

Министерство образования Украины
Севастопольский государственный технический университет

Методические указания
к лабораторным занятиям по дисциплинам
"НАДЕЖНОСТЬ, КОНТРОЛЬ, ДИАГНОСТИКА
И ЭКСПЛУАТАЦИЯ ЭВМ",

для студентов специальности
7.091501 – компьютерные системы и сети

Севастополь
2008

Цель - дать студенту систематизированные знания об основах теории надежности средств вычислительной техники на этапах проектирования, изготовления и эксплуатации.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании совета департамента кибернетики и вычислительной техники 20.05.2008 г., протокол № 8.

Рецензенты: Апраксин Ю.К., Новоселов В.Г.

	СОДЕРЖАНИЕ	Стр
1	Оценка надежности невосстанавливаемых элементов по экспериментальным данным	4
2	Расчет надежности невосстанавливаемых элементов при известных распределениях времени функционирования	6
3	Вычисление основных показателей надежности восстанавливаемых элементов	8
4	Надежность систем последовательно-параллельной структуры при нагруженном резерве	10
5	Надежность последовательно-параллельных систем при смешанном резервировании	14
6	Оценка надежности систем сложной структуры	18
7	Логико-вероятностный метод расчета надежности систем с монотонной структурой	20
	Библиографический список	

1. Оценка надежности невосстанавливаемых элементов по экспериментальным данным

1.1. Задание

Надежностные испытания N элементов проводились в течение 10 часов, и после i -го часа в момент времени t_i , фиксировалось общее число $n_i = n(t_i)$ отказавших к этому моменту элементов. Кроме вектора $n = (n_1, \dots, n_{10})$, задан также интервал (t_k, t_l) , особо интересующий экспериментатора.

Требуется:

1) рассчитать следующие показатели надежности:

- эмпирическую функцию распределения отказов, $F(t_i)$, $i=1, \dots, 10$;
- эмпирическую функцию распределения безотказной работы, $P(t_i)$, $i=1, \dots, 10$;
- вероятность $Q(t_k)$ отказа за время t_k ;
- условную вероятность $P(t_k, t_l)$ безотказной работы в интервале $[t_k, t_l]$, при условии безотказной работы за t_k часов;
- условную вероятность $Q(t_k, t_l)$ отказа на том же интервале;
- среднее время T работы до отказа;
- интенсивность $\lambda(t_i)$ отказов в момент t_i , $i=1, \dots, 10$;

2) Результаты расчетов для $F(t_i)$, $P(t_i)$, $\lambda(t_i)$ оформить в виде таблиц. По таблицам построить графики функций $F(t_i)$, $P(t_i)$ и $\lambda(t_i)$.

1.2. Элементы теории

Эмпирическая функция $F(t_i)$ рассчитывается [1] по формуле

$$F(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^i n_k,$$

функция $P(t_i)$ вычисляется как $P(t_i) = 1 - F(t_i)$,

вероятность $Q(t_k)$ полагается равной $F(t_k)$,

остальные показатели рассчитываются по формулам

$$P(t_k, t_l) = \frac{1 - F(t_l)}{1 - F(t_k)}; \quad Q(t_k, t_l) = 1 - P(t_k, t_l);$$

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} [F(t_{i+1}) - F(t_i)] \cdot t_{i+1}; \quad \lambda(t_i) = \frac{n_i}{(N - \sum_{j=1}^{i-1} n_j) \cdot (t_i - t_{i-1})}, \text{ причем } t_0 = 0.$$

1.3. Варианты заданий

приведены в табл. 1.1. Количество N элементов подсчитывается как сумма элементов строки таблицы.

Таблица 1.1

Числа n_i отказавших элементов и интервал (t_k, t_l)

№№ вар.	t_i , ч										инт.ар. (t_k, t_l)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1	3	4	5	6	7	7	2	2	0	2,6
2	0	4	3	6	9	8	7	3	2	1	1,5
3	1	4	4	7	10	8	8	3	3	1	2,7
4	1	5	4	8	10	9	8	4	3	2	2,5
5	2	5	5	8	11	9	9	4	4	2	3,6
6	2	6	5	9	11	10	9	5	4	3	3,7
7	3	6	6	9	12	10	10	5	5	3	2,8
8	3	7	6	10	12	11	10	6	5	4	2,7
9	4	7	7	10	13	11	11	6	6	4	3,5
10	4	8	7	11	13	12	11	7	6	5	4,8
11	5	8	8	11	14	12	13	7	7	5	5,8
12	5	9	8	12	14	13	13	8	7	6	4,7
13	6	9	9	12	15	13	14	8	8	6	2,5
14	6	10	9	13	15	14	14	9	8	7	2,6
15	7	10	10	13	16	14	15	9	9	7	3,5
16	7	9	10	14	15	16	13	10	8	6	3,7
17	6	9	9	14	14	16	12	10	7	6	3,8
18	6	8	9	13	14	15	12	9	7	5	1,6
19	5	8	8	13	13	15	11	9	6	5	1,7
20	5	7	8	12	13	14	11	8	6	4	2,4
21	4	7	7	12	12	14	10	8	5	4	3,5
22	4	6	7	11	12	13	10	7	5	3	3,6
23	3	6	6	11	11	13	9	7	4	3	4,8
24	3	5	6	10	11	12	9	6	4	2	4,7
25	2	5	5	10	10	12	8	6	3	2	3,6
26	2	4	5	9	10	11	8	5	3	1	3,7
27	1	4	4	9	9	11	7	5	2	1	2,7
28	1	3	4	8	9	10	7	4	2	0	3,5
29	0	3	3	8	9	10	6	4	1	0	4,8
30	0	2	3	6	7	9	5	3	1	0	2,9

2. Расчет надежности невосстанавливаемых элементов при известных распределениях времени функционирования

2.1. Задание

2.1.1. Распределение времени работы элемента до отказа - нормальное с заданным средним значением T и дисперсией σ^2 этого времени. Заданы также два момента t_1 и t_2 времени t , отсчитываемого от нуля. Требуется рассчитать:

- вероятность $P(t)$ безотказной работы на интервалах $(0, t)$ при $t=t_1$ и $t=t_2$;
- вероятность $Q(t)$ отказа на тех же интервалах;
- условную вероятность $P(t_1, t_2)$ безотказной работы в интервале (t_1, t_2) ;
- условную вероятность $Q(t_1, t_2)$ отказа на этом же интервале;
- интенсивности $\lambda(t)$ отказа при $t=t_1$ и $t=t_2$;

2.1.2. Повторить расчет указанных показателей для элемента с экспоненциальным распределением времени работы до отказа при тех же значениях T , t_1 и t_2 . Сравнить результаты и сделать выводы.

