

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

к выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Численные методы в информатике»

для студентов специальности 7.080401
дневной и заочной форм обучения

Исследование погрешностей приближенных вычислений. Методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Численные методы в информатике»/ Сост. Доценко С.В., Кудрявченко И.В. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. –17 с.

Целью методических указаний является обеспечение наглядного изучения методов расчета и оценки погрешностей при вычислениях на ЭВМ, а так же приобретение студентами практических навыков при выполнении действий с приближенными числами.

Методические указания предназначены для студентов специальности 7.080401 дневной и заочной форм обучения

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем
(протокол № 3 от 22 октября 2003 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензент: Чмут В.В., к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы	3
2. Краткие теоретические сведения	3
3. Описание лабораторной установки	12
4. Порядок выполнения экспериментальных исследований	12
5. Порядок выполнения теоретических расчетов	15
6. Содержание отчета о выполнении лабораторной работы	16
7. Контрольные вопросы	16
Библиографический список	17

Севастополь
2004



1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Выполнение лабораторной имеет целью формирование навыков практических расчетов при вычислениях на ЭВМ. В данной работе необходимо изучить правила округления приближенных чисел, методы расчета абсолютных и относительных погрешностей результатов вычислений, принципы построения вычислительных алгоритмов по критерию минимальной погрешности вычислений.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определения

- ❑ *Вычислительная математика* – раздел математики, в котором изучаются разнообразные проблемы получения числовых результатов решения математической задачи.
- ❑ *Численные методы* (ЧМ) являются составной частью вычислительной математики. К ним относятся такие методы решения задач, которые сводятся или могут быть сведены к арифметическим действиям над числами. Для того, чтобы ЧМ могли быть реализованы на ЭВМ, они должны быть *устойчивыми и сходящимися*.
- ❑ ЧМ называется *устойчивым*, если результаты непрерывно зависят от входных данных задачи и если погрешность округления, связанная с реализацией ЧМ на ЭВМ, остается ограниченной при заданных пределах изменения параметров ЧМ.
- ❑ ЧМ называется *сходящимся*, если результаты стремятся к точному решению задачи при стремлении параметров ЧМ к определенным предельным значениям.
- ❑ *Основной вопрос теории ЧМ* - получение методов, удовлетворяющих требованиям высокой точности, устойчивости и экономичности. То есть после применения того или иного ЧМ необходимо получить числовой результат с заданной точностью.

2.1. Основные понятия теории приближенных вычислений

Для оценки точности результатов вычислений обычно используют понятия *точного* и *приближенного* числа, *абсолютной* и *относительной* погрешности.

2.1.1. Точное и приближенное число

Каждое число выражает значение некоторой *величины*. Обычно считают известным понятие *точного* значения величины, которое является ее количественной характеристикой. Если точное значение величины неизвестно, то его заменяют другим значением, которое называется *приближенным* значением данной величины. Число называ-

ется *точным* или *приближенным* в зависимости от того, выражает оно точное или приближенное значение величины. Эти названия выражают не абсолютные свойства отдельных чисел, а относительные, зависящие от их связи с рассматриваемой величиной и не имеющие смысла вне этой связи.

Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от *точного* A и заменяющее последнее в вычислениях. Если известно, что $a < A$, то a - приближенное значение числа A *по недостатку*, если, $a > A$, то a - приближенное значение числа A *по избытку*.

Источниками чисел являются: счет предметов; измерение величин; таблицы и вычислительные машины; действия над числами.

Операция *счета* в некоторых случаях приводит к точным числам. Однако, если пересчитываемое множество достаточно обширно и непостоянно, то определение точного числа его элементов не является возможным. Например, невозможно точно определить количество молекул в грамм-молекуле вещества.

Процесс *измерения* величин приводит к приближенным числам. Это связано с наличием помех при измерениях, а, также с тем, что измерительные приборы и наши органы чувств неспособны различать слишком мелкие доли величин.

Таблицы, справочники и вычислительные машины могут давать как точные, так и приближенные числа.

Действия над числами обычно доставляют приближенные числа.

