

**Министерство образования и науки Украины  
Севастопольский национальный технический  
университет**

**БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ**

Методические указания к практическим занятиям  
по дисциплине «Основы дискретной математики»  
для студентов дневного и заочного отделения  
специальности 7.080401  
«Информационные управляющие системы и технологии»

Севастополь  
2005



**Булевы функции: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Основы дискретной математики» для студентов дневного и заочного отделения специальности 7.080401 «Информационные управляющие системы и технологии» /Сост. С.В.Доценко, Е.Н.Татарченко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005. – 33 с.**

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Основы дискретной математики». Целью методических указаний является выработка у студентов практических навыков по решению прикладных задач булевой алгебры.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Основы дискретной математики» для студентов специальности 7.080401 и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № 12 от 7 июня 2004 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Кирюхин В.В., к.ф.-м.н., профессор кафедры КиВТ.





## СОДЕРЖАНИЕ

|      |                                              |    |
|------|----------------------------------------------|----|
| 1.   | Теоретический раздел . . . . .               | 4  |
| 1.1. | Основные определения . . . . .               | 5  |
| 1.2. | Законы и тождества булевой алгебры . . . . . | 6  |
| 2.   | Примеры решения типовых задач . . . . .      | 10 |
| 3.   | Задачи для упражнений . . . . .              | 18 |
|      | Библиографический список . . . . .           | 33 |

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

## 1.1. Основные определения

Функция  $f$ , принимающая одно из двух значений, 0 или 1, от  $n$  переменных, каждая из которых принимает одно из двух значений, 0 или 1, называется булевой функцией  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от  $n$  переменных.

Любая булева функция полностью определяется своей таблицей истинности. Примем, что наборы ее простых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  всегда записываются в лексикографическом порядке. Самый верхний набор имеет номер 0.

Разновидностью таблиц истинности являются карты Карно.

Число  $N$  различных булевых функций от  $n$  логических переменных есть

$N = 2^{2^n}$ . В частности, при  $n = 2$  имеется 16 булевых функций, представленных в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Булевы функции двух переменных

| $x$ | $y$ | 0 | $\overline{x \rightarrow y}$ | $x$ | $\overline{y \rightarrow x}$ | $y$ | $x \oplus y$ | $x \vee y$ | $x \downarrow y$ |
|-----|-----|---|------------------------------|-----|------------------------------|-----|--------------|------------|------------------|
| 0   | 0   | 0 | 0                            | 0   | 0                            | 0   | 0            | 0          | 1                |
| 0   | 1   | 0 | 0                            | 0   | 1                            | 1   | 1            | 1          | 0                |
| 1   | 0   | 0 | 1                            | 1   | 0                            | 0   | 1            | 1          | 0                |
| 1   | 1   | 0 | 0                            | 1   | 0                            | 1   | 0            | 1          | 0                |

Продолжение таблицы 1.1

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ | $y \rightarrow x$ | $\overline{x}$ | $x \rightarrow y$ | $x   y$ | 1 | $x \leftrightarrow y$ | $\overline{y}$ |
|-----|-----|--------------|-------------------|----------------|-------------------|---------|---|-----------------------|----------------|
| 0   | 0   | 0            | 1                 | 1              | 1                 | 1       | 1 | 1                     | 1              |
| 0   | 1   | 0            | 0                 | 1              | 1                 | 1       | 1 | 0                     | 0              |
| 1   | 0   | 0            | 1                 | 0              | 0                 | 1       | 1 | 0                     | 1              |
| 1   | 1   | 1            | 1                 | 0              | 1                 | 0       | 1 | 1                     | 0              |

Здесь и в дальнейшем приняты следующие названия для булевых функций двух переменных:

$x \vee y$  – дизъюнкция;

$x \wedge y$  – конъюнкция;

$x \oplus y$  – неравнозначность (сложение по модулю два);

$x \rightarrow y$ ;  $y \rightarrow x$  – импликации;

$x \leftrightarrow y$  – равнозначность (логическая эквивалентность);

$x \downarrow y$  – стрелка Пирса (функция Вебба);

$x | y$  – штрих Шеффера;

$\overline{x \rightarrow y}$ ,  $\overline{y \rightarrow x}$  – функции запрета.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Биркгоф Г. Современная прикладная алгебра/Г.Биркгоф, Т.Бартти – М.: Мир, 1976. - 400 с.
2. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов/ И.Н.Бронштейн, К.А. Семендяев - Лейпциг: Тайбнер, М.: Наука, 1981. – 718 с.
3. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов/ В.М.Глушков – М.: ФМ, 1962. – 476 с.
4. Горбатов В.А. Основы дискретной математики/ В.А.Горбатов. – М.: Высш. шк., 1986. – 311 с.
5. Касаткин В.Н. Необычные задачи математики/ В.Н.Касаткин – К.: Радянська школа, 1987. – 128 с.
6. Кемени Дж. Введение в конечную математику/ Дж.Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 486 с.
7. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики/ Ю.М.Коршунов – М.: Энергия, 1972. – 376 с.
8. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера/ О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон - Вельский. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
9. Кук Д. Компьютерная математика/ Д.Кук, Г. Бейз. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
10. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики/ В.Г.Лапа. – К.: Высш. шк., 1971. – 418 с.
11. Мельников В.Н. Логические задачи/ В.Н.Мельников. – К.–Одесса: Высш.шк., 1989. – 343 с.
12. Миловзоров В.П. Элементы информационных систем/ В.П.Миловзоров. – М.: Высш.шк., 1989. – 440 с.
13. Новоселов В.Г. Прикладная математика для инженеров-системотехников. Дискретная математика в задачах и примерах/ В.Г.Новоселов, А.В.Скатков – К.: УМК ВО, 1982. – 200 с.
14. Ренин С.В. Математическая логика/ С. В.Ренин - Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1981. – 43 с.
15. Ренин С.В. Основы дискретной математики/ С. В.Ренин - Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1981. – 43 с.
16. Ренин С.В. Сб. задач и упражнений по основам теории систем/ С.В.Ренин - Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1981. - 48 с.

д)  $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ .

3.105. Минимизировать функции задачи 3.68 с использованием карт Карно.

3.106. Построить схемы реализации в конъюнктивном базисе Буля следующих функций: а)  $x \rightarrow y$ ; б)  $x \oplus y$ ; в)  $(x \wedge y) \rightarrow \overline{x \rightarrow y}$ ; г)  $x \mid y$ ; д)  $x \leftrightarrow y$ .

3.107. Построить схему реализации в конъюнктивном базисе Буля логической функции, заданной комбинационной схемой задачи 3.40.

3.108. Построить схемы реализации в конъюнктивном базисе Буля логических функций, заданных картами Карно задачи 3.93.

3.109. Построить схемы реализации в дизъюнктивном базисе Буля следующих функций: а)  $\overline{x \rightarrow y}$ ; б)  $x \oplus y$ ; в)  $x \downarrow y$ ; г)  $x \leftrightarrow y$ ; д)  $(x \rightarrow y) \wedge y \rightarrow x$ .

3.110. Построить схему реализации в дизъюнктивном базисе Буля логической функции, заданной комбинационной схемой задачи 3.47.

3.111. Построить схемы реализации в дизъюнктивном базисе Буля логических функций, заданных картами Карно задачи 3.94.

3.112. Построить схемы реализации в базисе Шеффера следующих функций: а)  $x \rightarrow y$ ; б)  $\overline{x \rightarrow y}$ ; в)  $x \oplus y$ ; г)  $x \leftrightarrow y$ ; д)  $x \downarrow y$ .

3.113. Построить схемы реализации в базисе Шеффера логических функций, заданных картами Карно задачи 3.99.

3.114. Построить схемы реализации в базисе Вебба следующих функций: а)  $x \rightarrow y$ ; б)  $\overline{x \rightarrow y}$ ; в)  $x \oplus y$ ; г)  $x \leftrightarrow y$ ; д)  $x \downarrow y$ .

3.115. Построить схемы реализации в базисе Вебба логических функций задачи 3.104.

Задать булеву функцию – значит указать значения, которые принимает эта функция (т.е. 0 или 1) на всех наборах аргументов.

Булеву функцию  $n$  аргументов, которая принимает значение, равное единице, только на одном наборе переменных, называют конstituентой единицы. Примеры конstituент единицы:  $x$ ,  $x \wedge y$ ,  $x \downarrow y$ ,  $\overline{x \rightarrow y}$ ,  $\overline{y \rightarrow x}$ .

Булеву функцию  $n$  аргументов, которая принимает значение, равное нулю, только на одном наборе переменных, называют конstituентой нуля. Примеры конstituент нуля:  $x$ ,  $x \vee y$ ,  $x \mid y$ ,  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$ .

Если булева функция на всех наборах входящих в нее переменных принимает истинное значение, то она называется тавтологией, если на всех наборах переменных она принимает ложное значение, то называется противоречием или абсурдной функцией.

Переменная  $x_i$  в функции  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  называется несущественной (или фиктивной), если  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  при любых значениях остальных переменных. В этом случае функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  по существу зависит от  $n-1$  переменных, т.е. представляет собой функцию  $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  от  $n-1$  переменной.

Булева алгебра строится на основе трех операций:  $\neg$ ,  $\wedge$  и  $\vee$ . Для булевой алгебры справедлив принцип двойственности: если в некотором тождестве произвести одновременную замену: все операции  $\vee$  на операции  $\wedge$ , все операции  $\wedge$  на операции  $\vee$ , все 1 на 0 и все 0 на 1, то полученное выражение также будет тождеством.

Ниже представлена сводка законов (аксиом) и основных тождеств (теорем) булевой алгебры. Они могут использоваться в целях преобразования и упрощения булевых формул. Законы и тождества даны парами в соответствии с принципом двойственности.

## 1.2. Законы и тождества булевой алгебры

Переместительный (коммутативный) закон:

$$a) x \vee y = y \vee x, б) x \wedge y = y \wedge x. \quad (1.1)$$

Сочетательный (ассоциативный) закон:

$$\begin{aligned} a) (x \vee y) \vee z &= x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z, \\ б) (x \wedge y) \wedge z &= x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \wedge z. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Распределительный (дистрибутивный) закон:

$$a) (x \vee y) \wedge z = x \wedge z \vee y \wedge z, б) x \wedge y \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z). \quad (1.3)$$

Закон противоречия:

$$x \vee \overline{x} = 1. \quad (1.4a)$$

Закон исключенного третьего:

$$x \wedge \bar{x} = 0. \quad (1.46)$$

$$a) x \wedge 1 = x, б) x \vee 0 = x. \quad (1.5)$$

$$a) x \vee 1 = 1, б) x \wedge 0 = 0. \quad (1.6)$$

Законы идемпотентности:

$$a) x \wedge x = x, б) x \vee x = x. \quad (1.7)$$

Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} = x. \quad (1.8)$$

Закон поглощения: (x поглощает y):

$$a) x \vee x \wedge y = x, б) x \wedge (x \vee y) = x. \quad (1.9)$$

$$a) (x \vee \bar{y}) \wedge y = x \wedge y, б) x \wedge \bar{y} \vee y = x \wedge y. \quad (1.10)$$

Закон склеивания (склеивание по x):

$$a) x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y = y, б) (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) = y. \quad (1.11)$$

Тождества де Моргана:

$$a) \overline{x \vee y \vee z \vee \dots} = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge \dots \quad б) \overline{x \wedge y \wedge z \wedge \dots} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \dots \quad (1.12)$$

Используя таблицу истинности (или любую ее модификацию) некоторой булевой функции, всегда можно получить булеву формулу, задающую эту функцию. Эти формулы могут быть составлены в двух формах:

а) совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СовДНФ) или первая стандартная форма. Она является дизъюнкцией конститuent единицы, равных единице на тех же наборах, что и заданная функция. В качестве конститuent единицы берутся конъюнкции всех исходных переменных, взятых либо без отрицания (если им соответствует значение 1), либо с отрицанием (если им соответствует значение 0);

б) совершенная конъюнктивная нормальная форма (СовКНФ) или вторая стандартная форма. Она является конъюнкцией конститuent нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и заданная функция. В качестве конститuent нуля берутся дизъюнкции всех исходных переменных, взятых либо без отрицания (если им соответствует значение 0), либо с отрицанием (если им соответствует значение 1).