2.2. Элементы теории

В случае нормального закона распределения с параметрами T и σ вероятность $P(t)$ определяется как [1]

$$P(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-T}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ - стандартная функция нормального распределения случайной величины x со средним 0 и дисперсией 1 (см. табл. 4 приложения).

Вероятность $Q(t)$ рассчитывается по формуле $Q(t) = 1 - P(t)$, то есть совпадает с

$$\Phi\left(\frac{t-T}{\sigma}\right).$$

Расчетные формулы для остальных показателей в случае нормального распределения таковы

$$P(t_1, t_2) = \frac{P(t_2)}{P(t_1)},$$

$$Q(t_1, t_2) = 1 - P(t_1, t_2),$$

$$\lambda(t) = \frac{\phi\left(\frac{t-T}{\sigma}\right)}{P(t)},$$

где $\phi(x)$ - стандартная плотность нормального распределения случайной величины x со средним 0 и дисперсией 1 (см. табл. 3 приложения).

При вычислениях с отрицательными x необходимо воспользоваться тождествами $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ и $\phi(x) = \phi(-x)$, поскольку таблицы 3 и 4 приложения не содержат отрицательных x .

В случае показательного закона распределения с постоянной интенсивностью λ отказов характеристики надежности определяются по формулам.

$$P(t) = P(0, t) = \exp(-\lambda(t)),$$

$$P(t_1, t_2) = \exp(-\lambda(t_2 - t_1)),$$

$$Q(t_1, t_2) = 1 - P(t_1, t_2), \text{ где } \lambda = \lambda(e) = 1/T.$$

Значения функции $\exp(-x)$ приведены в таблице 2 Приложения.

Для $x < 0,1$ можно пользоваться $e^{-x} = 1 - x$ с погрешностью, не превышающей $x^2/2$.

2.3 Варианты заданий

приведены в таблице 2.1. Масштаб данных указан в заголовке таблицы.

Таблица 2.1.

№№	$10^{-1}T, \text{ч}$	$10^{-2}\sigma^2, \text{ч}^2$	$10^{-1}t_1, \text{ч}$	$10^{-1}t_2, \text{ч}$	№№	$10^{-1}T, \text{ч}$	$10^{-2}\sigma^2, \text{ч}^2$	$10^{-1}t_1, \text{ч}$	$10^{-1}t_2, \text{ч}$
1	10	14	6	14	16	16	11	10	20
2	20	28	12	28	17	17	11	11	21
3	30	42	24	42	18	18	12	12	21
4	40	80	30	50	19	19	20	13	22
5	50	90	45	55	20	20	22	14	25
6	60	100	54	66	21	21	23	15	26
7	70	120	60	80	22	22	25	16	27
8	80	160	70	90	23	23	30	20	27
9	90	17	80	110	24	24	31	20	28
10	15	14	10	20	25	25	32	21	28
11	11	15	7	15	26	26	34	20	32
12	12	16	8	16	27	27	35	20	35
13	13	17	9	16	28	28	40	20	40
14	14	18	10	18	29	29	50	10	50
15	15	19	10	18	30	30	60	10	60

3. Вычисление основных показателей надежности восстанавливаемых элементов

3.1. Задание

3.1.1. Распределение $P(t_i)$ времени работы элементов до отказа задано в виде таблицы, полученной в п.1. Предполагается, что такой же вид имеет и распределение между отказами. Распределение $F_B(t_i)$ времени восстановления задано соответствующей строкой в таблице 3.1 вариантов.

По этим данным требуется вычислить оценки следующих показателей надежности:

- среднее время τ восстановления элемента,
- коэффициент готовности K ,
- коэффициент простоя k ,
- коэффициент оперативной готовности $R(t)$ для момента $t = 2$ ч.

3.1.2. Элемент имеет экспоненциальные распределения времени работы до отказа и времени восстановления с интенсивностями λ и μ час⁻¹ соответственно. Задано также время t_0 оперативной работы, $t_0 = 2$ часа. Требуется вычислить показатели надежности: вероятность $P(t_0)$ безотказной работы и вероятность $Q(t_0)$ отказа за время t_0 , а также наработку T на отказ, среднее время τ восстановления, коэффициенты K и k готовности и простоя, коэффициент $R(t_0)$ оперативной готовности.

3.2. Расчетные формулы и методические указания

оценка для τ вычисляется по формуле

$$\tau = \sum_i t_{Bi} \cdot P_i,$$

где t_{Bi} , P_i – экспериментальные данные, извлекаемые из строки таблицы 3.1.

Коэффициенты готовности и простоя определяются по формулам

$$K = T / (T + \tau), \quad k = 1 - K,$$

где T – наработка на отказ. Поскольку, как это следует из задания 3.1.1, функция $P(t_i)$ одинакова для ситуаций „до отказа” и „между отказами”, то в качестве T можно взять среднее время работы до отказа, вычисленное на первом занятии (см. п.1).