2.1.2. Абсолютная и относительная погрешности

Под *ошибкой* или *погрешностью* Δa приближенного числа a обычно понимается разность

$$\Delta a = A - a, \quad (1)$$

откуда

$$A = a + \Delta a. \quad (2)$$

Из (2) следует, что точное число можно рассматривать как приближенное с ошибкой, равной нулю.

Часто знак ошибки неизвестен. В этом случае пользуются *абсолютной погрешностью*:

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a|. \quad (3)$$

Если неизвестно число A , то вместо абсолютной погрешности вводят ее оценку сверху – *предельную абсолютную погрешность* Δ_a . Под



предельной абсолютной погрешностью приближенного числа понимается всякое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа.

Следовательно,

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a,$$

или

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a \quad (4)$$

Выражение (4) устанавливает границы, в которых заключено число A . Иначе можно записать:

$$A = a \pm \Delta_a. \quad (5)$$

Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа A ($A \neq 0$):

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}, \quad (6)$$

откуда

$$\delta = |A| \cdot \Delta.$$

Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа a называется всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа.

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a,$$

откуда

$$\Delta \leq |A| \cdot \delta_a. \quad (7)$$

Таким образом, за предельную абсолютную погрешность числа a можно принять:

$$\Delta_a = |A| \cdot \delta_a. \quad (8)$$

Так как на практике $A \approx a$, но при этом A может быть неизвестно, то в формулы (6) – (8) вместо A подставляют a .

Зная предельную относительную погрешность δ_a , получают границы точного числа:

$$A = a \cdot (1 \pm \delta_a). \quad (9)$$

2.2. Основные источники погрешностей

Выделяют следующие основные источники погрешностей.

- ❑ *Погрешность задачи (метода)* – погрешность, связанная с самой постановкой математической задачи или с методом ее решения.

- ❑ *Остаточная погрешность* связана с тем, что функции, фигурирующие в математических формулах, представляют в виде бесконечных последовательностей или рядов (например,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots).$$

- ❑ *Начальная погрешность* связана с наличием в математических формулах числовых параметров, которые могут быть определены лишь приближенно (например, все физические константы).
- ❑ *Погрешность округления* – погрешность связанная с системой счисления. Например, точные значения рациональных чисел в десятичной системе счисления могут быть представлены в виде бесконечной периодической дроби. Так как размер разрядной сетки компьютеров ограничен, то при вычислениях такие числа приходится округлять.
- ❑ *Погрешности действий* связаны с действиями над приближенными числами. Очевидно, что погрешности исходных данных при вычислениях должны учитываться в результате вычислений. Поэтому погрешности действий являются *неустраняемыми*.

2.3. Десятичная запись приближенных чисел

Всякое положительное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби

$$a = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} + \dots, \quad (10)$$

где α_i – цифры числа a ($\alpha_i = 0, 1, 2, \dots, 9$), причем старшая цифра $\alpha_m \neq 0$;

m – целое число.

Каждая единица, стоящая на определенном месте (позиции) числа a , представленном в виде десятичной дроби (10), имеет свое значение (вес). Единица, стоящая на первом месте равна 10^m , на втором 10^{m-1} и т.д.

На практике чаще приходится иметь дело с приближенными числами, представляющими собой *конечные десятичные дроби*:

$$b = \beta_m \cdot 10^m + \beta_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + \beta_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} \quad (\beta_m \neq 0). \quad (11)$$

Все сохраняемые десятичные знаки β_i ($i = m, m-1, \dots, m-n+1$) называются *значащими цифрами* приближенного числа b , причем некоторые из них могут быть равны нулю (за исключением β_m).



Определения

- *Значащей цифрой* приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, а также нуль, если он содержится между значащими цифрами или представляет сохранный десятичный разряд. Все остальные нули, входящие в состав приближенного числа и служащие лишь для обозначения его десятичных разрядов, не причисляются к значащим цифрам.
- Любая из значащих цифр приближенного числа является *верной*, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит пяти единиц разряда, следующего за этой цифрой.

