

Соответствия, отображения, отношения: методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Основы дискретной математики» для студентов дневной и заочной формы обучения специальности 7.080401 – Информационные управляющие системы и технологии.
/Сост. С.В.Доценко, Е.Н.Татарченко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. – 15 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Основы дискретной математики». Целью методических указаний является выработка у студентов практических навыков по решению прикладных задач в области соответствий, отображений, отношений.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Основы дискретной математики» для студентов специальности 7.080401 и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № 12 от 7 июня 2004 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент Кирюхин В.В., канд.физ.-мат.наук, проф. кафедры КиВТ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Биркгоф Г. Современная прикладная алгебра/Г.Биркгоф, Т.Барти – М.: Мир, 1976. – 400 с.
2. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов/ И.Н.Бронштейн, К.А. Семендяев - Лейпциг: Тайбнер, М.: Наука, 1981. – 718 с.
3. Горбатов В.А. Основы дискретной математики/ В.А.Горбатов. – М.: Высш. шк., 1986. – 311 с.
4. Кемени Дж. Введение в конечную математику/ Дж.Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 486 с.
5. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики/Ю.Коршунов – М.: Энергия, 1972. – 376 с.
6. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера/ О. Кузнецов, Г. Адельсон - Вельский. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
7. Кук Д. Компьютерная математика/ Д.Кук, Г. Бейз. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
8. Куратовский К. Теория множеств/ К.Куратовский, А.Мостовский - М.: Мир, 1970. – 416 с.
9. Ренин С.В. Основы дискретной математики/ С. В.Ренин - Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1981. – 43 с.
10. Ренин С.В. Сб. задач и упражнений по основам теории систем/ С.В.Ренин - Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1981. – 48 с.

е) $X = \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$, $P = \{((x, y), (u, v)): x*v = y*u\}$, $Q = \{((x, y), (u, v)): x + u = y + v\}$;

ж) $X \in \mathbf{R}$, $P = \{(x, y): x \leq y\}$, $Q = \{(x, y): x < y\}$?

Указать тип этих отношений.

3.37. Какими свойствами обладают отношения (X, P) и (X, P^{-1}) , где X – множество людей, если:

а) $P = \{(x, y): x \text{ моложе } y\}$, б) $P = \{(x, y): x \text{ – ребенок } y\}$, в) $P = \{(x, y): x \text{ состоит в браке с } y\}$, г) $P = \{(x, y): x \text{ живет в одном городе с } y\}$, д) $P = \{(x, y): x \text{ – брат } y\}$, е) $P = \{(x, y): x \text{ – предок } y\}$, ж) $P = \{(x, y): x \text{ и } y \text{ имеют одних и тех же родителей}\}$, з) $P = \{(x, y): x \text{ и } y \text{ имеют общего предка}\}$.

3.38. Пусть отношения S и T определены на множестве всех людей X следующим образом: $S = \{(x, y) \in X^2: x \text{ является отцом } y\}$, $T = \{(x, y) \in X^2: x \text{ – дочь } y\}$. Описать явно следующие отношения:

а) S^2 , б) T^2 , в) $S \circ T$, г) $T \circ S$, д) $S^{-1} \circ T$, е) $T \circ S^{-1}$, ж) $T^{-1} \circ S^{-1}$, з) $S \circ T^{-1}$, и) $T^{-1} \circ T^{-1}$, к) $S^{-1} \circ T^{-1}$.

3.39. Пусть имеется некоторая программа, которая читает два числа из множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, обозначаемых x и y , и, если $x < y$, печатает число $z \in A$, такое, что $x \leq z < y$. В любом случае, программа останавливается после считывания всех чисел из A . Задача определяет отношение $P \subseteq A^2$, такое, что $P = \{(x, y), z: x < y, x \leq z < y\}$. Найти область определения и область значений этого отношения.

