

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ:

методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Основы дискретной математики»
для студентов дневного и заочного отделения
специальности 7.080401
«Информационные управляющие системы и технологии»

Севастополь
2004

Теория множеств: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Основы дискретной математики» для студентов дневного и заочного отделения специальности 7.080401 «Информационные управляющие системы и технологии» /Сост. С.В.Доценко, Е.Н.Татарченко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. – 15 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Основы дискретной математики». Целью методических указаний является выработка у студентов практических навыков по решению прикладных задач в области теории множеств.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Основы дискретной математики» для студентов специальности 7.080401 и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № 12 от 7 июня 2004 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Кирюхин В.В., к.ф.-м.н., профессор кафедры КиВТ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - Лейпциг: Тайбнер, М.: Наука, 1981. – 718 с.
3. Горбачев В.А. Основы дискретной математики – М.: Высшая школа, 1986. – 311 с.
4. Кемени Дж, Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. – М.: Изд-во. иностранной литературы, 1963. – 486 с.
5. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики – М.: Энергия, 1972. – 376 с.
6. Кузнецов О.П., Адельсон - Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
7. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
8. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств, - М.: Мир, 1970. – 416 с.
9. Ренин С.В. Основы дискретной математики. - Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1981. – 43 с.
10. Ренин С.В. Сборник задач и упражнений по основам теории систем. - Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1981. - 48 с.

а) $E = A \setminus (B \cup C)$, $H = (A \setminus B) \setminus C$; б) $E = A \cup (B \setminus C)$, $H = (A \cup B) \setminus C$;

в) $E = (A \setminus B) \cup C$, $H = A \cup (C \setminus B)$?

3.68. Существуют ли такие множества A , B и C , что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cup C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

3.69. Доказать, что в общем случае а) $A \times B \neq B \times A$;

б) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

3.70. Доказать, что

а) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = I$,

б) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$, в) $A \cup B = I \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$

3.71. Доказать, что $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$.

3.72. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$$

где A , B и C - заданные множества и $B \subset A \subset C$.

3.73. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы

$$A \Delta B = A \cup B.$$

3.74. Доказать, что $A \subset B$ в том и только в том случае, если $\overline{A} \cup B = I$.

3.75. Доказать, что любое из трех соотношений $A \subset B$, $A \cap B = A$ и $A \cup B = B$ влечет два других (закон согласованности).

3.76. Даны два произвольных множества A и B такие, что $A \cap B = \emptyset$. Что представляют собой множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

3.77. Даны два произвольных множества C и E такие, что $C \cap \overline{E} = \emptyset$. Что можно сказать о $C \cap E$ и $C \cup E$?

3.78. Пусть даны множества A , B и C : $C \subseteq B$. Доказать что:

а) $A \cap C \subseteq A \cap B$, б) $A \cup C \subseteq A \cup B$, в) $A \setminus B \subseteq A \setminus C$, г) $C \setminus A \subseteq B \setminus A$,

д) $\overline{B} \setminus A \subseteq \overline{C} \setminus A$.

3.79. Доказать, что если $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$, то $A \times B \subseteq X \times Y$.

3.80. Определить операцию дополнения через симметрическую разность.

3.81. Определить операцию $\cup$ через операции Δ и $\cap$.

3.82. Определить операцию $\cap$ через операции Δ и $\cup$.

3.83. Определить операцию $\setminus$ через операции Δ и $\cup$.

3.84. Определить операцию $\cap$ через операции $\setminus$ и Δ .

СОДЕРЖАНИЕ

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ	4
2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ	7
3 ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ	8
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	15

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Множеством называется совокупность определенных, вполне различных объектов, рассматриваемых как единое целое.

Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита (с индексами или без них), например: A, B, X, Y, Z_1, Z_2 . Элементы множества обозначаются строчными буквами латинского алфавита (с индексами или без них), например: a, d, c, d_1, d_2 . Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок, например: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Если необходимо указать, что объект a является элементом множества S , то пишут: $a \in S$, если не является, то пишут: $a \notin S$. Число элементов конечного множества A называют его мощностью - $|A|$.

