной вероятности [1]:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i), \quad (11)$$

где $P(H_i)$ - вероятности гипотез H_i ($H_i \cap H_j = \emptyset$ при $i \neq j$), $P(A|H_i)$

- условные вероятности события A .

Следствием правила умножения вероятностей и формулы полной вероятности является формула Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A)P(A|H_i)}. \quad (12)$$

Задача 5. Вероятность того, что при первом выстреле стрелок выбьет 10 очков, равна 0.1, 9 очков – 0.3, а вероятность выбить 8 или менее очков равна 0.6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

Пусть $A_1 = \{\text{выбьет 10 очков}\}$, $A_2 = \{\text{выбьет 9 очков}\}$. События A_1 и A_2 - несовместны. Тогда событие $C = (A_1 + A_2)$ состоит в том, что стрелок выбьет не менее 9 очков. Используя аксиому 2, получим $P(C) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.4$.

Задача 6. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы $p_1=0.8$, $p_2=0.7$, $p_3=0.9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Пусть $A = \{\text{хотя бы одно попадание при выстреле из трех орудий}\}$, $A_1 = \{\text{попадание из первого орудия}\}$, $A_2 = \{\text{попадание из второго орудия}\}$, $A_3 = \{\text{попадание из третьего орудия}\}$.

Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия не зависит от стрельбы из других орудий. Поэтому события A_1 , A_2 , и A_3 независимы. Вероятность промахов определяется с использованием формулы (8):

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.8 = 0.2,$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0.7 = 0.3,$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0.9 = 0.1.$$

Тогда окончательно получим

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0.994.$$

Задача 7. В партии 20 деталей изготовлены на первом станке, 25 – на втором и 5 на третьем. Известно, что вероятности выпуска бракованной детали на первом, втором и третьем станке соответственно равны 0.02, 0.01 и 0.05. Какова вероятность, что взятая наудачу деталь окажется бракованной.

Пусть $A = \{\text{появление бракованной детали}\}$, гипотезы H_1 , H_2 , H_3 - события, состоящие в том, что взятая наудачу деталь была изготовлена соответственно на первом, втором и третьем станке. Из условия задачи имеем

$$P(H_1) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}, \quad P(H_2) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}, \quad P(H_3) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}.$$

Далее, известно, что

$$P(A|H_1) = 0.02, \quad P(A|H_2) = 0.01, \quad P(A|H_3) = 0.05.$$

Тогда по формуле полной вероятности (11) получаем

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot 0.02 + \frac{1}{2} \cdot 0.01 + \frac{1}{10} \cdot 0.05 = 0.018.$$

2.3. Задание 3

Для выполнения задания необходимо решить задачи №1 (см. приложение С, таб. С1) и №2 (см. приложение С, таб. С1).



2.3.1. Краткие теоретические сведения

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Случайная величина X - это величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение.

Наиболее полной характеристикой случайной величины является закон распределения. Существует несколько форм задания закона распределения. Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в форме ряда распределения:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Ряд распределения определен только для дискретной случайной величины. Наиболее общей формой закона распределения является функция распределения.

Определение 6. Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем заданное x :

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (13)$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений:

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (14)$$

Для непрерывной случайной величины X формула (14) принимает вид

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (15)$$

Дисперсия случайной величины X есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины:

$$D_x = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i. \quad (16)$$

Для непрерывной случайной величины X формул (16) принимает вид

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (17)$$

Дисперсия случайной величины X является характеристикой рассеивания случайной величины около ее математического ожидания. На практике часто используют характеристику, называемую среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D_x}, \quad (18)$$

Задача 8. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , если задан ряд распределения:

X	2	3	5
P	0.3	0.1	0.6

Если $x \leq 2$, то $F(x) = P\{X < x\} = P(\emptyset) = 0$. Если $2 < x \leq 3$, то

$$F(x) = P\{X = 2\} = 0.3.$$

Если $3 < x \leq 5$, то

$$F(x) = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 0.4.$$

Если $x > 5$, то событие $\{X \leq 5\}$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице и $F(x) = 1$.

Функция распределения аналитически записывается в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0.3, & 2 < x \leq 3, \\ 0.4, & 3 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Математическое ожидание вычисляется по формуле (14):

$$m_x = 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.6 = 3.9.$$

Дисперсию вычисляют по формуле (16):

$$D_x = (2 - 3.9)^2 \cdot 0.3 + (3 - 3.9)^2 \cdot 0.1 + (5 - 3.9)^2 \cdot 0.6 = 1.89.$$

2.4. Задание 4

Необходимо обработать выборочные данные (см. приложение Д, таб. Д1), используя методы математической статистики, а именно:

- построить статистическую функцию распределения;
- построить группированный статистический ряд;
- построить статистическую функцию плотности распределения и представить ее в форме таблицы и гистограммы;
- получить точечные оценки математического ожидания и дисперсии;
- получить интервальные оценки m_x , σ_x ;
- используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о согласии выборочного распределения теоретическому распределению, сделать выводы (необходимо по результатам анализа гистограммы выбрать два теоретических распределения из трех: равномерного, показательного и нормального).

2.4.1. Краткие теоретические сведения

Математическая статистика - это наука, разрабатывающая методы обработки опытных данных, полученных в результате наблюдений над случайными явлениями.



Основу статистического исследования составляет множество данных, полученных по результатам измерения одного или нескольких признаков. Результаты наблюдений или измерений при этом интерпретируются совокупностью значений, принятых в результате n опытов некоторой случайной величиной X . Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют выборкой наблюдений объема n из генеральной совокупности.