Коэффициент $R(t_0)$ оперативной готовности по экспериментальным данным таблицы для $P(t_i)$ первого занятия оценивается по формуле

$$R(t_0) = \frac{1}{T + \tau} \sum_{i \geq 0} P(t_{i+1}) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

В случае экспоненциальных распределений отказов и восстановлений необходимые показатели рассчитываются по формулам:

$$P(t_0) = \exp(-\lambda t_0),$$

$$Q(t_0) = 1 - P(t_0),$$

$$T = 1/\lambda, \quad \tau = 1/\mu, \quad K = \mu / (\lambda + \mu),$$

$$k = 1 - K, \quad R(t_0) = K \cdot \exp(-\lambda t_0),$$

3.3 Варианты заданий

приведены в таблице 3.1. Значения λ и μ заданы в час⁻¹, t_{Bi} – в часах.

Таблица 3.1.

№№	λ	μ	t_{Bi}		
			0,2	0,4	1,6
			P_1	P_2	P_3
1	0,01	2	0,7	0,2	0,1
2	0,02	3	0,6	0,3	0,1
3	0,03	4	0,5	0,4	0,1
4	0,04	5	0,4	0,4	0,2
5	0,05	6	0,5	0,3	0,2
6	0,06	7	0,3	0,5	0,2
7	0,07	8	0,3	0,4	0,3
8	0,08	9	0,6	0,3	0,1
9	0,09	10	0,7	0,2	0,1
10	0,10	11	0,6	0,2	0,2
11	0,11	12	0,7	0,15	0,15
12	0,12	13	0,5	0,3	0,2
13	0,13	14	0,4	0,4	0,2
14	0,14	15	0,5	0,3	0,2
15	0,15	16	0,8	0,15	0,5
№№	λ	μ	t_{Bi}		
			0,3	0,5	1,5
			P_1	P_2	P_3
16	0,01	2	0,6	0,3	0,1
17	0,02	3	0,7	0,2	0,1
18	0,03	4	0,4	0,4	0,2
19	0,04	5	0,6	0,3	0,1
20	0,05	6	0,5	0,3	0,2
21	0,06	7	0,3	0,5	0,2
22	0,07	8	0,2	0,6	0,2
23	0,08	9	0,1	0,7	0,2
24	0,09	10	0,3	0,6	0,1
25	0,10	11	0,4	0,5	0,1
26	0,11	12	0,5	0,4	0,1
27	0,12	13	0,3	0,4	0,3
28	0,13	14	0,2	0,6	0,2
29	0,14	15	0,6	0,2	0,2
30	0,15	16	0,7	0,2	0,1

4. Надежность систем последовательно-параллельной структуры при нагруженном резерве

4.1. Задание

Заданы структура избыточной последовательно-параллельной системы, интенсивности λ_i отказов ее элементов и оперативное время t_0 работы системы. Предполагается, что избыточные элементы находятся в режиме нагруженного резерва, и распределение отказов элементов – экспоненциальное.

Требуется:

- вычислить вероятность $P_c(t_0)$ безотказной работы системы за время t_0 и оценить наработку на отказ T_c системы,
- сравнить значения этих показателей со значениями, полученными другими членами бригады. Бригада определяется по общему для всех ее членов вектору λ - характеристик (см. п. 4.4.).

4.2. Элементы теории

Если все n элементов системы функционируют так, что отказ любого из них приводит к отказу всей системы, то говорят что система имеет последовательную надежность структуру и вероятность $P_{\text{посл}}$ безотказной работы вчисляется как

$$P_{\text{посл}} = \prod_{i=1}^n p_i, \quad (4.1)$$

где p_i – вероятность безотказной работы i -го элемента. Величины P и p_i отнесены к одному и тому же интервалу времени t_0 .

Аналогично, если m элементов функционируют так, что отказ системы наступает при отказе всех элементов, то говорят, что система имеет параллельную надежность структуру и вероятность $P_{\text{пар}}$ ее безотказной работы оценивается как

$$P_{\text{пар}} = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - p_j) \quad (4.2)$$

Если известна вероятность $P_c(t)$ безотказной работы системы, то ее наработка T_c на отказ равна

$$T_c = \int_0^{\infty} P_c(t) dt. \quad (4.3)$$

В частности наработка $T_{\text{посл}}$ для последовательной структуры –

$$T_{\text{посл}} = \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n p_i(t) dt, \quad (4.4)$$

а для параллельной -

$$T_{\text{пар}} = \int_0^{\infty} (1 - \prod_{j=1}^m (1 - p_j(t))) dt \quad (4.5)$$

Если $p_i(t) = \exp(-\lambda_i t)$ (закон функционирования до отказа - экспоненциальный),

$$T_{\text{посл}} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^{-1}, \quad (4.6)$$

$$T_{\text{пар}} = \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-1} - \sum_{k \neq l} (\lambda_k + \lambda_l)^{-1} + \dots + (-1)^m \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

Суперпозиция последовательной и параллельной структур дает некоторую комбинированную, последовательно-параллельную, структуру, показатели надежности которой вычисляются путем выделения некоторых подсистем базовой структуры и замены их эквивалентными по надежности элементами, до тех пор, пока система не сведется к одному эквивалентному элементу.

4.3. Пример расчета

Пусть структура системы задана рисунком 4.1., $\lambda_i = \lambda = 10^{-3} \text{ час}^{-1}$, $t = 1, \dots, 5$. Вычислим $P_c(t_0)$ и оценим T_c , полагая, что $t_0 = 100$ час. Сначала вычислим p_i . Поскольку λ_i одинаковы, то

$$p_i = \exp(-\lambda t_0) = \exp(-10^{-3} \cdot 10^2) = e^{-1} = 0,9048, i = 1, \dots, 5.$$

Обращаясь к рисунку 2.1 видим, что подсистема из элементов 2 и 3 образует параллельную структуру, и следовательно, согласно (4.2), ее вероятность p_{23} безотказной работы равна

$$p_{23} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - (1 - 0,9048)^2 = 0,991$$

Заменяя подсистему эквивалентным ей по надежности элементом 23, получим структуру рис. 4.2,а.