В выражениях $A \subseteq B$ и $A \subset C$ множество A является соответственно подмножеством множества B и собственным подмножеством множества C .

Принятые обозначения:

R - множество действительных (вещественных) чисел;

N - множество натуральных чисел,

Z - множество целых чисел,

Q - множество рациональных чисел,

C - множество комплексных чисел,

I - универсальное множество,

$\emptyset$ - пустое множество.

Операции над множествами:

$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}$ - разность множеств A и B (ее диаграмма Эйлера-Венна дана на рисунке 1.1а)),

$\bar{A} = I \setminus A$ - дополнение множества A (до универсального множества) (диаграмма Эйлера – Венна дана на рисунке 1.1б)),

$A \cup B$ - объединение множеств A и B (операция "или") (диаграмма Эйлера – Венна дана на рисунке 1.1в)),

$A \cap B$ - пересечение множеств A и B (операция "и") (диаграмма Эйлера – Венна дана на рисунке 1.1г)),

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ - симметрическая разность множеств A и B (рисунок 1.1д)).

Если граница некоторого множества принадлежит этому множеству, будем обозначать ее на диаграмме сплошной линией, если нет - пунктиром.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ - упорядоченное множество (кортеж, n -ка), i -я компонента которого есть проекция кортежа $\text{Pr}_i a = a_i$.

$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$ - прямое (декартово) произведение множеств X и Y .

$X \times Y \times \dots \times Z = \{(x, y, \dots, z): x \in X, y \in Y, \dots, z \in Z\}$ - прямое (декартово) произведение n множеств $X, Y, \dots, Z$. Оно состоит из всех тех, и только тех n -кортежей, первая компонента которых принадлежит X , вторая Y и так далее.

Символы: $\rightarrow$ - «если..., то...», $\leftrightarrow$ - «если и только если...».

результаты их пересечения и объединения совпадают.

3.51. Доказать, что для любых множеств A и B свойства $A \cap B = A$ и $A \cup B = B$ равносильны.

3.52. Доказать, что $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

3.53. Возможно ли, одновременное выполнение условий:

а) $A \in B, B \in C, A \notin C$; б) $A \subseteq B, B \subseteq C, A \subseteq C$; в) $A \in B, A \subset B$?

3.54. Для любых ли множеств A, B и C справедливы утверждения:

а) если $A \notin B$ и $B \notin C$, то $A \notin C$; б) если $A \in B$ и $B \subset C$, то $A \notin C$;

в) если $A \neq B$ и $B = C$, то $A \neq C$; г) если $A \in B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$? Приведите примеры.

3.55. Определите, верны ли следующие утверждения:

а) если $\bar{A} \cup B = I$ и $\bar{C} \cup B = I$, то $\bar{C} \cup A = I$; б) если $A \cup B = B$ и $C \cup B = B$, то $A \cup C = A$.

3.56. При каких условиях верны следующие утверждения:

а) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, б) $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$, в) $A \cap B \subset B \subset A \cup B$,

г) $A \cap B \subset B \subset A \cup B$?

3.57. Изобразите четыре диаграммы Эйлера-Венна для двух непустых множеств A и B так, чтобы:

а) $\bar{A} \cap B = \emptyset$, а $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$; б) $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, но $A \cap \bar{B} = \emptyset$;

в) $\bar{A} \cap B = \emptyset$ и $A \cap \bar{B} = \emptyset$; г) $\bar{A} \cap B = B$ и $A \cap \bar{B} \neq A$.

3.58. Изобразите диаграммы Эйлера-Венна двух множеств A и B , для которых одновременно выполнялись бы требования: $A \cup B = B, A \cap B = A, A \cap \bar{B} = \emptyset, \bar{A} \cup B = I$.

3.59. Если $A \cup B = A \cap B$, то каково отношение между A и B ?

3.60. Если $B \subseteq A$, то верно ли, что $A \cap \bar{B} \cup B = A$?