Статистическая обработка данных выполняется поэтапно. Основные этапы статистической обработки данных приводятся ниже.

1. Выборочные данные упорядочиваются в порядке возрастания. Определяются значения $x_{\min}$ и $x_{\max}$. И записывается упорядоченная выборка:

$$(x_1 = x_{\min}, x_2, x_3, \dots, x_n = x_{\max}).$$

2. По упорядоченной статистической совокупности строится статистическая функция распределения. Статистической функцией распределения называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого выборочного значения x относительную частоту события $\{X < x\}$. Тогда по определению

$$F^*(x) = l_x / n,$$

где l_x - число наблюдений в выборке, меньших x . Если x изменяется, то изменяется и относительная частота, т.е. относительная частота l_x / n есть функция от x . Функция $F^*(x)$ имеет число скачков равно числу различных выборочных значений. Величина скачка равна «кратности» l_i значения x_i в выборке, деленной на n . Функция $F^*(x)$ записывается в аналитической форме

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ \frac{l_1}{n}, & x_1 < x \leq x_2 \\ \dots \\ \frac{l_n}{n}, & x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases} \quad (19)$$

3. Для построения группированного статистического ряда необходимо весь участок оси абсцисс, на котором расположены выборочные значения случайной величины X , разделить на участки или разряды. Число разрядов k обычно определяется эмпирическим путем. В частности, $k \approx \sqrt{n}$ при условии, что $5 \leq k \leq 25$. При этом длина одного разряда вычисляется по формуле $h = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{k}$.

Группированный статистический ряд – это таблица вида

X	$x_1 \div x_2$	$x_2 \div x_3$	$\dots$	$x_i \div x_{i+1}$		$x_{k-1} \div x_k$
P	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_i^*	$\dots$	p_k^*

В таблице x_i, x_{i+1} – границы i -ого разряда, $i=1, k$. Пусть v_i^* - число выборочных значений, попавших в i -ый разряд, тогда

$$p_i^* = \frac{v_i^*}{n}, \quad (20)$$

p_i^* - статистическая относительная частота, v_i^* - статистическая абсолютная частота.

Статистическая плотность определяется по формуле

$$f_i^* = \frac{v_i^*}{hn}. \quad (21)$$

Графическое изображение $f_i^*, i=1, k$ называют гистограммой.

4. Оценка математического ожидания случайной величины X вычисляется как среднее арифметическое ее выборочных значений

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (22)$$

Для получения несмещенной оценки дисперсии случайной величины X используется формула

$$D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2. \quad (23)$$

5. Для проверки гипотезы H_0 (о согласии статистического распределения с предполагаемым теоретическим,) **вы**числяется значение критерия по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i^* - v_i)^2}{v_i}, \quad (24)$$

v_i - теоретическая частота, рассчитанная по предполагаемому закону;

v_i^* - статистическая частота, определенная по выборочным данным;

k - число разрядов.



С учетом того, что $p_i = v_i/n$ можно использовать формулу

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} \quad (25)$$

Вычисленное значение χ^2 сравнивается с теоретическим (табличным) значением $\chi^2(r, \alpha)$. Значение $\chi^2(r, \alpha)$ определяется по таблице распределения χ^2 , по заданному уровню значимости $\alpha (\alpha = 0.05)$ и числу степеней свободы $r = k - 3$.

При проверке согласия статистического распределения с равномерным законом распределения необходимо:

- оценить параметры a и b – концы интервала, в котором наблюдались значения X , по формулам

$$a^* = m_x^* - \sqrt{3}\sigma_x,$$

$$b^* = m_x^* + \sqrt{3}\sigma_x;$$

- найти плотность предполагаемого равномерного распределения

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*};$$

- найти теоретические частоты

$$n_1 = np_1 = n \frac{1}{b^* - a^*} (x_1 - a^*)$$

$$n_2 = n_3 = \dots = n_k = n \frac{1}{b^* - a^*} (x_i - x_{i-1})$$

$$n_k = n \frac{1}{b^* - a^*} (b^* - x_{k-1})$$

- сравнить вычисленное значение χ^2 с теоретическим $\chi^2(r, \alpha)$ - (см. таблицы приложения 3 /1/), найденным по таблице, для принятия решения о гипотезе H_0 .

При проверке согласия статистического распределения с нормальным законом распределения необходимо:

- пронормировать X , т. е. перейти к случайной величине

$$Z = (X - m_x^*) / \sigma_x^*, \text{ и вычислить концы разрядов } z_i = (x_i - m_x^*) / \sigma_x^*, \text{ при}$$

этом $x_{\min} = -\infty, x_{\max} = \infty$;

- вычислить теоретические частоты $v_i = nP_i$,

- вычислить $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ - вероятность попадания случайной величины X в разряд $(x_i; x_{i+1})$, $\Phi(z)$ функция Лапласа (см. таблицы приложения /1/);

- вычислить χ^2 по формуле;

- сравнить χ^2 с табличным $\chi^2(r, \alpha)$; при этом, если $\chi^2 < \chi^2(r, \alpha)$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности; если $\chi^2 > \chi^2(r, \alpha)$ - гипотеза отвергается.