2.4. Экспоненциальная форма записи приближенного числа

В ЭВМ и калькуляторах кроме формы записи чисел вида (11), которая носит название *естественной*, применяют *экспоненциальную* форму записи:

$$b = f \cdot 10^m \quad (m \in Z), \quad (12)$$

где f - мантисса действительного числа b ;

m - порядок приближенного числа b .

Действительное число называется *нормализованным*, если первая значащая цифра мантиссы не равна нулю. При этом мантисса должна быть правильной дробью. Поэтому диапазон возможных значений мантиссы f лежит в пределах:

$$0,1 \leq f \leq 1,0.$$

Число верных цифр в нормализованном числе – это число верных цифр в его мантиссе.

2.5. Округление чисел

При симметричном округлении приближенного числа в десятичной нотации применяют следующее правило.

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие справа от n -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом возможны 4 варианта:

- 1) если первая из отброшенных цифр *меньше* 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;
- 2) если первая из отброшенных цифр *больше* 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;
- 3) если первая из отброшенных цифр *равна* 5 и среди остальных отброшенных имеются ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

- 4) если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то применяется правило четной цифры:

- последняя оставшаяся цифра сохраняется без изменений, если она четная;
- к последней оставшейся цифре прибавляется единица, если она нечетная.

Очевидно, что при симметричном округлении погрешность округления не превосходит $1/2$ единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

2.6. Общая формула для погрешности

На практике встречаются задачи, когда известны погрешности некоторой системы величин и требуется определить погрешность данной функции этих величин.

Обозначим заданную дифференцируемую функцию

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (13)$$

и пусть Δx_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - погрешности аргументов этой функции. Тогда абсолютную погрешность результата вычислений можно найти по формуле

$$|\Delta u| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|, \quad (14)$$

где $|\Delta x_i|$ - абсолютные погрешности аргументов.

Предельная абсолютная погрешность вычисления функции u определяется по формуле:

$$|\Delta u| = \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{xi}, \quad (15)$$

где Δ_{xi} - предельные абсолютные погрешности аргументов x_i .

Разделив левую и правую части (14) на u , получим оценку относительной погрешности

$$\delta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{u} \right| \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \ln u \right| \cdot |\Delta x_i|. \quad (16)$$

Следовательно, за предельную относительную погрешность функции u можно принять

$$\delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \ln u \right| \cdot \Delta_{xi}. \quad (17)$$



2.7. Погрешности арифметических операций

Если известны знаки погрешностей операндов, то погрешности основных арифметических операций находят по формулам (18)-(21):

$$X + Y = (x + \Delta x) + (y + \Delta y) = (x + y) + (\Delta x + \Delta y), \quad [\text{сложение}] \quad (18)$$

где $\Delta x + \Delta y = \Delta(x + y)$ - погрешность суммы;

$$\Delta x - \Delta y = \Delta(x - y); \quad [\text{вычитание}] \quad (19)$$

$$\Delta(x \cdot y) = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y; \quad [\text{умножение}] \quad (20)$$

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\Delta x}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot \Delta y. \quad [\text{деление}] \quad (21)$$

Если знаки погрешностей операндов неизвестны, то пользуются формулами (22)-(24) для предельных абсолютных погрешностей:

$$\Delta_{x+y} = \Delta_{x-y} = \Delta x + \Delta y, \quad [\text{сложение и вычитание}] \quad (22)$$

где Δ_x и Δ_y предельные абсолютные погрешности аргументов x и y ;

$$\Delta_{x \cdot y} = |y| \cdot \Delta x + |x| \cdot \Delta y. \quad [\text{умножение}] \quad (23)$$

$$\Delta_{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta x}{|y|} + \frac{|x|}{y^2} \cdot \Delta y. \quad [\text{деление}] \quad (24)$$