3.61. Если $C \subseteq A$, то верно ли, что $A \cap B \cup C = A \cap (B \cup C)$?

3.62. Если $A \subseteq B$, то будут ли истинными следующие утверждения:

а) $A \cap \bar{C} \subseteq B \cap \bar{C}$, б) $C \cap \bar{B} \subseteq C \cap \bar{A}$?

3.63. Существуют ли такие множества A, B и C , для которых одновременно выполнялись бы требования: $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset, A \cap B \cap \bar{C} = \emptyset$?

3.64. Обоснуйте следующие утверждения:

а) для того, чтобы $A \cap B \subseteq C$, необходимо и достаточно $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;

б) $A \subseteq B \cap C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;

в) для того, чтобы $A \cap B \subseteq C$ необходимо и достаточно, чтобы $A \subseteq \bar{B} \cup C$;

г) $A \subseteq B \cup C$ тогда и только тогда, когда $A \cap B \subseteq \bar{C}$.

3.65. Какие из приведённых высказываний истинны для любых A, B и C :

а) если $A \neq C$ и $B \neq C$, то $A \neq B$; б) если $A \cap B \subseteq \bar{C}$ и $A \cup C \subseteq B$, то $A \cap C = \emptyset$;

б) если $A \subseteq \bar{B} \cup C$ и $B \subseteq A \cup \bar{C}$, то $B = \emptyset$?

3.66. При каких условиях истинны следующие утверждения:

а) если $A \setminus B = C$, то $A = B \cup C$; б) если $A = B \cup C$, то $A \setminus B = C$;

в) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; г) $(A \setminus B) \cup B = A$; д) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$?

3.67. Какие включения справедливы для множеств E и H , если:

3.40. Доказать тождества:

а) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$, б) $A \setminus (A \Delta B) = A \cap B$,

в) $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$, г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

д) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$, е) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

3.41. Доказать, что операция симметрической разности коммутативна и ассоциативна: а) $A \Delta B = B \Delta A$, б) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

3.42. Доказать тождества:

а) $A \Delta A = \emptyset$, б) $A \Delta I = \overline{A}$, в) $A \Delta \emptyset = A$, г) $A \Delta \overline{A} = I$, д) $A \Delta B = \overline{A \Delta B}$.

3.43. Показать, что следующие тождества верны для любых конечных множеств:

а) $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$,

б) $|A \cup B \cup C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| = |A \cap B \cap C| + |A| + |B| + |C|$.

3.44. Доказать, что для произвольных множеств X и Y справедливо соотношение:

$$(\overline{X \cap Y}) = (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y}).$$

3.45. Упростить выражения:

а) $A \cup (A \cap B)$, б) $A \cap (A \cup B)$, в) $(A \setminus B) \cup A$, г) $(A \setminus B) \cap A$,

д) $((\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup D})) \cup E$, е) $B \cup (A \cap B \cap C)$,

ж) $B \cap (\overline{A \cup B \cup C}) \cap D \cap (\overline{D \cup E})$,

з) $C \cap (B \cup C) \cap D$, и) $(A \cap \overline{A}) \cup B \cup (C \cap \overline{C}) \cup D$,

к) $(A \cap B \cap C) \cup C \cup (\overline{A} \cap B \cap D \cap E)$.

3.46. Упростить выражения:

а) $A \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$, б) $A \cap (A \cup B) \cap \overline{B}$,

в) $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap (A \cup B \cup C) \cap D$, г) $A \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

3.47. Упростить выражения:

а) $(\overline{A \cap A}) \cup (B \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{C})$, б) $A \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$,

в) $(A \cap \overline{A}) \cap (B \cup C \cup D \cup E)$, г) $((A \cup \overline{A}) \cap B) \cup ((C \cap \overline{C}) \cup D)$.