Элементы 1 и 23, так же как и элементы 4 и 5, образуют последовательные структуры, надежности которых, в соответствии с (4.1), равны

$$p_{123} = p_1 \cdot p_{23} = 0,9048 \cdot 0,991 = 0,8968,$$

$$p_{45} = p_4 \cdot p_5 = (0,9048)^2 = 0,8187.$$

После замены лих подсистем элементами 123 и 45 получаем структуру рис. 4.2,6, надежность которой, согласно (4.2), равна

$$p_{12345} = 1 - (1 - p_{123})(1 - p_{45}) = 0,9813.$$

Элемент 12345, рис. 4.2,в, с точки зрения вероятности безотказной работы эквивалентен системе рис. 4.1, так что

$$P_c = p_{12345} = 0,9813.$$

Оценим теперь величину T_c - наработку на отказ системы. Используя формулы (4.7) и (4.8), а также рис. 4.2, имеем

$$T_{23} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}, \quad \lambda_{23} = \frac{1}{T_{23}} = \frac{2}{3}\lambda,$$

$$T_{123} = (\lambda_1 + \lambda_{23})^{-1} = (\lambda + \frac{2}{3}\lambda)^{-1} = \frac{3}{5\lambda}, \quad \lambda_{123} = \frac{5}{3}\lambda,$$

$$T_{123} = (\lambda_1 + \lambda_{23})^{-1} = (\lambda + \frac{2}{3}\lambda)^{-1} = \frac{3}{5\lambda}, \quad \lambda_{123} = \frac{5}{3}\lambda,$$

$$T_{45} = (\lambda_4 + \lambda_5)^{-1} = \frac{1}{2\lambda}, \quad \lambda_{45} = 2\lambda,$$

$$T_{12345} = \frac{1}{\lambda_{123}} + \frac{1}{\lambda_{45}} - \frac{1}{\lambda_{123} + \lambda_{45}} = \frac{91}{110\lambda} = 828 \text{ час.}$$

Таким образом, наработка T системы оценивается в 828 час.

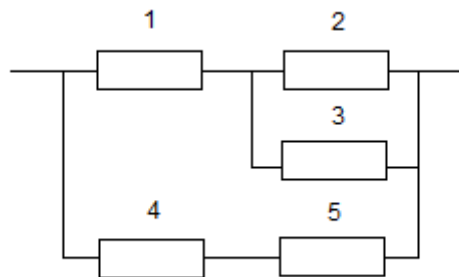


Рис. 4.1

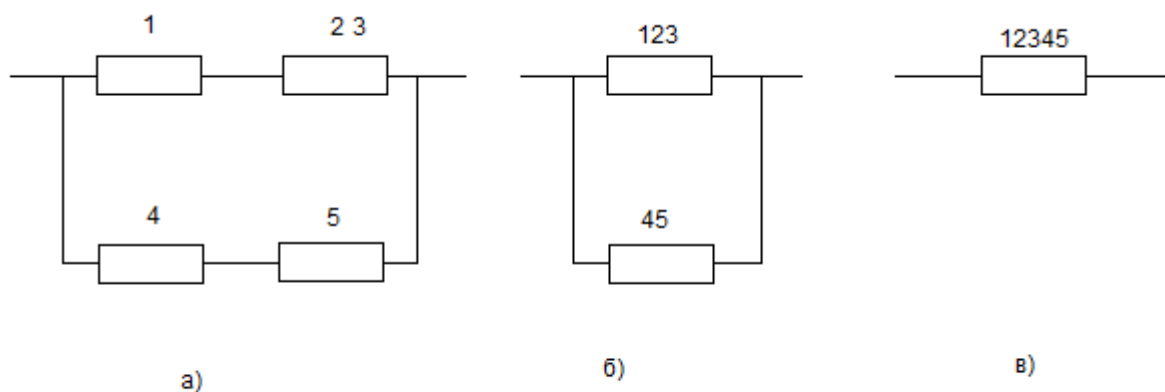


Рис. 4.2.

4.4. Варианты заданий

Оперативное время t_0 для всех вариантов равно 100 час.

По номеру N варианта выбирается номер M структуры и номер K вектора λ -характеристик элементов системы - в соответствии с формулами

$$K = \lfloor N / 5 \rfloor, M = N \bmod 5,$$

где $\lfloor x \rfloor$ - ближайшее сверху к x целое число, $K = 1, \dots, 5$ $M = 0, \dots, 4$.

Структуры:

Вектора λ -характеристик:

$(\lambda \cdot 10^3 \text{ час}^{-1} \quad i = 1, \dots, 6)$

1) (1, 2, 3, 4, 5, 6)

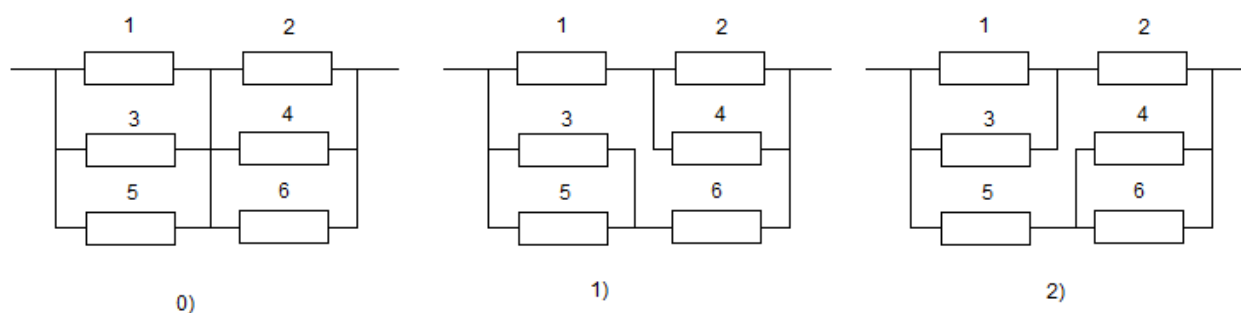
2) (5, 1, 2, 3, 4, 6)

