



Министерство образования и науки Украины

Севастопольский национальный технический
университет

Методические указания
к выполнению лабораторных работ по
дисциплине
"ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ И
ПРОГРАММИРОВАНИЕ"
ЧАСТЬ 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
для студентов дневной формы обучения
направления 7.100201-"Кораблестроение и
океанотехника"

Севастополь
2006

Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине "Основы информатики и программирование". Часть 2. Численные методы. Для студентов дневной формы обучения направления 7.100201- "Кораблестроение и океанотехника"/ Е.М.Шалимова, М.А. Лебедева.- Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006.- 52 с.

Цель методических указаний – изложение основных теоретических сведений по численным методам, описание порядка выполнения лабораторных работ и индивидуальных заданий.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры кибернетики и вычислительной техники, протокол № 10 от 27 июня 2006 г.

Рецензенты:

Первухина Е.Л., доктор техн. наук, профессор кафедры ТМ,
Бражников С.А., к.т.н., доцент кафедры КиВТ.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Ответственный за выпуск: заведующий кафедрой кибернетики и вычислительной техники профессор Скатков А.В.

Содержание

1. Лабораторная работа №1. Исследование погрешности вычислений	4
2. Лабораторная работа № 2. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.....	11
3. Лабораторная работа №3. Вычисление определенных интегралов.....	21
4. Лабораторная работа №4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений	29
5. Лабораторная работа №5. Приближение функций. Интерполяция	38
Библиографический список.....	46
Приложение А. Краткие сведения по работе с пакетом MATHCAD.....	47

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Цель работы: изучение причин возникновения и структуры погрешности вычислений.

1.1. Теоретические сведения

Теория погрешностей (ошибок) вычислений - раздел вычислительной математики, изучающий причины возникновения и способы оценки всевозможных погрешностей решения задач на ЭВМ.

Мерой точности вычислений могут служить абсолютная погрешность Δx и относительная погрешность δx . Абсолютная погрешность – это разность между точным значением величины x и ее приближенным значением $\bar{x}$:

$$\Delta x = x - \bar{x}.$$

Относительная погрешность – это модуль отношения абсолютной ошибки к приближенному значению $\bar{x}$:

$$\delta x = \left| \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right|.$$

Абсолютные и относительные погрешности для приближенных вещественных чисел тесно связаны с важным понятием верных значащих цифр. Если абсолютная погрешность числа x не превышает половины единицы разряда последней цифры x , то говорят, что у числа x все знаки верны. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны. Например, 0,00012 имеет две значащих цифры.

В процессе численного решения некоторой задачи на результат оказывают влияние три вида ошибок: ошибки, содержащиеся в исходной информации, ошибки, возникающими при ограничении бесконечного математического процесса конечным числом операций (ошибки ограничения), и ошибки, возникающие в результате необходимости представлять число в

виде конечной последовательности цифр (ошибки округления)[1]. Каждую из этих ошибок можно представить в абсолютной и относительной формах.

Ошибки в исходной информации возникают в результате неточности измерений или из-за невозможности представить рассматриваемую величину конечной дробью.

Любой измерительный прибор имеет ограниченную точность представления информации (ограниченную чувствительность) и, следовательно, всякое физическое измерение не может быть выполнено абсолютно точно.

Кроме того, если в вычислениях используется число π , то оно может быть представлено в виде 3,14, или 3,14159265, или 3,141592653589793, в зависимости от того, какая точность требуется в данном вычислении. В любом случае, однако, невозможно представить π точно, так как π является иррациональным числом и не может быть представлено конечным числом знаков. Даже обыкновенные дроби часто нельзя представить с помощью конечного числа десятичных знаков, как например $\frac{1}{3}$. Часто случается также, что дроби,

которые являются конечными в одной системе счисления, становятся бесконечными в другой системе счисления.