3.48. Упростить выражения:

а) $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \setminus ((A \cup (B \setminus C)) \cap A)$,

б) $((A \cap C) \cup (B \cap D)) \setminus ((A \cup B) \cap (C \cup D))$,

в) $(A \setminus C) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus C))$, г) $(A \setminus C) \setminus ((B \setminus C) \setminus (B \setminus A))$,

д) $((A \cup B) \setminus C) \setminus (A \cup (B \setminus C))$, е) $(\overline{A \setminus B}) \cap (\overline{A \cup B})$,

ж) $(A \cup C \cup (A \setminus B) \cup (C \setminus B)) \setminus (A \cup C)$,

з) $(A \cup C \cup (A \setminus B) \cup (C \setminus B)) \setminus (A \cap C)$,

и) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$,

к) $(A \cap B \cap C \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap X)$.

3.49. Считая, что $A \subseteq B$, упростить выражения: а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $A \setminus B$.

3.50. Доказать, что два множества равны тогда и только тогда, когда

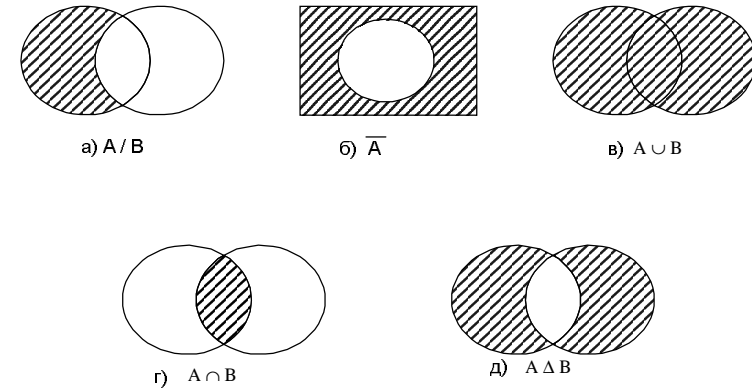


Рисунок 1.1 – Диаграммы Эйлера – Венна для основных операций над множествами: а) разность множеств $A \setminus B$, б) дополнение множества $\overline{A}$, в) объединение множеств $A \cup B$, г) пересечение множеств $A \cap B$, д) симметрическая разность множеств $A \Delta B$.

Основные тождества алгебры множеств:

Коммутативный закон

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A. \quad (1.1)$$

Ассоциативный закон

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C, \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C. \quad (1.2)$$

Дистрибутивный закон

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (1.3)$$

Закон двойного дополнения

$$\overline{\overline{A}} = A. \quad (1.4)$$

Законы идемпотентности

$$A \cup A = A, A \cap A = A. \quad (1.5)$$

Разность множеств

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \quad (1.6)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A, \\ A \cap I = A, A \cup I = I. \quad (1.7)$$

Тождества де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (1.8)$$

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Определить, равны ли множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Множество A не равно множеству B , так как элементами множества A являются числа 1, 2, 3, а элементами множества B - множества $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$.

2.2. Пусть X - множество $\{1, 2\}$, а Y - множество $\{y: y = a + b; a, b \in X\}$. Определить в явном виде множество Y .

Так как $a, b \in X$, то каждый из элементов a и b может принимать значения 1 или 2. Поэтому, учитывая то, что во множестве одинаковых элементов быть не может, имеем $Y = \{1+1, 1+2, 2+2\} = \{2, 3, 4\}$.

2.3. Написать элементы множества $A = \{x \in \mathbf{Z} : -4 < x \leq 2\}$.

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}.$$

2.4. Изобразить графически множество

$$V = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R} : x^2 + y^2 < 9\}.$$

Так как $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{R}$, то множество V имеет вид, изображенный на рисунке 2.1.

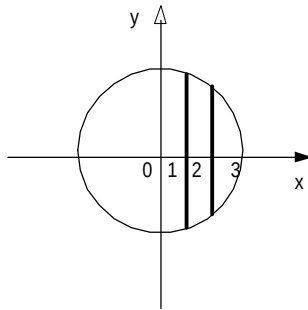


Рисунок 2.1 – Графическая интерпретация множества V

2.5. Пусть $I = \{a, b, c, d, e\}$, $X = \{a, e\}$, $Y = \{a, b, d\}$, $Z = \{b, e\}$. Найти множества: а) $X \cap \bar{Y}$, б) $X \cap \bar{Z} \cup Y$, в) $X \setminus Z$, г) $Z \Delta X$.

