

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА УЛУЧШЕНИЯ СХОДИМОСТИ
ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

к выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Численные методы в информатике»

для студентов специальности 7.080401
дневной и заочной форм обучения

Исследование метода улучшения сходимости числовых рядов.
Методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Численные методы в информатике»/ Сост. Доценко С.В., Кудрявченко И.В. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. –13 с.

Целью методических указаний является обеспечение наглядного изучения метода улучшения сходимости знакопостоянных числовых рядов, а так же приобретение студентами практических навыков при выполнении действий с приближенными числами.

Методические указания предназначены для студентов специальности 7.080401 дневной и заочной форм обучения

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем
(протокол № 3 от 22 октября 2003 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензент: Чмут В.В., к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы	3
2. Краткие теоретические сведения	3
3. Описание лабораторной установки	11
4. Порядок выполнения экспериментальных исследований	11
5. Порядок выполнения теоретических расчетов	12
6. Содержание отчета о выполнении лабораторной работы	12
7. Контрольные вопросы	12
Библиографический список	13

Севастополь
2004



1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Выполнение лабораторной имеет целью формирование навыков практических расчетов при улучшении сходимости числовых рядов. В данной работе необходимо изучить метод Кумера-Стирлинга, критерии останова вычислений и условия сходимости знакопостоянных числовых рядов.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Общие положения

□ Определение. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

называется *сходящимся*, если существует предел последовательности его частичных сумм S_n :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (2)$$

где $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$,
число S - *сумма* ряда,
 a_i - *члены* ряда (1).

□ Критерий Коши (необходимое и достаточное условие сходимости числового ряда)

Последовательность частичных сумм некоторого ряда сходится в том и только в том случае, если для каждого положительного числа ε существует такой номер N , что из $m > N$ и $n > N$ следует

$$|S_n - S_m| < \varepsilon.$$

Из (2) можно записать

$$S = S_n + R_n, \quad (3)$$

где R_n - остаток ряда, причем $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для нахождения суммы S сходящегося ряда (1) с заданной точностью ε необходимо так выбирать n , чтобы $|R_n| < \varepsilon$. Тогда частичная сумма S_n может быть приближенно принята за сумму S ряда (1).

□ Составляющие погрешностей при вычислении суммы ряда

Разделим исходную погрешность ε на три составляющих так, что

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (4)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - положительные числа.

Остаточная погрешность (ε_1). Возьмем число n столь большим, чтобы выполнялось неравенство:

$$|S - S_n| = |R_n| \leq \varepsilon_1. \quad (5)$$

Погрешность суммирования (ε_2). Пусть каждое из слагаемых числового ряда a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) вычисляется с погрешностью, не превышающей $\frac{\varepsilon_2}{n}$

$$|\bar{a}_k - a_k| \leq \frac{\varepsilon_2}{n}, \quad (6)$$

где $\bar{a}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) - приближенные значения членов ряда (1).

Тогда погрешность суммирования не превысит ε_2

$$|S_n - \bar{S}_n| \leq \varepsilon_2, \quad (7)$$

где

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k.$$

Погрешность округления (ε_3). Полученный приближенный результат $\bar{S}_n$ округлим до более простого числа $\tilde{S}_n$ так, чтобы погрешность округления не превышала ε_3

$$|\bar{S}_n - \tilde{S}_n| \leq \varepsilon_3.$$

Полученное число $\tilde{S}_n$ является приближенным значением суммы S ряда (1) с заданной точностью ε

$$|S - \tilde{S}_n| \leq |S - S_n| + |S_n - \bar{S}_n| + |\bar{S}_n - \tilde{S}_n| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon.$$

Обычно число ε разбивают на составляющие следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

2.2. Оценка остатка знакопостоянного числового ряда

Если члены ряда (1) представляют собой соответствующие значения положительной монотонно убывающей функции $f(x)$, то есть $a_n = f(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), то можно применять интегральный признак сходимости (8)



$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx < R_n < \int_n^{\infty} f(x) dx. \quad (8)$$

Поясняет интегральный признак сходимости рисунок 2.

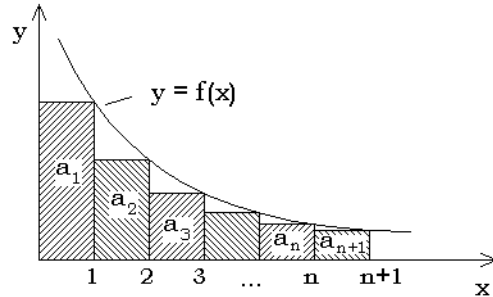


Рисунок 2 – К пояснению интегрального признака сходимости

Пример. Найти сумму ряда

$$S = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots \quad (9)$$

с точностью до 0,001.

Решение

а) Принимаем *остаточную погрешность*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \varepsilon_1 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{4000}.$$

Члены ряда (9) представляют собой соответствующие значения положительной монотонно убывающей функции

$$f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Применяя интегральный признак сходимости, имеем оценку

$$R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

Из неравенства

$$\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{4000}$$

следует, что

$$n \geq \sqrt{2000} \approx 44,72.$$

Принимаем $n = 45$.