Например, дробь $\frac{1}{10}$ имеет конечное десятичное представление

0,1, но, при переводе в двоичную систему счисления, становится бесконечной дробью 0,000110011001100... Вычисляя сумму десяти слагаемых, каждое из которых будет представлять собой двоичное приближение к десятичной 0,1, мы в сумме не получим точно 1.

Те ошибки, которые содержатся в исходной информации, влияют на точность результата вычислений независимо от того, каким методом эти вычисления проводятся. Два других типа ошибок: ошибки ограничения и ошибки округления,— определяются теми численными методами, которые используются для решения задачи.

Например, в практических расчетах для вычисления косинуса или синуса любого угла, выраженного в радианах, может использоваться разложение в ряд Тейлора.

Очевидно, что невозможно использовать все члены ряда для вычислений, так как ряд бесконечен; поэтому вычисления ограничиваются конечным числом членов. Отброшенные члены ряда (а их число также бесконечно!) вносят некоторую ошибку в результат вычислений. Эта ошибка называется ошибкой ограничения, так как она возникает в результате ограничения бесконечного математического процесса.

Даже если предположить, что исходная информация не содержит никаких ошибок и все вычислительные процессы конечны и не приводят к ошибкам ограничения, то все равно в этом случае присутствует третий тип ошибок — ошибки округления. Пусть вычисления проводятся на гипотетической ЭВМ, в которой каждое число представляется пятью значащими цифрами, и пусть необходимо сложить два числа 9,2654 и 7,1625, причем эти два числа являются точными. Сумма их, равная 16,4279, содержит шесть значащих цифр и не помещается в разрядной сетке рассматриваемой машины. Поэтому шестизначный результат будет округлен до 16,428, и при этом возникает ошибка округления. Так как вычислительные машины всегда работают с конечным количеством значащих цифр, то потребность в округлении возникает довольно часто.

Вопросы округления относятся только к действительным числам. При выполнении арифметических операций с целыми числами потребность в округлении не возникает.

1.2. Порядок выполнения работы

1) Разработать блок-схему алгоритма и программу на языке Pascal для вычисления суммы бесконечно убывающего ряда с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$ в соответствии с вариантом задания.

В программе предусмотреть:

- ввод исходных данных с клавиатуры,
- проверку их корректности;

- определение точного и приближенного значений заданной функции, а также количества слагаемых для достижения указанной точности вычислений;
 - определение абсолютной и относительной погрешности вычислений;
 - вывод результатов на экран.
- 2) Разработать тестовые примеры.
 - 3) Отладить программу.
 - 4) Проанализировать полученные результаты.
 - 5) Оформить отчет.

1.3. Варианты заданий

$$1) \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots\right)$$

$$(|x| > 1)$$

$$2) \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right)$$

$$(|x| < 1)$$

$$3) \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$4) \quad \ln x = 2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots\right)$$

$$(x > 0)$$

$$5) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$(-1 < x \leq 1)$$

8

6)

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(|x| < 1)$$

7)

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

$$(0 < x \leq 2)$$

8)

$$\ln(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots$$

$$(x > \frac{1}{2})$$

9)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

10)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

11)

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

12)

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

13)

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

14)

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots$$

$$x > 1$$

$$15) \quad \ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots$$

$$x > 1/2$$

$$16) \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$-1 \leq x < 1$$

$$17) \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$$18) \quad e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$19) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$20) \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$21) \quad e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$22) \quad \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$|x| \leq 1$$

$$23) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$24) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$25) \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots\right)$$

($|x| > 1$)

1.4. Содержание отчета

Цель работы, постановка задачи, классификация и структура погрешности вычислений, блок-схема алгоритма, описание используемых переменных, текст программы, тестовые примеры, анализ полученных результатов, выводы.

1.5. Контрольные вопросы

- 1) Дать определение абсолютной погрешности вычислений.
- 2) Дать определение относительной погрешности вычислений.
- 3) Указать причины возникновения погрешности вычислений.
- 4) Указать причины возникновения погрешности в исходных данных.
- 5) Указать структуру погрешности вычислений.
- 6) Дать определение погрешности ограничения.
- 7) Дать определение погрешности округления.