а) $X \cap \bar{Y} = \{a, e\} \cap \overline{\{a, b, d\}} = \{a, e\} \cap (I \setminus \{a, b, d\}) = \{a, e\} \cap \{c, e\} = \{e\};$

б) $X \cap \bar{Z} \cup Y = (\{a, e\} \cap \overline{\{b, e\}}) \cup \{a, b, d\} = \{a\} \cup \{a, b, d\} = \{a, c, d\};$

в) $X \setminus Z = \{a, e\} \setminus \{b, e\} = \{a\};$

г) $Z \Delta X = (Z \setminus X) \cup (X \setminus Z) = (\{b, e\} \setminus \{a, e\}) \cup (\{a, e\} \setminus \{b, e\}) = \{b\} \cup \{a\} = \{a, b\}.$

2.6. Доказать, что $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ и проиллюстрировать это

фметическую задачу; в) арифметическую и логическую задачи, но не решили геометрическую; г) только логическую задачу; д) логическую задачу тогда и только тогда, когда решили геометрическую задачу; е) не решили ни одной задачи?

3.32. При обследовании 100 студентов колледжа были найдены следующие данные о числе студентов, изучающих иностранные языки: только немецкий - 18; немецкий, но не испанский - 23; немецкий и французский - 8; немецкий - 26; французский - 48; французский и испанский - 8; никакого языка - 24.

а) Сколько студентов изучают испанский язык? б) Сколько студентов изучают немецкий и испанский языки, но не французский? в) Сколько студентов изучают французский язык в том и только в том случае, если они не изучают испанский?

3.33. В отчете об обследовании 100 студентов колледжа сообщалось, что количество студентов, изучающих различные языки, таково: все три языка - 5; немецкий и испанский - 10; французский и испанский - 8; немецкий и французский - 20; испанский - 30; немецкий - 23; французский - 50. Инспектор, подписавший этот отчет, был уволен. Почему?

3.34. При обследовании читательских вкусов жителей города оказалось, что 60% жителей читает газету А, 50% - газету В, 50% - газету С, 30% - газеты А и В, 20% - газеты В и С, 30% - газеты А и С, 10% жителей города читает все три газеты.

а) Сколько процентов жителей читает в точности две газеты? б) Сколько процентов жителей не читает ни одной из этих газет?

3.35. В трансконтинентальном самолете находятся: 9 мальчиков, 5 американских детей, 9 взрослых мужчин, 7 европейских мальчиков, 14 пассажиров из Америки, 6 американцев мужского пола и 7 пассажиров из Европы. Сколько всего людей в самолете?

3.36. В кровопролитном бою не менее 70% воинов потеряли глаз, не менее 75% - ухо, не менее 80% - руку и не менее 85% - ногу. Оценить снизу число воинов, потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу (Льюис Кэрролл).

3.37. Определите, в каких из следующих пар множеств одно из множеств является, подмножеством другого:

а) $P, P \cap Q$; б) $P \cap \bar{Q}, Q \cap \bar{P}$; в) $P \setminus Q, Q \setminus P$; г) $\bar{P} \cap \bar{Q}, P \cup Q$.

3.38. Доказать тождества:

а) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, б) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,

в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

д) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$, е) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

3.39. Доказать тождества:

а) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$,

б) $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup (A \cap B)$,

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$,

г) $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = A \cup B$,

д) $A \cup B \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = I$,

е) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$, ж) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

$$C = \{x \in \mathbf{N}: -3 < x \leq 2\}, D = \{x \in \mathbf{R}: -3 < x < 2\},$$

$$E = \{x \in \mathbf{R}: -3 \leq x < 2\}, F = \{x \in \mathbf{R}: -3 < x \leq 2\}.$$

3.22. Дать геометрическую интерпретацию множеств:

а) $A \setminus B$, б) $A \cap B$, в) $(A \cap B) \setminus C$, если $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: |x| \leq 4, |y| \leq 4\}$,

$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^2 + y^2 \leq 25\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: y > 0\}$.

