

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМОВ

к выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Численные методы в информатике»

для студентов специальности 7.080401
дневной и заочной форм обучения

УДК 519.6

Исследование методов вычисления значений полиномов. Методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Численные методы в информатике»/ Сост. Доценко С.В., Кудрявченко И.В. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. –8 с.

Целью методических указаний является обеспечение наглядного изучения методов вычисления значений полиномов, а так же приобретение студентами практических навыков при выполнении действий с приближенными числами.

Методические указания предназначены для студентов специальности 7.080401 дневной и заочной форм обучения

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем
(протокол № 3 от 22 октября 2003 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензент: Чмут В.В., к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы	3
2. Краткие теоретические сведения	3
3. Описание лабораторной установки	5
4. Порядок выполнения экспериментальных исследований	5
5. Порядок выполнения теоретических расчетов	6
6. Содержание отчета о выполнении лабораторной работы	7
7. Контрольные вопросы	7
Библиографический список	8

Севастополь
2004



1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Выполнение лабораторной имеет целью формирование навыков практических расчетов при вычислении значений полиномов. В данной работе необходимо изучить схему Горнера и принцип построения гнездовой процедуры, оценить погрешность вычислений.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Вычисления значений функций обычно сводится к последовательности арифметических действий. Поэтому форма представления математического выражения должна обеспечивать удобство вычислений. Например, учитывая ограниченность памяти компьютера, желательно разбивать арифметические операции на повторяющиеся циклы.

2.1. Вычисление значений полинома

Пусть требуется вычислить значение полинома

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (1)$$

Число умножений по формуле (1) составляет $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, если считать,

что каждая степень числа x получается путем последовательного умножения на x , то есть

$$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_k.$$

Очевидно, что если вычислять значение полинома $P(x)$ по формуле

$$P(x) = (\dots((a_0 \cdot x + a_1) \cdot x + a_2) \cdot x + a_3) \cdot x + \dots + a_n, \quad (2)$$

называемой *гнездовой процедурой*, то число умножений составит n .

Для того, чтобы вывести формулу (2), разделим $P(x)$ на $(x - \xi)$. Получим полином $Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$ и постоянный остаток b_n . Тогда

$$P(x) = (x - \xi) \cdot Q(x) + b_n = (x - \xi)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + b_n. \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$P(\xi) = b_n.$$

Из (1) и (3) запишем:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1 - b_0 \xi, \\ &\dots \\ a_n &= b_n - b_{n-1} \xi \end{aligned} \right\}.$$

Эти же соотношения можно записать в виде рекуррентной формулы:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_j &= a_j + b_{j-1} \xi \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, $P(\xi) = b_n$ определяют путем последовательного вычисления $b_0, b_1, \dots, b_n$ по формулам (4), что эквивалентно расчету $P(x)$ при $x = \xi$ по формуле (2):

$$P(x) = (\dots(((a_0 \cdot x + a_1) \cdot x + a_2) \cdot x + a_3) \cdot x + \dots + a_n).$$

2.2. Схема Горнера

При ручном счете применяют *схему Горнера*:

Рисунок 1 – Схема Горнера

На практике полином может являться частью сходящегося ряда и его коэффициенты уменьшаются при увеличении степеней x , то есть сложение происходит с нарастанием величин слагаемых. Поэтому вычисление по схеме Горнера не только экономит машинное время, но и повышает точность вычислений за счет уменьшения верхнего предела ошибки округления.



$$|\Delta P_\varepsilon| \leq \Delta P_\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-k} \left\{ \sum_{j=0}^n [3(n-j) + 2] \cdot |a_j| - |a_0| \right\}. \quad (5)$$

Формула (5) задает *верхний предел ошибки* при вычислениях по схеме Горнера.

Так как для сходящегося ряда коэффициенты a_j уменьшаются с уменьшением j , то в (5) большие коэффициенты умножаются на меньшие числа.

Пример. Вычислить значение полинома

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7 \quad (6)$$

при $x = 3$ и записать выражение в соответствии со схемой Горнера.