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: изучение метода итераций, метода Ньютона и метода половинного деления, их применение для численного решения уравнений.

2.1. Теоретические сведения

Часто прикладные задачи сводятся к решению уравнений вида:

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a \leq x \leq b$.

Если функция представляет собой многочлен, то уравнение (1) называется алгебраическим, если же в функцию $f(x)$ входят элементарные (тригонометрические, логарифмические, показательные и т. п.) функции, то такое уравнение называется трансцендентным. Значение x^* , обращающее функцию $f(x^*)$ в нуль, т. е. такое, что $f(x^*) = 0$, называется корнем уравнения (1), а способ нахождения значения x^* и есть решение уравнения (1).

В практических задачах найти корни уравнения (1) точно удастся, как правило, лишь в частных случаях. Кроме того, если уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, то сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Поэтому разработаны численные методы, которые позволяют находить приближенные значения корней уравнения (1). В процессе численного решения уравнения, в общем случае, рассматриваются две задачи:

- 1) отделение корней, т. е. отыскание достаточно малых областей, в каждой из которых находится один и только один корень уравнения;
- 2) нахождение корня с заданной точностью.

При выделении областей, в которых находятся действительные корни уравнения (1), можно воспользоваться графическим способом либо провести табулирование функции $f(x)$ и выбрать тот отрезок, на концах которого рассматриваемая функция принимает значения разных знаков (на этом отрезке уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень).

Для решения второй задачи существует ряд методов [1-4], из которых мы рассмотрим три: метод итераций, метод Ньютона (метод линеаризации или метод касательных) и метод половинного деления (метод дихотомии). При рассмотрении этих методов будем полагать, что известен отрезок $a \leq x \leq b$, внутри которого существует и находится единственный корень уравнения (1).

2.1.1. Метод итераций

Применение метода итераций требует [1,2] представить уравнение (1) в виде:

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

Выберем на отрезке $[a, b]$ произвольную точку x_0 - нулевое приближение, и примем в качестве следующего приближения $x_1 = \varphi(x_0)$, затем $x_2 = \varphi(x_1)$, и т.д.

Таким образом, x_n получается из x_{n-1} по формуле

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (3)$$

Процесс последовательного вычисления значений x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) по формуле (3) называется методом итераций.

Геометрическая интерпретация метода итераций представлена на рисунке 1.

Если на отрезке $[a, b]$, содержащем корень $x = x^*$ уравнения (2), а также его последовательные приближения $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, вычисляемые по методу итераций, выполнено условие

$$|\varphi'(x)| \leq q \leq 1, \quad (4)$$

то процесс итераций сходится, т. е. увеличивая n , можно получить приближение, сколь угодно мало отличающееся от точного значения корня x^* [1-4]. Выражение (4) называется условием сходимости метода итераций.

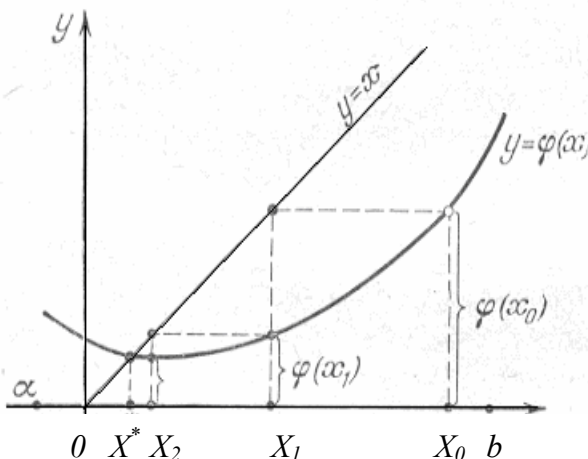


Рисунок 1 - Иллюстрация метода итераций

Для нахождения корня уравнения с заданной точностью (предельной абсолютной погрешностью) ε , процесс итераций следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства

$$|x_{n-1} - x_n| \leq ((1-q)/q) \cdot \varepsilon, \quad (5)$$

при этом всегда будет выполнено неравенство $|x^* - x_n| \leq \varepsilon$.