3.23. Пусть $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{1, 5\}$, $Y = \{1, 2, 4\}$, $Z = \{2, 5\}$. Найти множества:

а) $X \cap \bar{Y}$, б) $(X \cap Z) \cup \bar{Y}$, в) $X \cup (Y \cap Z)$, г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, д) $\overline{(X \cup Y)}$,

е) $\bar{X} \cap \bar{Y}$, ж) $\overline{(X \cap Y)}$, з) $(X \cup Y) \cup Z$, и) $X \cup (Y \cup Z)$, к) $X \setminus Z$,

л) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

3.24. Пусть $I = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{f, e, c, a\}$, $C = \{d, e, f\}$. Найти множества:

а) $A \setminus C$, б) $B \setminus C$, в) $C \setminus B$, г) $A \setminus B$, д) $\bar{A} \cup B$, е) $B \cap \bar{A}$, ж) $A \cap C$, з) $C \cap \bar{A}$, и) $C \Delta A$.

3.25. Дано произвольное множество X . Найти множества: а) $X \cap \bar{X}$,

б) $X \cup \bar{X}$, в) $X \setminus \bar{X}$.

3.26. Перечислить элементы следующих множеств:

а) $A = \{x \in \mathbf{R}: x^2 - 4 = 0\}$, б) $B = \{x \in \mathbf{R}: x^2 + 4 = 0\}$,

в) $C = \{x \in \mathbf{R}: x^2 - 4x + 3 = 0\}$, г) $D = \{x \in \mathbf{R}: x^2 - 4x + 4 = 0\}$,

д) $E = \{x \in \mathbf{R}: x^2 - 4x + 5 = 0\}$, е) $F = \{x \in \mathbf{N}: x^2 - 4 = 0\}$.

3.27. Пусть $X = \{a, b, c\}$ и $Y = \{a, b, e, f\}$. Найти $X \times Y$ и Y^2 .

3.28. Построить диаграммы Эйлера-Венна для множеств:

а) $(J \cap (K \cup L)) \cup (H \setminus L)$, б) $(P \cup R \cup Q) \setminus (P \cap (Q \setminus R))$, в) $((E \setminus F) \cup (F \setminus E)) \cup G$.

3.29. Анкетирование 100 студентов дало следующие результаты о количестве изучающий различные иностранные языки: английский - 28, немецкий - 30, французский - 42, английский и немецкий - 8, английский и французский - 10, немецкий и французский - 5, все три языка - 3. Ответить на вопросы:

а) сколько студентов не изучает ни одного языка? б) сколько студентов изучает один французский язык? в) сколько студентов изучает один немецкий язык? г) сколько студентов изучает один английский язык? д) сколько студентов изучает немецкий язык в том и только в том случае, если они изучают французский язык?

3.30. Среди 150 школьников марки собирают только мальчики. Марки Европы собирают 67 человек, марки Африки - 48, марки Америки - 34, марки только Европы - 11, только Африки - 7, только Америки - 2. Лишь один школьник собирает марки Европы, Африки и Америки.

Сколько девочек среди этих школьников?

3.31. В олимпиаде участвовало 50 человек. Арифметическую задачу решили 30 человек, геометрическую - 10, логическую - 9. Все три задачи решили 2 человека, арифметическую и логическую - 7, арифметическую и геометрическую - 3, логическую и геометрическую - 4. Сколько человек решили:

а) арифметическую и геометрическую задачи; б) только ари-

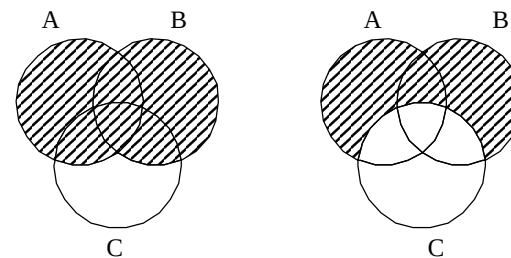
тождество диаграммами Эйлера-Венна.