При проверке согласия статистического распределения с показательным законом распределения необходимо:

- оценить параметр λ по формуле $\lambda^* = \frac{1}{m_x^*}$;

- найти теоретические частоты по формуле

$$p_i = e^{-x_i^* \cdot \lambda^*} - e^{-x_{i+1}^* \cdot \lambda^*};$$

- вычислить χ^2 по формуле;

- сравнить χ^2 с табличным значением $\chi^2(r, \alpha)$; при этом, если $\chi^2 < \chi^2(r, \alpha)$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0 о показательном распределении генеральной совокупности; если $\chi^2 > \chi^2(r, \alpha)$ - гипотеза отвергается.

Задача 9.

Проведен выборочный контроль деталей, изготовленных на токарном станке. Полученные значения диаметра в микронах представлены в табл. 1.

Таблица 1

42	45	41	39	42	40	43	40	41	44
42	42	41	40	42	42	41	43	39	40

Выполнить первичную статистическую обработку данных, представленных в табл. 1.

1. Пусть X – диаметр – непрерывная случайная величина. Тогда в таблице 1 представлены статистические данные наблюдений за случайной величиной X . Упорядочим данные в порядке возрастания:

$$X = \{39, 39, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 44, 45\}.$$

Получаем $x_{\min} = 39, x_{\max} = 45$.



2. По упорядоченной выборке статистических данных строим частотную функцию распределения $F^*(x)$. В аналитической форме статистическая функция распределения имеет вид (19):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 39 \\ \frac{2}{20}, & 39 < x \leq 40 \\ \frac{6}{20}, & 40 < x \leq 41 \\ \frac{10}{20}, & 41 < x \leq 42 \\ \frac{10}{20}, & 42 < x \leq 43 \\ \frac{18}{20}, & 43 < x \leq 44 \\ \frac{19}{20}, & 44 < x \leq 45 \\ \frac{20}{20}, & x > 45 \end{cases}$$

3. Для построения группированного статистического ряда определяем число разрядов по формуле $k \approx \sqrt{20} = 4.472$. Пусть число разрядов будет $k=5$. Тогда

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{45 - 39}{5} = 1.2.$$

Группированный статистический ряд записываем в форме таблицы:

Таблица 2

X	39-40.2	40.2-41.4	41.4-42.6	42.6-43.8	43.8-45
V_i^*	6	4	6	2	2

Во второй строке таблицы записаны V_i^* - абсолютные частоты попадания выборочных значений в выбранные разряды. Вычисляем статистические относительные частоты p_i^* по формуле (20) и выборочные значения статистической плотности f_i^* для каждого разряда (x^* - границы разрядов) по формуле (21). Результаты представляем в таблице 3:

Таблица 3

x^*	39-40.2	40.2-41.4	41.4-42.6	42.6-43.8	43.8-45
V_i^*	6	4	6	2	2
p_i^*	0.3	0.2	0.3	0.1	0.1
f_i^*	0.25	0.17	0.25	0.08	0.08

4. Вычисляем оценку математического ожидания по формуле (22):

$$m_x^* = 41.45.$$

Для получения несмещенной оценки дисперсии используем формулу (23):

$$D_x^* = 2.47, \sigma_x = 1.57.$$

5. Установим, противоречат ли опытные данные гипотезе, что с.в. X распределена по заданному теоретическому закону. Для проверки гипотезы будем использовать критерий Пирсона.

Пусть выдвигается нулевая гипотеза H_0 : с.в. X распределена по нормальному закону с параметрами равными m_x, σ_x .

Вычислим теоретические частоты, используя функцию Лапласа, по формуле

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

где

$$z_i = \frac{x_i^* - m_x}{\sigma_x}.$$

Получаем для первого разряда нормированные значения границ разрядов

$$z_1 = \frac{39.0 - 41.45}{1.57} = -1.559, z_2 = \frac{40.2 - 41.45}{1.57} = -0.795$$

и соответствующие им значения функции Лапласа (см. приложение /1,4/):

$$\Phi(-1.559) = -0.43943, \Phi(-0.795) = -0.28814.$$

Тогда для первого разряда получаем теоретическую частоту

$$p_1 = \Phi(-0.795) - \Phi(-1.559) = 0.151.$$

Аналогично получаем теоретические частоты для остальных разрядов. Результаты вычислений представлены в таблице 4.



Таблица 4

$z_i = \frac{x_i^* - m_x}{\sigma_x}$	$\Phi\left(\frac{x_i^* - m_x}{\sigma_x}\right)$	P_i
-1.559	-0.43943	0.151
-0.795	-0.28814	0.276
-0.032	-0.01197	0.279
0.732	0.26730	0.19
1.732	0.45728	0.03
2.258	0.48778	

Находим значение χ^2 по формуле (25):

$$\chi^2 = 7.51.$$

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число разрядов $k=5$. Поэтому число степеней свободы γ в данном случае будет равно 5 минус 3 (число на-

ложенных связей: условие $\sum_{i=1}^k p_i^* = 1$, генеральное среднее и σ_x совпадает с

m_x и σ_x^*), т.е. $\gamma=5-3=2$. По таблице распределения χ^2 (см. приложение /1,4/) и числу $\gamma=2$ находим значение $\chi^2(r, \alpha)=7.4$ для уровня значимости $\alpha = 0.025$. Получили, что $7.51 > \chi^2_{\text{крит}}=7.4$. Делаем вывод о том, что выдвинутая нулевая гипотеза о нормальности распределения с.в. X отвергается с вероятностью 0.975.

Пусть выдвигается нулевая гипотеза H_0 : с.в. X распределена по равномерному закону с параметрами равными a, b .