Представление заданной булевой функции дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), содержащей наименьшее возможное число букв, называется ми-

|       |  |       |   |   |   |       |   |   |   |    |   |  |  |    |  |  |  |
|-------|--|-------|---|---|---|-------|---|---|---|----|---|--|--|----|--|--|--|
|       |  | $x_2$ |   |   |   |       |   |   |   |    |   |  |  |    |  |  |  |
| $x_1$ |  | $x_3$ |   |   |   | $x_4$ |   |   |   |    |   |  |  |    |  |  |  |
|       |  | 0     | 0 | 1 | 1 |       |   | 1 | 1 | 0  | 1 |  |  |    |  |  |  |
|       |  | 1     | 1 | 0 | 0 |       |   | 0 | 1 | 1  | 1 |  |  |    |  |  |  |
|       |  | 0     | 0 | 1 | 1 |       |   | 0 | 0 | 1  | 1 |  |  |    |  |  |  |
|       |  | 1     | 1 | 0 | 0 | 1     | 1 | 0 | 0 |    |   |  |  |    |  |  |  |
|       |  | а)    |   |   |   | б)    |   |   |   | в) |   |  |  | г) |  |  |  |
|       |  | 1     |   |   |   | 0     |   |   |   | 1  |   |  |  | 0  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 1     |   |   |   | 0  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 1     |   |   |   | 0  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 1     |   |   |   | 0     |   |   |   | 1  |   |  |  | 0  |  |  |  |
|       |  | д)    |   |   |   | е)    |   |   |   | ж) |   |  |  | з) |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 0     |   |   |   | 0  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 1     |   |   |   | 0     |   |   |   | 1  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 1     |   |   |   | 0     |   |   |   | 0  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 0     |   |   |   | 0  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | и)    |   |   |   | к)    |   |   |   | л) |   |  |  | м) |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 0     |   |   |   | 0  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 1     |   |   |   | 0     |   |   |   | 1  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 1     |   |   |   | 0     |   |   |   | 0  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 0     |   |   |   | 0  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 1     |   |   |   | 1  |   |  |  | 0  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 1     |   |   |   | 1  |   |  |  | 0  |  |  |  |
|       |  | 1     |   |   |   | 1     |   |   |   | 1  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 1     |   |   |   | 1  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 1     |   |   |   | 1  |   |  |  | 1  |  |  |  |
|       |  | 1     |   |   |   | 1     |   |   |   | 0  |   |  |  | 0  |  |  |  |
|       |  | 0     |   |   |   | 0     |   |   |   | 1  |   |  |  | 1  |  |  |  |

Рисунок 3.16 – Карты Карно к задаче 3.100

3.103. Минимизировать функции задачи 3.68.

|       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |  |
|-------|-------|-------|---|---|---|-------|---|---|---|--|
|       |       | $x_3$ |   |   |   | $x_3$ |   |   |   |  |
| $x_1$ | $x_4$ | $x_2$ |   |   |   | $x_5$ |   |   |   |  |
|       |       | 1     | 1 | 1 | 1 | 1     | 1 | 1 | 0 |  |
|       |       | 1     | 0 | 1 | 1 | 1     | 0 | 0 | 1 |  |
|       |       | 0     | 1 | 0 | 1 | 1     | 1 | 1 | 0 |  |
|       |       | 1     | 1 | 1 | 1 | 1     | 1 | 0 | 1 |  |
|       |       | а)    |   |   |   | б)    |   |   |   |  |
|       |       | 1     | 0 | 1 | 0 | 0     | 1 | 1 | 1 |  |
|       |       | 1     | 1 | 1 | 1 | 1     | 1 | 0 | 1 |  |
|       |       | 0     | 1 | 1 | 1 | 1     | 1 | 1 | 1 |  |
|       |       | 1     | 0 | 1 | 0 | 0     | 1 | 0 | 1 |  |
|       |       | в)    |   |   |   | г)    |   |   |   |  |
|       |       | 0     | 1 | 1 | 0 | 1     | 1 | 1 | 1 |  |
|       |       | 1     | 0 | 1 | 1 | 1     | 0 | 0 | 1 |  |
|       |       | 1     | 1 | 0 | 0 | 1     | 0 | 0 | 1 |  |
|       |       | 1     | 1 | 0 | 1 | 1     | 0 | 0 | 1 |  |

Рисунок 3.17 – Карты Карно к задаче 3.101

3.104. Минимизировать следующие функции:

а)  $(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$ ; б)  $(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3)$ ;в)  $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ ; г)  $(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ ;

$(x \rightarrow y) \rightarrow z$  ? Какие единицы этой функции они накрывают?

3.99. Минимизировать булевы функции, заданные картами Карно рисунка 3.15, построить соответствующие им комбинационные схемы.

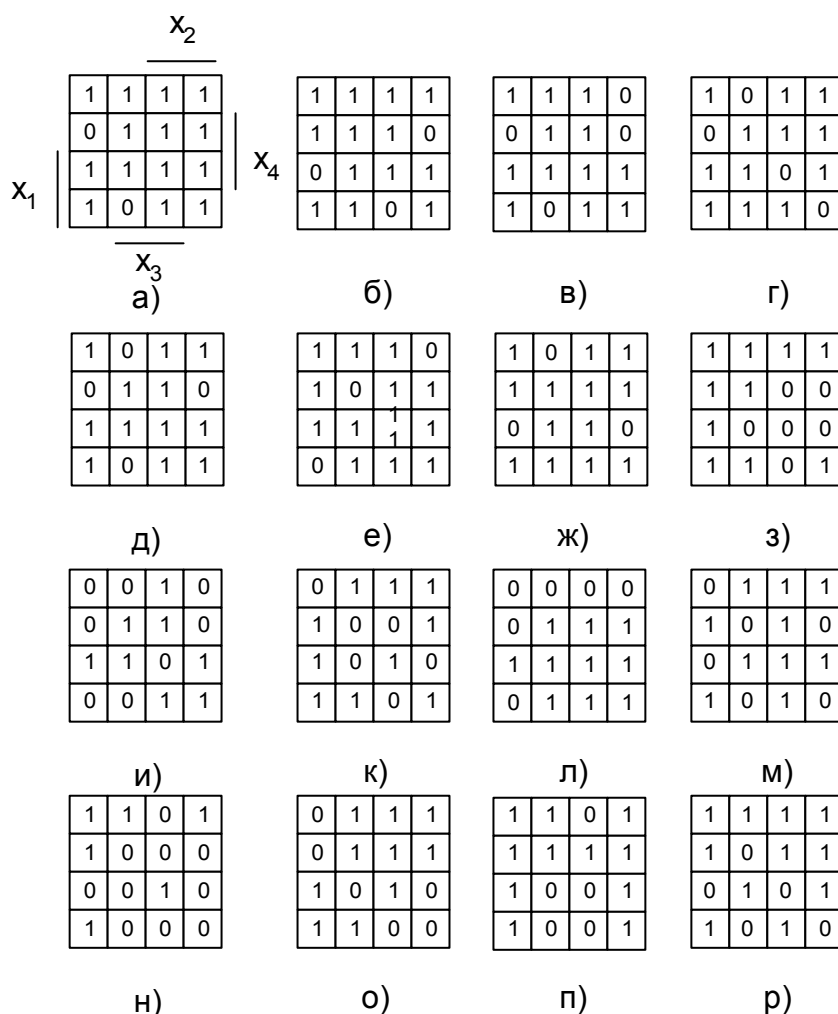


Рисунок 3.15 – Карты Карно к задаче 3.99

3.100. Минимизировать булевы функции, заданные картами Карно рисунка 3.16, построить соответствующие им комбинационные схемы.

3.101. Минимизировать булевы функции, заданные картами Карно рисунка 3.17, построить соответствующие им комбинационные схемы.

3.102. Найти сокращенные ДНФ для следующих функций:

- а)  $x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee y \wedge z$ ; б)  $x \wedge y \wedge z \vee x \wedge z \vee \bar{x} \wedge y$ ; в)  $\bar{x} \rightarrow (x \wedge y)$ ;  
 г)  $x \wedge y \vee \bar{x} \wedge z \vee \bar{y} \wedge z$ ; д)  $\bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge \bar{z} \wedge v \vee y \wedge \bar{z} \wedge v$ ; е)  $((x \rightarrow y) \vee (x \leftrightarrow y)) \rightarrow y$ ;  
 ж)  $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge v \vee z \wedge v$ ; з)  $((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})) \rightarrow \bar{x} \vee y \vee \bar{z}$ ;  
 и)  $((x \leftrightarrow y) \wedge z) \wedge ((x \vee y \vee z) \rightarrow \bar{z})$ ; к)  $\overline{x \vee y} \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y \vee z)$ ;  
 л)  $(x \vee x \wedge \bar{y}) \rightarrow (x \wedge z)$ ; м)  $x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge y \wedge z$ ;  
 н)  $x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{z} \vee x \wedge y \wedge z$ ; о)  $(x \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow z$ ;  
 п)  $(x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{z} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{z} \vee x \wedge \bar{y})$ ; р)  $x \vee \bar{y} \wedge z \vee y \wedge (z \vee x \wedge y)$ ;  
 с)  $x \vee x \wedge \bar{y} \vee z \vee y \wedge \bar{z} \vee x \wedge z \vee y \wedge z$ ; т)  $(x \wedge y \wedge z) \wedge (x \wedge y \vee y \wedge \bar{z})$ .

нимизацией этой булевой функции. Минимизация булевых функций производится с помощью законов и тождеств булевой алгебры. Наиболее эффективные приемы минимизации – применение дистрибутивного закона, закона двойного отрицания, законов поглощения и склеивания и тождеств де Моргана. Наряду с полным склеиванием часто применяют операцию неполного склеивания:

$$x \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y \vee y. \quad (1.13)$$

При этом члены формулы, уже подвергавшиеся склеиванию, могут принимать участие в дальнейших склеиваниях столько раз, сколько это окажется необходимым.

В процессе минимизации используют понятие смежных конституент, которыми называются конституенты, отличающиеся только одним аргументом (в одну конституенту аргумент входит с инверсией, а в другую – без нее).

Две смежные конституенты единицы, склеиваясь, образуют результирующую конъюнкцию с числом аргументов, на единицу меньшим, чем в исходных конституентах, так как в ней отсутствует аргумент, которым отличались исходные смежные конституенты. Эту результирующую конъюнкцию называют импликантой.

Количество аргументов в конституенте или импликанте называется ее рангом. При склеивании ранг результирующей конъюнкции, т.е. импликанты, уменьшается на единицу. Импликанты одинакового ранга могут оказаться смежными, и их можно вновь склеить между собой.

Говорят, что импликанта накрывает все конституенты, в результате склеивания которых она получена.

Процесс многоступенчатого склеивания приводит к импликантам, которые не склеиваются с другими членами формулы. Такие импликанты называют простыми. Простые импликанты с конституентами, не имевшими смежных до склеивания, образуют сокращенную дизъюнктивную нормальную форму (СокрДНФ) функции. В некоторых случаях в ней могут содержаться лишние импликанты, которые могут быть исключены без изменения значения функции. ДНФ, не содержащая лишних импликант, называется тупиковой ДНФ. Некоторые функции могут иметь несколько тупиковых форм. Тупиковая функция, содержащая наименьшее количество букв-аргументов, называется минимальной ДНФ.