3.40. Показать, что отношение $i \leq j$ на множестве $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ задается треугольной матрицей.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретический раздел	4
2. Примеры решения типовых задач	7
3. Задачи для упражнений	8
Библиографический список	15

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Соответствие есть тройка множеств $q = (X, Y, Q)$, где

X – область отправления;

Y – область прибытия;

$Q \subseteq X \times Y$ – график соответствия;

$\text{Pr}_1 Q$ – область определения соответствия;

$\text{Pr}_2 Q$ – область значений соответствия;

$M(Q) = \|q_{ij}\|$ – матрица соответствия:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, y_j) \in Q \\ 0, & \text{если } (x_i, y_j) \notin Q \end{cases} \quad (1.1)$$

Если $(x, y) \in Q$, то говорят, что элемент y соответствует элементу x . Геометрически это изображают стрелкой, направленной от x к y .

Виды соответствий:

а) полностью (всюду) определенное;

б) частичное;

в) сюръективное;

г) однозначное (функциональное): образом любого элемента множества

$\text{Pr}_1 Q \subseteq X$ является единственный элемент множества $\text{Pr}_2 Q \subseteq Y$;

д) инъективное (обратимое): прообразом любого элемента множества

$\text{Pr}_2 Q \subseteq Y$ является не более, чем один элемент множества $\text{Pr}_1 Q \subseteq X$;

е) биективное: одновременно полностью определено, сюръективно, и инъективно;

ж) взаимно однозначное (1 – 1 соответствие: одновременно полностью определено, сюръективно, функционально и инъективно).

$q^{-1} = (X, Y, Q^{-1})$, $Q^{-1} \subseteq Y \times X$ – соответствие, обратное соответствию q : $Q^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in Q\}$;

$q \circ p = (X, Z, S)$, $S = Q \circ P \subseteq X \times Z$ – композиция соответствий, $q = (X, Y, Q)$, $Q \subseteq (X, Y)$ и $p = (Y, Z, P)$, $P \subseteq (Y, Z)$, матрица композиции $M(S) = M(Q \circ P)$ равна булеву произведению матриц $M(Q)$ и $M(P)$. Ее элементы определяются по формуле:

$$a_{ij} = \text{МАКС}(\text{МИН}(q_{ik}, p_{kj})). \quad (1.2)$$

Если соответствие $q = (X, X, \Gamma)$, $\Gamma \subseteq X^2$, задано на одном множестве, то его композиция с самим собой $\underbrace{\Gamma \circ \Gamma \circ \dots \circ \Gamma}_n$ называется n – й степенью соответствия Γ^n .

Соответствие (X, Y, Γ) , где $\Gamma \subseteq X \times Y$, называется отображением, если оно полностью определено, т.е. если $\text{Pr}_1 \Gamma = X$. Отображение может быть записано как $\Gamma: X \rightarrow Y$.

Отображение (X, Y, Γ) , $\Gamma \subseteq X \times Y$, называется функцией, если оно однозначно (функционально).

3.27. Назовите известные Вам отношения на следующих множествах

а) множество натуральных чисел $\mathbf{N}$, б) множество треугольников, в) множество государств, г) множество людей, д) множество морей, е) множество уравнений. Какими свойствами обладают эти отношения, к какому виду относятся?

3.28. Найдите область определения и область значений для отношений «быть отцом» и «быть братом» на множестве людей.

3.29. Построить бинарные отношения:

- а) рефлексивное, симметричное, нетранзитивное;
- б) рефлексивное, несимметричное, транзитивное;
- в) антирефлексивное, антисимметричное, транзитивное;
- г) рефлексивное, антисимметричное, нетранзитивное.

3.30. Определить тип отношения на множестве подмножеств некоторого множества «иметь непустое пересечение».

3.31. Укажите графики следующих отношений, заданных на множестве $X = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$. Дайте их графическое и матричное представления, найдите $\text{Pr}_1\Gamma$ и $\text{Pr}_2\Gamma$:

а) $x < y$; б) x нацело делится на y ; в) x делитель y ; г) $x + y = 6$. Найти Γ^{-1} , $\Gamma^2 \circ \Gamma$, $\Gamma \circ \Gamma^{-1}$, $\Gamma^{-1} \circ \Gamma$.