Если известны знаки погрешностей операндов, то относительные погрешности основных арифметических операций находят по формулам (25)-(28):

$$\frac{\Delta(x+y)}{x+y} = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{\Delta y}{y}; \quad [\text{сложение}] \quad (25)$$

$$\frac{\Delta(x-y)}{x-y} = \frac{x}{x-y} \cdot \frac{\Delta x}{x} - \frac{y}{x-y} \cdot \frac{\Delta y}{y}; \quad [\text{вычитание}] \quad (26)$$

$$\frac{\Delta(x \cdot y)}{x \cdot y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}; \quad [\text{умножение}] \quad (27)$$

$$\frac{\Delta_{\frac{x}{y}}}{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}. \quad [\text{деление}] \quad (28)$$

Если знаки погрешностей операндов неизвестны, то пользуются формулами (29)-(31) для предельных относительных погрешностей:

$$\delta_{x+y} = \left| \frac{x}{x+y} \right| \cdot \delta_x + \left| \frac{y}{x+y} \right| \cdot \delta_y; \quad [\text{сложение}] \quad (29)$$

$$\delta_{x-y} = \left| \frac{x}{x-y} \right| \cdot \delta_x + \left| \frac{y}{x-y} \right| \cdot \delta_y; \quad [\text{вычитание}] \quad (30)$$

$$\delta_{x \cdot y} = \delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x + \delta_y. \quad [\text{умножение и деление}] \quad (31)$$

2.8. Графы вычислительных процессов

Метод ориентированных графов удобен тем, что позволяет определить вклад любой погрешности, возникшей в процессе вычислений, в общую погрешность.

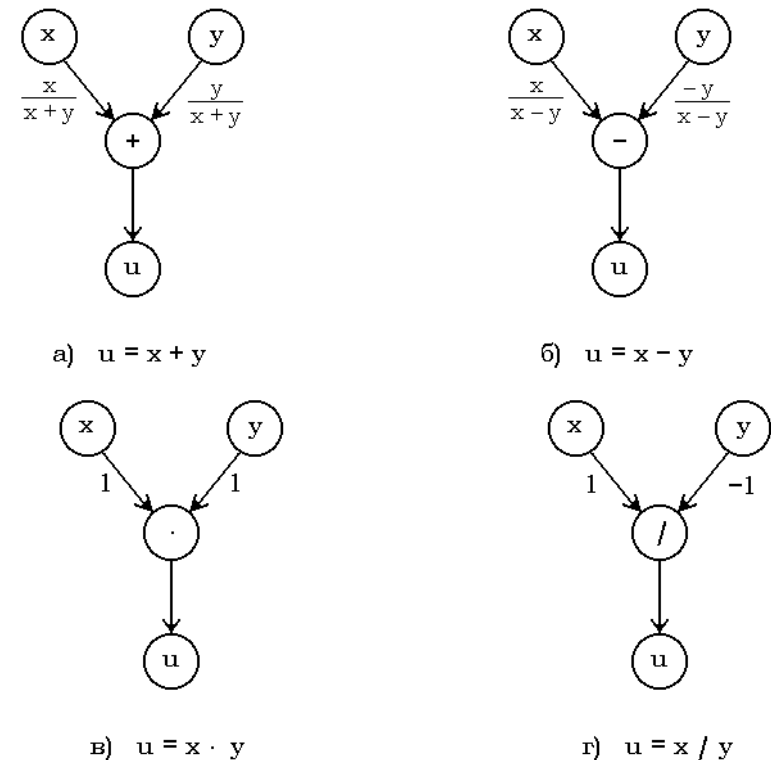
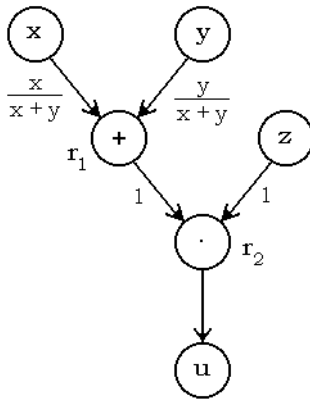


Рисунок 1 – Ориентированные графы операций сложения, вычитания, умножения и деления



Смысл коэффициентов, записанных около стрелок на рисунке 1, следующий: относительные погрешности $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$ переменных x и y входят в виде слагаемых в относительную погрешность операции $\delta_u = \frac{\Delta u}{u}$, умножаясь на коэффициент у стрелки, соединяющей данную переменную с этой операцией.

