

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ
СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

к выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Численные методы в информатике»

для студентов специальности 7.080401
дневной и заочной форм обучения

Исследование прямых методов решения систем линейных уравнений. Методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Численные методы в информатике»/ Сост. Доценко С.В., Кудрявченко И.В. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. – 22 с.

Целью методических указаний является обеспечение наглядного изучения прямых методов решений систем линейных уравнений, а также приобретение студентами практических навыков при выполнении действий с приближенными числами.

Методические указания предназначены для студентов специальности 7.080401 дневной и заочной форм обучения

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем
(протокол № 3 от 22 октября 2003 г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензент: Чмут В.В., к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы	3
2. Краткие теоретические сведения	3
3. Описание лабораторной установки	20
4. Порядок выполнения экспериментальных исследований	20
5. Порядок выполнения теоретических расчетов	21
6. Содержание отчета о выполнении лабораторной работы	21
7. Контрольные вопросы	21
Библиографический список	22

Севастополь
2004



1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Выполнение лабораторной работы имеет целью формирование навыков практических расчетов при решении систем линейных уравнений. В данной работе необходимо изучить метод определителей и различные модификации метода исключения Гаусса.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений

Численные методы решения систем линейных уравнений подразделяются на две основные группы:

- *прямые (конечные);*
- *итерационные (бесконечные).*

Прямые методы позволяют в принципе, с точностью до ошибок округления, дать точное решение системы (если оно существует).

Итерационные методы теоретически могут приводить к точным результатам при условии, что число итераций бесконечно велико. На практике это условие не выполняется и поэтому в итерационных методах присутствуют ошибки ограничения. Кроме того, эффективность итерационных методов зависит от скорости сходимости процесса и от выбора начального приближения.

Достоинством итерационных методов является то, что в них не накапливаются ошибки округления. Поэтому итерационные методы могут приводить к более точным результатам, чем прямые методы. Особенно это относится к решению *плохо обусловленных* систем.

Определения

1. *Линейным уравнением* называется уравнение, каждый член которого содержит только одно неизвестное, и каждое неизвестное входит в уравнение только в первой степени.
2. Во многих прикладных задачах приходится решать *линейные системы уравнений*, содержащие n линейных уравнений с n неизвестными. При этом каждому уравнению системы можно поставить в соответствие его графическое изображение: уравнению с двумя неизвестными соответствует прямая линия; с тремя – плоскость в трехмерном пространстве; с четырьмя и более неизвестными – гиперплоскость в n -мерном пространстве.
3. *Решение системы* уравнений представляет собой набор значений неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы.

Существует три основных варианта решения системы уравнений:

- решение существует и является единственным;
- система уравнений не имеет решения;
- система уравнений имеет бесчисленное множество решений.

Если система уравнений не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений, то такая система называется *вырожденной*. Определитель вырожденной системы равен нулю.

4. В практике приближенных вычислений встречаются *плохо обусловленные (почти вырожденные)* системы, при решении которых могут получаться недостоверные значения неизвестных. Система уравнений

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

является *плохо обусловленной*, когда матрица A плохо обусловлена и ее определитель близок к нулю. Следствием плохой обусловленности является то, что может произойти замена истинного решения ошибочным значением.

5. Матрица A называется плохо обусловленной или «почти вырожденной», если существует такая матрица B , что при *небольших возмущениях* коэффициентов матриц A или B произойдут большие изменения в

$$X = A^{-1} B.$$

Примеры

- ✓ Пусть дана система уравнений

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4, \\ x - y = -1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Система (1) имеет *единственное решение*: $x = 1$ и $y = 2$.

Геометрическая интерпретация решения системы (1) дана на рисунке 1.

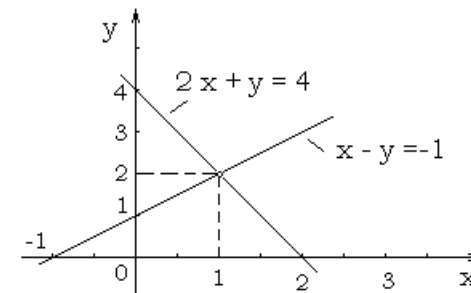


Рисунок 1 – Геометрическое представление системы (1)



Из рисунка 1 следует, что решением системы (1) являются координаты точки пересечения двух прямых линий, соответствующих уравнениям (1).