В [2] показано, что если значение $q \leq 0,5$, то $(1-q)/q \geq 1$ и вместо (5) для обеспечения требуемой точности решения можно использовать более простое соотношение

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon. \quad (6)$$

При практическом нахождении корней по методу итераций при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) нужно

представить $\varphi(x)$ так, чтобы производная $\varphi'(x)$ по абсолютной величине была меньше 1. В этом случае корень будет всегда найден и чем меньше величина q , тем меньшее число шагов (итераций) для этого потребуется.

Для приведения уравнения (1) к виду (2) в [2] рекомендуется использовать следующую процедуру, обеспечивающую выполнение условия сходимости.

Умножим левую и правую части уравнения (1) на произвольную константу λ и к каждой из частей прибавим x . Получим $x = x + \lambda f(x)$. Тогда $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$.

Пусть m_1 — наименьшее значение производной $f'(x)$, M_1 — наибольшее значение производной $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1. \quad (7)$$

Если производная $f'(x)$ отрицательна, то от уравнения $f(x) = 0$ следует перейти к уравнению $-f(x) = 0$. Тогда при замене уравнения (1) эквивалентным ему уравнением $x = x - \lambda f(x)$, где $\lambda > 0$, следует подобрать параметр λ таким, чтобы выполнялось неравенство (7). Если выбрать $\lambda = 1/M_1$ и $q = 1 - m_1/M_1$, то условие сходимости метода итераций будет выполнено.

2.1.2. Метод Ньютона

Рассмотрим уравнение $f(x) = 0$, имеющее один корень на отрезке $[a, b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ определены, непрерывны и сохраняют постоянные знаки на этом отрезке.

Геометрическая интерпретация метода Ньютона представлена на рисунке 2.

Выберем некоторую точку x_0 отрезка $[a, b]$ и проведем в точке $P_0(x_0, f(x_0))$ графика функции касательную к кривой $y = f(x)$ до пересечения с осью Ox . Абсциссу x_1 точки пересечения возьмем в качестве приближенного значения корня. Проведем касательную через новую точку $P_1(x_1, f(x_1))$ и

найдем точку ее пересечения с осью Ox , таким образом получим второе приближение корня x_2 . Аналогично определим последующие приближения.

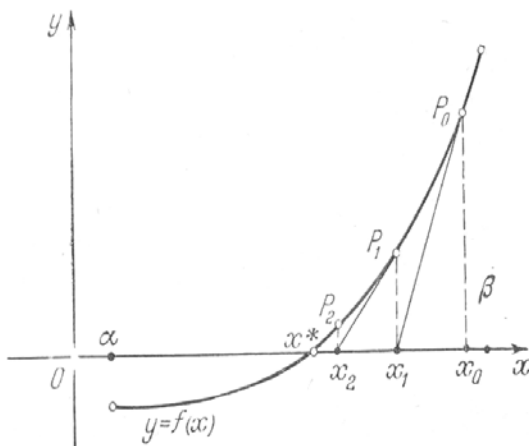


Рисунок 2 - Иллюстрация метода Ньютона

Уравнение касательной, проходящей через точку P_0 , имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Из этого уравнения при $y=0$ находим абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox , которая является первым приближением корня x_1 :

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0).$$

Очевидно, следующие приближения определяются формулами:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1)$$

...