Пример. Рассмотрим граф вычислительного процесса $u = (x + y) \cdot z$



r_1 - ошибка округления операции сложения;

r_2 - ошибка округления операции умножения

Рисунок 2 - Граф вычислительного процесса $u = (x + y) \cdot z$

Определим погрешность δ_u вычислительного процесса $u = (x + y) \cdot z$

Запишем относительную погрешность операции сложения (с учетом погрешности округления r_1)

$$\delta_{x+y} = \frac{x}{x+y} \cdot \delta_x + \frac{y}{x+y} \cdot \delta_y + r_1, \quad (32)$$

где δ_x и δ_y - относительные погрешности операндов x и y .

Получим относительную погрешность операции умножения (с учетом погрешности округления r_2)

$$\delta_u = \delta_{x+y} \cdot 1 + \delta_z \cdot 1 + r_2, \quad (33)$$

где δ_z - относительная погрешность операнда z .

Если выполняется симметричное округление и ни одна из погрешностей $\delta_x, \delta_y, \delta_z, r_1, r_2$ не превосходит некоторой величины $0,5 \cdot 10^{-k}$ (где k - положительное целое число), то из (32) и (33) следует:

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right| \leq \delta u = \left(\left| \frac{x}{x+y} \right| + \left| \frac{y}{x+y} \right| + 3 \right) \cdot 0,5 \cdot 10^{-k}, \quad (34)$$

При положительных x и y

$$\left| \frac{x}{x+y} \right| + \left| \frac{y}{x+y} \right| \leq 1. \quad (35)$$

Из (34) и (35) следует значение предельной оценки относительной погрешности δu :

$$\delta u = 2 \cdot 10^{-k}.$$

3. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Лабораторная работа выполняется в дисплейном классе кафедры информационных систем. Для ее выполнения требуется операционная система MS-DOS или Windows-98.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4.1. В соответствии с вариантом задания (таблица 1) округлить число A до шести, пяти, четырех и трех значащих цифр и найти ошибки, абсолютные и относительные погрешности такого округления.

Таблица 1 - Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5
А	0,1357917	1,2579012	7,2356494	0,5896473	0,2135681
Вариант	6	7	8	9	10
А	4,2684500	5,2138974	2,1454219	9,3462875	4,2357951
Вариант	11	12	13	14	15
А	4,2135762	3,2796531	42,216899	62,004862	2,1356377
Вариант	16	17	18	19	20
А	7,5530150	442,73251	0,5756824	21,378924	9,5263749
Вариант	21	22	23	24	25
А	4,2135830	1,0205374	2,0054765	8,2014795	1,0786421
Вариант	26	27	28	29	30
А	1,2014687	5,0024689	6,2001387	0,2256791	0,3254687



Варианты заданий (при выполнении п.п. 4.1. – 4.4.) согласовать с преподавателем.

4.2. В соответствии с вариантом задания (таблица 2) определить относительную погрешность δ_x и число верных знаков в числе x , если известна его абсолютная погрешность Δ_x

Таблица 2 - Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5
x	58237545	21,273507	1,2600085	435,20886	22,003569
Δ_x	7800	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	4,8	$8,7 \cdot 10^{-3}$
Вариант	6	7	8	9	10
x	0,2589637	8,2136549	0,8794213	73,227952	4,2356894
Δ_x	$6 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-5}$
Вариант	11	12	13	14	15
x	123,56897	402135,24	32,159847	0,6875324	0,3248759
Δ_x	$8,5 \cdot 10^{-1}$	750	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$9,2 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-3}$
Вариант	16	17	18	19	20
x	9,3685102	0,3265145	5,2581473	0,36987412	5,4679132
Δ_x	$6,4 \cdot 10^{-2}$	$9,3 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$
Вариант	21	22	23	24	25
x	8,9371467	0,2854679	2,223449	55,246791	3,1200568
Δ_x	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$
Вариант	26	27	28	29	30
x	7,0587296	0,3576824	981,25871	2,0507037	3,0456789
Δ_x	$4,9 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^1$	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$