✓ Пусть дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} 4x + 6y &= 10, \\ 2x + 3y &= 6. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Система (2) не имеет решения.

Геометрическая интерпретация системы (2) дана на рисунке 2.

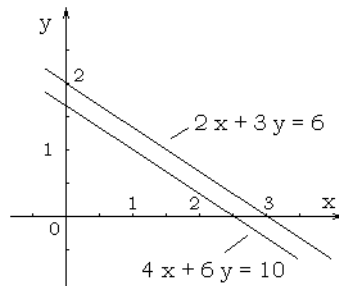


Рисунок 2 - Геометрическое представление системы (2)

Из рисунка 2 видно, что прямые линии, соответствующие системе (2), параллельны и нигде не пересекаются. Поэтому система (2) не имеет решения.

✓ Пусть дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} 4x + 6y &= 12, \\ 2x + 3y &= 6. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Система (3) имеет бесчисленное множество решений.

Геометрическая интерпретация системы (3) дана на рисунке 3.

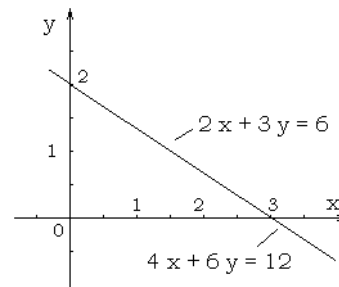


Рисунок 3 - Геометрическое представление системы (3)

Из рисунка 3 видно, что оба уравнения системы (3) описывают одну и ту же прямую линию. Поэтому любая точка, лежащая на этой линии, является решением системы (3).

Системы уравнений (2) и (3) являются *вырожденными*, так как левые части первого и второго уравнений каждой из систем являются линейными комбинациями одного и того же уравнения. Известно, что определители таких систем равны нулю.

Примечание. - Непосредственная оценка вырожденности системы связана с необходимостью вычислять определитель системы. Однако задача вычисления определителя сравнима по сложности с задачей решения самой системы уравнений. Поэтому в некоторых алгоритмах вырожденность системы проверяется в процессе ее решения автоматически.

Решение плохо обусловленных систем уравнений

Примеры

✓ Рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - 2,00 &= 0 \\ 2x + 3y - 3,40 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Графическое решение уравнений (4) приведено на рисунке 4.

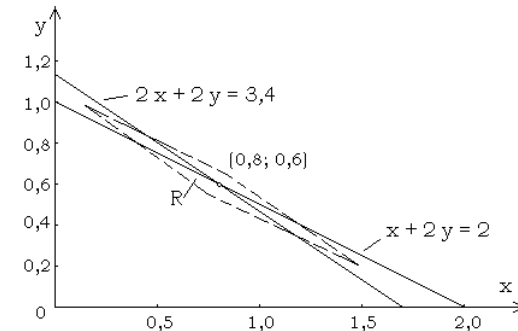


Рисунок 4 – Графическое решение системы (4)

Как следует из рисунка 4, истинное решение системы (4) равно

$$x = 0,8 \quad \text{и} \quad y = 0,6.$$

Выделенная ромбовидная область R представляет множество, точки которого «почти удовлетворяют» уравнениям (4):

$$R = \{ (x; y) : |x + 2y - 2,00| < 0,1 \quad \text{и} \quad |2x + 3y - 3,40| < 0,2 \}.$$



В области R имеются точки, расположенные достаточно далеко от истинного решения. Тем не менее, подстановка в (4) соответствующих координат «почти приводит к нулям».

Например, для $x_0 = 1,00$ и $y_0 = 0,48$

$$1 + 2 \cdot (0,48) - 2,00 = 1,96 - 2,00 = -0,04 \approx 0$$

$$2 + 3 \cdot (0,48) - 3,40 = 3,44 - 3,40 = 0,04 \approx 0.$$

То есть расхождение правых и левых частей системы (4) равно всего лишь $\pm 0,04$. Однако, ошибки приближенного решения составляют

$$x - x_0 = 0,80 - 1,00 = -0,20 \quad \text{и} \quad y - y_0 = 0,60 - 0,48 = 0,12 .$$

Таким образом, *простая подстановка числовых значений в систему уравнений не является надежным критерием точности.*

- ✓ Плохая обусловленность приводит к более серьезным последствиям, когда требуется решить систему из трех и более уравнений.

