

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

к выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Численные методы в информатике»

для студентов специальности 7.080401
дневной и заочной форм обучения

Исследование методов вычисления значений функций. Методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Численные методы в информатике»/ Сост. Доценко С.В., Кудрявченко И.В. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. –20 с.

Целью методических указаний является обеспечение наглядного изучения методов вычисления значений функций, а так же приобретение студентами практических навыков при выполнении действий с приближенными числами.

Методические указания предназначены для студентов специальности 7.080401 дневной и заочной форм обучения

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем
(протокол № 3 от 22 октября 2004 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензент: Чмут В.В., к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы	3
2. Краткие теоретические сведения	3
3. Описание лабораторной установки	14
4. Порядок выполнения экспериментальных исследований	15
5. Порядок выполнения теоретических расчетов	19
6. Содержание отчета о выполнении лабораторной работы	19
7. Контрольные вопросы	19
Библиографический список	20

Севастополь
2004



1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Выполнение лабораторной имеет целью формирование навыков практических расчетов при вычислении значений функций численными методами. В данной работе необходимо изучить методы, основанные на представлении функций рядами Тейлора и асимптотически рядами.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Вычисление аналитических функций

При программировании задач на языках высокого уровня может оказаться, что во-первых, значения стандартных функций определяются с излишней точностью, приводящей к неоправданным затратам машинного времени и, во-вторых, требуемой функции нет в перечне стандартных функций. Если исходная функция аналитическая, то ее значение можно вычислять, применяя разложение в ряд Тейлора.

Определения

1. Действительная функция $f(x)$ называется *аналитической* в точке ξ , если в некоторой окрестности $|x - \xi| < R$ этой точки функция разлагается в степенной ряд

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - \xi)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x - \xi)^n + \dots, \quad (1)$$

называемый *рядом Тейлора*.

Разложение в ряд Тейлора во многих случаях является удобным способом вычисления значений аналитической функции.

При $\xi = 0$ получаем *ряд Маклорена*

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad (2)$$

2. Разность

$$R_n = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \cdot (x - \xi)^k \quad (3)$$

называется *остаточным членом* и представляет собой ошибку при замене функции $f(x)$ *полиномом Тейлора*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \cdot (x - \xi)^k \quad (4)$$

2.2. Оценка остаточного члена ряда Тейлора

Исследование остаточного члена обычно проводят в следующем порядке

- ✓ Составляют ряд Тейлора для функции $f(x)$;
- ✓ Определяют интервал сходимости ряда;
- ✓ Стараются доказать стремление остаточного члена к нулю при значениях x , принадлежащих интервалу сходимости. Обычно ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ во всей области его сходимости.

Из математического анализа известно представление остаточного члена в *форме Лагранжа*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[\xi + \theta \cdot (x - \xi)]}{(n+1)!} \cdot (x - \xi)^{n+1}, \quad (5)$$

где $0 < \theta < 1$.

Из (5) можно получить остаточный член для ряда Маклорена (2), принимая $\xi = 0$,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

Если известно значение $f(\xi)$ и требуется найти $f(\xi + h)$, где h - «малая поправка», то формулу (1) удобно записать в виде

$$f(\xi + h) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot h + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot h^n + R_n(h), \quad (6)$$

где

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi + \theta \cdot h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \text{ - остаточный член.}$$

Примечание. - Если функция $f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке бесконечное количество раз, то ряды (1), (2) и (7) имеют бесконечное количество членов.

Пример. Найти приближенное значение $\sqrt{10}$, применяя разложение в ряд Тейлора.