4.3. В соответствии с вариантом задания (таблица 3) определить абсолютную погрешность Δ_y и число верных знаков в числе y , если известна его относительная погрешность δ_y

Таблица 3 - Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5
y	0,2589637	8,2136549	0,8794213	73,227952	4,2356894
δ_y	$6 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-4}$
Вариант	6	7	8	9	10
y	58237545	21,273507	1,2600085	435,20886	22,003569
δ_y	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$

Продолжение таблицы 3

Вариант	11	12	13	14	15
y	8,9371467	0,2854679	2,223449	55,246791	3,1200568
δ_y	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$
Вариант	16	17	18	19	20
y	7,0587296	0,3576824	981,25871	2,0507037	3,0456789
δ_y	$4,9 \cdot 10^{-2}$	$6,7 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$
Вариант	21	22	23	24	25
y	123,56897	402135,24	32,159847	0,6875324	0,3248759
δ_y	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$9,2 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$
Вариант	26	27	28	29	30
y	9,3685102	0,3265145	5,2581473	0,36987412	5,4679132
δ_y	$6,4 \cdot 10^{-2}$	$9,3 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$8,6 \cdot 10^{-2}$

4.4. В соответствии с вариантом задания (таблица 4) определить абсолютную и относительную погрешности вычисления значений функции u , считая все знаки операндов a , b , c и d верными.

Таблица 4- Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5
u	$(a+b) \cdot (c+d)$	$\frac{a+b}{c+d}$	$ab+cd$	$\frac{a+b}{cd}$	$\frac{a}{b} \cdot (c+d)$
a	54,3	0,2567	45,267	5,89762	0,2879
b	0,025	2,005	0,035	2,11	0,56
c	3,7	0,21	3,2785	0,58967	2,5876
d	2,00765	3,289437	0,095	2,8	8,235
Вариант	6	7	8	9	10
u	$(a-b) \cdot (c+d)$	$\frac{a-b}{c+d}$	$ab-cd$	$\frac{a-b}{cd}$	$\frac{a}{b} \cdot (c-d)$
a	85,12	1,007852	1,2486	4,216	0,12862
b	48,4	0,873	1,02348	2,98	0,19
c	0,5072	1,25763	0,4579	0,45	2,1486
d	0,12	0,25	2,14	2,16	1,986



Продолжение таблицы 4

Вариант	11	12	13	14	15
u	$(a+b) \cdot (c-d)$	$\frac{a+b}{c-d}$	$abc+d$	$\frac{ab}{c+d}$	$\frac{a}{c} \cdot (b+d)$
a	85,21	1,14	1,23	4,235	8,24935
b	0,53	3,852198	54,1867	0,89	2,57
c	2,156	2,1867	0,086	2,168	$\frac{2,9762}{4}$
d	2,1	1,97	1,82	0,21	3,21
Вариант	16	17	18	19	20
u	$(a-b) \cdot (c-d)$	$\frac{a-b}{c-d}$	$abc-d$	$\frac{ab}{c-d}$	$\frac{a}{c} \cdot (b-d)$
a	5,25	5,37915	4,219831	2,859	4,8526
b	5,1279354	2,35	0,85	1,25	2,672
c	9,54	2,137	1,089371	5,976	1,82
d	1,897264	1,98643	0,52	3,2	1,6
Вариант	21	22	23	24	25
u	$a \cdot (b+c+d)$	$a \cdot (b-c+d)$	$a \cdot (b+c-d)$	$\frac{ab}{cd}$	$\frac{abc}{d}$
a	71	2,13	9,985	1,193	0,2586
b	0,25	8,952	12,67	0,23	2,254
c	1,006789	6,217624	1,23	5,56	9,86
d	0,038	0,86	13,00957	0,78	0,277
Вариант	26	27	28	29	30
u	$a \cdot (b-c-d)$	$a+b+c+d$	$a+b-c-d$	$\frac{a}{bcd}$	$abcd$
a	5,213	1,22513	12	21	2,1624
b	6,13842	1,07	0,245	2,156	3,185
c	2,114733	6,24387912	3,29	4,24	0,085
d	3,254	42	8,5213	3,1	5,24

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

5.1. Выполните расчеты по п. 4.1., используя правила симметричного округления и расчетные формулы (1), (3), (6). Результаты расчетов представьте в виде (2), (4), (5), (9) и (12).