Пусть требуется вычислить коэффициенты кубического полинома

$$y = b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 \quad ,$$

который проходит через четыре точки: $(2; 8), (3; 27), (4; 64), (5; 125)$ (очевидно, что $y = x^3$ - требуемый кубический полином).

Для определения коэффициентов b_1, b_2, b_3, b_4 можно применить метод наименьших квадратов. При этом требуется решить систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} 20\,514 & 4\,424 & 978 & 224 \\ 4\,424 & 978 & 224 & 54 \\ 978 & 224 & 54 & 14 \\ 224 & 54 & 14 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\,514 \\ 4424 \\ 978 \\ 224 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Если при решении системы (5) проводить расчеты с 9 -ю значащими цифрами, то в результате получаются значения коэффициентов полинома

$$b_1 = 1,000004, b_2 = -0,000038, b_3 = 0,000126, b_4 = -0,000131.$$

И хотя они близки к истинному решению $b_1 = 1, b_2 = b_3 = b_4 = 0$, все же это решение недостаточно точное (по сравнению с точностью применявшихся вычислительных средств).

Предположим теперь, что коэффициент 20 514 в левом верхнем углу матрицы коэффициентов (5) заменен значением 20 515 и решается возмущенная система. Значения, полученные при той же точности расчетов составляют

$$b_1 = 0,642\,857, b_2 = 3,750\,00, b_3 = -12,392\,8, b_4 = 12,750\,0,$$

и являются ничего не стоящим результатом.

Примечание. - Плохую обусловленность нелегко обнаружить. Если после повторного решения системы со слабо возмущенными коэффициентами выяснится, что ответ существенно отличается от первоначального, значит имеет место плохая обусловленность системы.

2.2. Решение систем с помощью обратной матрицы

Этот метод относится к группе прямых методов.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Отметим, что совокупность чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, обращающих систему (6) в тождество, называется *решением* этой системы, а сами числа x_i - ее *корнями*.

Введем обозначения

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

где A - матрица коэффициентов;

$\vec{b}$ - столбец свободных членов;

$\bar{x}$ - столбец неизвестных (искомый вектор).

Запишем систему (6) в виде матричного уравнения

$$A \vec{x} = \vec{b} \quad . \quad (7)$$

Пусть матрица A - неособенная, т.е. $\det A = \Delta \neq 0$. Тогда существует матрица A^{-1} обратная к A , а система (6) и эквивалентное ей матричное уравнение (7) имеет *единственное* решение, которое



можно получить, если умножить обе части уравнения (7) слева на матрицу A^{-1} .

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}. \quad (8)$$

Формула (8) дает решение уравнения (7).

Применяя (8), получим формулы для определения корней системы (1). Из теории матриц известно, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}, \quad (9)$$

где $\tilde{A} = [A_{ji}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ - матрица, союзная для A ;

A_{ji} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя $\det[a_{ij}]$.

Таким образом, произведена операция *транспонирования* по отношению к A .

Подставляя (9) в (8), получим

$$\vec{x} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A} \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $\Delta_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} b_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

- определители, получающиеся из определителя Δ путем замены его i -го столбца столбцом свободных членов системы (6).

Из равенства (10) получаем *формулы Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (11)$$

Следовательно, если определитель системы (6) не равен нулю, то эта система имеет единственное решение, определяемое матричной формулой (8) или эквивалентными ей скалярными формулами (11).

Пример

Пусть требуется решить систему линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Решение. Найдем главный и дополнительные определители системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{81}{27} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{108}{27} = -4; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{27}{27} = -1; \\ x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1.$$

Особенности метода Крамера при больших n

1. Решение линейной системы (6) с n неизвестными по методу Крамера сводится к вычислению $(n+1)$ -го определителя порядка n .
2. Для вычисления каждого определителя n -го порядка необходимо произвести $\lambda \cdot n!$ умножений, *если определители раскладывать по их минорам*. Коэффициент λ находится в диапазоне



$$1 \leq \lambda < e - 1 \approx 1,718$$

и приближается к $(e - 1)$, когда n становится большим.