б) Предельную *погрешность суммирования* выберем равной

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}.$$

Тогда допустимая предельная абсолютная погрешность одного слагаемого частичной суммы ряда S_{45}

$$\frac{\varepsilon_2}{n} \leq \frac{\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}}{45} = \frac{5}{9} \cdot 10^{-5}.$$

Положим

$$\frac{\varepsilon_2}{n} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5},$$

то есть члены ряда (9) необходимо вычислять с пятью верными десятичными знаками после запятой. В результате суммирования по формуле (9) получим

$$S_{45} = 1,20178.$$

в) Предельную *погрешность округления* суммы выберем равной

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Округляя значение S_{45} до тысячных, получим приближенное значение суммы ряда

$$S \approx 1,202.$$

Так как погрешность округления суммы

$$0,00022 < \varepsilon_3,$$

то суммарная погрешность результата не превышает

$$\varepsilon < \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} < 10^{-3}.$$

Таким образом,

$$S = 1,202 \pm 0,001.$$

2.3 Улучшение сходимости числовых рядов

✓ Определение. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (10)$$

сходится медленно, если необходимо взять весьма большое число членов ряда, чтобы получить его сумму с заданной точностью.



✓ Пример. Пусть необходимо определить сумму ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (11)$$

с точностью до 10^{-6} .

Решение

Члены данного ряда представляют собой соответствующие значения положительной монотонно убывающей функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Поэтому для оценки n -го остатка ряда можно применить интегральный признак сходимости

$$R_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n} \leq 10^{-6}.$$

Следовательно, заданная точность будет обеспечена, если взять сумму не менее одного миллиона членов ряда.

Для улучшения сходимости числового ряда (13) можно применить преобразование Куммера.

✓ Преобразование Куммера. Пусть ряд (1) сходится и его сумма равна A . Подберем вспомогательный сходящийся ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (b_n \neq 0) \quad (12)$$

сумма которого B известна, причем такой, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \neq 0. \quad (13)$$

Тогда можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - q \cdot b_n)$$

или

$$A = q \cdot B + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - q \cdot b_n). \quad (14)$$

Выражение (14) – одна из форм записи преобразования Куммера.

В частности, при $q = 1$

$$A = B + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n). \quad (15)$$

В общем случае вычисление суммы медленно сходящегося ряда (1) заменяется нахождение суммы вспомогательного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - q \cdot b_n). \quad (16)$$

Запишем остаток $\bar{R}_N$ ряда (16)

$$\bar{R}_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - q \cdot b_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - q \cdot \frac{b_n}{a_n}\right) a_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n \cdot a_n,$$

где $\varepsilon_n = 1 - q \cdot \frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в силу условия (13). Поэтому

ряд (16) сходится быстрее исходного ряда (1).

Примечания:

1. В преобразовании Куммера можно использовать ряды Стирлинга

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2) \dots (n+m)} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

суммы которых $S^{(m)}$ известны

$$S^{(m)} = \frac{1}{m \cdot m!}.$$

2. Порядок бесконечно малой $a_n = O\left(\frac{1}{n^m}\right)$, определяется

следующим образом. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^m} = c \neq \infty$, то a_n есть бесконечно

малая порядка не меньше m относительно $\frac{1}{n}$.

Если при этом $c \neq 0$, то a_n – бесконечно малая точно порядка

m относительно $\frac{1}{n}$.

✓ Преобразование Стирлинга – Куммера. Пусть дан знакоположительный ряд (1), члены которого являются рациональными функциями целочисленной переменной n

$$a_n = \frac{\alpha_0 n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \dots + \alpha_p}{\beta_0 n^q + \beta_1 n^{q-1} + \dots + \beta_q} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

где p и q – натуральные числа и $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$.

Будем считать, что имеет место неравенство



$$q \geq p + 2 .$$

Тогда в худшем случае $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и ряд с общим членом

(17) сходится.

Представим общий член (19) в виде конечной суммы

$$a_n = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)} + a_n^{(m)}, \quad (18)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_m$ - неопределенные коэффициенты;

$a_n^{(m)}$ - остаточный член.

Будем подбирать коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_m$ так, чтобы

$$a_n^{(m)} = O\left(\frac{1}{n^{2+m}}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (n+1) \cdot a_n, \\ A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n - \frac{A_1}{n \cdot (n+1)} \right] \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2), \\ \dots \dots \dots, \\ A_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{A_i}{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+i)} \right] \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+m) \end{array} \right. \quad (19)$$

Запишем вспомогательный ряд (14) в следующем виде

$$\begin{aligned} B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_1}{n \cdot (n+1)} + \frac{A_2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+m)} \right] = \\ &= A_1 \cdot S^{(1)} + A_2 \cdot S^{(2)} + \dots + A_m \cdot S^{(m)} = \frac{A_1}{1 \cdot 1!} + \frac{A_2}{2 \cdot 2!} + \dots + \frac{A_m}{m \cdot m!}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (18) и (20) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

и сумму исходного ряда можно определить по формуле

$$S = \sum a_n = B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}, \quad (21)$$

в которой сумму ряда B находим по формуле (20).