3) (4, 5, 1, 2, 3, 6)

4) (3, 4, 5, 1, 2, 6)

5) (2, 3, 4, 5, 1, 6)

Структуры



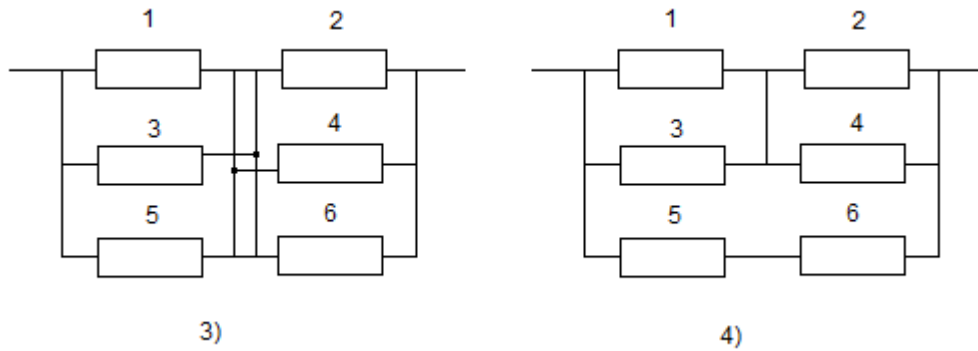


Рис 4.3.

5. Надежность последовательно-параллельных систем при смешанном резервировании

5.1. Задание

Заданы структура системы, тип резерва, интенсивности отказов элементов и оперативное время работы системы. Предполагается, что распределение отказов элементов - экспоненциальное.

Требуется

- оценить время T_c наработки на отказ и вероятность $P_c(t_0)$ безотказной работы системы;
- сравнить значения Э1 их показателей со значениями, полученными другими членами бригады.

5.2. Теоретическая часть

Для систем с ненагруженным резервом можно принять допущение о том, что интенсивность отказов резервной подсистемы $\lambda_{рез} = 0$. Допущение применимо как для БИС, так и для механических и электромеханических объектов, встречающихся в периферийных устройствах ЭВМ [1].

Время наработки на отказ T_S системы, состоящей из основной подсистемы и n ненагруженных резервных подсистем:

$$T_S = \sum_{i=0}^n T_i, \quad (5.1)$$

где $T_0, \dots, T_n$ - средние наработки на отказ основной и резервных подсистем.

В случае экспоненциального закона средняя наработка на отказ определяется формулой

$$T_S = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\lambda_i},$$

(5.2)

где λ_i - интенсивность отказов i -ой подсистемы.

При естественном допущении о равенстве λ - характеристик:

$$T_S = \frac{n+1}{\lambda}, \quad (5.3)$$

При смешанном резервировании, когда основная подсистема имеет n_1 подсистем с нагруженным резервом и n_2 подсистем в ненагруженном резерве, наработка T_{n_1, n_2} на отказ равна

$$T_S = \int_0^\infty \left[1 - \prod_{i=0}^{n_1} (1 - p_i) \right] dt + \sum_{j=1}^{n_2} T_j, \quad (5.4)$$

где $p_0, \dots, p_{n_1}$ - вероятности безотказной работы за время t основной и резервных подсистем, находящихся в нагруженном резерве.

При экспоненциальном законе для вычисления интеграла в выражении (5.4) можно воспользоваться следующим рекуррентным соотношением:

$$T_{(k+1)} = T_k + \frac{1}{\lambda_{k+1}} - \frac{1}{\frac{1}{T_k} + \lambda_{k+1}}; k=0, \dots, n_1-1, \quad (5.5)$$

где T_k - время наработки на отказ системы, состоящей из основного и k резервных подсистем, находящихся в нагруженном резерве.

Пусть $k=0$ и T_0 - время наработки на отказ подсистемы без нагруженного резерва, тогда T_0 - время наработки на отказ подсистемы без нагруженного резерва и

$$T = T_{(k+1)} = T_0 + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \lambda_1}, \quad \text{при } k=0$$

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \lambda_2}, \quad \text{при } k=1 \text{ и т.д.}$$

Вероятность отказа системы $Q_n(t_0)$, состоящей из основной подсистемы и n ненагруженных резервных подсистем, в большинстве случаев точно не вычисляется [1], поэтому на практике пользуются различными приближениями.

Величина

$$\bar{Q}_n(t_0) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n q_j(t_0), \quad (5.6)$$

при условии $t_0 < T_{\min}$ и $q_j < 1$, где $T_{\min} = \min_{0 \leq i \leq n} \{T_i\}$, почти во всех случаях является

хорошим приближением для вероятности отказа системы $Q_n(t)$, либо дает для нее оценку сверху с относительной погрешностью $Q_n(t_0)$.

$$\delta(t_0) \leq \frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^n q_j(t_0).$$

Для экспоненциального закона применяется выражение

$$\bar{Q}_n(t_0) = \frac{t_0^{n+1}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n \lambda_j, \quad (5.7)$$

при условиях: $t_0 < \frac{1}{\lambda_{\max}}$ и $t_0 \lambda_{\max} \ll 1$ с относительной погрешностью

$$\delta(t_0) \leq \frac{t_0}{n+2} \sum_{j=0}^n \lambda_j.$$

При смешанном резервировании

$$\bar{Q}_{n1,n2}(t_0) = \prod_{i=0}^{n_1} q_i(t_0) \cdot \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n_2} q_j(t_0). \quad (5.8)$$

Для экспоненциального закона:

$$\bar{Q}_{n1,n2}(t_0) = \frac{t_0^{n_1+n_2+1}}{(n_2+1)!} \prod_{i=0}^{n_1} \lambda_i \cdot \prod_{j=0}^{n_2} \lambda_j. \quad (5.9)$$

Здесь n_1 и n_2 имеют тот же смысл, что в выражении (5.4). В случае $q_0=q_1=\dots=q_{(n1+n2)}=q$

$$\bar{Q}_{n1,n2}(t_0) = \frac{q^{n_1+n_2+1}}{(n_2+1)!}. \quad (5.10)$$

Правила для расчета надежностных структур со смешанным резервированием:

- а) в первую очередь вычисляются характеристики для подсистем с меньшим масштабом резервирования;
- б) сначала обсчитываются подсистемы с нагруженным резервом, а затем с ненагруженным.