Составим схему Горнера для нашего случая:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & 3 & & 2 & & -5 & & 7 & & & 3 \\
 + & \downarrow & & & & & & & & & \\
 & 3 & & 9 & & 33 & & 84 & & & \\
 \hline
 & 3 & & 11 & & 28 & & 91 & = P(3) & &
 \end{array}
 \end{array}$$

Рисунок 2 – Вычисление полинома (6) по схеме Горнера

$$P(x) = ((3x+2)x-5)x+7$$

$$P(3) = 91.$$

3. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Лабораторная работа выполняется в дисплейном классе кафедры информационных систем. Для ее выполнения требуется операционная система MS-DOS или Windows-98.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4.1. В соответствии с вариантом задания (таблица 1) вычислить значение полинома

$$P(x) = a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 \quad (7)$$

при $x = \xi$. Вычисления проводить по схеме Горнера с точностью $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 1 – Варианты задания

Вариант	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	ξ
1.	-1	2	3	4	5	6	0,32400
2.	2	-3	4	5	6	7	
3.	3	4	-5	6	7	8	
4.	4	-5	6	-7	8	9	
5.	1	2	3	4	-5	6	0,56300
6.	2	3	4	5	6	-7	
7.	-3	4	5	6	7	8	
8.	4	-5	6	7	8	9	
9.	1	2	-3	4	5	6	0,78500
10.	2	3	4	-5	6	7	
11.	3	4	5	6	-7	8	
12.	4	5	6	7	8	-9	
13.	-9	-8	7	6	5	4	0,32400
14.	8	-7	-6	5	4	3	
15.	7	6	-5	-4	3	2	
16.	6	5	4	-3	-2	1	
17.	9	8	7	6	-5	-4	0,56300
18.	-8	7	-6	5	4	3	
19.	7	-6	5	-4	3	2	
20.	6	5	-4	3	-2	1	
21.	9	8	7	-6	5	-4	0,78500
22.	-8	7	6	5	-4	3	
23.	-7	6	5	-4	3	2	
24.	6	-5	4	3	-2	1	
25.	1	3	-5	7	-9	1	0,93200
26.	-2	4	6	-8	1	3	
27.	3	5	7	9	2	4	
28.	4	-6	8	1	3	-5	
29.	-5	7	9	2	-4	6	1,02700
30.	6	8	-1	3	5	-7	

Вариант задания согласовать с преподавателем.

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

5.1. Выполните расчеты по п. 4.1.

5.2. Составьте граф вычислительного процесса по формуле (7). Запишите общее выражение для погрешности и получите ее оценку,



полагая, что значения коэффициентов a_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) известны точно, а при округлениях удерживается шесть десятичных знаков после запятой.

5.3. Составьте граф для вычисления значения полинома (7) по схеме Горнера. Запишите общее выражение для погрешности и получите ее оценку, полагая, что значения коэффициентов a_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) известны точно, а при округлениях удерживается шесть десятичных знаков после запятой.

5.4. Сравните результаты, полученные при выполнении п.п.5.2. и 5.3.

6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

6.1. Название и цель работы.

6.2. Постановка задачи.

6.3. Подробное решение поставленной задачи.

6.4. Графы вычислительных процессов и общие выражения для погрешностей в соответствии с п.п. 5.2 и 5.3.

6.5. Выводы по проделанной работе (сравнительный анализ по п.5.4.).

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

7.1. Какими достоинствами обладает схема Горнера (гнездовая процедура) ?

7.2. Напишите программу вычисления значения полинома по схеме Горнера.

7.3. Почему схема Горнера обладает повышенной точностью вычислений?

7.4. Составьте схему Горнера для полинома

$$P(x) = 0.22 \cdot x^5 - 3.27 \cdot x^4 - 2.74 \cdot x^3 + 2.81 \cdot x^2 - 3.36 \cdot x + 2.$$

7.5. Запишите выражение

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

в соответствии со схемой Горнера.

7.6. Запишите выражение

$$\arctg x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$$

в соответствии со схемой Горнера.

7.7. Запишите выражение

$$\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$$

в соответствии со схемой Горнера.

7.10. Запишите выражение

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{(x/2)^2}{1^2} + \frac{(x/2)^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{(x/2)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{(x/2)^8}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}$$

в соответствии со схемой Горнера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование /Ю.П. Боглаев, – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов /В.М. Вержбицкий, – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Копченова Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах /Н.В. Копченова, И.А. Марон, – М.: Наука, 1972. – 367 с.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы /А.А. Самарский, – М.: Наука, 1987. – 271 с.
5. Доценко С.В. Конспект лекций по дисциплине «Численные методы в информатике» /С.В. Доценко. – Севастополь. Изд-во Сев-НТУ, 2000. – 112 с.
6. Мэтьюз Д. Г. Численные методы. Использование MATLAB /Д.Г. Мэтьюз., К.Д. Финк. – М: «Вильямс», 2001. – 714 с.