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1}).$$

Процесс вычисления приближений продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2m_1 \varepsilon}{M_2}}, \quad (9)$$

где m_1 - наименьшее значение $|f'(x)|$, а M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$. В [1,2] доказано, что при этом условии будет выполнено и условие $|x^* - x_n| \leq \varepsilon$, где ε - заданная предельная абсолютная погрешность вычисления корня x^* , а также если M_2 не больше, чем на два порядка превышает $2 \cdot m_1$ (т.е. $2 \cdot m_1 / M_2 \geq 10^{-2}$), то неравенство (9) всегда выполняется, если

$$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-1} \sqrt{\varepsilon}. \quad (10)$$

Например, при $\varepsilon = 10^{-6}$ в этом случае можно вместо (9) использовать более простое условие:

$$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}.$$

Начальное приближение x_0 следует выбирать так, чтобы было выполнено условие

$$f(x_0) f''(x_0) > 0. \quad (11)$$

В противном случае сходимость метода Ньютона не гарантируется [1,2].

Обычно выбирают $x_0 = a$ или $x_0 = b$, в зависимости от того, для какой из этих точек выполняется условие сходимости (11).

Метод Ньютона эффективен для решения тех уравнений, для которых значение модуля производной $|f'(x)|$ около корня достаточно велико, т. е. график функции $f(x)$ в окрестности корня имеет большую крутизну.

2.1.3. Метод половинного деления

Рассмотрим уравнение $f(x)=0$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет разные знаки на его концах, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Метод половинного деления требует большего объема вычислительной работы по сравнению с методами Ньютона и итераций, но не требует нахождения производных и всегда

позволяет найти решение, т.е. всегда сходится.

Для нахождения корня уравнения (1), принадлежащего отрезку $[a, b]$, делим отрезок пополам и выбираем начальное приближение равным $x_0 = (a + b)/2$. Если $f(x_0) = 0$, то x_0 является корнем уравнения. Если $f(x_0) \neq 0$, то выбираем тот из отрезков $[a, x_0]$ или $[x_0, b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Полученный отрезок снова делим пополам и повторяем указанную процедуру и т. д.

Процесс деления отрезков пополам продолжаем до тех пор, пока длина отрезка, на концах которого функция имеет противоположные знаки, не будет меньше заданной предельной допустимой погрешности ε . Иллюстрация метода приведена на рисунке 3.

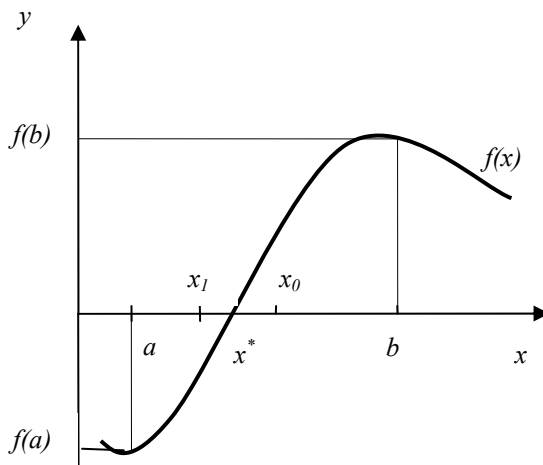


Рисунок 3 - Иллюстрация метода половинного деления

2.2. Порядок выполнения работы

- 1) Проверить условие сходимости и выписать расчетные формулы для нахождения корня заданного уравнения в соответствии с вариантом (таблица 1) с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$.
- 2) Выбрать начальное приближение корня из указанного отрезка.
- 3) Разработать блок-схему алгоритма.
- 4) Разработать программу на языке Pascal. Исходные данные и результаты вывести на экран. Кроме того, в программе предусмотреть подсчет и вывод на печать числа итераций, за которое удастся найти значение корня с заданной точностью.
- 5) Отладить и выполнить программу на ЭВМ, получить значение корня с заданной точностью.
- 6) Решить заданное уравнение средствами пакета MATHCAD .
- 7) Полученные результаты сравнить со значением корня, приведенным в таблице 1.

2.3. Содержание отчета

Цель работы, постановка задачи, описание метода решения, блок-схема алгоритма, текст программы, описание входных и выходных данных, анализ полученных результатов, выводы.