3.32. Установить, какие из следующих отношений на $\mathbf{N}$ рефлексивны, антирефлексивны, симметричны, антисимметричны, транзитивны:

а) $m + n$ четно; б) $m + n \leq 100$; в) $m + n$ нечетно; г) m/n является степенью двойки; д) m/n четно; е) mn нечетно.

3.33. Какое из отношений на $\mathbf{Z}$ симметрично:

- а) $m\Gamma n$ означает, что $m + n$ делится на три;
- б) $m\Gamma n$ означает, что $m - n$ делится на три?

3.34. Доказать, что отношение Γ на некотором множестве X является одновременно симметричным и антисимметричным в том и только в том случае, когда его матрица $\|a_{ij}\|$ диагональна, т.е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

3.35. Отношения R и S заданы на множестве людей:

$R = \{(x, y): y - \text{брат } x\}$, $S = \{(x, y): y - \text{жена } x\}$. Что означают отношения $R \circ S$ и $S \circ R$?

3.36. Какими свойствами обладают отношения (X, P) , (X, P^{-1}) , (X, Q) и (X, Q^{-1}) , если:

а) X – множество геометрических фигур, $P = \{(x, y): x \text{ конгруэнтна } y\}$, $Q = \{(x, y): x \text{ подобна } y\}$;

б) X – множество прямых на плоскости, $P = \{(x, y): x \parallel y\}$, $Q = \{(x, y): x \perp y\}$;

в) X – множество окружностей на плоскости, $P = \{(x, y): x \text{ концентрична } y\}$, $Q = \{(x, y): x \text{ касается } y\}$;

г) $X = \mathbf{N}$, $P = \{(m, n): m \text{ делится на } n\}$;

д) $X = \mathbf{Z}$, $P = \{(x, y): x - y \text{ делится на } z \in \mathbf{Z}\}$;

$S = \{(y, z) \in Y \times Z: \text{окружность } y \text{ вписана в треугольник } z\}$;

б) X – множество деталей, Y – множество технологических операций, Z – множество рабочих, $P = \{(x, y): \text{над деталью } x \text{ выполняется технологическая операция } y\}$, $S = \{(y, z): \text{операцию } y \text{ выполняет рабочий } z\}$;

в) X – множество преподавателей университета, Y – множество читаемых дисциплин, Z – множество академических групп, $P = \{(x, y): \text{преподаватель } x \text{ ведет занятия по дисциплине } y\}$, $S = \{(y, z): \text{дисциплина } y \text{ преподается студентам } z\}$;

г) X – множество мужчин, Y – множество людей, Z – множество женщин, $P = \{(x, y): x - \text{отец } y\}$, $S = \{(y, z): y - \text{родитель } z\}$?

Что означает для этих примеров соответствие $(P \circ S)^{-1}$?

3.16. Дано: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, $P = \{(x_1, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_3)\}$, $S = \{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_3, z_3), (y_4, z_1)\}$.

Матричным и графическим способом найти соответствия $P \circ S$, $(P \circ S)^{-1}$, $S^{-1} \circ P^{-1}$.

3.17. Дано множество $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и отображение его на себя $\Gamma = \{(a_1, a_2), (a_1, a_4), (a_2, a_4), (a_3, a_1), (a_4, a_3)\}$. Написать степени этого отображения Γ^2 и Γ^3 , их матрицы и изобразить графически Γ , Γ^2 , Γ^3 .

3.18. Дано множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и отображение его на себя (подстановка) $\Gamma = \{(1, 3), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (5, 5), (6, 1)\}$. Написать степени этого отображения от Γ^2 до Γ^6 , их матрицы и изобразить их графически.

3.19. Построить функцию $f: A \rightarrow A$, где $A = \{0, 1\}$, не имеющую обратной.