Вычисляем оценки параметров

$$a^* = m_x^* - \sqrt{3} \cdot \sigma_x^* = 41.45 - \sqrt{3} \cdot 1.57 = 38.727,$$

$$b^* = m_x^* + \sqrt{3} \cdot \sigma_x^* = 41.45 + \sqrt{3} \cdot 1.57 = 44.173$$

Находим плотность вероятности теоретического распределения

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*} = \frac{1}{44.173 - 38.727} = 0.184.$$

Вычисляем теоретические частоты

$$p_1 = 0.184 \cdot (40.2 - 38.727) = 0.135, p_2 = 0.184 \cdot (41.4 - 40.2) = 0.22,$$

$$p_3 = 0.184 \cdot (42.6 - 41.4) = 0.22, p_4 = 0.184 \cdot (43.8 - 42.6) = 0.22,$$

$$p_5 = 0.184 \cdot (44.173 - 43.8) = 0.068$$

Находим значение χ^2 по формуле (25):

$$\chi^2 = 6.234$$

По таблице распределения $\chi^2(r, \alpha)$ (см. приложение /1,4/) и числу $\gamma=2$ находим значение $\chi^2(r, \alpha)=9.2$ для уровня значимости $\alpha = 0.01$. Получили, что $6.234 < \chi^2(r, \alpha)=9.2$. Делаем вывод о том, что выдвинутая нулевая гипотеза о равномерности распределения с.в. X с вероятностью 0.99 не противоречит опытным данным.

Пусть выдвигается нулевая гипотеза H_0 : с.в. X распределена по показательному закону с параметром равным λ .

Вычисляем оценку параметра

$$\lambda^* = \frac{1}{m_x^*} = \frac{1}{41.45} = 0.024.$$

Вычисляем теоретические частоты по формуле

$$p_i = e^{-x_i^* \cdot \lambda^*} - e^{-x_{i+1}^* \cdot \lambda^*}.$$

Получаем

$$p_1 = 0.011, p_2 = 0.011, p_3 = 0.011, p_4 = 0.01, p_5 = 0.01.$$

Находим значение χ^2 по формуле (25):

$$\chi^2 = 407.634.$$

По таблице распределения $\chi^2(r, \alpha)$ (см. приложение /1,4/) и числу $\gamma=2$ находим значение $\chi^2(r, \alpha)=9.2$ для уровня значимости $\alpha = 0.01$. Получили, что $407.634 > \chi^2(r, \alpha)=9.2$. Делаем вывод о том, что выдвинутая нулевая гипотеза о показательном распределении с.в. X отвергается с вероятностью 0.99.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С.Вентцель, Л.А. Овчаров; под ред. Е.С.Вентцель. - М.: Наука, 1988. - 480 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. - М.: Физматгиз, 1988. - 406 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей / В.Е. Гмурман. - М.: Радио и связь, 2004. - 404с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. - М.: Высшая шк., 2002. - 480с.



ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задача №1

В урне а белых и b черных шаров. Вынимается сразу k шаров. Найти $P(A)$.

Таблица А1. – Варианты к задаче №1

Номер варианта	a	b	k	A
1	5	4	5	{3 белых и 2 черных}
2	7	3	6	{3 белых и 3 черных}
3	9	2	5	{4 белых и 1 черный}
4	11	3	6	{4 белых и 2 черных}
5	6	7	5	{3 белых и 2 черных}
6	8	4	7	{3 белых и 4 черных}
7	10	2	8	{6 белых и 2 черных}
8	3	7	6	{3 белых и 3 черных}
9	5	6	4	{2 белых и 2 черных}
10	7	2	5	{3 белых и 2 черных}
11	9	3	7	{5 белых и 2 черных}
12	4	7	6	{3 белых и 3 черных}
13	6	4	8	{4 белых и 4 черных}
14	8	3	6	{4 белых и 2 черных}
15	5	4	5	{3 белых и 2 черных}
16	8	5	7	{3 белых и 4 черных}
17	11	2	5	{3 белых и 2 черных}
18	3	6	4	{3 белых и 1 черных}
19	7	4	8	{5 белых и 3 черных}
20	11	5	6	{3 белых и 3 черных}
21	4	8	5	{3 белых и 2 черных}
22	5	3	4	{2 белых и 2 черных}
23	6	5	6	{3 белых и 3 черных}
24	7	4	7	{5 белых и 2 черных}
25	8	2	5	{3 белых и 2 черных}



Таблица А2. – Варианты к задаче №2

№ вар.	Содержание задания
1	2
1	Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наугад извлеченного жетона, не содержит цифры 5.
2	Точка взята наудачу внутри круга радиуса R . Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от расположения внутри круга.
3	Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую, также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.
4	В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 коп. И семь монет по 3 коп. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая монета, оказавшаяся монетой в 20 коп. Определить вероятность, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в 20 коп.
5	Определить вероятность того, что выбранное наугад число N при возведении в квадрат даст число, оканчивающееся единицей.
6	Определить вероятность того, что выбранное наугад число N при возведении в четвертую степень даст число, оканчивающееся на единицу.
7	Определить вероятность того, что выбранное наугад целое число N при умножении на произвольное число даст число, оканчивающееся на единицу.
8	Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.
9	Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение (xy) будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.

Продолжение таблицы А2.