Преобразуем левую часть этого выражения, последовательно применяя тождества (1.6), (1.3) и (1.6):

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Приходим к правой части исходного выражения. Диаграммы Эйлера-Венна этих этапов преобразований даны на рисунке 2.2.

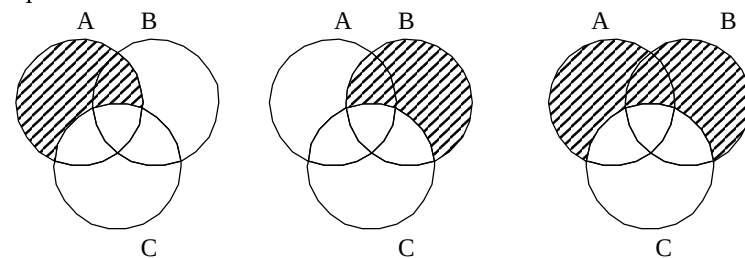
Левая часть:



$A \cup B$

$(A \cup B) \setminus C$

Правая часть:



$A \setminus C$

$B \setminus C$

$(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Рисунок 2.2 - Диаграммы Эйлера-Венна для примера 2.6

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

- 3.1. Перечислить все элементы и все подмножества множества $\{1, 2, \{3, 4\}\}$.
- 3.2. Справедливы ли утверждения:
 а) $\{\emptyset\} = \emptyset$, б) $\{0\} = \emptyset$, в) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$, г) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$ д) $\{3\} \in \{1, 2, 3, 4\}$, е) $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, ж) $3 \in \{1, 2, \{3\}, 4\}$?
- 3.3. Какие из следующих утверждений справедливы:
 а) $0 \in \emptyset$, б) $\emptyset \in \{0\}$, в) $|\{\emptyset\}| = 1$, г) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\{\emptyset\}\}\}$, д) $|\{\{\emptyset\}\}| = 2$,
 е) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$, ж) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, з) $\emptyset \subseteq I$, и) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$?
- 3.4. Если I - вершины некоторого куба, то сколько всего подмножеств содержит это универсальное множество? Сколько из них имеет ровно по два элемента?
- 3.5. Пусть множество A_1 - все квадраты, A_2 - все прямоугольники, A_3 - все параллелограммы, A_4 - все трапеции и A_5 - все четырехугольники. Расположите все эти множества в таком порядке, чтобы каждое следующее множество являлось бы подмножеством предыдущего. Запишите это символически.
- 3.6. Пусть I - множество всех людей, A - множество всех студентов, B - множество студентов университета.
 а) выразите связь между этими множествами символически и диаграммой Эйлера-Венна, б) содержится ли $\bar{B}$ в $\bar{A}$? Выразите это символически, в) если при этом C - все юноши, то какие из следующих утверждений истинны: $A \subset C$, $C \subset B$, $B \subset C$, «неверно, что $C \subset B$ »? г) верно ли, что $C \subset \bar{B}$?
- 3.7. Пусть I - множество всех положительных чисел, A - всех положительных четных чисел, B - всех чисел, кратных трем, C - всех чисел, кратных, пяти. Установите значения следующих множеств: а) $\bar{A}$, б) $\bar{C}$, в) $A \cap B$, г) $A \cap C$, д) $A \cap B \cap C$, е) $A \cap \bar{B} \cap C$, ж) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.
- 3.8. В результате опроса выявлена реакция некоторого числа зрителей на одну телевизионную передачу. Результаты опроса даны в таблице 1.1.
- Обозначим: M - множество телезрителей мужского пола; B - множество взрослых телезрителей; Π - множество телезрителей, которым передача понравилась; O - множество телезрителей, которым передача очень понравилась или очень не понравилась. Сколько человек входит в каждое из следующих множеств: а) M , б) $\bar{\Pi}$, в) O , г) $M \cap \bar{B} \cap \bar{\Pi}$, д) $M \cap \bar{B} \cap \bar{\Pi} \cap O$, е) $\bar{M} \cap B \cap \Pi$, ж) $(M \cap B) \cup (\Pi \cap O)$, з) $\bar{M} \cap \bar{B}$, и) $\bar{M} \cup \bar{B}$, к) $M \setminus B$, л) $\bar{M} \setminus (B \cap \Pi \cap O)$?
- 3.9. Что представляют собой следующие множества: а) $Z \cup Q$, б) $Z \cap R$, в) $R \setminus Q$, г) $Z \setminus Q$, д) $Z \setminus R$?
- 3.10. Дать варианты описательного задания множества $\{2, 3, 4\}$.
- 3.11. Изобразить множества:
 $A = \{(x, y) \in R \times Z: |x| \leq 2, -3 < y \leq 1\}$,
 $B = \{(x, y) \in Z \times R: |x| \leq 2, -3 < y \leq 1\}$,
 $C = \{(x, y) \in N \times Z: |x| \leq 2, -3 \leq y \leq 1\}$,
 $D = \{(x, y) \in R^2: |x| \leq 2, -3 < y < 1\}$,