3.20. Пусть $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ – соответствия. Что является областью определения $f \circ g$, если: а) f и g – функции, б) f – функция, g – отображение, в) f – отображение, g – функция, г) f и g – отображения? В каком из этих случаев $f \circ g$ сюръективно?

3.21. Доказать, что если функция f инъективна, то существует f^{-1} .

3.22. Если функция f сюръективна, следует ли отсюда, что f^{-1} – отображение?

3.23. Пусть $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ – функции. Доказать, что: а) если f и g инъективны, то $f \circ g$ тоже инъективна; б) если f и g сюръективны, то $f \circ g$ тоже сюръективна?

3.24. Пусть $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ – функции и g сюръективна. Достаточно ли этого для того, чтобы обеспечить сюръективность $f \circ g$?

3.25. Даны множества $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$. Рассмотреть следующие отображения их в себя: а) $x \rightarrow x$, б) $x \rightarrow x^3$. Выяснить, являются ли они инъективными.

3.26. Дано $x, y \in X = \{-10, -9, \dots, 0, 1, \dots, 9, 10\}$. Какие из указанных ниже отношений на множестве X являются функциями? Дать противоречащие примеры в случаях, когда отношение не является функцией. а) $\Gamma_1 = \{(x, y): x = y^2\}$,

б) $\Gamma_2 = \{(x, y): x^2 = y\}$, в) $\Gamma_3 = \{(x, y): x = -y\}$, г) $\Gamma_4 = \{(x, y): x \leq y\}$,

д) $\Gamma_5 = \{(x, y): x \cdot y = 6\}$, е) $\Gamma_6 = \{(x, y): x^3 = y\}$, ж) $\Gamma_7 = \{(x, y): x = y^3\}$,

з) $\Gamma_8 = \{(x, y): x = |y|\}$, и) $\Gamma_9 = \{(x, y): |x| = |y|\}$, к) $\Gamma_{10} = \{(x, y): y \cdot |y| = x \cdot |x|\}$

Отображение (X, Γ) на одном множестве $\Gamma \subseteq X^2$, называется отношением (бинарным отношением). Если элемент $y \in X$ находится в отношении Γ к элементу $x \in X$, т.е. $(x, y) \in \Gamma$, то пишут $y\Gamma x$. Отношение не обязательно полностью определено и не обязательно сюръективно.

Основные свойства, которыми могут обладать отношения:

а) связанные с одним элементом x :

- рефлексивность: $x\Gamma x$ – истинно;
- антирефлексивность: $x\Gamma x$ – ложно;

б) связанные с двумя элементами x и y :

- симметричность: из $x\Gamma y$ следует $y\Gamma x$;
- антисимметричность: из $(x\Gamma y$ и $y\Gamma x)$ следует $x = y$;
- несимметричность: если $x\Gamma y$ истинно, то $y\Gamma x$ – ложно;

в) связанные с тремя элементами x , y и z :

- транзитивность: из $x\Gamma y$ и $y\Gamma z$ следует $x\Gamma z$.

Отношение Γ есть

а) отношение эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

б) нестрого порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

в) строгого порядка, если оно антирефлексивно, несимметрично и транзитивно;

г) доминирования, если оно антирефлексивно, несимметрично и может не выполняться свойство транзитивности;

д) толерантности, если оно рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.

Так как соответствия, отображения и отношения определены на множествах, то для них естественно определены операции дополнения $\bar{}$, объединения $\cup$ и пересечения $\cap$.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Пусть даны множества $X = \{a, b\}$ и $Y = \{1, 2, 3\}$. Привести примеры следующих соответствий между этими множествами:

а) полностью определенные; б) частичные; в) сюръективные; г) однозначные; д) инъективные; изобразить их графически и записать матрицы.

Имеем $X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$. График любого из указанных соответствий $Q \subseteq X \times Y$.