Алгоритмизировать нахождение СокрДНФ позволяет теорема Квайна: «Если в СофДНФ функции провести сначала все возможные операции неполного склеивания (1.13), а затем все возможные операции поглощения, то в результате получится СокрДНФ функции».

Минимизацию по Квайну надо начинать с совершенной ДНФ. Если функция задана в произвольной форме, производя ее развертывание, умножая член, не содержащий какого-либо аргумента, на логическую единицу (тождество 1.4 б) и получая два члена, содержащие весь набор аргументов.

Одним из методов отыскания лишних импликант является метод испытания членов: чтобы испытать некоторый член функции, следует исключить его из СокрДНФ и подставить в оставшееся выражение такие значения аргументов, кото-

рые обращают исключенный член в единицу. Если при такой подстановке оставшееся выражение окажется тождественно равным единице, то испытываемый член является лишним.

При минимизации булевых функций, заданных произвольными ДНФ, а не обязательно СовДНФ, то целесообразно применять метод минимизации Блейка. Он основывается на использовании операции обобщенного склеивания по  $z$ :

$$x \wedge z \vee y \wedge \bar{z} = x \wedge z \vee y \wedge \bar{z} \vee x \wedge y. \quad (1.14)$$

При этом в произвольной ДНФ заданной булевой функции  $f$  осуществляются все обобщенные склеивания, а затем все элементарные поглощения. В результате получается СокрДНФ функции  $f$ .

Вышеуказанные методы относились к минимизации булевых функций, заданных в ДНФ.

Булева функция, представленная в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), минимизируется методом Нельсона: «Если в произвольной КНФ булевой функции раскрыть все скобки в соответствии с дистрибутивным законом и устранить все элементарные поглощения, то в результате получится СокрДНФ этой функции».

Система функций  $\Sigma$  называется функционально полной системой, если любая логическая функция может быть представлена формулой над  $\Sigma$ , т.е. является суперпозицией функций из  $\Sigma$ .

Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т.е. в системе логических операций  $\Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$  (булева алгебра). Следовательно,  $\Sigma_0$  функционально полна.

Функционально полными, в частности, являются также системы:

$\Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}$  - конъюнктивный базис Буля;

$\Sigma_2 = \{\vee, \neg\}$  - дизъюнктивный базис Буля;

$\Sigma_3 = \{\mid\}$  - базис Шеффера;

$\Sigma_4 = \{\downarrow\}$  - базис Вебба;

$\Sigma_5 = \{\wedge, \oplus, 1\}$  - базис Жегалкина.

Техническая реализация базисных функций может быть основана на использовании различных физических явлений, например, функции Шеффера и Вебба – явлений в полупроводниках.

Согласно ГОСТ 2.743-72, базисные элементы графически изображаются в виде прямоугольников, в которых инверсные вход и выход изображают в виде незаштрихованных кружков и сверху ставят 1, если внешняя связка дизъюнкция, и &, если – конъюнкция, за исключением сложения по модулю 2 (тогда сверху ставят M2) и эквивалентности (обозначают  $\equiv$ ). Эти обозначения даны в таблице 1.2.

3.95. Определите в двоичной и десятичной форме номера наборов ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ), на которых булевы функции, заданные картами Карно рисунка 3.13, равны 1.

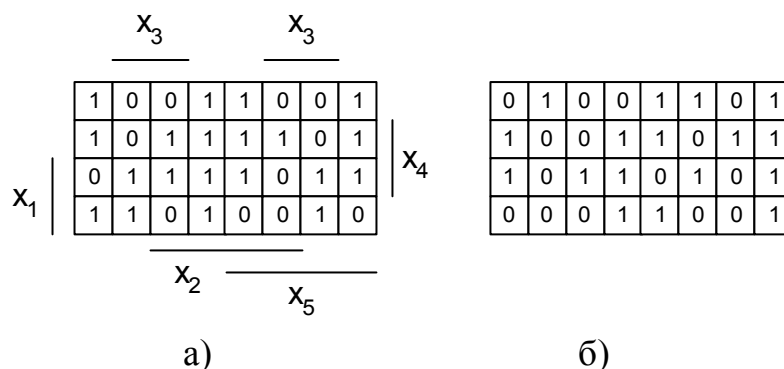


Рисунок 3.13 – Карты Карно к задаче 3.95

3.96. Определите в двоичной и десятичной форме номера наборов ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ), на которых булевы функции, заданные картами Карно рисунка 3.14, равны 1.

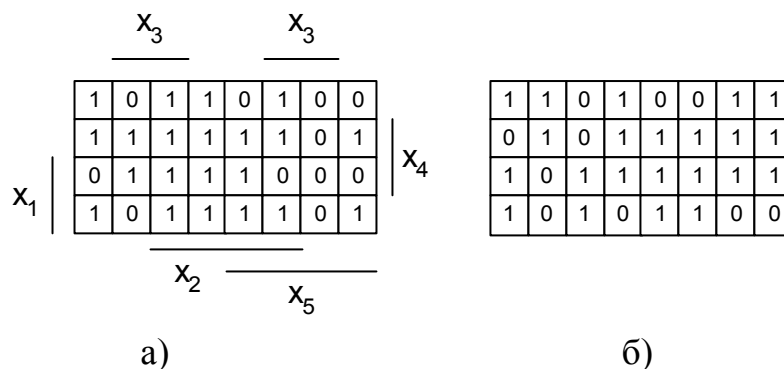


Рисунок 3.14 – Карты Карно к задаче 3.96

3.97. Определить, какая из следующих функций имеет своей импликантой функцию  $(x \rightarrow y) \rightarrow z$ . Какие единицы этих функций она накрывает?

| x | y | z | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     |
| 0 | 0 | 1 | 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 1     |
| 0 | 1 | 0 | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| 0 | 1 | 1 | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 1 | 0 | 0 | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |
| 1 | 0 | 1 | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 1 | 1 | 0 | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 1 | 1 | 1 | 1     | 1     | 1     | 0     | 1     | 1     |

3.98. Какие функции задачи 3.97 являются импликантами функции

$\wedge (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$ ); в)  $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \wedge \bar{x} \vee z$ .

3.91. Для каждой из следующих формул определите, является ли она тавтологией, противоречием или нейтральной приведением их к ДНФ или к КНФ:

а)  $((x \rightarrow y) \wedge \bar{y} \wedge x)$ ; б)  $((\bar{x} \rightarrow y) \vee y) \rightarrow \bar{x}$ ; в)  $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$ ;

г)  $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$ ; д)  $((x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow y) \wedge y) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z)$ ;

е)  $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge (x \wedge z) \rightarrow (y \wedge z) \vee (y \wedge z) \rightarrow (x \wedge z)$ .

3.92. Найдите минимальные ДНФ функций

а)  $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , принимающей значение 1 на наборах с номерами 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 12, 13;

б)  $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ , принимающей значение 1 на наборах с номерами от 0 до 7, от 11 до 21 и от 26 до 31.

3.93. Определите в двоичной и десятичной форме номера наборов  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , на которых булевы функции, заданные картами Карно рисунка 3.11, равны 1.

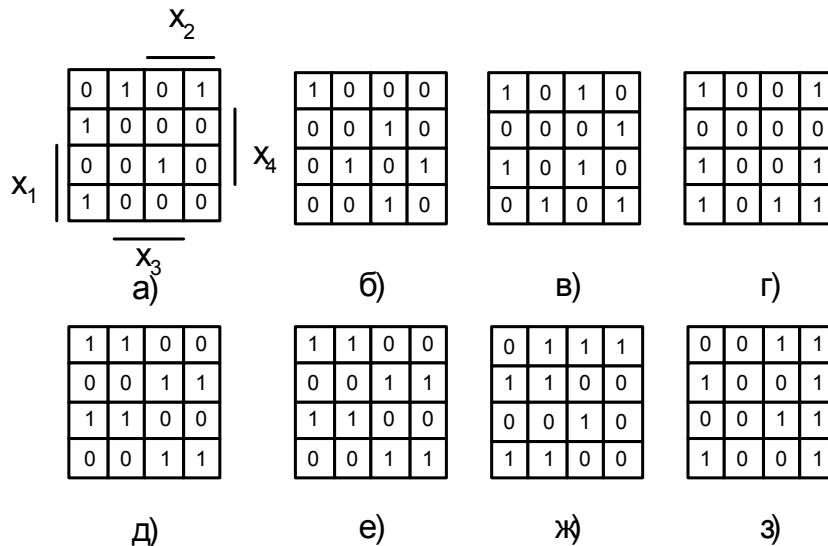


Рисунок 3.11 – Карты Карно к задаче 3.93

3.94. Определите в двоичной и десятичной форме номера наборов  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , на которых булевы функции, заданные картами Карно рисунка 3.12, равны 0.

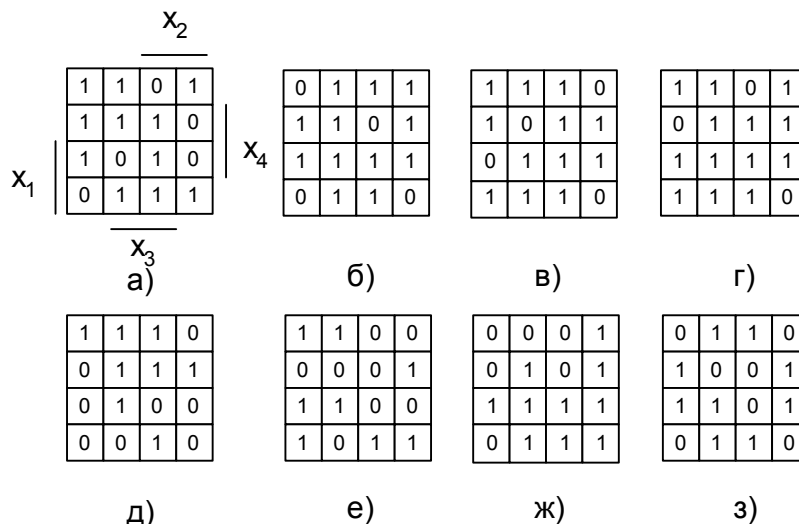
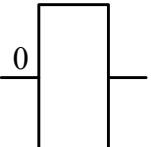
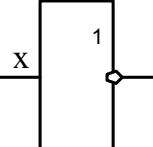
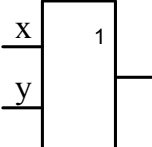
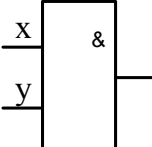
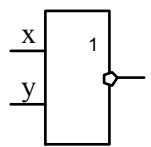
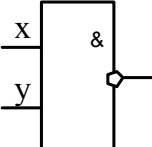
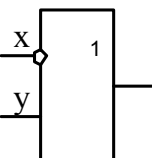
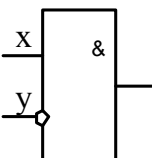
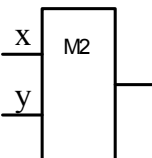
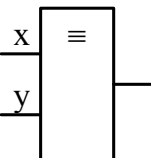
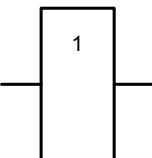


Рисунок 3.12 – Карты Карно к задаче 3.94

Таблица 1.2 – Изображение базисных элементов

| Элемент     | Константа нуля                                                                    | Отрицание<br>$\bar{x}$                                                            | Дизъюнкция<br>$x \vee y$                                                          | Конъюнкция<br>$x \wedge y$                                                         | Элемент Вебба<br>$\overline{x \vee y}$                                              | Элемент Шеффера<br>$\overline{x \wedge y}$                                          |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Обозначение |  |  |  |  |  |  |

Продолжение таблицы 1.2

| Элемент     | Импликация<br>$\bar{x} \vee y$                                                     | Функция запрета<br>$x \wedge \bar{y}$                                              | Сложение по модулю 2<br>$x \oplus y$                                               | Эквивалентность<br>$x \leftrightarrow y$                                             | Константа единицы                                                                    |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Обозначение |  |  |  |  |  |

## 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Представить в СовДНФ стрелку Пирса  $x \downarrow y$ . Составить соответствующую ей комбинационную схему.