Точное значение λ определяется суммой

$$\lambda(n) = \sum_{p=2}^n \frac{1}{(p-1)!}.$$

Следовательно, при таком решении системы необходимо произвести $\lambda \cdot (n+1)!$ умножений и n делений, а также примерно $(n+1)!$ сложений или вычитаний, т.е. всего

$$N = (\lambda + 1) \cdot (n+1)! + n$$

операций. Так как время сложения обычно мало по сравнению со временем умножения или деления, то при больших n необходимое время вычислений по правилу Крамера в основном зависит от количества умножений для определения $\vec{x}$, которое приблизительно будет равно

$$N \approx 2(n+1)!.$$

3. При больших n метод становится неустойчивым (погрешности округления катастрофически нарастают при увеличении n).
4. В современных задачах встречается размерность систем, превышающая $n = 100$ (заметьте, что $100! \approx 10^{158}$). Вместе с тем, уже для $n = 20$ количество умножений составило бы около $1,02 \cdot 10^{20}$. ЭВМ, совершающая 1 млн. операций в секунду, смогла бы выполнить такую работу примерно за 3 000 000 лет.

2.3 Метод исключения (метод Гаусса)

Рассмотрим систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 & (a) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 & (б) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 & (в) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В системе (12) хотя бы один из коэффициентов при x_1 , то есть a_{11} , a_{21} или a_{31} отличен от нуля (иначе система состояла бы из трех уравнений с двумя неизвестными). Поэтому всегда можно расположить уравнения системы (12) таким образом, чтобы коэффициент при x_1 в первом уравнении был отличен от нуля ($a_{11} \neq 0$).

Прямой ход метода Гаусса

- Преобразуем второе уравнение системы (12).

Для этого введем множитель $m_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}$, умножим уравнение

(12а) на m_2 и вычтем его из уравнения (12б):

$$\underbrace{(a_{21} - m_2 a_{11})}_{0} \cdot x_1 + \underbrace{(a_{22} - m_2 a_{12})}_{a_{22}^{(1)}} \cdot x_2 + \underbrace{(a_{23} - m_2 a_{13})}_{a_{23}^{(1)}} \cdot x_3 = \underbrace{b_2 - m_2 b_1}_{b_2^{(1)}}. \quad (13)$$

Перепишем (13), используя новые обозначения коэффициентов

$$a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 = b_2^{(1)}. \quad (14)$$

- Преобразуем третье уравнение системы (12).

Для этого введем множитель $m_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}$, умножим уравнение

(12а) на m_3 и вычтем его из уравнения (12в):

$$\underbrace{(a_{31} - m_3 a_{11})}_{0} \cdot x_1 + \underbrace{(a_{32} - m_3 a_{12})}_{a_{32}^{(1)}} \cdot x_2 + \underbrace{(a_{33} - m_3 a_{13})}_{a_{33}^{(1)}} \cdot x_3 = \underbrace{b_3 - m_3 b_1}_{b_3^{(1)}}. \quad (15)$$

Перепишем (15), используя новые обозначения коэффициентов

$$a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + a_{33}^{(1)} \cdot x_3 = b_3^{(1)}. \quad (16)$$

Видно, что из (14) и (16) исключена переменная x_1 .

- Запишем в исходную систему уравнений вместо (12б) и (12в) уравнения (14) и (16):

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 & (a) \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)} & (б) \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_3^{(1)} & (в) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



Примечания:

1. Система (17) эквивалентна системе (12), а уравнения (17б) и (17в) представляют собой систему из *двух уравнений с двумя неизвестными*. Если из (17б) и (17в) определить значения x_2 и x_3 , а затем подставить их в (17а), то получим значение x_1 .
 2. Если в уравнениях (17б) и (17в) хотя бы один из коэффициентов при x_2 отличен от нуля, то можно расположить уравнения системы (17) так, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$.
 3. Если $a_{22}^{(1)} = 0$ и $a_{32}^{(1)} = 0$, то исходная система вырождена и либо вовсе не имеет решений, либо имеет их бесчисленное множество.
- Исключим x_2 из уравнения (17в).

Для этого введем множитель $m_3^{(1)} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, умножим уравне-

ние (17б) на $m_3^{(1)}$ и вычтем его из уравнения (17в):

$$\underbrace{\left(a_{32}^{(1)} - m_3^{(1)} a_{22}^{(1)}\right)}_0 \cdot x_2 + \underbrace{\left(a_{33}^{(1)} - m_3^{(1)} a_{23}^{(1)}\right)}_{a_{33}^{(2)}} \cdot x_3 = \underbrace{b_3^{(1)} - m_3^{(1)} b_2^{(1)}}_{b_3^{(2)}}. \quad (18)$$

Перепишем (18), используя новые обозначения коэффициентов

$$a_{33}^{(2)} \cdot x_3 = b_3^{(2)}. \quad (19)$$

Если окажется, что $a_{33}^{(2)} = 0$, то система уравнений вырождена.