Решение

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Запишем исходную аналитическую функцию в виде

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда



$$f'(x) = \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2k-3)!}{2^k} \cdot (1+x)^{-k+\frac{1}{2}}.$$

Принимая $x \equiv \xi = 0$, $h = \frac{1}{9}$, учтем, что

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2k-3)!}{2^k},$$

то есть

$$f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}, f^{IV}(0) = -\frac{15}{16}.$$

Из формулы (6) находим

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{81} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{729} + R_3 =$$

$$= 1 + 0,055\,555 - 0,001\,543 + 0,000\,085 + R_3 + 1,054\,097 + R_3,$$

где

$$R_3 = \frac{f^{IV}(\xi + \theta \cdot h)}{4!} \cdot h^4 = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(1 + \frac{\theta}{9}\right)^{-\frac{7}{2}} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{9^4} = -\frac{5 \left(1 + \frac{\theta}{9}\right)^{-\frac{7}{2}}}{128 \cdot 6561}.$$

Очевидно, что

$$|R_3| \leq 6 \cdot 10^{-6}.$$

Тогда

$$\sqrt{10} = 3 \cdot (1,054\,097 + R_3) = 3,16229 + E,$$

где

$$|E| \leq 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 3,3 \cdot 10^{-5}.$$

Результат округляем до четырех знаков после запятой

$$\sqrt{10} = 3,1623 \pm 5 \cdot 10^{-5}.$$

Для сравнения приведем табличное значение

$$\sqrt{10} = 3,162\,277\,660\,168.$$

2.3. Разложение синуса в степенной ряд

Математическое определение синуса через его разложение в степенной ряд (ряд Тейлора) пригодно для любых значений аргумента при условии, что вычисления производятся с бесконечным количеством значащих цифр. На практике такой подход невозможен. Поэтому для вычисления синуса по его разложению в степенной ряд необходимо по возможности уменьшить диапазон значений аргумента, для которых требуется это вычисление. Так как синус – функция периодическая и нечетная, то достаточно вычислять синус аргумента, расположенного между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Разложим $\sin x$ в ряд Тейлора (Маклорена)

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (7)$$

Выражение (7) справедливо для *любого* аргумента x
 $-\infty < x < \infty$,

если все его члены вычислены с бесконечной точностью.

Обычно рядом (7) при вычислениях $\sin x$ пользуются при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Если $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то пользуются рядом

$$\sin x = \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}, \quad (8)$$

где $y = \frac{\pi}{2} - x$ или $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

В формулах (7) и (8)

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} = 0,785\,398, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} = 0,785\,398,$$

то есть $|x| < 1$ и $|y| < 1$.

Следовательно, ряды (7) и (8) являются быстроходящимися.

Сумму ряда (8) обычно вычисляют по формуле



$$\sin x = a_1 + a_2 + \dots + a_n + R_n, \quad (9)$$

где слагаемые a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) последовательно находятся с помощью рекуррентного соотношения

$$a_1 = x, \quad a_{k+1} = -\frac{x^2}{2k \cdot (2k+1)} \cdot a_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (10)$$

Так как ряд (9) знакопередающийся с монотонно убывающими по модулю членами, то для остаточного члена R_n справедлива оценка

$$\left. \begin{aligned} |R_n| &\leq \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| = |a_{n+1}| \\ \text{и} \quad \text{sgn } R_n &= \text{sgn } a_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из (11) следует, что процесс суммирования можно прекратить, как только будет обнаружено, что $|a_n| \leq \varepsilon$, где ε - заданная погрешность.

По аналогии с (9) – (11)

$$\cos y = b_1 + b_2 + \dots + b_n + R_n, \quad (12)$$

где

$$b_1 = 1, \quad b_{k+1} = -\frac{y^2}{(2k-1) \cdot 2k} \cdot b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} |R_n| &\leq \frac{y^{2n}}{2n!} = |b_{n+1}| \\ \text{sgn } R_n &= \text{sgn } b_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Проанализируем максимальную абсолютную погрешность ограничения ряда (9), состоящего из n членов

$$\varepsilon_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что погрешность $\varepsilon_n = 0$ при $x = 0$ и растет с ростом x . Значения погрешности ограничения при $x_{\max} = \frac{\pi}{4}$ приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Погрешность ограничения при $x_{\max} = \frac{\pi}{4}$

n	1	2	3	4	5
ε_n	$8,07 \cdot 10^{-2}$	$2,49 \cdot 10^{-3}$	$3,66 \cdot 10^{-5}$	$3,13 \cdot 10^{-7}$	$1,76 \cdot 10^{-9}$

Из таблицы 1 видно, что погрешность ограничения резко убывает с ростом числа учитываемых членов ряда. Из (11) следует, что при $x < x_{\max}$ погрешность становится еще меньше.