Решение. Согласно таблице 1.1 для стрелки Пирса имеем следующую таблицу истинности:

Таблица 2.1. – Таблица истинности стрелки Пирса

| x | y | $x \downarrow y$ |
|---|---|------------------|
| 0 | 0 | 1                |
| 0 | 1 | 0                |
| 1 | 0 | 0                |
| 1 | 1 | 0                |

Эта функция равна единице только на нулевом наборе. Поэтому, согласно общему правилу нахождения СовДНФ, имеем для нее одну конъюнкцию:  $x \downarrow y = \bar{x} \wedge \bar{y}$ . Ей соответствует комбинационная схема, представленная на рисунке 2.1.

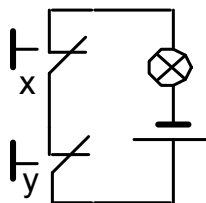


Рисунок 2.1 – Комбинационная схема к задаче 2.1

2.2. Представить в СовДНФ и СовКНФ штрих Шеффера  $x | y$ . Составить соответствующие комбинационные схемы.

Решение. Согласно таблице 1.1 запишем таблицу истинности для штриха Шеффера.

Таблица 2.2 – Таблица истинности штриха Шеффера

| x | y | $x   y$ |
|---|---|---------|
| 0 | 0 | 1       |
| 0 | 1 | 1       |
| 1 | 0 | 1       |
| 1 | 1 | 0       |

Эта функция равна единице на трех наборах переменных: нулевом, первом и втором. Поэтому ее СовДНФ является дизъюнкцией трех конъюнкций исходных переменных:  $x | y = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$ . В свою очередь,  $x | y$  равна нулю на одном, последнем, наборе переменных. Поэтому ее СовКНФ состоит из конъюнкции, содержащей только одну дизъюнкцию инверсий исходных переменных:

в)  $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$ .

3.78. Таблицы истинности трех булевых формул с переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$  таковы, что их последние столбцы имеют вид:

а) 10000101; б) 01001110; в) 00100011.

Каковы эти формы? Каковы наиболее простые эквивалентные им формулы?

3.79. Упростите формулы, имеющие следующие СовКНФ:

а)  $(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$ ; б)  $(\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r)$ .

3.80. Упростить булеву функцию  $f = \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$  и составить соответствующую ей карту Карно и комбинационную схему.

3.81. Сравнивая совершенные нормальные формы следующих пар булевых функций: а)  $\overline{x \wedge y} \rightarrow (y \rightarrow x)$  и  $x \rightarrow y$ ; б)  $(x \vee y) \wedge (y \rightarrow x)$  и  $(x \vee y \vee z) \wedge ((x \rightarrow y) \vee \bar{z})$  определите, являются ли эти пары функций эквивалентными.

3.82. Найти СовДНФ и СовКНФ функций задачи 3.2.

3.83. Привести следующие формулы булевой алгебры к СовДНФ и СовКНФ: а)  $x \vee \bar{y} \vee z$ ; б)  $x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge z$ ; в)  $x \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \wedge z$ ; г)  $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee z)$ ; д)  $(x \wedge y \vee \bar{y} \wedge z) \wedge \overline{x \wedge y}$ ; е)  $\overline{x \vee y \wedge \bar{z}} \wedge (x \vee z)$ ; ж)  $x \wedge \overline{y \wedge z \wedge u \wedge \bar{v}}$ ;

з)  $(x_1 \vee x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_4 \vee x_1 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee x_2 \wedge x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_4$ .

3.84. Без построения таблиц истинности найти СовДНФ и СовКНФ следующих функций:

а)  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ ; б)  $(x | y) \downarrow z$ ; в)  $(x \leftrightarrow y) \vee (z \rightarrow x)$ ; г)  $(x \vee y) \rightarrow (y \leftrightarrow z)$ ;

д)  $(x \downarrow z) \vee (x | y) \wedge \bar{x}$ ; е)  $(x \wedge \bar{y}) \wedge (z \rightarrow y)$ ; ж)  $(x | z) \rightarrow (x | y)$ ; з)  $(x | (z \rightarrow x)) | y$ ;

и)  $(x \downarrow y) \rightarrow (x | y)$ ; к)  $((x \rightarrow y) \vee \bar{z}) \rightarrow (x \leftrightarrow y)$ .

3.85. Записать в ДНФ и КНФ булеву функцию  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , принимающую значения 0 на наборах с номерами 2, 6, 7, 8, 11, 12.

3.86. Найти сокращенную ДНФ функций:

а)  $f_1 = x \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$ ;

б)  $f_2 = x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge z \vee \bar{x} \wedge y$ ; в)  $f_3 = x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge z \vee \bar{x} \wedge y$  и построить соответствующие им комбинационные схемы.

3.87. Определите, какие из данных формул являются тавтологиями, приводя их к КНФ:

а)  $((x \leftrightarrow y) \vee \bar{x} \vee z) \rightarrow y$ ; б)  $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow z$ ; в)  $\overline{\bar{x} \vee y} \rightarrow (x \wedge z \vee \bar{y})$ ;

г)  $(x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \vee y)$ ; д)  $((x \rightarrow y) \wedge y) \rightarrow x$ ; е)  $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \wedge z)))$ .

3.88. Докажите, что булева функция является тавтологией тогда и только тогда, когда каждая элементарная дизъюнкция ее КНФ содержит хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

3.89. Докажите, что булева функция является противоречием тогда и только тогда, когда каждая элементарная конъюнкция ее ДНФ содержит хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

3.90. Установите, какие из данных формул являются противоречием, приводя каждую из них к ДНФ: а)  $(x \wedge y) \leftrightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})$ ; б)  $((x \rightarrow y) \wedge \overline{y \rightarrow x}) \vee (\overline{x \rightarrow y} \wedge \overline{y \rightarrow x})$

убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила...

- Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа не лжет.»

Какой вывод сделал комиссар Мегрэ?

3.64. Записать в СовДНФ и СовКНФ булеву функцию  $y = f(x_1, x_2, x_3)$ , принимающую значения 1 на наборах с номерами 3, 4, 7.

3.65. Выражение  $f = \overline{x \vee y \wedge \bar{z}} \wedge (x \vee z)$  привести к СовДНФ и СовКНФ.

3.66. Преобразовать сокращенную ДНФ  $f = x \wedge y \vee y \wedge z \vee z \wedge u$  в совершенную ДНФ.

3.67. Привести следующие формулы к СовДНФ и СовКНФ:

- а)  $x \vee \bar{y} \wedge z$ ; б)  $x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge z$ ; в)  $x \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \wedge z$ ; г)  $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee z)$ ;  
 д)  $(x \wedge y \vee \bar{y} \wedge z) \wedge \overline{\bar{x} \wedge y}$ ; е)  $\overline{x \vee y \wedge \bar{z}} \wedge (x \vee z)$ ; ж)  $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\overline{\bar{x}_2 \vee x_4} \vee x_1 \vee \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee x_2 \wedge x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_4$ .

3.68. Без построения таблиц истинности найти СовДНФ и СовКНФ следующих функций:

- а)  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ ; б)  $(x | y) \downarrow z$ ; в)  $(x \leftrightarrow y) \vee (z \rightarrow x)$ ; г)  $(x \vee y) \rightarrow (y \leftrightarrow z)$ ;  
 д)  $(x \downarrow z) \vee (x | y) \wedge \bar{x}$ ; е)  $\overline{x \rightarrow y \wedge (z \rightarrow y)}$ ; ж)  $(x | z) \rightarrow (x | y)$ ; з)  $(x | (z \rightarrow x)) | y$ ;  
 и)  $((x \rightarrow y) \vee \bar{z}) \rightarrow (x \leftrightarrow y)$ ; к)  $(x \downarrow y) \rightarrow (x | y)$ .

3.69. Найдите СовДНФ следующих функций, применяя соответствующие эквивалентные преобразования:

- а)  $x \rightarrow y$ ; б)  $x \oplus y$ ; в)  $(x \wedge y) \rightarrow \overline{x \rightarrow y}$ ; г)  $((x \rightarrow y) \vee y) \rightarrow (y \wedge z)$ ; д)  $(x \vee y) \leftrightarrow z$ ; е)  $(x \rightarrow y) \rightarrow z$ .

3.70. Приведите к СовДНФ: а)  $\bar{x} \wedge y \vee x \wedge y \wedge z$ ; б)  $x \vee y \wedge z \vee u$ .

3.71. Составив таблицы истинности, найдите СовДНФ следующих функций:

- а)  $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$ ; б)  $((p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow (p \wedge r))$ .

3.72. Найдите СовКНФ следующих функций с помощью эквивалентных преобразований:

- а)  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ ; б)  $(x \rightarrow y) \wedge (x \vee \bar{y})$ ; в)  $\bar{x} \wedge y \vee x \wedge y \wedge z$ ; г)  $(x \leftrightarrow y) \wedge \bar{x} \wedge \bar{z}$ ;  
 д)  $(x \rightarrow y) \wedge (\bar{y} \rightarrow z) \wedge (\bar{z} \rightarrow x) \vee x$ ; е)  $(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y \vee z)$ ; ж)  $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z)$ ;  
 з)  $(x \vee y \vee z) \wedge (\bar{z} \vee u)$ ; и)  $x \wedge y \wedge z \wedge ((x \wedge y) \rightarrow (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}))$ .

3.73. Составив таблицы истинности, найдите СовКНФ следующих функций:

- а)  $(p \wedge \bar{q}) \rightarrow (p \rightarrow q)$ ; б)  $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$ ; в)  $(p \vee q) \rightarrow r$ .

3.74. Таблица истинности формулы  $f(x, y, z)$  есть 10011001. Найдите ее СовДНФ и СовКНФ.

3.75. Если СовДНФ некоторой формулы из четырех переменных содержит пять членов, то сколько членов содержит СовКНФ этой формулы?

3.76. СовКНФ некоторой формулы из трех переменных содержит 6 членов. Какая из двух совершенных нормальных форм этой формулы проще – СовДНФ или СовКНФ?

3.77. Упростите формулы, имеющие следующие СовДНФ:

- а)  $x \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y$ ; б)  $x \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge z$ ;

$x | y = \bar{x} \vee \bar{y}$ . Вторая формула проще первой, так как число нулей в значении исследуемой булевой функции меньше, чем число единиц.

По найденным формулам построим комбинационные схемы для штриха Шеффера:

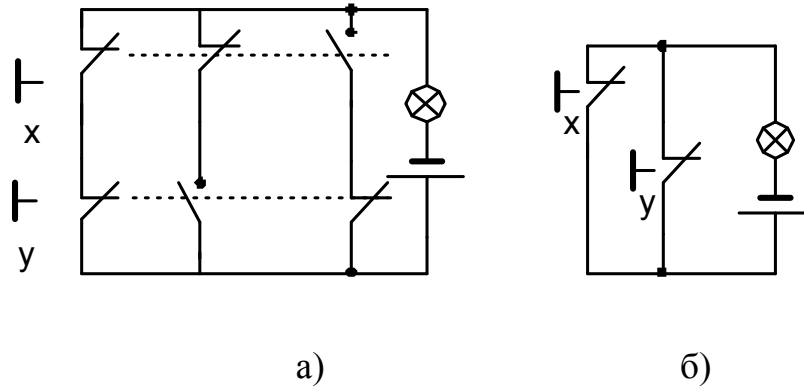


Рисунок 2.2 – Комбинационные схемы задачи 2.2

2.3. Выразить в СовДНФ и в СовКНФ все булевы функции двух переменных таблицы 1.1.