Примеры соответствий:

а) всюду определенные: $Q_1 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3)\}$, $Q_2 = \{(a, 2), (b, 1)\}$ – рисунок 2.1 а, б;

$$M(Q_1) = \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$M(Q_2) = \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

б) Частичные $Q_3 = \{(b, 1), (b, 2)\}$, $Q_4 = \{(a, 2)\}$ – рисунок 2.1 – в, г;

$$M(Q_3) = \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$M(Q_4) = \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

в) Сюръективные $Q_5 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3)\}$, $Q_6 = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$ – рисунок 2.1 д, е;

$$M(Q_5) = \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$M(Q_6) = \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

г) Однозначные $Q_7 = \{(a, 2), (b, 3)\}$, $Q_8 = \{(a, 2), (b, 2)\}$ – рисунок 2.1 ж, з;

$$M(Q_7) = \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$M(Q_8) = \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

е) Инъективные $Q_9 = \{(a, 2), (b, 1), (b, 3)\}$, $Q_{10} = \{(a, 1), (a, 3)\}$ – рисунок 2.1 – и, к.

$$M(Q_9) = \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$M(Q_{10}) = \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

2.2. Даны соответствия $q = (X, Y, Q)$, где $Q = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4)\}$ и $p = (Y, Z, P)$, где $P = \{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_3, z_2), (y_4, z_2)\}$. Найти их графиче-

в) $(\mathbf{N}^2, \mathbf{Q}, S)$, $S \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{Q}$, $S = \{((m, n), q): m, n \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Q}; q = \frac{m}{n}\}$;

г) $(X \times Y, Z, P)$: $P \subseteq (X \times Y) \times Z$; X – множество прямых на плоскости, параллельной заданной прямой a ; Y – множество прямых той же плоскости, не параллельных a ; Z – множество точек этой плоскости $P = \{((x, y), z): \text{прямая } x \in X \text{ пересекается с прямой } y \in Y \text{ в точке } z \in Z\}$;

д) то же, что и в предыдущем пункте, но все прямые рассматриваются в трехмерном пространстве.

3.8. Является ли соответствие $(\mathbf{N}, \mathbf{N}_0, S)$, где $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $S = \{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}_0: \text{остаток от деления } m \text{ на } 3 \text{ равен } n\}$ отображением, функцией?

3.9. Дать графическое и матричное представление соответствия (X, Γ) , заданного на одном множестве, где $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\Gamma = \{(a, a), (a, c), (a, f), (b, a), (b, e), (d, a), (d, d), (d, f), (f, b), (f, c), (f, e), (e, f)\}$.

3.10. Соответствия на одном множестве, заданные графически на рисунке 3.1, представить в матричной форме; записать графики этих соответствий.

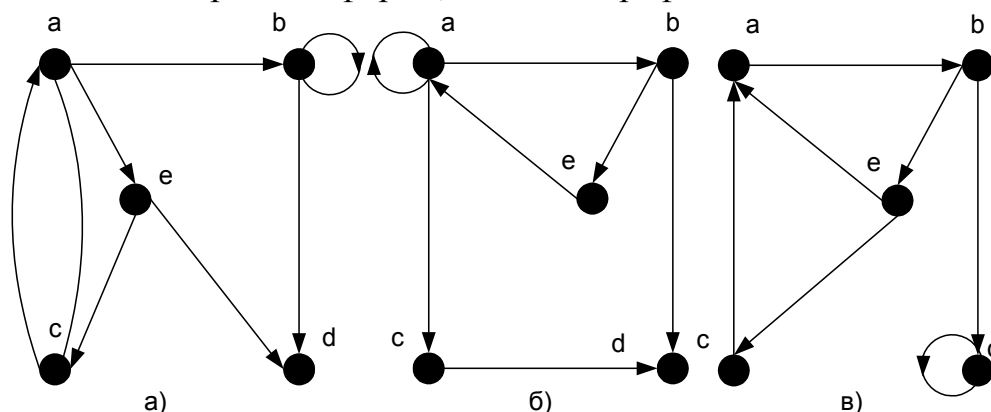


Рисунок 3.1 – Соответствия задачи 3.10

3.11. Для соответствий, представленных в задаче 3.10, найти: P^{-1} , P^2 , $P \circ P^{-1}$, $Q^{-1} \circ R^{-1}$, $Q \circ R$, $Q^{-1} \circ R$.