Проанализируем погрешность определения синуса с помощью ряда (9) при больших значениях аргумента, например при $x = 6 \cdot \sqrt{2}$ (т.е. $x > \frac{\pi}{2}$).

Выразим модуль отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\mu_k = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{x^2}{2k(2k+1)}. \quad (16)$$

Таблица 2 – Зависимость μ_k при $x = 6 \cdot \sqrt{2} = 8,485\,281$

k	1	2	3	4	5	6	7
μ_k	12	3.6	1.714 28	1	0,654 545	0,461 538	0,342 857

Так как при $k \leq 3$ значения $\mu_k > 1$, то абсолютные величины $|a_2|$, $|a_3|$ первых членов ряда (9) растут с ростом k . При $k = 4$ $|a_4| = |a_5|$ и только при $k \geq 5$ величины $|a_k|$ начинают убывать.

Предположим, что ЭВМ имеет 6 десятичных разрядов. Тогда $\sin(6\sqrt{2}) = 8,485\,28 - 101,823 + 366,564 - 628,394 + 628,394 - 411,308 + 189,834 - 65,0859 + 17,2286 - \dots$

Таблица 3 - Значения максимальной погрешности ряда (7), определяемой по формуле (15)

n	1	2	3	4	5
ε_n	101,823	366,564	628,395	628,395	411,308
n	6	7	8	9	10
ε_n	189,837	65,0860	17,2286	3,627 08	0,621 789
n	11	12	13	14	15
ε_n	0,088 475	0,010 617	0,001 088	0,000 096	0,000 007



Видно, что первые 7 членов ряда (17) имеют ошибки округления порядка $1 \cdot 10^{-3}$. Так как знаки чередуются, то в наихудшем случае общая ошибка округления составит $\sim 4 \cdot 10^{-3}$. Поэтому не имеет смысла учитывать члены ряда, начиная с $n = 13$.

В рассмотренном примере сумма из 15 членов ряда составляет $\sin(6 \cdot \sqrt{2}) = 0,811\,559$, а табличное значение $\sin(6 \cdot \sqrt{2}) = 0,807\,261$. То есть погрешность равна 0,53%.

2.5. Асимптотическое представление функций

Если исходная функция *непериодическая* и требуется найти ее значения при больших значениях аргумента, то применяют *асимптотическое* представление функций.

Бесконечный ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \quad (17)$$

дает асимптотическое представление функции $f(z)$, определенной на полупрямой ℓ , если при $z \rightarrow \infty$ выполняется условие

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - S_n(z)] \cdot z^n = 0, \quad (18)$$

где

$$S_n(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \quad (19)$$

- сумма первых $n + 1$ членов ряда (1), причем число n считается фиксированным, хотя и может быть выбрано произвольно.

Условие (2) равносильно тому, что разность $f(z) - S_n(z)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем z^{-n} , то есть чем последний член суммы (3).

Тот факт, что ряд (17) является *асимптотическим рядом* для функции $f(z)$ при больших значениях $|z|$ выражают с помощью формулы

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots$$

Примечание. – Обычно асимптотические ряды являются *расходящимися*. Но если взять соответствующее (конечное) число членов асимптотического ряда, то можно получить сколь угодно точное значение представляемой им функции при достаточно большом $|z|$.

Из (2) и (3) следует

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[f(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) \right] \cdot z^n = 0. \quad (20)$$

Определим коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$

В формуле (20) последовательно будем принимать $n = 0, 1, 2, \dots$.

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - a_0] &= 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \left[f(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} \right) \right] \cdot z &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\dots \dots \dots \lim_{z \rightarrow \infty} \left[f(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) \right] \cdot z^n = 0.$$

Из (21) следует

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{z \rightarrow \infty} f(z), \\ a_1 &= \lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - a_0] \cdot z, \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[f(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} \right) \right] \cdot z^n. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как коэффициенты асимптотического ряда определяются по формуле (22) единственным образом, то и *асимптотическое разложение данной функции является единственным* (при условии, что оно существует).