1	2
10	Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Студент, пришедший первым, ждет второго в течение четверти часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент выбирает наудачу момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).
11	Имеется магнитофонная лента длины $L = 200$ м, на обеих сторонах которой записаны сообщения длины $l_1 = 30$ м, на другой – длины $l_2 = 50$ м; местоположение записей неизвестно. В связи с повреждением ленты нам пришлось удалить ее участок длины $l_0 = 10$ м, начинающийся на расстоянии 80 м от начала ленты. Найти вероятности событий $A = \{\text{ни та, ни другая записи не повреждены}\}$ и $B = \{\text{первая запись повреждена, вторая - нет}\}$.
12	По радиоканалу в течение промежутка времени $(0;1)$ передаются два сигнала длительностью $\tau = 1/2$; каждый из них с одинаковой возможностью начинается в любой момент интервала $(0;1-\tau)$. Если сигналы перекроют друг друга хотя бы частично, оба они искажаются и приняты быть не могут. Найти вероятность того, что сигналы будут приняты без искажений.
13	Стержень длины L произвольным образом разламывается на части x, y, z . Найти вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.
14	Лодка перевозит груз с одного берега пролива на другой, пересекая пролив за один час. Какова вероятность того, что идущее вдоль пролива судно будет замечено, если с лодки обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 20 мин. до пересечения судном курса лодки, и не позднее, чем через 20 мин. после пересечения судном курса лодки? Любой момент и любое место пересечения судном курса лодки равновозможны.



Продолжение таблицы А2.

1	2
15	К автобусной остановке через каждые четыре минуты подходит автобус линии А и через каждые шесть минут - автобус линии В. Интервал времени прихода автобуса линии А и ближайшего следующего автобуса линии В равновозможен в пределах от нуля до четырех минут. Определить вероятность того, что первый подошедший автобус окажется автобусом линии А.
16	Из колоды в 52 карты извлекается наудачу 4 карты. Найти $P(A)$, если $A = \{\text{в полученной выборке все карты бубновой масти}\}$.
17	Имеется магнитофонная лента длины $L = 200$ м, на обеих сторонах которой записаны сообщение длины $l_1 = 30$ м, на другой – длины $l_2 = 50$ м; местоположение записей неизвестно. В связи с повреждением ленты нам пришлось удалить ее участок длины $l_0 = 10$ м, начинающийся на расстоянии 80 м от начала ленты. Найти вероятности событий $A = \{\text{обе записи повреждены}\}$ и $B = \{\text{вторая запись повреждена, первая - нет}\}$.
18	На окружности радиуса R наудачу поставлены три точки А, В, С. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный.
19	К автобусной остановке через каждые четыре минуты подходит автобус линии А и через каждые шесть минут - автобус линии В. Интервал времени прихода автобуса линии А и ближайшего следующего автобуса линии В равновозможен в пределах от нуля до четырех минут. Определить вероятность того, автобус какой-либо линии подойдет в течение двух минут.
20	Черный и белый короли находятся на первой и третьей горизонталях шахматной доски. На одно из незанятых полей первой или второй горизонтали наудачу ставится ферзь. Определить вероятность того, что образовавшаяся позиция матовая для черного короля, если положения королей равновозможны на любых горизонталях.
21	На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от нуля до девяти. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18 и трехзначное число делится на 36.

Продолжение таблицы А2.

1	2
22	Определить вероятность того, что корни а) квадратного $x^2 + 2ax + b = 0$, б) кубического $x^3 + 3ax + 2b = 0$ уравнений вещественны, если равновозможны значения коэффициентов в прямоугольнике $ a \leq n, b \leq m$. Какова вероятность, что при указанных условиях корни квадратного уравнения будут положительными.
23	Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно $kr (k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Круг радиуса r и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круге радиуса $5r$ наудачу выбрана точка. Определить вероятность попадания этой точки в круг радиуса $2r$.
24	В круге радиуса R проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R , если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению.
25	Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно $kr (k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Круг радиуса r и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круге радиуса $5r$ наудачу выбрана точка. Определить вероятность попадания этой точки в заштрихованную область.



ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Задача №1

В партии **а** деталей изготовлены на первом станке, **в** – на втором и **с** на третьем. Известно, что вероятности выпуска бракованной детали на первом, втором и третьем станке соответственно равны **р1**, **р2** и **р3**. Какова вероятность, что взятая наудачу деталь окажется бракованной

Таблица Б1. – Варианты к задаче №1.

Номер варианта	а	в	с	р1	р2	р3
1	2	3	4	5	6	7
1	30	25	15	0.01	0.03	0.02
2	32	27	17	0.02	0.04	0.03
3	34	23	13	0.03	0.05	0.04
4	28	21	11	0.04	0.06	0.05
5	26	19	9	0.05	0.07	0.06
6	31	29	7	0.06	0.08	0.07
7	33	31	8	0.06	0.09	0.01
8	35	18	10	0.06	0.03	0.02
9	27	16	12	0.06	0.04	0.03
10	29	14	20	0.01	0.05	0.04
11	18	15	17	0.02	0.06	0.05
12	20	17	14	0.03	0.07	0.06
13	22	19	12	0.04	0.08	0.07
14	24	10	7	0.05	0.09	0.08
15	17	12	9	0.06	0.03	0.09
16	19	14	6	0.07	0.05	0.01
17	21	16	8	0.08	0.07	0.02
18	23	18	10	0.09	0.02	0.03
19	25	20	12	0.01	0.04	0.04
20	13	21	16	0.02	0.06	0.05
21	15	23	18	0.03	0.08	0.06
22	14	25	13	0.04	0.01	0.07
23	16	27	15	0.05	0.02	0.08
24	18	29	17	0.06	0.03	0.09
25	20	31	19	0.07	0.04	0.01