- Запишем (19) в систему уравнений (17) вместо (17в):

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 & (a) \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 &= b_2^{(1)} & (б) \\ a_{33}^{(2)} \cdot x_3 &= b_3^{(2)} & (в) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Система уравнений (20) называется *треугольной* из-за своего внешнего вида.

Приведение исходной системы (12) к треугольному виду называется *прямым ходом* метода Гаусса.

Обратный ход метода Гаусса

Для решения системы (20) необходимо последовательно выполнить следующие действия:

- из уравнения (20в) определить x_3 ;
- подставить x_3 в (20б) и найти x_2 ;
- подставить x_3 и x_2 в (20а) и определить x_1 .

Этот процесс, называемый *обратным ходом*, выполняется по формулам (21)

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \\ x_2 &= \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} \cdot x_3}{a_{22}^{(1)}} \\ x_1 &= \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3}{a_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Пример

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x + 3y + z &= 9 \\ x - y - z &= -2 \end{aligned} \right\}$$

1. *Прямой ход*

Множители для второго и третьего уравнений соответственно равны $m_2 = 2$ и $m_3 = 1$.

После исключения x из второго и третьего уравнений, определяем множитель $m_3^{(1)}$, исключаящий y из третьего уравнения: $m_3^{(1)} = -2$. Треугольная система уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ y - z &= 1 \\ -4z &= -4 \end{aligned} \right\}$$

2. *Обратный ход*

Из последнего уравнения системы $z = 1$, из второго $y = 2$ из первого $x = 1$.

В рассмотренном примере получено *точное* решение системы с помощью *конечного* числа арифметических операций. Ошибки округления при этом отсутствовали.



Обозначим переменные через $x_1, x_2, \dots, x_n$ и запишем систему уравнений в следующем виде

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n . \end{array} \right\} \quad (22)$$

Введем $n - 1$ множитель

$$m_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = \overline{2, n}$$

и вычтем из каждого i -го уравнения первое, домноженное на m_i . Обозначим

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - m_i a_{1j}, \\ b_i^{(1)} &= b_i - m_i b_1, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

и перепишем преобразованную систему уравнений в виде

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ 0 + a_{32}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ 0 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right\}$$

где учтено, что $a_{i1}^{(1)} = 0$, $i = \overline{2, n}$.

Продолжая таким же образом, мы можем исключить x_2 из последних $n - 2$ уравнений, затем x_3 из последних $n - 3$ уравнений и т.д. На k -м этапе мы исключаем x_k с помощью множителей

$$m_i^{(k-1)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} , \quad i = \overline{k+1, n} ,$$

причем предполагается, что $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}, \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} b_k^{(k-1)}, \quad i = \overline{k+1, n}, \quad j = \overline{k, n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Индекс k принимает последовательные целые значения от 1 до $n-1$ включительно ($k = \overline{1, n-1}$). При $k = n-1$ происходит исключение x_{n-1} из последнего уравнения.

В результате получаем треугольную систему уравнений

[illegible]

Примечание. - Процесс исключения неизвестных не изменяет абсолютной величины определителя системы, хотя знак определителя изменяется на противоположный при каждой перестановке уравнений. Поэтому определитель системы удобно вычислять как произведение диагональных элементов треугольной матрицы (24)

$$\Delta = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \quad , \quad (25)$$

причем знак этого произведения следует изменить на противоположный, если число перестановок было нечетным.

Обратный ход осуществляется в соответствии с формулами

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\
 x_{n-1} &= \frac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1, n}^{(n-2)} \cdot x_n}{a_{n-1, n-1}^{(n-2)}} \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_j &= \frac{b_j^{(j-1)} - a_{j, n}^{(j-1)} \cdot x_n - \dots - a_{j, j+1}^{(j-1)} \cdot x_{j+1}}{a_{jj}^{(j-1)}}
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

для $j = n-2, n-3, \dots, 1$



Для осуществления прямого хода при решении системы (22) нужно выполнить $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, а для обратного хода $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ умножений и делений. Таким образом, для решения системы (22) требуется

$$N = \frac{n \cdot (n^2 + 3n - 1)}{3} \quad (27)$$

умножений и делений. Примерно столько же потребуется сложений.