Иначе асимптотическое разложение функции $f(z)$ можно представить в виде формулы

$$f(z) \sim \varphi(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (|z| \rightarrow \infty). \quad (23)$$



Формулу (23) понимают в том смысле, что установлены равенства

$$f(z) \sim \varphi(z) \cdot \left[\sum_{n=0}^N a_n z^{-n} + r_N(z) \right] \\ (N=0, 1, 2, \dots; \quad a_0=1), \quad (24)$$

где $\varphi(z)$ некоторая функция от z (заранее неизвестная)

$$\text{и } z^N \cdot r_N(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty.$$

Например, при $N=0$ формула (24) имеет вид

$$f(z) = \varphi(z) \cdot [1 + r_0(z)].$$

Примечания:

1. Если при $z \rightarrow z_0$ остаток $r_N(z)$ имеет порядок *не больший*, чем некоторая функция $\psi(z)$, т. е., если в окрестности точки z_0 имеет место неравенство

$$|r_N(z)| \leq K \cdot \psi(z),$$

где K - некоторая постоянная, то пишут

$$r_N(z) = O[\psi(z)],$$

где $O[\psi(z)]$ обозначает такую величину, что отношение

$$\frac{O[\psi(z)]}{\psi(z)}$$

остается ограниченным при $z \rightarrow z_0$ и в случае асимптотических разложений полагают $z_0 = \infty$.

2. Полупрямую ℓ , на которой определена функция $f(z)$, может быть положительная часть вещественной оси, то есть все приведенные формулы справедливы для функций вещественного переменного.

Если $f(z)$ - функция комплексного переменного, то она должна быть определена в секторе

$$\alpha \leq \arg z \leq \beta$$

при условии, что $|z| \rightarrow \infty$ по всем направлениям, входящим в этот сектор.

Свойства асимптотических разложений

1. Асимптотическое разложение произведения двух функций получается формальным перемножением их асимптотических разложений.
2. Асимптотическое разложение, начинающееся с члена, содержащего z^{-2} , можно формально почленно проинтегрировать в пределах от z до ∞ .
3. Нельзя формально почленно дифференцировать асимптотическое разложение.
4. Асимптотическое разложение без свободного члена можно формально потенцировать.

Примеры

- ✓ Примером асимптотической формулы вида (23) является *формула Стирлинга*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51810n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right), \quad (25)$$

которая уже при $n=3$ дает погрешность менее трех процентов.

- ✓ Рассмотрим *функции Бесселя* (бесселевы или цилиндрические функции) первого рода $J_n(z)$ целого порядка n

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cdot \sin \theta - n \cdot \theta) d\theta. \quad (26)$$

Они относятся к высшим трансцендентным функциям и широко применяются в теории передачи сигналов по каналам связи и при решении различных задач математической физики. Цилиндрические функции первых порядков представлены на рисунке 1.

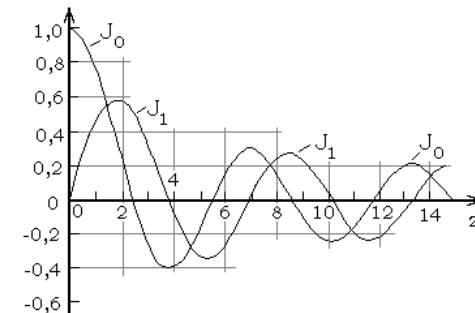


Рисунок 1 – Графики функции Бесселя



Из рисунка 1 видно, что цилиндрические функции *не являются периодическими*.

Примечания:

1. Функция Бесселя порядка n есть решение $w = J_n(z)$ линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) w = 0,$$

где n - действительное число.

2. Для функций Бесселя справедливы рекуррентные соотношения

$$J_{n+1}(z) = 2 \cdot \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z),$$

которые позволяют при известных $J_0(z)$ и $J_1(z)$ вычислить все остальные $J_n(z)$ для данного z при $n \neq 0$ и $n \neq 1$. Поэтому необходимо и достаточно уметь вычислять $J_0(z)$ и $J_1(z)$ с требуемой точностью.