5.3. Пример расчета

Заданы:

- структура резервированной системы, рис 5.1. Элемент 3 находится в нагруженном резерве, 4 - в ненагруженном, подсистема 5, 6 - в ненагруженном резерве;
- закон распределения времени безотказной работы – экспоненциальный;
- λ -характеристики элементов системы;
- время оперативной работы t_0 .

При решении будем пользоваться правилами, приведенными в разделе 5.2, применяя последовательное преобразование структуры системы и формулы (5.1...5.10). Оценка T_c

$$T_{13} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3}; T_{24} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_4};$$

$$T_{1234} = \frac{1}{\frac{1}{T_{13}} + \frac{1}{T_{24}}}; T_{56} = \frac{1}{\lambda_5 + \lambda_6};$$

$$T_c = T_{123456} = T_{1234} + T_{56}.$$

Оценка Q_c :

$$q_{13} = q_1 q_3; q_{24} = \frac{q_2 \cdot q_4}{2};$$

$$q_{1234} = 1 - p_{1234} = 1 - (1 - q_{13})(1 - q_{24});$$

$$q_{56} = 1 - p_{56} = 1 - (1 - q_5)(1 - q_6);$$

$$Q_c = q_{123456} = \frac{q_{1234} \cdot q_{56}}{2};$$

Пологая далее $q_i = 1 - \exp(-\lambda_i t_0)$, вычисляем $P_c(t_0)$

$$P_c = 1 - Q_c$$

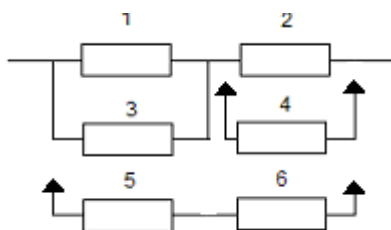


Рис. 5.1.

5.4. Варианты задания

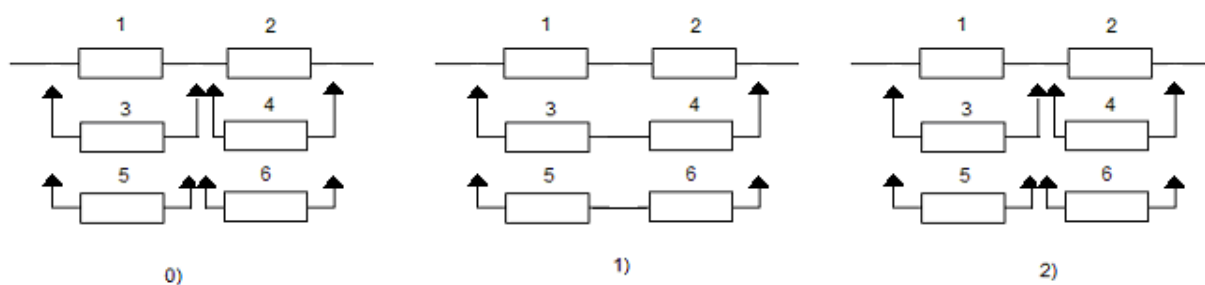
Номер структуры и вектора λ -характеристик определяется по номеру варианта, также, как и в п.4.4

Структура представлена на рис. 5.2.

Значения характеристик в $\frac{1}{\text{час}}$, умноженные на 10^{-3} .

- 1) 1 2 3 4 5 6
- 2) 2 3 4 5 6 1
- 3) 3 4 5 6 1 2
- 4) 4 5 6 1 2 3
- 5) 5 6 1 2 3 4

Оперативное время – $t_0 = 10$ час.



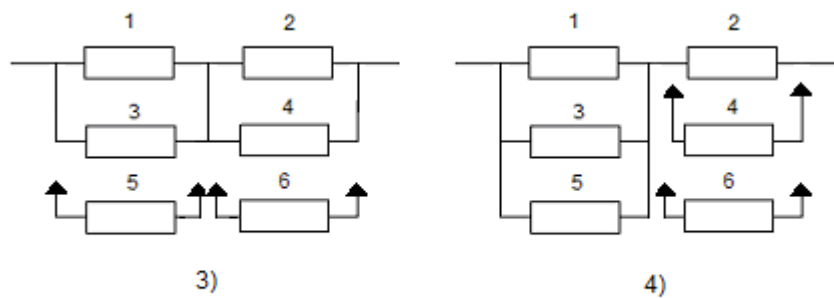


Рис. 5.2.

6. Оценка надежности систем сложной структуры

6.1. Задание

Заданы: структура системы, оперативное время t_0 , вектор λ -характеристик элементов системы. Предполагается, что закон функционирования элементов системы - экспоненциальный.

Требуется

- используя метод минимальных путей и минимальных сечений, найти нижние P_n , T_n и верхние P_v , T_v оценки вероятности безотказной работы и наработки на отказ системы;
- сравнить результаты оценок, полученные членами бригады.

6.2. Элементы теории

Очень многие реальные системы имеют сложную структуру, несводимую к параллельно-последовательным или последовательно-параллельным [1].