Вычисление по формуле (27) необходимого числа операций для систем с $n = 20$ дает значение $N = 3060$, что неизмеримо меньше, чем при решении тех же систем по методу Крамера.

2.4. Компактная схема Гаусса (схема Холецкого)

Запишем линейную систему уравнений в матричном виде

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad (28)$$

где $A = [a_{ij}]$ - квадратная матрица порядка n ;

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} a_{1, n+1} \\ \dots \\ a_{n, n+1} \end{bmatrix}$$

векторы – столбцы.

Представим матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы $B = [b_{ij}]$ и верхней треугольной матрицы $C = [c_{ij}]$ с единичной диагональю, то есть

$$A = B \cdot C, \quad (29)$$

$$\text{где } B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

□ Первый этап решения

Определяем элементы b_{ij} и c_{ij} по формулам

$$\left. \begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1} \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \cdot c_{kj} \quad (i \geq j > 1) \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{1j} &= \frac{a_{1j}}{b_{11}} \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \quad (1 < i < j) \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

Примечание. - При выполнении вычислений по формулам (30) и (31) применяют *правило фиксации индексов*: поочередно должны вычисляться столбец $(b_{i1})_{i=1}^n$, затем строка $(c_{1j})_{j=2}^n$ и т.д.

□ Второй этап решения

Искомый вектор $\vec{x}$ вычисляют из цепи уравнений

$$B\vec{y} = \vec{b}, \quad C\vec{x} = \vec{y}. \quad (32)$$

Так как матрицы треугольные, то системы (32) легко решаются

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{a_{1, n+1}}{b_{11}} \\ y_i &= \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{i, n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k \right) \quad (i > 1) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_n &= y_n \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k \quad (i < n) \end{aligned} \right\}. \quad (34)$$

Рассмотренный метод удобен для реализации на ЭВМ, так как операции накопления (30) и (31) можно проводить без записи промежуточных результатов.

Из выражения (29) следует *правило вычисления значения определителя матрицы A* . Так как

$$\det C = 1, \quad \text{а} \quad \det A = \det B \cdot \det C,$$

то

$$\det A = \det B = b_{11} b_{22} \dots b_{n-1, n-1} b_{nn}. \quad (35)$$

2.5. Метод Гаусса – Жордана

Идея метода состоит в том, чтобы *исключить обратный ход* при определении переменных x_{n-1} , x_{n-2} и т.д.

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными (22).



- Первый шаг исключения x_1 совершают как в обычном методе Гаусса. То есть при $a_{11} \neq 0$ умножают первое уравнение системы (22) на множители

$$m_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (36)$$

и вычитают из каждого i -го уравнения. В результате получают систему

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(i)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(i)} x_n = b_2^{(i)} \\ \dots\dots\dots \\ 0 + a_{n2}^{(i)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(i)} x_n = b_n^{(i)}. \end{array} \right\} \quad (37)$$

- На втором шаге исключают x_2 из всех уравнений системы (37) кроме второго (в том числе и из первого уравнения !). Для этого умножают второе уравнение системы (37) на множители

$$m_i^{(1)} = \frac{a_{i2}}{a_{22}^{(1)}} \quad (i = 1, 3, 4, \dots, n), \quad (i \neq 2)$$

и вычитают из каждого i -го уравнения системы (37), где $(i \neq 2)$. В результате получают систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}^{(2)} x_1 + 0 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n = b_1^{(2)} \\ 0 + a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ 0 + 0 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)}. \end{array} \right\}$$

- В конечном итоге система (22) приводится к диагональному виду

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 + 0 + \dots + 0 & = & \beta_1 \\ 0 + \alpha_{22}x_2 + \dots + 0 & = & \beta_2 \\ \hdashline 0 + 0 + \dots + \alpha_{nn}x_n & = & \beta_n \end{array} \right\}. \quad (38)$$

Каждое значение x_i находят из системы (38) путем только одного деления.

3. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Лабораторная работа выполняется в дисплейном классе кафедры информационных систем. Для ее выполнения требуется операционная система Windows-98 и пакет математического моделирования Matlab.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4.1. В соответствии с вариантом задания (таблица 1) решить систему линейных уравнений (39) по методу определителей

$$\text{где } A \vec{x} = \vec{b}, \quad (39)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 + \alpha & -4.5 & -2.0 \\ 3.0 & 2.5 & 4.3 - \alpha \\ -6.0 & 3.5 + \alpha & 2.5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 19.07 - \beta \\ 3.21 + \beta \\ -18.25 \end{pmatrix}.$$

Расчеты вести с 8 знаками после запятой.

Таблица 1 – Варианты задания

Вариант	1	2	3	4	5	6
α	0					
β	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Вариант	7	8	9	10	11	12
α	0.5					
β	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Вариант	13	14	15	16	17	18
α	1.0					
β	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Вариант	19	20	21	22	23	24
α	1.5					
β	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Вариант	25	26	27	28	29	30
α	2.0					
β	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0

Вариант задания согласовать с преподавателем.

4.2. В соответствии с вариантом задания решить систему (39) методом исключения (методом Гаусса). Расчеты вести с 8 знаками после запятой.

4.3. В соответствии с вариантом задания решить систему (39) по методу Холецкого. Расчеты вести с 8 знаками после запятой.



4.4. В соответствии с вариантом задания решить систему (39) по методу Жордана. Расчеты вести с 8 знаками после запятой.

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

- 5.1. Выполните расчеты по п.4.1.
- 5.2. Выполните расчеты по п.4.2.
- 5.3. Выполните расчеты по п.4.3.
- 5.4. Выполните расчеты по п.4.4.
- 5.5. Подсчитайте число арифметических операций и сравните результаты вычислений по п.п.5.1. – 5.4. Оцените погрешность вычислений по каждому методу. В качестве точного можно принять решение, которое выдает система Matlab в числовом формате format long.

6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

- 6.1. Название и цель работы.
- 6.2. Постановка задачи.
- 6.3. Подробные решения системы линейных уравнений (39) с основными промежуточными преобразованиями и подстановкой числовых значений.
- 6.4. Проверка правильности решения каждой из задач.
- 6.5. Выводы по проделанной работе (сравнительный анализ эффективности прямых методов решения линейных уравнений).

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 7.1. Какую систему уравнений называют линейной?
- 7.2. Назовите основные варианты решения систем линейных уравнений?
- 7.3. Какую систему линейных уравнений называют вырожденной?
- 7.4. Какие системы линейных уравнений называются плохо обусловленными?
- 7.5. Как можно обнаружить плохую обусловленность системы линейных уравнений?
- 7.6. В каких случаях при решении систем линейных уравнений целесообразно применять метод Крамера?
- 7.7. В чем состоит основная идея метода исключения Гаусса?
- 7.8. Перечислите основные достоинства и назовите недостатки метода исключения Гаусса.
- 7.9. Перечислите основные шаги, которые необходимо выполнить при реализации метода исключения Гаусса.

- 7.10. Что называют прямым и обратным ходом метода исключения Гаусса?
- 7.11. В чем состоит основная идея метода Гаусса – Жордана?
- 7.12. Перечислите основные шаги, которые необходимо выполнить при реализации метода Гаусса-Жордана?
- 7.13. Перечислите основные преимущества компактной схемы Гаусса.
- 7.14. Как можно рассчитать определитель квадратной матрицы?
- 7.15. С какой целью применяют различные модификации метода исключения Гаусса?
- 7.16. Назовите принципиальные ограничения прямых методов решения систем линейных уравнений.
- 7.17. При выполнении каких условий прямые методы решения систем линейных уравнений позволяют находить точные значения корней?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование / Ю.П. Боглаев, – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий, – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Дьяконов В. Matlab: учебный курс / В.Дьяконов, - СПб.: Питер, 2001. – 560с.
4. Копченова Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А. Марон, – М.: Наука, 1972. – 367 с.
5. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский, – М.: Наука, 1987. – 271 с.
6. Доценко С.В. Конспект лекций по дисциплине «Численные методы в информатике» / С.В. Доценко. – Севастополь. Изд-во СевНТУ, 2000. – 112 с.
7. Мэтьюз Д. Г. Численные методы. Использование MATLAB / Д.Г. Мэтьюз., К.Д. Финк. – М: «Вильямс», 2001. – 714 с.