Представление функций Бесселя в виде степенных рядов

Если аргумент z изменяется в диапазоне $-3 \leq z \leq 3$, то хорошие результаты дает разложение интеграла (26) в ряд Тейлора

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot (k+n)!} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (|\arg z| < \pi). \quad (27)$$

Например, используя при определении коэффициентов ряда (27) не более 8 значащих цифр и учитывая по 7 первых членов рядов (27) для $n=0$ и $n=1$, можно получить значения $J_0(z)$ и $J_1(z)$ с точностью не хуже $5 \cdot 10^{-8}$.

При $z \geq 3$ точность вычислений по формуле (27) начинает снижаться и при больших значениях аргумента z следует применять асимптотические разложения.

Асимптотические разложения функций Бесселя

Если $z \geq 3$, то для вычисления $J_n(z)$ применяют следующие формулы

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P_n(z) \cdot \cos \varphi - Q_n(z) \cdot \sin \varphi], \quad (28)$$

где асимптотические ряды $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ определяют по формулам (29)

$$\begin{cases} P_n(z) = 1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)}{4!(8z)^4} - \dots \\ Q_n(z) = \frac{4n^2-1}{8z} - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!(8z)^3} + \dots \end{cases}, \quad (29)$$

и

$$\varphi = z - (n+0,5) \frac{\pi}{2}. \quad (30)$$

Ряды (29) имеет смысл продолжать до тех пор, пока их члены убывают.

Если остановиться на k -м члене в формулах (29) и если для $P_n(z)$ число членов $k > \frac{1}{4}(2n-5)$; для $Q_n(z)$ число членов $k > \frac{1}{4}(2n-7)$, то ошибка будет меньше, чем модуль следующего члена.

Например, используя при определении членов ряда (29) не более 8 значащих цифр при диапазоне изменения аргумента $3 \leq z < \infty$, получают точность вычислений не хуже $|\varepsilon| = 4 \cdot 10^{-8}$ и $|\varepsilon|$ уменьшается с ростом z . При этом число членов ряда (29) не превосходит 7, если $n=0$ и $n=1$.

3. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Лабораторная работа выполняется в дисплейном классе кафедры информационных систем. Для ее выполнения требуется операционная система MS-DOS.



4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4.1. В соответствии с вариантом задания (таблица 4) для указанного значения x определите число членов ряда, необходимых для того, чтобы вычислить значение функции с ошибкой ограничения не более $5 \cdot 10^{-5}$. Определите также число членов ряда, необходимых для вычисления значения функции с ошибкой не более $5 \cdot 10^{-9}$. Ошибками округления пренебречь.

Таблица 4 - Варианты заданий

Вариант	Функция	Ряд Тейлора	x
1	$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	1,0
2	$\arctg x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$	1,2
3	$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$	0,2
4	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$	1,0
5	$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	1,5
6	$\arctg x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$	1,4
7	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$	1,2
8	$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$	0,4
9	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$	1,5
10	$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	2,0

Продолжение таблицы 4

Вариант	Функция	Ряд Тейлора	x
11	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$	1,8
12	$\arctg x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$	1,6
13	$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$	0,6
14	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$	2,1
15	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$	2,5
16	$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	2,5
17	$\arctg x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$	1,8
18	$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$	0,8
19	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$	2,8
20	$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$	1,1
21	$\arctg x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$	2,0
22	$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	3,0
23	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$	3,1

Продолжение таблицы 4

Вариант	Функция	Ряд Тейлора	x
24	$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots,$	1,4
25	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots,$	3,5
26	$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots,$	1,6
27	$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$	3,5
28	e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots,$	3,8
29	$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots,$	1,8
30	$\arctg x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots,$	2,5

Вариант задания согласовать с преподавателем.

4.2. Пользуясь разложением в ряд Тейлора, составить с точностью ε таблицы значений следующих функций (таблица 5).