Решение. Согласно изложенным правилам имеем:

2.3.1. а)  $0 = x \wedge \bar{x} \vee y \wedge \bar{y}$ , б)  $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ ;

2.3.2.  $x \wedge y = (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$ ;

2.3.3. а)  $\overline{x \rightarrow y} = x \wedge \bar{y}$ , б)  $\overline{x \rightarrow y} = (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ ;

2.3.4. а)  $x = x \wedge \bar{y} \vee x \wedge y$ , б)  $x = (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y)$ ;

2.3.5. а)  $\overline{y \rightarrow x} = \bar{x} \wedge y$ , б)  $\overline{y \rightarrow x} = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ ;

2.3.6. а)  $y = x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y$ , б)  $y = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y)$ ;

2.3.7. а)  $x \oplus y = x \wedge \bar{y} \vee x \wedge y$ , б)  $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ ;

2.3.8.  $x \vee y = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee x \wedge y$ ;

2.3.9. а)  $x \downarrow y = \bar{x} \wedge \bar{y}$ , б)  $x \downarrow y = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ ;

2.3.10. а)  $x \leftrightarrow y = x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$ , б)  $x \leftrightarrow y = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$ ;

2.3.11. а)  $\bar{y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge \bar{y}$ , б)  $\bar{y} = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ ;

2.3.12. а)  $y \rightarrow x = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge \bar{y} \vee x \wedge y$ , б)  $y \rightarrow x = x \vee \bar{y}$ ;

2.3.13. а)  $\bar{x} = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y$ , б)  $\bar{x} = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ ;

2.3.14. а)  $x \rightarrow y = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$ , б)  $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ ;

2.3.15. а)  $x | y = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$ , б)  $x | y = \bar{x} \vee \bar{y}$ ;

2.3.16. а)  $1 = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee x \wedge y$ , б)  $(x \vee \bar{x}) \wedge (y \vee \bar{y})$ .

2.4. Минимизировать функцию  $f(x, y, z) = \bar{x} \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee x \wedge y \wedge z$ . Построить соответствующую ей комбинационную схему.

Решение. Так как функция задана с помощью совершенной ДНФ, воспользуемся алгоритмом Квайна. Сначала произведем все возможные неполные склеивания, используя формулу 1.13. Для наглядности результаты этой операции представим в таблицу 2.3.

Таблица 2.3 – Выполнение операций неполного склеивания

| Склеиваемые члены                                            | Новые члены        |
|--------------------------------------------------------------|--------------------|
| $\bar{x} \wedge y \wedge z, \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$ | $\bar{x} \wedge y$ |
| $\bar{x} \wedge y \wedge z, x \wedge y \wedge z$             | $y \wedge z$       |
| $x \wedge \bar{y} \wedge z, x \wedge y \wedge \bar{z}$       | $x \wedge \bar{y}$ |
| $x \wedge \bar{y} \wedge z, x \wedge y \wedge z$             | $x \wedge z$       |

Таким образом, функция  $f$  с учетом новых членов может быть записана так:  
 $f(x, y, z) = \bar{x} \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee \underline{x \wedge \bar{y} \wedge z} \vee \underline{x \wedge y \wedge \bar{z}} \vee \underline{x \wedge y \wedge z} \vee \bar{x} \wedge y \vee y \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \vee x \wedge z$ .

В этой формуле одинаковым образом подчеркнуты группы членов, к которым применим закон поглощения (1.9 а):

$$f(x, y, z) = y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge z \vee x \wedge \bar{y}. \quad (2.1)$$

Выясним, есть ли здесь лишние члены. Испытаем  $y \wedge z$ , обращающееся в 1 при  $y = 1$  и  $z = 1$ . Оставшееся выражение формулы (2.1) при этом имеет вид  $\bar{x} \vee x = 1$ . Следовательно, член  $y \wedge z$  можно исключить. В результате получим

$$f(x, y, z) = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge z \vee x \wedge \bar{y}. \quad (2.2)$$

Испытаем слагаемое  $\bar{x} \wedge y$ , обращающееся в 1 при  $x = 0$  и  $y = 1$ . Оставшееся выражение формулы (2.2) имеет значение 0, т.е.  $\bar{x} \wedge y$  не является лишним. аналогично можно доказать, что не являются лишними и члены  $x \wedge z$  и  $x \wedge \bar{y}$ . Следовательно, формула (2.2) есть СокрДНФ, а именно, одна из тупиковых форм.

Комбинационная схема, соответствующая формуле (2.2), приведена на рисунке 2.3а).

Минимальная ДНФ получается при применении к формуле (2.2) дистрибутивного закона (1.3 а):

$$f(x, y, z) = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge (z \vee \bar{y}). \quad (2.3)$$



3.50. Дана комбинационная схема - рисунок 3.8 - а. Составить для нее булеву функцию и карту Карно, минимальную ДНФ и соответствующую ей комбинационную схему.

3.51. Дана комбинационная схема - рисунок 3.8 - б. Составить для нее булеву функцию и комбинационную схему с параллельными и последовательными соединениями контактов.

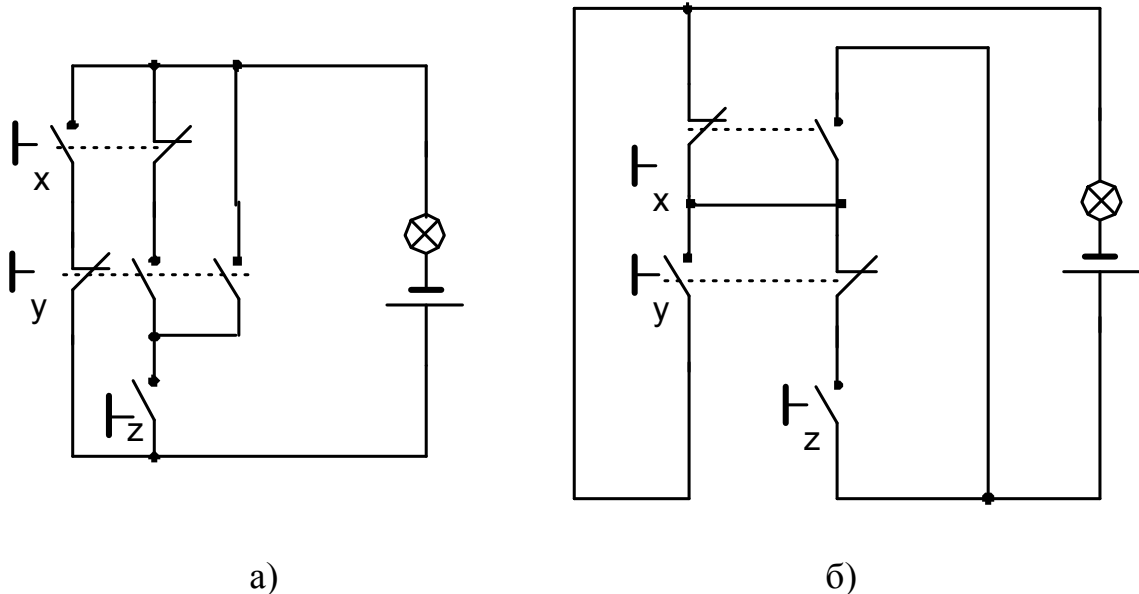


Рисунок 3.8 – Комбинационные схемы к задачам 3.50 и 3.51

3.52. Даны комбинационные схемы (рисунок 3.9). Составить для них булевы функции и таблицы истинности.

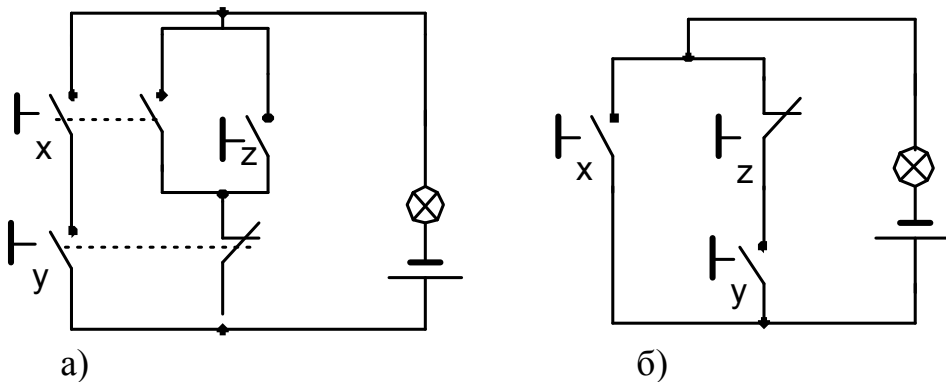


Рисунок 3.9 – Комбинационные схемы к задачам 3.52 и 3.55

3.53. Дана карта Карно (рисунок 3.10). Составить соответствующую ей упрощенную булеву функцию и комбинационную схему.

3.54. Составить комбинационную схему и карту Карно для булевой функции  $f(x, y) = \overline{x} \wedge \overline{y} \vee x \wedge y$ . Определить, какую логическую операцию она описывает.

3.55. Можно ли заменить электрическую цепь, изображенную на рисунке 3.9 а) более простой цепью, изображенной на рисунке 3.9 б)?

Соответствующая ей комбинационная схема приведена на рисунке 2.3б).

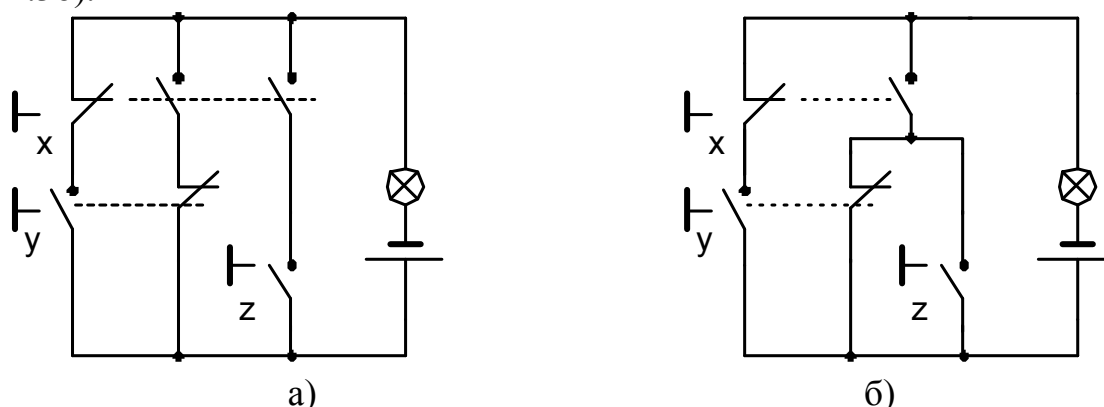


Рисунок 2.3 – Комбинационные схемы к задаче 2.4

2.5. Минимизировать функцию

$f(x, y, z) = x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$ , используя карту Карно.

Решение. Карта Карно, соответствующая данной функции, дана на рисунке 2.4 а). Она заполнена следующим образом: шесть конституент единицы, соответствующих шести слагаемыми данной функции, размещены в клетках карты Карно согласно значениям (прямым и инверсным) букв-аргументов, входящих в конституенты. В оставшиеся клетки проставлены нули.