✓ Пример. Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ с точностью до 0,001.

Решение.

Представим общий член ряда в виде конечной суммы (18), принимая $m = 2$

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{A_1}{n \cdot (n+1)} + \frac{A_2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} + a_n^{(2)},$$

где

$$A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1)}{n^2 + 1} = 1,$$

$$A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} - \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right] \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{n^2 + 1} = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Тогда} \\ a_n^{(2)} = \frac{1}{n^2 + 1} - \frac{1}{n \cdot (n+1)} - \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n-3}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n^2 + 1)}. \\ \text{На основании формул (20) и (21) получим} \\ S = \frac{1}{1 \cdot 1!} + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n^2 + 1)}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Определим количество членов вспомогательного ряда (22), которые надо учесть, чтобы найти сумму исходного ряда с заданной точностью.

Так как при $n \geq 3$

$$\frac{n-3}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n^2 + 1)} \leq \frac{1}{n^4},$$

то, применяя интегральный признак сходимости, получим

$$\rho_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n-3}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n^2 + 1)} < \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3 \cdot N^3} < \frac{1}{2} \cdot 0,001,$$

где ρ_N - остаточная погрешность.

Следовательно, число слагаемых в сумме (22) можно ограничить $N = 10$.

Допустим, что компьютер работает с числами с фиксированной точкой с шестью разрядами в мантиссе, отбрасывая все цифры после шестого разряда. Тогда



$$S = 1,250\,000 - 0,166\,666 - 0,008\,333 + 0,000\,490 + 0,000\,366 + 0,000\,241 + \\ + 0,000\,159 + 0,000\,107 + 0,000\,073 + 0,000\,052 + \rho_N = 1,076\,489 + \rho_N.$$

Округляя результат до трех знаков после запятой, находим

$$S = 1,076,$$

причем ошибка округления

$$\Delta_{окр} \leq 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Предельная абсолютная погрешность суммы

$$\bar{\Delta} = \Delta_{окр} + \rho_N \leq 0,5 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{3 \cdot 1000} \leq 0,9 \cdot 10^{-3}.$$

Окончательно запишем $S = 1,076 \pm 0,9 \cdot 10^{-3}.$

3. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Лабораторная работа выполняется в дисплейном классе кафедры информационных систем. Для ее выполнения требуется операционная система MS-DOS или Windows-98.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4.1. В соответствии с вариантом задания (таблица 1) вычислить сумму числового ряда, улучшив его сходимость

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ где } a_n = \frac{1}{(\alpha n + \beta) \cdot (\mu n + \nu) \cdot (pn + q)}. \quad (\varepsilon = 10^{-5}). \quad (23)$$

Таблица 1 – Варианты заданий

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
β	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
μ	1	2	2	2	3	4	4	2	3	3
ν	0	1	1	3	1	1	3	1	1	2
p	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
α	1	1	1	2	2	2	3	4	1	1
β	1	1	2	1	1	3	1	1	0	0
μ	4	4	2	4	4	4	3	4	1	1
ν	1	3	1	1	3	1	2	3	0	1
p	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
q	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Продолжение таблицы 1

№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
β	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
μ	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1
ν	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p	2	2	3	2	2	4	4	4	4	4
q	1	3	1	3	3	1	3	5	1	3

Вариант задания согласовать с преподавателем.

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

5.1. Выполните расчеты по п.4.1., применяя преобразование Стирлинга - Куммера. Доведите число слагаемых N в сумме преобразованного ряда до $N \in [10, 20]$.

5.2. Используя интегральный признак сходимости (8), оцените скорость сходимости исходного ряда.

6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

6.1. Название и цель работы.

6.2. Постановка задачи.

6.3. Подробное решение поставленной задачи с основными промежуточными преобразованиями и подстановкой числовых значений.

6.4. Выводы по проделанной работе.

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

7.1. Дайте определение сходящегося числового ряда.

7.2. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости числового ряда.

7.3. Перечислите составляющие погрешностей при нахождении суммы числового ряда.

7.4. Сформулируйте интегральный признак сходимости знакопостоянного числового ряда.

7.5. Какую величину называют бесконечно малой?

7.6. Дайте определение порядка бесконечно малой величины.

7.7. Какова основная идея улучшения сходимости числовых рядов по методу Куммера.

7.8. Приведите пример ряда Стирлинга.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование / Ю.П. Боглаев, – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий, – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский, – М.: Наука, 1987. – 271 с.
4. Доценко С.В. Конспект лекций по дисциплине «Численные методы в информатике» / С.В. Доценко. – Севастополь. Изд-во Сев-НТУ, 2000. – 112 с.
5. Мэтьюз Д. Г. Численные методы. Использование MATLAB / Д.Г. Мэтьюз., К.Д. Финк. – М: «Вильямс», 2001. – 714 с.