Таблица 5 - Варианты заданий

Вариант	Функция	x	ε
1	e^x	$0,300 + 0,002k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
2	e^x	$2,500 + 0,002k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-4}
3	e^x	$0,800 + 0,002k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
4	e^x	$2,000 + 0,002k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-4}
5	e^{-x}	$1,35 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
6	e^{-x}	$0,505 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
7	e^{-x}	$0,605 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
8	e^{-x}	$0,805 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
9	e^{-x}	$1,50 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
10	e^{-x}	$1,75 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
11	e^{x^2}	$0,50 + 0,02k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}

Продолжение таблицы 5

Вариант	Функция	x	ε
12	e^{x^2}	$0,80 + 0,02k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
13	e^{-x^2}	$1,30 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
14	e^{-x^2}	$1,45 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
15	e^{-x^2}	$1,60 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
16	e^{x^2}	$1,10 + 0,02k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
17	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$1,78 + 0,03k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-4}
18	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$2,25 + 0,03k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-4}
19	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$2,545 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
20	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$2,845 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
21	$\sin x$	$0,345 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
22	$\sin x$	$0,845 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
23	$\sin x$	$1,75 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
24	$\cos x$	$0,745 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
25	$\cos x$	$1,75 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
26	$\cos x$	$0,845 + 0,005k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
27	$\frac{\sin x}{x}$	$0,4 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
28	$\frac{\sin x}{x}$	$0,6 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
29	$\frac{\cos x}{x}$	$0,25 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}
30	$\frac{\cos x}{x}$	$0,25 + 0,01k$ ($k = 0, 1, \dots, 15$)	10^{-5}

4.3. Используя асимптотическую формулу Стирлинга (25), рассчитать значения $n!$ при $n = 10, 20$.



4.4. Используя формулы асимптотического разложения (28) - (30), рассчитайте значения функции Бесселя нулевого и первого порядков ($n = 0$ и $n = 1$) при значениях аргумента $z = 3,0 + 0,1k$ и $z = 10,0 + 0,1k$, где $k = 1, \dots, 30$ соответствует номеру варианта задания.

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

5.1. Выполните расчеты по п.п. 4.1. и 4.2.

5.2. Выполните расчеты по п.п. 4.3. Сравните результаты, полученные по формуле (25) со значением $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Рассчитайте относительные погрешности, которые формула Стирлинга дает для различных n .

5.3. Выполните расчеты по п.п. 4.4. Сравните полученные результаты с соответствующими значениями функций Бесселя первого рода, которые возвращает процедура `besselj(n,z)` системы Matlab ($n = 0$ или $n = 1$, z – значение аргумента). Дайте оценку погрешности расчетов по асимптотическим формулам (28) - (30).

Примечание. - Числовые результаты в системе Matlab рекомендуется представлять в формате `format long`.

6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

6.1. Название и цель работы.

6.2. Постановка задачи.

6.3. Подробные решения по п.п. 5.1. – 5.3. с основными промежуточными преобразованиями и подстановкой числовых значений.

6.4. Выводы по проделанной работе.

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

7.1. Какие функции называются аналитическими?

7.2. Запишите общее выражение ряда Тейлора.

7.3. Выведите выражение (7) для вычисления синуса.

7.4. Выведите выражение на основе ряда Тейлора для вычисления косинуса.

7.5. Какими недостатками обладают приближенные формулы, полученные на основе разложения непериодических функций в ряд Тейлора?

7.6. В каких случаях целесообразно применение асимптотических разложений функций?

7.7. Перечислите основные свойства асимптотических разложений функций.

7.8. Как можно оценить погрешность ограничения для знакопеременного ряда?

7.9. Запишите общее выражение для оценки остаточного члена ряда Тейлора.

7.10. Запишите общую формулу асимптотического разложения функции.

7.11. Приведите пример асимптотического разложения функции.

7.12. Что можно сказать о сходимости асимптотических разложений?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование / Ю.П. Боглаев, – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий, – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон, – М.: Наука, 1970. – 659 с.
4. Копченова Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А. Марон, – М.: Наука, 1972. – 367 с.
5. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский, – М.: Наука, 1987. – 271 с.
6. Доценко С.В. Конспект лекций по дисциплине «Численные методы в информатике» / С.В. Доценко. – Севастополь. Изд-во Сев-НТУ, 2000. – 112 с.
7. Мэтьюз Д. Г. Численные методы. Использование MATLAB / Д.Г. Мэтьюз., К.Д. Финк. – М.: «Вильямс», 2001. – 714 с.