Можно накрыть единицы импликантами (овалами, охватывающими по две смежные единицы), как это показано на рисунке 2.4 б). Такой минимизации соответствует выражение:

$$f(x, y, z) = \bar{y} \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee y \wedge \bar{z},$$

где импликанты соответствуют:  $\bar{y} \wedge \bar{z}$  - овалу 1,  $x \wedge \bar{y}$  - овалу 2,  $\bar{x} \wedge y$  - овалу 3,  $y \wedge \bar{z}$  - овалу 4.

Если свернуть карту в цилиндр относительно вертикальной оси, то видно, что четыре единицы, расположенные в углах карты Карно рисунка 2.4 в) накрываются импликантой  $\bar{z}$ , которой соответствует квадрат, охватывающий эти четыре единицы. Такая минимизация дает выражение:

$$f(x, y, z) = \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y,$$

где импликанте  $\bar{z}$  соответствует квадрат 1, а импликантам  $x \wedge \bar{y}$  и  $\bar{x} \wedge y$  овалы 2 и 3 – см. рисунок 2.4 в).

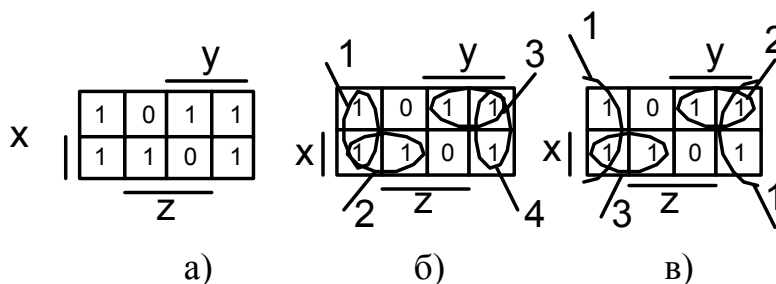


Рисунок 2.4 – Карты Карно задачи 2.5

Последняя формула и дает решение.

## 2.6. Минимизировать булеву функцию

$$f(x, y, z) = x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee y \wedge z. \quad (2.5)$$

Решение. Эта функция записана в ДНФ, но не в СовДНФ, поэтому здесь можно применить метод Блейка, основанный на использовании операции обобщенного склеивания (1.14).

Здесь видно, что первый и второй члены формулы  $f$  допускают обобщенные склеивания как по  $x$ , так и по  $y$ :

$$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z = x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee y \wedge \bar{y} \wedge z,$$

$$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z = x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge \bar{x} \wedge z,$$

но здесь возникающие в результате склеивания произведения  $y \wedge \bar{y} \wedge z$  и  $x \wedge \bar{x} \wedge z$  равны нулю, так как содержат одну из переменных ( $x$  или  $y$ ) вместе с ее отрицанием.

Нетривиальное обобщенное склеивание можно провести для первого и третьего членов исходной формулы, выполняя его, получим ДНФ:

$$f(x, y, z) = \underline{x \wedge \bar{y}} \vee \underline{x \wedge \bar{y} \wedge z} \vee \underline{y \wedge z} \vee \underline{x \wedge z}. \quad (2.6)$$

Здесь обобщенные склеивания можно применить к одинаково подчеркнутым парам членов:

$$f(x, y, z) = x \wedge \bar{y} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee y \wedge z \vee x \wedge z \vee y \wedge z \vee x \wedge z. \quad (2.7)$$

Полученное выражение совпадает с (2.6). Поэтому, можно считать, что в форме (2.7) выполнены все возможные в ней обобщенные склеивания. Производя затем выполнение элементарных поглощений (слагаемое  $x \wedge \bar{y} \wedge z$  поглощается членом  $x \wedge z$ ), придем к сокращенной ДНФ:  $f(x, y, z) = x \wedge \bar{y} \vee y \wedge z \vee x \wedge z$ .

Далее произведем исключение лишних членов. Здесь лишним является член  $x \wedge z$ . Действительно, он обращается в ноль при  $x = z = 1$ . При этих же значениях оставшееся выражение последней формулы есть  $\bar{y} \vee y = 1$ . Следовательно, исходную формулу можно записать так:  $f(x, y, z) = x \wedge \bar{y} \vee y \wedge z$ .

## 2.7. Минимизировать функцию

$$f = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}).$$

Решение. Здесь функция задана в виде КНФ, поэтому следует применять метод Нельсона. Для этого раскроем скобки:

$$f = \underline{x \wedge z} \vee \underline{x \wedge \bar{y} \wedge z} \vee x \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}, \text{ и устраним элементарные поглощения:}$$

$$f = \underline{x \wedge z} \vee \underline{x \wedge y \wedge z} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z},$$

3.46. Составьте три схемы с тремя независимыми кнопками, такие, что лампочка горит при следующих условиях:

- нажато не более чем две кнопки;
- нажата только одна кнопка;
- не нажата только одна кнопка.

3.47. Составьте булеву формулу, соответствующую схеме, приведенной на рисунке 3.6 - а). Построив таблицу истинности, определите условия, при которых лампочка будет гореть.

3.48. Дана комбинационная схема (рисунок 3.6 - б). Составить соответствующую ей булеву функцию, таблицу истинности, карту Карно.

3.49. Даны две комбинационные схемы (рисунок 3.7). Показать, что они описываются тождественными булевыми функциями.

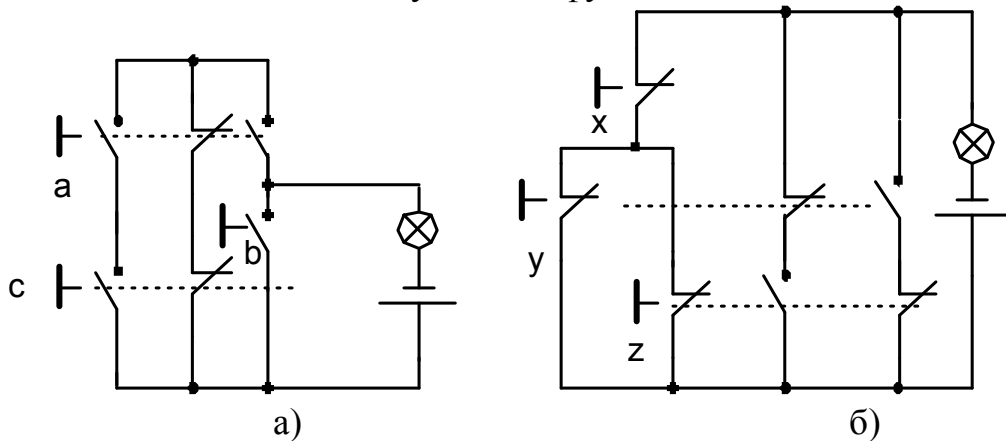


Рисунок 3.6 – Комбинационные схемы к задачам 3.47 и 3.48

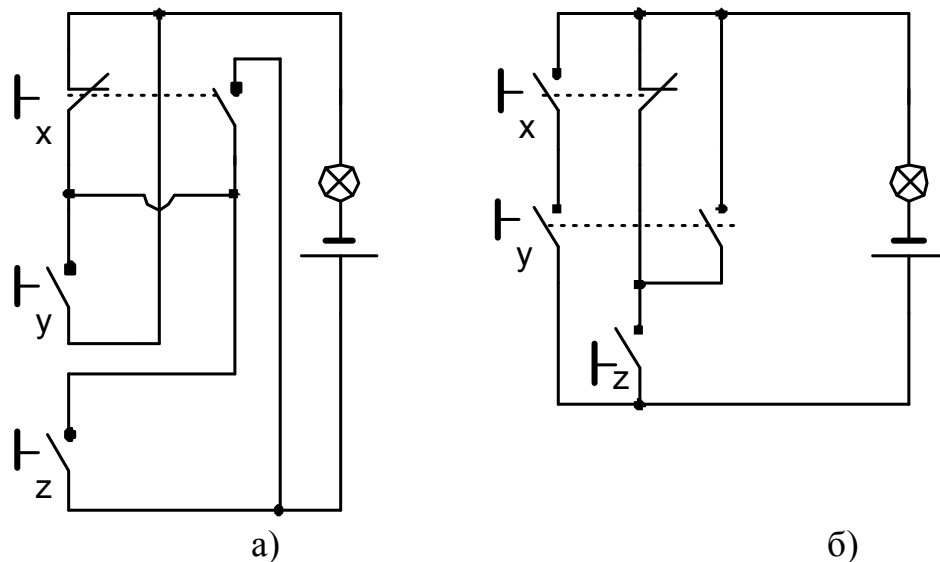


Рисунок 3.7 – Комбинационные схемы к задаче 3.49

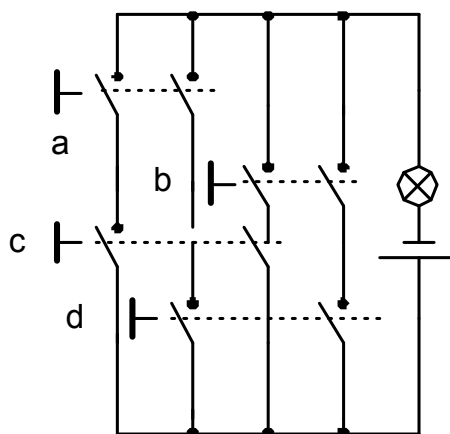


Рисунок 3.3 – Комбинационная схема к задаче 3.41

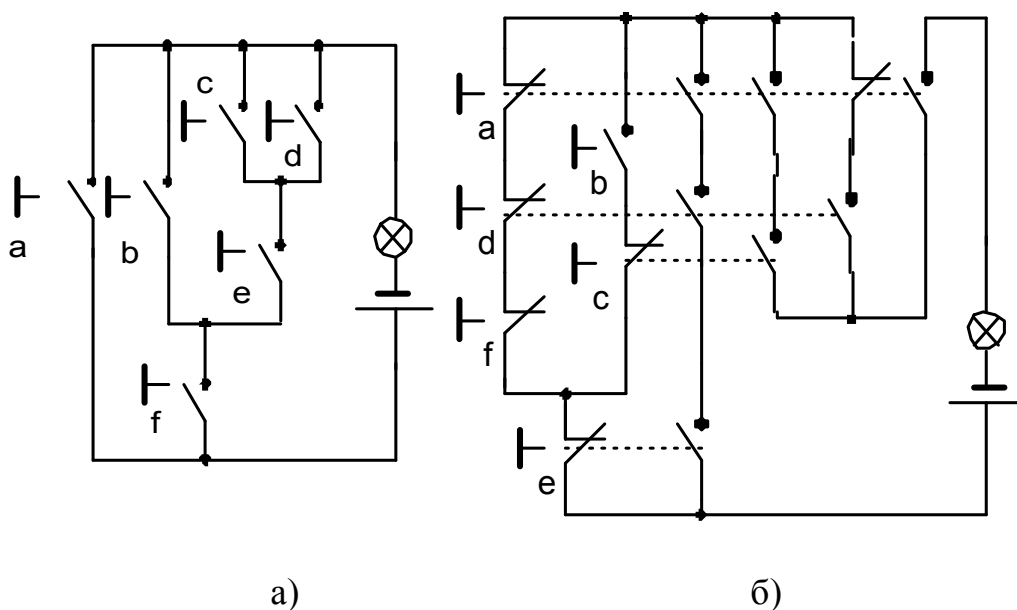


Рисунок 3.4 – Комбинационные схемы к задаче 3.44

3.45. Посредством какой булевой формулы может быть описана схема, представленная на рисунке 3.5? Что можно сказать, сравнив ее со схемой рисунка 3.4 - а?