5.2. Выполните расчеты по п. 4.2. и 4.3. используя расчетные формулы (3), (6). Результаты расчетов представьте в виде (4), (5), (9) и (12).

5.3. Выполните расчеты по п.4.4., используя формулы (15), (17) и (6). Результаты вычислений представьте в виде (4), (5), (9) и (12).

5.4. Составьте граф вычислительного процесса по п.4.4. Запишите выражение для предельной оценки относительной погрешности данного вычислительного процесса с учетом погрешностей округлений. Рассчитайте относительную (δ_u) и абсолютную (Δ_u) погрешности, полагая, что погрешности округления не превышают $0,5 \cdot 10^{-5}$. Результаты вычислений представьте в виде (4), (5), (9) и (12).

6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

6.1. Название и цель работы.

6.2. Постановка задачи (по п.п.4.1 – 4.4.).

6.3. Подробные решения поставленной задачи с основными промежуточными преобразованиями и подстановкой числовых значений.

6.4. Граф вычислительного процесса и выражение для оценки относительной погрешности с учетом погрешностей округления (п.п. 4.4. и 5.4.).

6.5. Выводы по проделанной работе, включая сравнительный анализ погрешностей, полученных по формулам (15), (17) и с помощью графа вычислительного процесса.

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

7.1. Какое число называют приближенным?

7.2. Какие цифры называют значащими? В чем отличие между верной и значащей цифрой?

7.3. Как рассчитывают абсолютную погрешность приближенного числа?

7.4. Как рассчитывают относительную погрешность приближенного числа?

7.5. Объясните в каких случаях не имеет смысла использовать относительную погрешность приближенного числа?

7.6. С какой целью используют относительные погрешности при приближенных вычислениях?

7.7. Назовите основные источники погрешностей в математических задачах.

7.8. Какие составляющие погрешностей связаны с десятичной записью приближенных чисел?

7.9. Сформулируйте правила симметричного округления приближенных чисел. Для чего применяют правило четной цифры?



7.10. Запишите общую формулу для погрешности.

7.11. С какой целью применяют графы вычислительных процессов?

7.12. Почему порядок сложения приближенных чисел влияет на результат вычислительного процесса?

7.13. Предложите наилучший способ вычисления знакопеременной суммы.

7.14. Пусть отыскивается наименьший корень уравнения

$$y^2 - 140y + 1 = 0.$$

Вычисления производятся в десятичной системе счисления, причем в мантиссе числа после округления удерживается 4 разряда. Какая из формул

$$y = 70 - \sqrt{4899} \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{70 + \sqrt{4899}} \quad \text{дает более точный результат?}$$

7.15. Пусть вычисляется сумма

$$S_{1\,000\,000} = \sum_{j=1}^{1\,000\,000} \frac{1}{j^2}.$$

По какому алгоритму

$$S_0 = 0, \quad S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, \dots, 1\,000\,000$$

или

$$\sum_{1\,000\,000} = 0, \quad \sum_{n-1} = \sum_n + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1\,000\,000, \dots, 1$$

следует считать, чтобы суммарная вычислительная погрешность была меньше?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование / Ю.П. Боглаев. – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях. Учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высш. шк., 2000. – 190 с.
3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
4. Доценко С.В. Конспект лекций по дисциплине «Численные методы в информатике» / С.В. Доценко. – Севастополь. Изд-во Сев-НТУ, 2000. – 112 с.
5. Мэтьюз Д. Г. Численные методы. Использование MATLAB / Д.Г. Мэтьюз, К.Д. Финк. – М.: «Вильямс», 2001. – 714 с.