Таблица Б2. – Варианты к задаче №2

№ вар.	Содержание задания
1	2
1	В шкафу находятся девять однотипных приборов. Вначале опыта все они новые (ни разу не бывшие в эксплуатации). Для временной эксплуатации берут наугад три прибора; после эксплуатации их возвращают в шкаф. На вид прибор, бывший в эксплуатации, не отличается от нового прибора. Найти вероятность события $A = \{\text{после трехкратного выбора и эксплуатации не останется новых приборов}\}$.
2	В тире имеется 5 ружей, вероятности попадания из которых соответственно равны 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет наудачу одно из ружей.
3	В ящике находится 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые
4	Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью $\frac{1}{4}$ попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.
5	В двух ящиках находятся детали: в первом - 10 (из них 3 стандартных), во втором - 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что детали окажутся стандартными.
6	Предприятие изготавливает 95% стандартных изделий; причем 86% из них - первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.
7	Вероятность попадания в мишень каждым из трех стрелков равна 0.3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получают приз.



Продолжение таблицы Б2.

1	2
8	Получена партия из 8 изделий одного образца. По данным проверки половины партии, три изделия оказались технически исправными, а одно бракованным. Какова вероятность того, что при проверке трех последующих изделий одно из них окажется исправным, а два других - бракованными, если любое количество бракованных изделий в данной партии равновозможно.
9	На станцию связи за день поступило 20 телеграмм, адресованных в четыре различных пункта (по пять в каждый пункт). Из всех телеграмм выбирается наугад четыре. Найти вероятности событий: $A = \{\text{все телеграммы адресованы в разные пункты}\}$ $B = \{\text{все телеграммы адресованы в один и тот же пункт}\}$.
10	Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0.1. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным.
11	При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью $p=0.66$. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания и вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включить зажигание не более двух раз.
12	Передается сообщение, состоящее из n двоичных символов «0» и «1». Каждый из символов с малой вероятностью $p=0.02$ искажается (заменяется на противоположный). Для надежности сообщение передается два раза; если оба сообщения совпали, информация считается правильной. Найти вероятность того, что, несмотря на совпадение сообщений, оба они оказались ошибочными.
13	Завод изготавливает определенного типа изделия; каждое изделие имеет дефект с вероятностью $p=0.17$. Изделие осматривается одним контролером; он обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью $p=0.8$, а если дефект не обнаружен, пропускает изделие в готовую продукцию. Кроме того, контролер может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна α . Найти вероятности событий: $A = \{\text{изделие забраковано}\}$, $B = \{\text{изделие забраковано, но по ошибке}\}$, $C = \{\text{изделие пропущено в готовую продукцию с дефектом}\}$.

Продолжение таблицы Б2.

1	2
14	Две одинаковые монеты радиуса r расположены внутри круга радиуса R , в который наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не перекрываются.
15	Имеется электроприбор, который может выходить из строя (перегорать) только в момент включения. Если прибор включался до сих пор $(k-1)$ раз и еще не перегорел, то условная вероятность ему перегореть при k -м включении равна p_1 . Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{прибор выдержит не менее } n \text{ включений}\}$, $B = \{\text{прибор выдержит не более } n \text{ включений}\}$, $C = \{\text{прибор перегорит точно при } n\text{-м включении}\}$.
16	Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0.2, 0.4 и 0.6.
17	В ящик, содержащий 3 одинаковые детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей первоначально находившихся в ящике.
18	Техническое устройство состоит из пяти узлов; каждый узел за время эксплуатации отказывает (выходит из строя) с вероятностью $p=0.4$. Отдельные узлы отказывают независимо друг от друга. Если откажет более трех узлов, устройство не может работать; если откажет один узел или два узла, оно работает, но с пониженной эффективностью. Найти вероятности событий: $A = \{\text{в устройстве не отказал ни один узел}\}$, $B = \{\text{устройство может работать}\}$, $C = \{\text{устройство работает с пониженной эффективностью}\}$.
19	В ящике имеется 10 монет по 20 коп., 5 монет по 15 коп. и 2 монеты по 10 коп. Наугад берутся шесть монет. Какова вероятность. Что в сумме они составят не более одного рубля.
20	Игрок А поочередно играет с игроками В и С, имея вероятность выигрыша в каждой партии 0.25, прекращая игру после первого проигрыша или после двух партий, сыгранных с каждым игроком. Определить вероятность выигрыша игроков В и С.



Продолжение таблицы Б2.

1	2
21	В квадрат, разделенный на n^2 одинаковых квадратов, брошен шарик. Вероятность попадания шарика в малый квадрат i -й горизонтальной и j -й вертикальной полос равна p_{ij} , ($\sum_{i,j=1}^n p_{i,j} = 1$). Определить вероятность попадания шарика в горизонтальную полосу.
22	Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король).
23	Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны p_1 , p_2 и p_3 . Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины.
24	Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.
25	Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Задача №1

Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , если заданы значения дискретной случайной величины и вероятности их появления.