Наиболее простая из них - мостиковая, изображенная на рис. 6.1

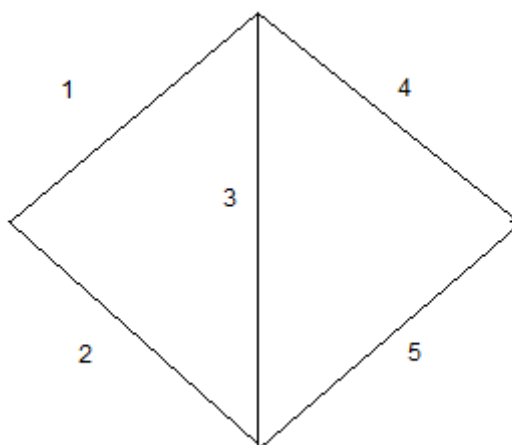


Рис 6.1.

Один из методов оценки надежности подобных структур - метод минимальных путей и минимальных сечений. Этот метод - приближенный. Он позволяет оценить значение

вероятности безотказной работы системы снизу и сверху.

Метод проще, чем известные точные методы, и поэтому подходит для оценки надежности более сложных систем.

Минимальный путь - минимальная совокупность элементов (подсистем), которая обеспечивает безотказную работу системы независимо от состояния остальных элементов. Если остальные элементы неработоспособны, то отказ хотя бы одного элемента пути влечет за собой отказ системы. Два пути считаются различными, если они отличаются хотя бы одним элементом. Множество различных путей, или просто минимальные дуги для структуры, представленной на рис. 6.1: 14, 135, 25, 234.

Минимальное сечение - минимальная совокупность элементов (подсистем), одновременный отказ которых влечет за собой отказ системы независимо от состояния остальных элементов. Восстановление хотя бы одного элемента в минимальном сечении (если остальные подсистемы работоспособны) влечет за собой восстановление системы. Минимальные сечения на рис. 6.1: 12, 135, 45, 234

Метод позволяет получить P_n - верхнюю и P_n - нижнюю оценки P - вероятности безотказной работы системы по следующим формулам:

$$P_n = \prod_{i \in S} p_i, \quad (6.1)$$

где S - множество различных минимальных сечений.

$$p_i = 1 - \prod_{j \in S_i} (1 - p_j) - \text{вероятность того, что в } i - \text{ом сечении работоспособен хотя бы один}$$

элемент, S_j - подмножество элементов, принадлежащих i -му минимальному сечению, p_j - вероятность безотказной работы j -го элемента системы. Далее,

$$P_g = 1 - \prod_{k \in R} (1 - p_k), \quad (6.2)$$

где R - множество различных минимальных путей, $p_k = 1 - \prod_{l \in R_k} p_l$ - вероятность безотказной

работы всех элементов k -го пути, p_l - вероятность безотказной работы l -го элемента k -го пути.

Вычислив P_n и P_g , по (6.1) и (6.2) получаем следующее неравенство

$$P_n \leq P \leq P_g \quad (6.3)$$

Заметим, что (6.1) представляет собой формулу для вычисления вероятности безотказной работы системы с последовательно параллельной структурой, а (6.2) - с параллельно-последовательной.

6.3 Пример оценки

Оценим $P_c(t_0)$ системы со структурой рис. 6.1, полагая $t_0=10$ час и считая $\lambda_i = \lambda = \text{час}^{-1} \ i=1, \dots, 5$.

При этом $p_i = \exp(-\lambda_i t_0) = p = 0,8; q_i = 1 - p_i = q = 0,2$.

Воспользовавшись формулами (6.1) и (6.2) и перечнями минимальных сечений и минимальных путей структуры рис. 6.2, получим

$$P_n = (1 - q_1 q_2)(1 - q_1 q_3 q_5)(1 - q_4 q_5)(1 - q_2 q_3 q_4) = (1 - q^2)^2 (1 - q^3)^2 = 0,9069;$$

$$P_g = (1 - p_1 p_4)(1 - p_1 p_3 p_5)(1 - p_2 p_5)(1 - p_2 p_3 p_4) = (1 - p^2)^2 (1 - p^3)^2 = 0,9692;$$

Таким образом, надежность P системы находится в границах $0,9069 < P < 0,9692$.

Аналогичным образом, с использованием формул для T последовательно-параллельных и параллельно-последовательных структур, можно найти T_n и T_g для наработки T_c системы.

6.4. Варианты заданий

Оперативное время для всех вариантов одинаково, $t_0 = 10$ час. Вектора λ -характеристик: для номера K $\lambda_i = K \cdot 10^{-3} \text{ час}^{-1}$, $i=1.....8$, $K = 1,2,3,4,5..$

Структуры: $M = 0, 1, 2, 3, 4$ представлены на рис 6.2.

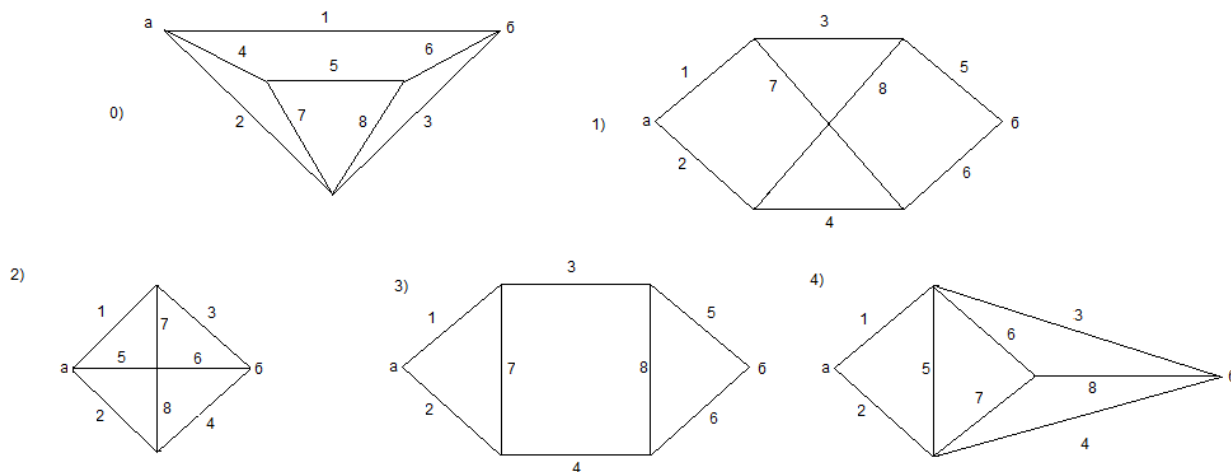


Рис 6.2

Номера K и M по заданному номеру N варианта выбираются как в п 4.4.