3.12. Сколько имеется:

а) сюръективных соответствий из трехэлементного множества в двухэлементное? б) инъективных соответствий из трехэлементного множества в четырехэлементное?

3.13. Изобразить все: а) функциональные, б) взаимно-однозначные соответствия из трехэлементного множества в трехэлементное.

3.14. Даны три множества: $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ и $Z = \{1, 2, 3\}$. Они связаны двумя соответствиями $p = (X, Y, P)$ и $q = (Y, Z, Q)$, где $P = \{(\alpha, b), (\beta, a), (\beta, d), (\gamma, a), (\gamma, e), (\delta, d)\}$ и $Q = \{(a, 2), (b, 1), (d, 1), (e, 1)\}$.

Найти композицию этих соответствий $p \circ q$. Изобразить графически и записать матрицы этих соответствий и их композиции.

3.15. Что означает композиция соответствий (X, Y, P) и (Y, Z, S) если:

а) X – множество точек плоскости, Y – множество окружностей, Z – множество треугольников, $P = \{(x, y): x \in X \times Y: \text{точка } x \text{ – центр окружности } y\}$,

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

3.1. Даны два множества $X = \{x, y\}$ и $Y = \{a, b\}$. Найти все соответствия между ними:

- а) всюду (полностью) определенные;
- б) сюръективные;
- в) функциональные;
- г) взаимно однозначные.

3.2. Приведите известные Вам соотношения между элементами следующих множеств:

а) множество людей и множество городов; б) множество студентов и множество преподавателей; в) множество треугольников и множество вещественных чисел; г) множество треугольников и множество окружностей; д) множество многоугольников и множество натуральных чисел; е) множество точек плоскости с заданной системой координат и множество пар чисел.

Укажите тип этих соответствий.

3.3. Представить графически и в виде матрицы соответствия (X, Y, Q) , если:

- а) $X = \{2, 4, 6\}$, $Y = \{1, 3, 5\}$, $Q = \{(x, y) \in X \times Y: x > y\}$;
- б) $X = \{25, 16, 7, 6\}$, $Y = \{2, 5, 3, 9, 1\}$, $Q = \{(x, y) \in X \times Y: x \text{ делится на } y\}$;
- в) $X = \{\text{ромб, круг, куб, угол}\}$, $Y = \{\text{о, у, л, б, к, р, м, г}\}$, $Q = \{(x, y) \in X \times Y: \text{в слово } x \text{ входит буква } y\}$;
- г) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Q = \{(x, y) \in X \times Y: (x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_1)\}$;
- д) $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e, f\}$, $Q = \{(x, y) \in X \times Y: (a, d), (a, e), (b, f), (c, f)\}$;
- е) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Q = \{(x, y) \in X \times Y: (x_1, a), (x_2, a), (x_3, b), (x_4, b)\}$.

Указать тип этих соответствий.

3.4. Построить соответствия, обратные соответствиям упражнения 3.3.

3.5. Для следующих соответствий построить обратные:

- а) число x есть корень многочлена y ;
- б) человек x прочел книгу y ;
- в) книга x написана человеком y ;
- г) деталь x обрабатывается на станке y .

3.6. Обратно ли соответствие « x – брат y » соответствию « y – сестра x », $x \in X$, $y \in Y$, если а) $X = Y$ – множество всех людей; б) X – множество мужчин, Y – множество женщин.