Таблица С1. – Варианты к задаче №1

Номер варианта	Значения дискретной случайной величины и вероятности их появления
1	2
1	$X(3.0, 4.1, 4.9, 7.0, 6.4, 0.4)$, $p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)$
2	$X(4.4, 7.5, 7.1, 8.5, 0.4, 6.1)$, $p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)$
3	$X(6.2, 3.8, 4.7, 1.1, 6.6, 5.9)$, $p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)$
4	$X(8.5, 5.1, 4.2, 7.6, 0.2, 5.2)$, $p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)$
5	$X(5.7, 3.2, 1.4, 0.2, 6.5, 2.2)$, $p(0.05, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$
6	$X(7.7, 9.1, 2.7, 1.8, 2.8, 5.1)$, $p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)$
7	$X(5.1, 0.8, 1.0, 8.4, 3.4, 6.0)$, $p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)$
8	$X(1.8, 7.9, 2.9, 5.2, 7.2, 4.1)$, $p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)$
9	$X(4.4, 2.8, 9.3, 7.9, 0.1, 9.9)$, $p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)$
10	$X(4.3, 9.5, 4.9, 4.0, 0.5, 3.0)$, $p(0.05, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$
11	$X(2.3, 4.0, 0.7, 8.9, 6.3, 6.4)$, $p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)$
12	$X(6.8, 3.6, 9.8, 4.8, 10.0, 1.9)$, $p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)$
13	$X(8.9, 9.2, 5.2, 7.7, 2.8, 7.6)$, $p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)$
14	$X(7.9, 9.6, 0.3, 2.6, 5.2, 4.6)$, $p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)$
15	$X(4.8, 1.6, 9.2, 3.6, 3.2, 6.4)$, $p(0.05, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$
16	$X(5.9, 3.2, 3.4, 1.2, 7.8, 6.5)$, $p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)$
17	$X(9.6, 9.7, 1.2, 8.2, 3.7, 9.8)$, $p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)$
18	$X(1.3, 0.2, 6.0, 8.5, 4.6, 7.7)$, $p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)$
19	$X(6.6, 2.8, 7.5, 4.2, 4.6, 6.0)$, $p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)$
20	$X(3.3, 5.2, 7.0, 1.0, 6.3, 2.8)$, $p(0.05, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$
21	$X(9.6, 5.0, 1.8, 2.2, 4.6, 3.7)$, $p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)$
22	$X(4.3, 6.8, 5.4, 0.2, 8.8, 2.8)$, $p(0.1, 0.15, 0.1, 0.2, 0.2, 0.25)$
23	$X(3.2, 4.8, 4.9, 0.1, 6.4, 4.6)$, $p(0.25, 0.2, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)$
24	$X(5.4, 6.2, 3.0, 5.1, 2.2, 7.8)$, $p(0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.3, 0.3)$
25	$X(3.7, 5.7, 2.8, 6.6, 6.2, 7.6)$, $p(0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.5)$



Таблица С2. – Варианты к задаче №2

№ вар.	Содержание задания
1	2
1	Функция распределения равномерно распределенной случайной величины X имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3 \\ x - 3, & \text{при } 3 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ Найти плотность вероятности случайной величины X, и числовые характеристики m_x, D, S.
2	Функция распределения случайной величины безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид $F(t) = 1 - \exp(-t/T), \quad t \geq 0.$ Найти вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T, плотность вероятности $f(t)$.
3	Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея $F(x) = 1 - \exp(-x^2 / 2\sigma^2)$ Найти моду распределения, медиану распределения, плотность вероятности.
4	Функция распределения Вейбула $F(x) = 1 - \exp(-x^m / x_0), \quad (x > 0)$ в ряде случаев характеризует срок службы элементов электронной аппаратуры. Найти плотность вероятности $f(x)$, моду распределения.
5	При каком значении a функция $f(x) = a / (1 + x^2), \quad (-\infty < x < \infty)$ является плотностью вероятности случайной величины X? Найти функцию распределения случайной величины X, вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1, 1)$.

Продолжение таблицы С2.

1	2
6	Случайная величина X распределена в интервале $(0, 5)$ задана плотностью $f(x) = (2/25)x$. Найти $F(x)$, m_x и σ_x.
7	Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ a + b(\arcsin x), & \text{при } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$ Определить постоянные a и b. Найти m_x, D, σ_x.
8	Плотность вероятности случайной величины X имеет вид $f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad -a < x < a,$ при $x \geq a \quad f(x) = 0$ Определить m_x.
9	Случайная величина X в интервале $(-3, 3)$ задана плотностью $f(x) = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{9 - x^2}}, \quad \text{а вне этого интервала } f(x) = 0.$ Найти дисперсию и определить, что вероятнее: событие $\{X < 1\}$ или событие $\{X > 1\}$.
10	Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x) = \begin{cases} 1 - x_0^3 / x^3, & x \geq x_0, \\ 0, & x < x_0 \end{cases} \quad (x_0 > 0).$ Найти m_x, D, σ_x.



Продолжение таблицы С2.

1	2
11	Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$ Найти функцию распределения случайной величины X, вычислить характеристики m_x, D, σ_x.
12	Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины, имеющей на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ плотность вероятности $f(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x$.
13	Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой $p(t) = 1 - e^{-\gamma t}, \gamma > 0$ Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.
14	Случайная величина X задана функцией плотности вероятности распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \pi/6 \\ 3 \sin 3x, & \pi/6 < x \leq \pi/3 \\ 0, & x > \pi/3 \end{cases}$ Найти функцию распределения, m_x, D.
15	Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром μ: $f(x) = \begin{cases} \mu \exp(-\mu x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ Найти функцию распределения, вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем ее m_x.

Продолжение таблицы С2.