7. Логико-вероятностный метод расчета надежности систем с монотонной структурой

7.1. Задание

Вычислить вероятность безотказной работы P_c системы со структурой и параметрами, заданными в п.6.4, логико-вероятностным методом. Сравнить полученный результат с граничными оценками, полученными в п.6.

7.2. Элементы теории

Пусть $x=(x_1, ..., x_n)$ - n -мерный вектор, характеризующий состояние системы, где x_i - булева переменная: $x_i = 1$, если i -я подсистема работоспособна, и, $x_i=0$ в противном случае.

Введя соответствующий критерий отказа для системы, можно задать булеву функцию, описывающую состояние работоспособности или отказа системы:

$$R(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$R(x)=1$, если система работоспособна. $R(x)=0$ если система отказывает.

$$\bar{R}(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$\bar{R}(x) = 1$, если система находится в состоянии отказа. $\bar{R}(x) = 0$ если система работоспособна.

Здесь $R(x)$ - функция работоспособности, $\bar{R}(x)$ - функция отказа в состоянии x .

Перейдем к вероятностным функциям:

$$P = \text{Вер}\{R(x_1, \dots, x_n) = 1\},$$

$$Q = \text{Вер}\{\bar{R}(x_1, \dots, x_n) = 1\}$$

или

$$P = \text{Вер}\{\bar{R}(x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

$$Q = \text{Вер}\{R(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Здесь P - вероятность безотказной работы системы и Q - вероятность отказа системы, определенные для случая, когда x_i соответствует работоспособному состоянию i -го элемента (подсистемы). P и Q здесь определены для того же момента времени, что и $p(x_i)$ и $q(x_i)$ - вероятности безотказной работы и отказа элементов.

Структура системы называется монотонной, если для функции $R(x)$ выполняются следующие условия:

- а) $R(1) = 1$, где $1 = (1, \dots, 1)$;
- б) $R(0) = 0$, где $0 = (0, \dots, 0)$;
- в) $R(x) \geq R(y)$, если $x \geq y$,

где условие (в) понимается как совокупность n условий $x_i \geq y_i$.

Для оценки надежности таких систем применяются метод минимальных путей и минимальных сечений, логико-вероятностный метод и другие.

К монотонным структурам относятся последовательно-параллельные и параллельно-последовательные структуры, а также несводимые к ним, такие, например, как "мостиковые".

7.3. Пример решения

Применение логико-вероятностного метода, позволяющего получить точное значение вероятности безотказной работы, рассмотрим на примере мостиковой структуры, представленной на рис. 6.1.

Функцию $R(x)$ представим в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) множеством минимальных путей (см. п. 6.2)

$$R(x) = x_1 x_4 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_2 x_5 \vee x_2 x_3 x_4,$$

где x_i - булева переменная, определяющая состояние работоспособность i -го элемента.

Матричная форма булевой функции $R(x)$ представлена на рис 7.1.

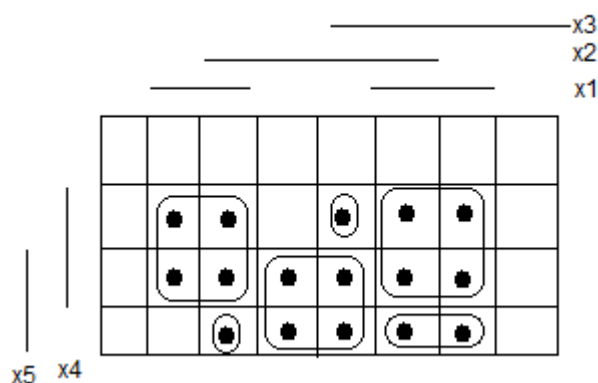


Рис 7.1

Для вычисления P_c необходимо $R(x)$ представить в ортогональной форме R_{opt} , т.е. в виде множества непересекающихся интервалов.

И соответствии с матрицей рис. 7.1 имеем:

$$R_{ort} = x_1 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_5 \vee x_1 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5. \quad (7.1)$$

Для вычисления $P = \text{Вер}\{R_{ort} = 1\}$ достаточно в (7.1) x_i заменить на p_i , $\bar{x}_i$ на $1 - p_i$,

конъюнкцию - на произведение и дизъюнкцию - на сумму. Прделаав это, получим:

$$P_c = p_1 p_4 + (1 - p_1) p_2 p_5 + p_1 p_3 (1 - p_4) p_5 + (1 - p_1) p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) + p_1 p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5.$$

Пусть $p_i = p = 0,8$ тогда,

$$P_c = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5 = 1,28 + 1,024 - 2,048 + 0,65536 = 0,91136.$$

Сравнение с результатом, полученным в п. 6.3. дает:

$$0,9069 < 0,9611 < 0,9692$$

Библиографический список

1. Козлов Б.А., Ушаков И.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. – М.: Сов. радио, 1975. – 472 с.
2. Иыуду К.А. Надежность, контроль и диагностика вычислительных машин и систем. – М.: Высш. шк., 1989. – 216 с.
3. Надежность технических систем: Справочник / Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, и др.; Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связи, 1985. – 608 с.
4. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных производственных систем. – 4-е изд. – М.: Энергоатом-издат, 1986. – 480 с.
5. Каган Б.М., Мкртумян И.Б. Основы эксплуатации ЭВМ. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 432 с.