3.7. Для следующих соответствия найти область определения, область значений и определить тип соответствия; то же сделать для соответствий, обратных заданным:

- а) $(\mathbf{N}, Y, G)$, $G \subseteq \mathbf{N} \times Y$, Y – множество многочленов, $G = \{(n, y) \in \mathbf{N} \times Y: n \text{ – степень многочлена } y\}$;
- б) $(\mathbf{C}, \mathbf{R}, G)$, $G \subseteq \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, $G = \{(x, y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}: \text{модуль } x \text{ равен } y\}$;

ские и матричные представления и композицию этих соответствий.

Имеем $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$. Графические представления даны на рисунке 2.2.

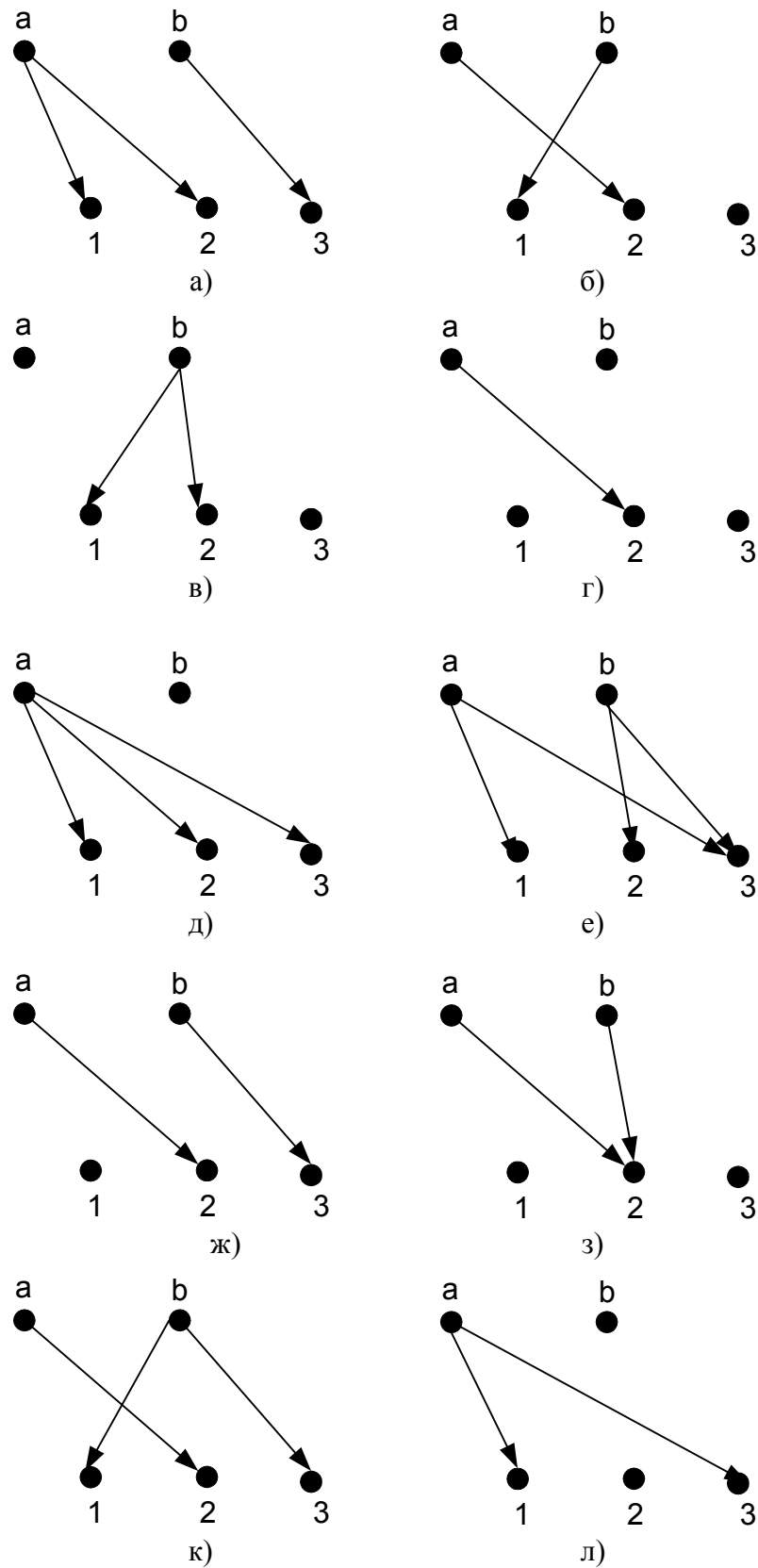


Рисунок 2.1 – Соответствия примера 2.1

Матричные представления:

$$M(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(Q \circ P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