$$E = \{(x, y) \in R^2: |x| < 2, -3 \leq y \leq 1\}.$$

Таблица 1.1- Исходные данные к задаче 3.8

Категория зрителей	Реакция на передачу			
	очень понравилась	понравилась, но не очень	не понравилась, но не очень	очень не понравилась
мужчины	1	3	5	10
женщины	6	8	3	1
мальчики	5	5	3	2
девочки	8	5	1	1

3.12. Изобразить множества:

$$A = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad B = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 > 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in R \times Z: x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad D = \{(x, y) \in Z^2: x^2 + y^2 < 4\},$$

$$E = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 25\}, \quad F = \{(x, y) \in Z^2: x^2 + y^2 = 25\},$$

$$G = \{(x, y) \in Z \times N: x^2 + y^2 = 25\}, \quad H = \{(x, y) \in Z \times N: x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

3.13. Составить подмножество B множества A букв слова "информация", не входящих во множество C букв слова "теория".

3.14. Найти подмножество множества $\{x: 1 < x\}$, удовлетворяющее условию: $x \leq 5$.

3.15. Найти подмножество множества $\{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$, удовлетворяющее условию: $y > 2$.

3.16. Изобразить подмножества множества $A = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$, удовлетворяющие условиям: а) $x^2 - 4x + y^2 < 0$; б) $x^2 - 4x + y^2 = 0$; в) $x^2 - 4x + y^2 > 0$.

3.17. Пусть M - множество всех параллелограммов на плоскости, A_1 - множество квадратов, A_2 - множество прямоугольников, A_3 - множество ромбов на плоскости. Найти результаты следующих операций:

а) $A_i \cup A_j$; б) $A_i \cap A_j$; в) $A_i \cap \bar{A}_j$; $i, j = 1, 2, 3$.

3.18. Начертите три диаграммы Эйлера-Венна с тремя множествами и заштрихуйте области, изображающие:

$$а) \overline{A \cup B \cup C}, б) A \cup B \cup \bar{C}, в) (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cup A.$$

3.19. Даны множества: $A = \{x: x = 2y, y \in Z\}$, $B = \{x: x = 3y, y \in Z\}$.

Что представляют собой множества: а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $A \setminus B$,

г) $\{x: x = 10y, y \in Z\} \setminus \{x: x = 5y, y \in Z\}$?

3.20. Пусть $[a, b]$ и $[c, d]$ - отрезки действительной прямой. Дать геометрическую интерпретацию множеств: а) $[a, b] \times [c, d]$, б) $[a, b]^2$, в) $[a, b]^3$.

3.21. Дать геометрическую интерпретацию множеств:

$$A = \{x \in Z: -3 < x \leq 2\}, \quad B = \{x \in Z: -3 \leq x \leq 2\},$$