2.4. Контрольные вопросы

- 1) Что значит решить уравнение? Почему возникает необходимость в решении алгебраических и трансцендентных уравнений численными методами?
- 2) Какие две задачи приходится решать при нахождении корней уравнений?
- 3) В чем состоит метод итераций? Условие сходимости. Преимущества и недостатки метода итераций.
- 4) В чем состоит метод Ньютона? Условие сходимости. Границы применимости.

- 5) В чем состоит метод половинного деления?
Преимущества и недостатки метода.
- 6) Почему при программировании итерационных процессов в методах итераций и Ньютона не используются индексированные переменные для обозначения последовательных приближений к корню?
- 7) Сколько соседних приближений одновременно используется в вычислениях и как они обозначаются?

Таблица 1- Варианты задания

№ вар.	Уравнение	Отрезок, содержащ. корень	Метод решения	Прибл. знач. корня
1	$3 \sin \sqrt{x} + 0,35x - 3,8 = 0$	[2;3]	1	2,2985
2	$0,25x^3 + x - 1,2502 = 0$	[0;2]	2	1,0001
3	$x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2,2 = 0$	[0,4;1]	3	0,7376
4	$x - \frac{1}{3 + \sin 3,6x} = 0$	[0;0,85]	1	0,2624
5	$0,1x^2 - x \ln x = 0$	[1;2]	2	1,1183
6	$\operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3} = 0$	[0;0,8]	3	0,3333
7	$\arccos x - \sqrt{1 - 0,3x^3} = 0$	[0;1]	1	0,5629
8	$3x - 4 \ln x - 5 = 0$	[2;4]	2	3,2300
9	$\cos \frac{2}{x} - 2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$	[1;2]	3	1,8756
10	$\sqrt{1 - 0,4x^2} - \arcsin x = 0$	[0;1]	1	0,7672
11	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$	[0;1]	2	0,8814
12	$\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + 2 \ln x = 0$	[1;3]	3	1,3749
13	$x - 2 + \sin \frac{1}{x} = 0$	[1,2;3]	1	1,3077

14	$e^x + \ln x - 10x = 0$	[3;4]	2	3,5265
15	$\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0$	[1;2]	3	1,0804
16	$1 - x + \sin x - \ln(1+x) = 0$	[0;1,5]	1	1,1474
17	$3x - 14 + e^x - e^{-x} = 0$	[1;3]	2	2,0692
18	$\sqrt{1-x} - \operatorname{tg} x = 0$	[0;1]	3	0,5768
19	$x + \cos(x^{0,52} + 2) = 0$	[0,5;1]	1	0,9892
20	$3 \ln^2 x + 6 \ln x - 5 = 0$	[1;3]	2	1,8832
21	$\sin x^2 + \cos x^2 - 10x = 0$	[0;1]	3	0,1010
22	$x^2 - \ln(1+x) - 3 = 0$	[2;3]	1	2,0267
23	$2x \sin x - \cos x = 0$	[0,4;1]	2	0,6533
24	$e^x + \sqrt{1+e^{2x}} - 2 = 0$	[-1;0]	3	-0,2877
25	$\ln x - x + 1,8 = 0$	[2;3]	1	2,8459

В столбце “Метод решения” цифрами заданы следующие методы:

1- метод итераций;

2- метод Ньютона;

3- метод половинного деления.

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Цель работы: изучение метода прямоугольников, метода трапеций и метода Симпсона, их применение для численного интегрирования.

3.1. Теоретические сведения

Вычисление определенного интеграла- это еще одна задача, часто встречающаяся в научно-технических расчетах.

Напомним основные положения.

1) Пусть функция $f(x)$ задана на некотором интервале $[a, b]$. Разобьем этот интервал произвольным образом на части $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$). Возьмем в каждой из частей произвольную точку ξ_i ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$). Тогда

определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ функции $f(x)$ на

интервале $[a, b]$ называется $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$.