1	2
16	Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ Найти плотность распределения, m_x, D, σ_x.
17	Случайная величина задана дифференциальной функцией $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2} \\ a \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Найти коэффициент a, построить функцию распределения, вычислить m_x, D, σ_x.
18	Случайная величина задана дифференциальной функцией $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$ Найти функцию распределения, вычислить m_x, D, вероятность того, что случайная величина X принимает значение, заключенное в интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.



Продолжение таблицы С2.

1	2
19	Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x-1, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ Найти функцию плотности вероятности, вычислить m_x, D, σ_x, вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (1;1.5).
20	Случайная величина X задана плотностью вероятности (распределение Лапласа) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{- x }$ Вычислить m_x, D,
21	Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{(1 - \cos x)}{2}, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$ Найти функцию плотности вероятности, вычислить m_x, D, σ_x, вероятность того, что случайная величина X принимает значение, заключенное в интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Продолжение таблицы С2.

1	2
22	Задана функция распределения случайной величины X $F(x) = a + \operatorname{arccotg} \frac{x}{2}, \quad (-\infty < x < \infty).$ Определить параметры a, b, плотность вероятности случайной величины X, m_x, D.
23	Функция распределения случайной величины X $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ a + b \arcsin x, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ Определить параметры a, b, плотность вероятности случайной величины X, характеристики m_x, D, σ_x.
24	Случайная величина X имеет распределение Релея $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), x > 0.$ Найти плотность вероятности случайной величины X, медиану.
25	Плотность распределения вероятности имеет вид $f(x) = \begin{cases} Ax^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0, \alpha > -1, \beta > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ Определить параметр A, m_x, D.



ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Таблица Д1. – Варианты к заданию №4

Номер варианта	Выборочные значения
1	95,6,21, 77, 62, 46,3,71 ,93 ,68 ,84 ,55 ,64 ,89 ,66 ,26 ,18, 91,7,50
2	68, 11, 65, 92, 94, 27, 76,1,65 ,67, 92, 93, 10, 52, 25, 60,9,33 ,66 ,62
3	70, 15, 8, 25, 42, 43, 35, 27, 45, 18, 9, 40, 34, 61, 32, 5, 38,31, 28, 87
4	18, 85, 81, 60, 53, 27, 54, 50, 40, 7, 68, 34, 9, 64, 65, 5, 11, 31, 61, 62
5	22, 87, 27, 14, 65, 6, 92, 73, 9, 62, 51, 75, 27, 56, 95, 47, 8, 50, 38, 98
6	81, 86, 89, 75, 70,0,73, 86, 52, 43, 38,0,29, 81 ,75, 70, 87, 36 ,46 ,41
7	18, 47,2,46, 48, 50, 23, 94, 59, 23, 22, 98,7,26, 99, 18, 77, 37, 27, 95
8	47, 79,2,5,23, 69, 12, 75, 77, 43, 81, 20, 16, 40, 6,9,41, 46, 95, 37
9	86, 30, 63, 33, 45, 22, 57, 43, 23, 25,6,2,80, 47, 28, 35, 34,1,28, 67
10	61, 14, 76, 88,3,33, 50, 78, 64, 30, 81,9,63, 36, 34, 51, 74, 55,9,74
11	68, 44, 56, 17, 37, 62, 29, 46, 74, 11, 28, 56, 21, 35, 7, 65, 29,48, 85,8
12	79, 97, 8 ,36, 64, 4, 20, 70, 25, 66, 91, 81, 95, 10, 84, 69,4,47, 57, 86
13	26, 14, 29, 19, 87, 50,10,20, 65, 41, 27, 6, 50, 48, 63, 41, 7, 34, 23, 80
14	79, 52, 31, 78 ,18, 6, 63,9,72, 32,4,1,55, 10, 65,6,42, 61, 32, 65
15	12,0,55,22,39,92,93,41,9,72, 5 40, 71, 67, 40, 25, 74, 99, 29,8
16	28, 56,0,30, 98, 81, 80, 37, 20, 26, 24, 57, 97, 47, 14, 96, 14, 48,1,49
17	80,6, 48, 79, 86, 27, 25, 29, 39, 16, 85, 55, 67, 66, 16 ,10, 71, 90, 37,9
18	8,63,2,0,72, 36, 10, 13, 42, 41, 53, 74, 31, 18, 41, 97, 59,1,76, 39
19	74, 63, 3, 63, 80, 15, 59, 71, 66, 86,9,56, 42, 47, 76, 42, 19, 52. 16, 10
20	92,4,52, 19, 16, 71, 91, 64, 80, 18, 77, 52, 27, 20. 83, 63, 62, 67, 7, 40
21	51, 9, 84, 35, 13, 10, 48, 7, 44, 17, 67, 63, 35, 9, 40, 82, 66, 12, 71 21
22	88, 66, 7, 10, 34, 9, 48,6,11, 90, 57, 38, 72, 41, 66, 38, 59, 44,9,43
23	78, 82, 63, 55, 43, 10, 9, 59, 9, 70, 63, 79, 75, 88, 96, 8, 65, 37, 45, 65
24	62, 26, 81, 50,8,72, 36, 75, 96, 38, 28, 83, 33, 69, 5, 90, 59, 46, 39,65
25	75, 57, 67, 18, 84, 87, 24, 50, 18, 19, 5, 32, 2,70, 47, 83, 84, 8, 31, 70

Заказ № _____ от « _____ » _____ 2008 _____. Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ