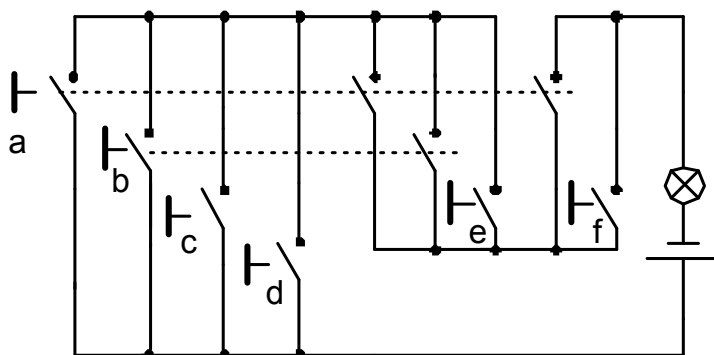


Рисунок 3.5 – Комбинационная схема к задаче 3.45

тогда  $f = x \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$ , это и есть искомая минимальная ДНФ.

2.8. Построить схему реализации функции

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \wedge x_2 \vee \bar{x}_2 \wedge (x_3 \vee x_4)$  в конъюнктивном базисе Буля  $\Sigma_1 = \{\wedge, \bar{\phantom{x}}\}$ .

Решение. Из тождества де Моргана (1.12а) имеем:

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

Поэтому функцию  $f$  можно записать в виде такой последовательности логических формул:

$$f_1 = x_1 \wedge x_2, f_2 = x_3 \vee x_4 = \overline{\bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4}, f_3 = \bar{x}_2 \wedge f_2, f = f_1 \vee f_3 = \overline{\bar{f}_1 \wedge \bar{f}_3}.$$

Пользуясь таблицей 2.1, получим следующую реализацию, показанную на рисунке 2.5.

2.9. Построить схему реализации булевой функции

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \wedge x_2 \vee \bar{x}_2 \wedge (x_3 \vee x_4)$  в дизъюнктивном базисе Буля  $\Sigma_2 = \{\vee, \bar{\phantom{x}}\}$ .

Решение. Из тождества де Моргана (1.12 б) получим:

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

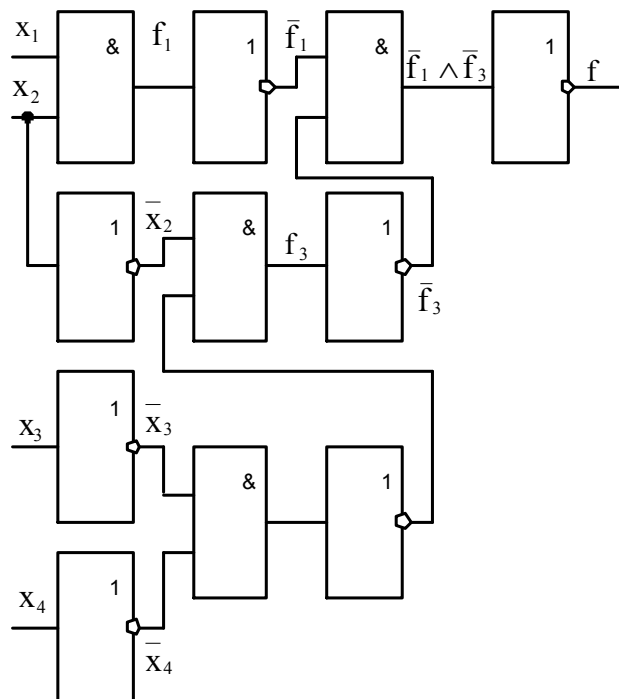


Рисунок 2.5 - Схема реализации функции из примера 2.8.

Используя это выражение, запишем исходную формулу в виде такой последовательности логических формул:

$$f_1 = x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}, f_2 = x_3 \vee x_4, f_3 = \bar{x}_2 \wedge f_2 = \overline{x_2 \vee \bar{f}_2}, f = f_1 \vee f_3.$$

В соответствии с таблицей 1.2, составим схему реализации:

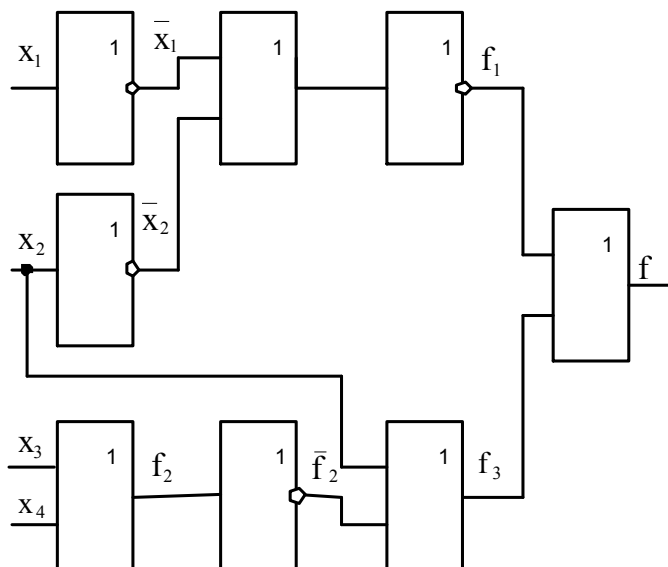


Рисунок 2.6 – Схема реализации булевой функции к задаче 2.9

2.10. Записать функцию  $f(x, y, z) = x \vee y \wedge \bar{z}$  с помощью одной операции – штриха Шеффера. Построить схему ее реализации в базисе Шеффера  $\Sigma_3 = \{\mid\}$

Решение. Согласно формуле из задачи 2.3 и тождеству де Моргана, штрих Шеффера может быть представлен как:

$$x \mid y = \overline{x \wedge y}, \quad (2.8)$$

отсюда, в частности, можно получить

$$\bar{x} = \overline{x \wedge x} = x \mid x. \quad (2.9)$$

Применим к исходной функции операцию двойного отрицания и тождество де Моргана:

$$f(x, y, z) = \overline{\overline{x \vee y \wedge \bar{z}}} = \overline{\bar{x} \wedge (y \wedge \bar{z})}.$$

Отсюда, последовательно применяя формулы, можно получить:

$$f(x, y, z) = \bar{x} \mid \overline{y \wedge \bar{z}} = (x \mid x) \mid (y \mid (z \mid z)).$$

Пользуясь таблицей 1.2, построим следующую схему реализации, приведенную на рисунке 2.7.

2.11. Записать функцию  $f(x, y, z) = x \vee y \wedge \bar{z}$  с помощью одной операции – стрелки Пирса, построить схему ее реализации в базисе Вебба  $\Sigma_3 = \{\downarrow\}$ .

Решение. Согласно формуле для стрелки Пирса из задачи 2.3 и тождеству де Моргана, имеем:

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}, \quad (2.10)$$

отсюда, в частности, можно получить

|          |   |   |          |
|----------|---|---|----------|
|          |   |   | <u>y</u> |
|          | 1 | 0 | 0        |
|          | 0 | 1 | 1        |
| <u>x</u> |   |   |          |
|          |   |   | <u>z</u> |

а)

|          |   |   |          |
|----------|---|---|----------|
|          |   |   | <u>y</u> |
|          | 0 | 0 | 1        |
|          | 0 | 1 | 1        |
| <u>x</u> |   |   |          |
|          |   |   | <u>z</u> |

б)

|          |   |   |          |
|----------|---|---|----------|
|          |   |   | <u>y</u> |
|          | 0 | 1 | 0        |
|          | 1 | 0 | 0        |
| <u>x</u> |   |   |          |
|          |   |   | <u>z</u> |

в)

Рисунок 3.1 – Карты Карно к задачам 3.34, 3.35, 3.37

3.37. Дана карта Карно (рисунок 3.1 - в). Составить соответствующую ей таблицы истинности, упрощенную булеву функцию, комбинационную схему.

3.38. Дана булева функция:  $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z}$ . Упростить ее и составить комбинационную схему.

3.39. Составить комбинационные схемы, соответствующие формулам:

а)  $x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$ ; б)  $x \vee y \wedge z$ ; в)  $(x \vee y \vee z) \wedge (u \vee v \vee w)$ ; г)  $(x \vee y \vee z) \wedge (u \vee w)$ ; д)  $(x \vee y) \wedge z \vee (x \wedge z \vee y)$ .

3.40. Дана комбинационная схема (рисунок 3.2). Написать для нее булеву функцию, построить таблицу истинности. Упростить булеву функцию и нарисовать соответствующую ей упрощенную схему.

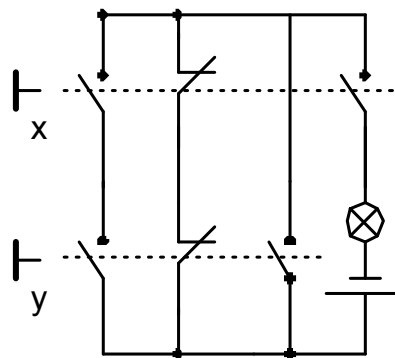


Рисунок 3.2 – Комбинационная схема к задаче 3.40

3.41. Какая булева формула соответствует схема, приведенной на рисунке 3.3? Упростить эту формулу и построить соответствующую упрощенную схему.

3.42. Покажите, что  $x \wedge y \vee \bar{x} \wedge z = (x \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y)$  и проиллюстрируйте это на комбинационной схеме.

3.43. Верно ли, что  $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) = x \wedge z \vee \bar{x} \wedge y$ ? Ответ проиллюстрируйте на комбинационной схеме.

3.44. Какие булевы формулы соответствуют схемам, приведенным на рисунке 3.4?

3.23. Выразите приведенные формулы как импликации, не содержащие законов отрицания: а)  $\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$ ; б)  $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$ ; в)  $x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ .

3.24. Приведенные формулы запишите без знаков импликации, эквивалентности и неравнозначности. Отрицания отнесите только к исходным простым переменным:

- а)  $x \leftrightarrow (y \vee z)$ ; б)  $x \rightarrow (y \leftrightarrow z)$ ; в)  $x \leftrightarrow (y \rightarrow z)$ ; г)  $(x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)$ ;  
 д)  $(x \oplus y) \rightarrow (x \leftrightarrow y)$ ; е)  $((x \rightarrow y) \wedge (\bar{x} \rightarrow \bar{y})) \rightarrow ((x \oplus y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}))$ .

3.25. Преобразуйте высказывание  $p \leftrightarrow q$  так, чтобы в нем использовались только связки  $\rightarrow$  и  $\wedge$ .

3.26. Упростите формулы:

- а)  $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge y \wedge z$ ;  
 б)  $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee z)$ ; в)  $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee z) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z})$ ; г)  $(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee z)$ .

3.27. Комитет из трех человек хочет применить электрическую схему для регистрации тайного голосования простым большинством голосов. Построить такую схему, чтобы каждый член комитета, голосующий «за», нажимал кнопку, и не нажимал ее, если он голосует «против», и чтобы в случае, если большинство членов комитета проголосует «за», загоралась сигнальная лампочка.

3.28. Комитет состоит из трех членов. Решения выносятся большинством голосов. Однако если председатель голосует «против» решение не может быть принято (т.е. для того, чтобы решение было принято, необходимо, чтобы председатель голосовал «за»). Постройте такую схему, чтобы голосование каждого члена комитета за принятие решения проводилось путем нажатия кнопки, и чтобы лампочка загоралась в том и только в том случае, если решение принято.

3.29. Решить задачу 3.27 при условии, что комитет состоит из пяти членов.

3.30. Требуется, чтобы в комнате можно было включать и выключать свет при помощи любого из трех выключателей, расположенных на разных стенах. Составить такую схему.

3.31. Машина-экзаменатор дает сигнал «зачет» (загорается лампочка) тогда и только тогда, когда студент ответил правильно хотя бы на два из трех вопросов билета. При вводе в машину правильного ответа замыкается контакт в цепи сигнальной лампочки. Постройте схему этой цепи.

3.32. Постройте комбинационные схемы, соответствующие формулам:

- а)  $x \rightarrow y$ ; б)  $x \oplus y$ ; в)  $x \leftrightarrow y$ ; г)  $(x \rightarrow y) \vee y$ .

3.33. Составьте комбинационные схемы и карты Карно для булевых функций:

- а)  $\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{z})}$ ; б)  $\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge (x \wedge \bar{z})}$ ; в)  $(x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)$ ; г)  $(x \rightarrow y) \wedge (x \oplus y)$ .

3.34. Дана карта Карно (рисунок 3.1 - а). Составить соответствующую ей таблицы истинности, упрощенную булеву функцию, комбинационную схему.

3.35. Дана карта Карно (рисунок 3.1 - б). Составить соответствующую ей таблицы истинности, упрощенную булеву функцию, комбинационную схему.

3.36. Нарисовать комбинационную схему для формулы  $(x \mid y) \oplus (x \rightarrow y)$ .

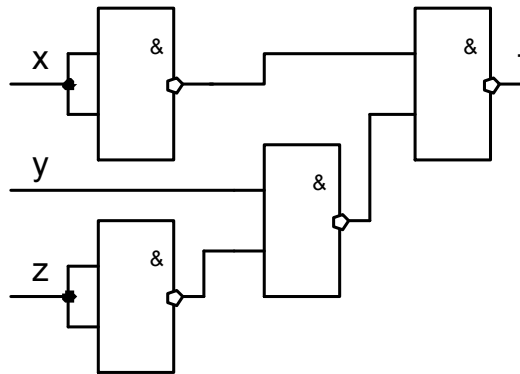


Рисунок 2.7 – Схема реализации булевой функции задачи 2.10

$$\bar{x} = \overline{x \vee x} = x \downarrow x. \quad (2.11)$$

Применим к исходной функции дистрибутивный закон (1.3 а):

$$f = x \vee y \wedge \bar{z} = (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{z}),$$

и двойное отрицание:

$$f = \overline{\overline{(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{z})}} = \overline{\overline{(x \vee y)} \vee \overline{(x \vee \bar{z})}}.$$

Далее получим:  $f(x, y, z) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow \bar{z}) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow (z \downarrow z)).$

Согласно этой формуле и таблице 1.2 получим схему реализации, показанную на рисунке 2.8.

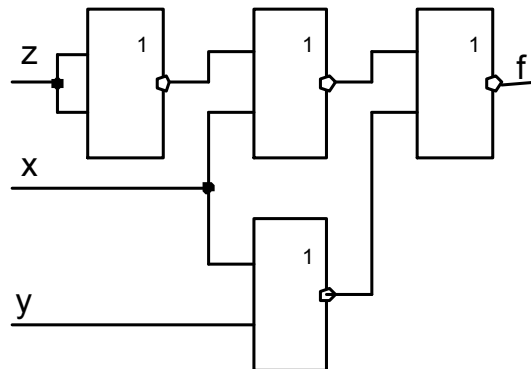


Рисунок 2.8. – Схема реализации булевой функции примера 2.11

### 3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

3.1. Напишите таблицы истинности для следующих логических формул:

- а)  $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ ; б)  $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ ; в)  $(p \mid q) \mid (p \mid q)$ ; г)  $(p \mid p) \mid (q \mid q)$ ;  
 д)  $(p \downarrow q) \mid (p \downarrow q)$ ; е)  $(p \downarrow p) \mid (q \downarrow q)$ .

3.2. Построить таблицы истинности функций, заданных следующими формулами: а)  $(x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x))$ ; б)  $\overline{(x \vee y)} \vee \overline{x} \wedge z \downarrow (x \leftrightarrow y)$ ;  
 в)  $\overline{x} \rightarrow (\overline{z} \leftrightarrow (y \oplus x \wedge z))$ ; г)  $((x \mid y) \downarrow z) \mid y \downarrow z$ .

3.3. Не прибегая к построению таблиц истинности, найти все наборы, на которых следующие функции принимают значение 0:

- а)  $((x \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{x})) \rightarrow \overline{y}$ ; б)  $(x \vee y) \rightarrow (\overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y})$ ; в)  $x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z \vee u \wedge v \vee u \wedge w \vee \overline{x} \wedge \overline{u}$ ; г)  $(x \vee y \vee z) \rightarrow ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$ ; д)  $((x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)) \rightarrow (x \wedge y \vee z)$ .

3.4. Определить для каждого из следующих высказываний, будет ли оно логически истинным, логически ложным или ни тем, ни другим:

- а)  $x \leftrightarrow x$ ; б)  $x \rightarrow \overline{x}$ ; в)  $(x \vee y) \leftrightarrow (x \wedge y)$ ; г)  $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \wedge \overline{x \rightarrow z}$ ;  
 д)  $(x \rightarrow y) \rightarrow y$ ; е)  $((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x$ .

3.5. Доказать, что следующие высказывания истинны или ложны независимо от истинности или ложности их составных частей, т.е. являются противоречиями: а)  $\overline{q} \wedge p \wedge (p \rightarrow q)$ ; б)  $(\overline{p} \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \overline{p})$ .

3.6. Определите, какие из приведенных формул являются тождественно истинными (тавтологиями): а)  $(x \rightarrow 0) \rightarrow x$ ; б)  $x \wedge x \rightarrow y$ ; в)  $(x \rightarrow 1) \rightarrow x$ ;  
 г)  $x \rightarrow \overline{y \wedge \overline{y}}$ ; д)  $(0 \rightarrow x) \rightarrow x$ ; е)  $(1 \rightarrow x) \rightarrow x$ ; ж)  $(x \rightarrow y) \rightarrow x$ .

3.7. Доказать, что следующие высказывания являются тавтологиями:

- а)  $(p \vee p) \rightarrow p$ ; б)  $p \rightarrow (p \vee q)$ ; в)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$ ; г)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$ .

3.8. Составив таблицы истинности, доказать справедливость следующих тождественных соотношений:

- а)  $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$ ; б)  $x \vee y \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ; в)  $x \vee x \wedge y = x$ ;  
 г)  $x \wedge (x \vee y) = x$ ; д)  $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ ; е)  $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ ; ж)  $x \wedge x = x$ ; з)  $x \vee x = x$ ;  
 и)  $\overline{x} \vee x = 1$ ; к)  $x \wedge \overline{x} = 0$ ; л)  $x \oplus x = 0$ ; м)  $x \oplus 1 = \overline{x}$ ; н)  $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$ ;  
 о)  $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ .

3.9. Проверить, справедливы ли следующие соотношения:

- а)  $x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$ ; б)  $x \rightarrow (y \leftrightarrow z) = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow z)$ ;  
 в)  $x \wedge (y \leftrightarrow z) = (x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$ ; г)  $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$ ;  
 д)  $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ ; е)  $x \oplus (y \rightarrow z) = (x \oplus y) \rightarrow (x \oplus z)$ ;  
 ж)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$ ; з)  $(x \rightarrow y) = x \rightarrow (y \rightarrow z)$ .

3.10. Исключите знаки импликации в приведенных формулах. При этом отрицание должно быть отнесено к исходным высказываниям. Постройте соответствующие комбинационные схемы:

- а)  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ ; б)  $(x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z}$ ; в)  $(x \vee y) \rightarrow z$ ; г)  $(x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$ ;  
 д)  $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \wedge y) \rightarrow x)$ .

3.11. Произведите эквивалентные преобразования формул так, чтобы они содержали только знаки  $\bar{\phantom{x}}$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ :

- а)  $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)) \rightarrow (x \leftrightarrow y)$ ; б)  $(x \oplus y) \rightarrow (x \leftrightarrow y)$ ;  
 в)  $((x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow \bar{z})) \rightarrow (z \rightarrow \bar{x})$ ; г)  $((x \rightarrow y) \wedge (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y})) \rightarrow ((x \vee y) \wedge (x \oplus y))$ .

3.12. Выразить штрих Шеффера через операции  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  и  $\bar{\phantom{x}}$

3.13. Упростите приведенные формулы с помощью закона поглощения:

- а)  $x \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ; б)  $x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \vee x_1 \wedge x_4 \wedge y$ ;  
 в)  $x \wedge y \vee x \wedge z \vee x \wedge y \wedge z$ ; г)  $x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_4$ .

3.14. Упростить приведенные формулы с помощью закона склеивания:

- а)  $x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z}$ ; б)  $x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \vee x_1 \wedge x_4 \wedge y$ ;  
 в)  $x \wedge y \vee x \wedge z \vee x \wedge y \wedge z$ ; г)  $x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$ ;

3.15. Упростите приведенные формулы:

- а)  $(p \rightarrow p) \rightarrow p$ ; б)  $(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee q)$ ; в)  $p \wedge q \vee p \wedge \bar{q}$ ; г)  $\overline{p \vee q} \rightarrow (p \vee q) \wedge q$ ;  
 д)  $\bar{p} \wedge q \vee (p \rightarrow q) \wedge p$ ; е)  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \bar{p})$ ; ж)  $\overline{p \wedge q} \vee \bar{p} \wedge q \wedge r \wedge (\bar{p} \vee (p \wedge q \vee \bar{q}))$ .

3.16. Упростить приведенные формулы:

- а)  $(x \leftrightarrow y) \wedge x$ ; б)  $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$ ; в)  $(x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow z)$ ; г)  $(x \rightarrow \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)$ ;  
 д)  $x \wedge y \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y}$ ; е)  $(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \wedge x \vee \bar{x} \wedge y$ .

3.17. Упростить следующие формулы:

- а)  $x \wedge z \vee x \wedge \bar{z} \vee y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z$ ; б)  $x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge z \vee \bar{x} \wedge y$ ;  
 в)  $(x \vee y) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z)$ ; г)  $x \vee y \wedge \bar{z} \vee (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$ ; д)  $\bar{x} \wedge y \vee z \wedge (y \vee u) \vee z$ .

3.18. Упростить приведенные формулы:

- а)  $p \vee p \wedge \bar{p} \vee q$ ; б)  $r \vee \bar{p} \rightarrow (p \vee q)$ ; в)  $p \wedge ((q \wedge r) \rightarrow r) \wedge (r \vee \bar{r})$ ;  
 г)  $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \bar{r})$ ; д)  $r \wedge ((p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge p)) \wedge s$ ;  
 е)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow q)$ .

3.19. Проверить, справедливы ли следующие соотношения:

- а)  $x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$ ; б)  $x \rightarrow (y \leftrightarrow z) = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow z)$ ;  
 в)  $x \wedge (y \leftrightarrow z) = (x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$ ; г)  $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$ ;  
 д)  $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ ; е)  $x \oplus (y \rightarrow z) = (x \oplus y) \rightarrow (x \oplus z)$ ;  
 ж)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$ ; з)  $(x | y) | z = x | (y | z)$ ;  
 и)  $(x \downarrow y) \downarrow z = x \downarrow (y \downarrow z)$ ; к)  $(x \rightarrow y) = x \rightarrow (y \rightarrow z)$ .

3.20. Подчинена ли операция импликации законам коммутативности, ассоциативности и идемпотентности, т.е. верно ли, что а)  $x \rightarrow y = y \rightarrow x$ ;

б)  $(x \rightarrow y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$ ; в)  $x \rightarrow x = x$ ?

3.21. Подчинена ли эквивалентность законам коммутативности, ассоциативности и идемпотентности, т.е. верно ли, что а)  $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$ ;

б)  $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$ ; в)  $x \leftrightarrow x = x$ ?

3.22. Подчинены ли операции «штрих Шеффера» и «стрелка Пирса» законам коммутативности, ассоциативности и идемпотентности?