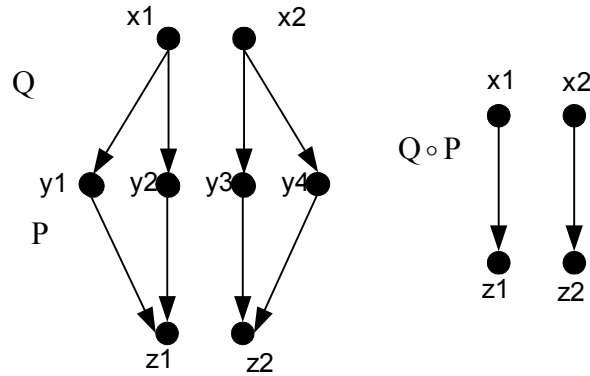


Рисунок 2.2 – Композиция соответствий примера 2.2

2.3. Дано соответствие на одном множестве $q = (X, X, \Gamma)$, где $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\Gamma = \{(a, b), (b, c), (d, c), (e, d), (a, e)\}$.

Найти матрицы степеней этого соответствия от Γ до Γ^4 и изобразить графически описываемые ими соответствия.

Матрицы

$$M(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}, \quad M(\Gamma^2) = M(\Gamma \circ \Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}$$

$$M(\Gamma^3) = M(\Gamma \circ \Gamma^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}, \quad M(\Gamma^4) = M(\Gamma \circ \Gamma^3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}.$$

Графические изображения даны на рисунке 2.3

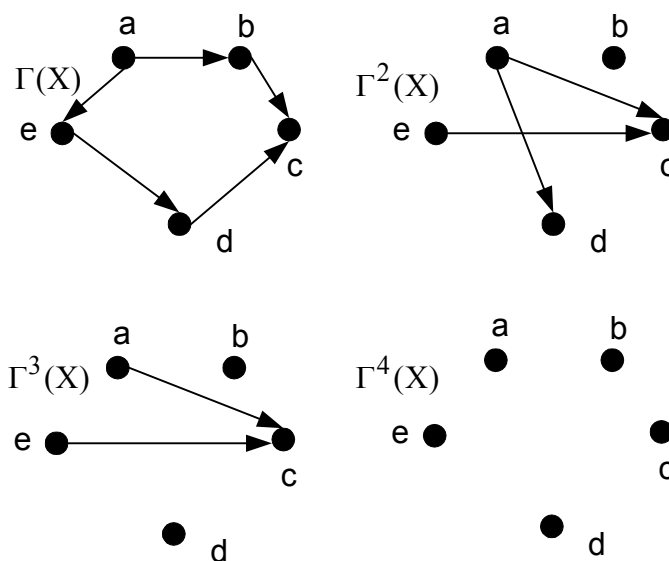


Рисунок 2.3 – Соответствия примера 2.3

2.4. Какой тип имеет отношение Γ «быть ребенком»?

Свойства этого отношения:

- а) $x\Gamma x$ – ложно – значит, отношение антирефлексивно;
- б) если $x\Gamma y$ истинно, то $y\Gamma x$ ложно – значит, отношение несимметрично;
- в) из $x\Gamma y$ и $y\Gamma z$ не следует $x\Gamma z$ – значит, отношение нетранзитивно.

Это отношение доминирования.

2.5. Каков тип отношения «быть похожим»?

Отношение рефлексивно, симметрично и нетранзитивно. Это отношение толерантности.