2) Функция $F(x)$ на данном интервале называется первообразной функцией для функции $f(x)$, если во всем этом интервале $f(x)$ является производной для функции $F(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

3) Если $F(x)$ есть первообразная функция для $f(x)$ в интервале, включающем $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Очень часто выразить первообразную функцию через элементарные функции не удастся. Поэтому приходится прибегать к приближенному интегрированию. Из положения 1

следует, что величина определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ есть

площадь геометрической фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$. Таким образом, задача вычисления значения определенного интеграла сводится к нахождению площади криволинейной трапеции (рисунки 4,5).

Для решения этой задачи существует целый ряд численных методов [1-4,6], из которых мы рассмотрим три: метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол (метод Симпсона). Суть указанных методов заключается в том, что отрезок интегрирования делится на n частей и искомая площадь складывается из n площадей более простых фигур: прямоугольников или трапеций.

Пусть требуется вычислить значение интеграла с некоторой точностью ε . Очевидно, одно приближение (назовем его $S1$) не позволяет оценить точность, с которой вычислено значение интеграла, необходимо найти второе приближение. Для этого увеличим n , например, в два раза, т. е. положим $n:=2n$, и найдем второе приближение $S2$, а затем проверим условие:

$$|S1-S2|<\varepsilon.$$

Если условие выполняется, то $S2$ принимаем за искомое значение интеграла; если не выполняется, то последнее полученное значение $S2$ считаем предыдущим, т.е. $S1:=S2$. После этого опять удвоим число точек деления отрезка и вычислим новое значение $S2$. Процесс удвоения n и вычисления $S2$ будем продолжать до тех пор, пока модуль разности $S1$ и $S2$ не станет меньше ε .

3.1.1. Метод прямоугольников

Пусть требуется вычислить значение определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

График функции $f(x)$ представлен на рисунке 4.

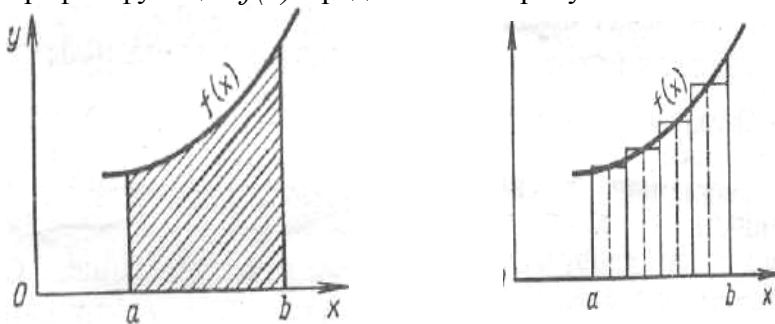


Рисунок 4 - Иллюстрация метода прямоугольников

Найти значение определенного интеграла - это значит найти площадь заштрихованной области (рисунок 4). Для вычисления приближенного значения интеграла разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей, определим значения $f(x_i)$, где $x_i = a + h \cdot i - h/2$; $h = (b-a)/n$ и $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Вычислим площадь S_i каждого из полученных прямоугольников: $S_i = h f(x_i)$. Сумма S_i площадей этих прямоугольников является приближенным значением интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n S_i = h \sum_{i=1}^n f(x_i) = h \sum_{i=1}^n y_i. \quad (12)$$

3.1.2. Метод трапеций

Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей длины $h = (b-a)/n$. В точках разбиения $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $\dots$, $x_n = b$ проведем ординаты $y_0, y_1, \dots, y_n$ до пересечения с

кривой $y = f(x)$, т. е. $y_i = f(x_i)$, $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, n$. Концы ординат соединим прямолинейными отрезками. Тогда площадь криволинейной трапеции $aABb$ приближенно можно считать равной площади фигуры, ограниченной ломаной линией $aACD...NBb$ (рисунок 5).

Площадь этой фигуры, которую мы обозначим через S , равна сумме площадей трапеций

$$S = h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right).$$

Таким образом, приближенное значение интеграла по формуле трапеций запишется в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i) \quad (13)$$

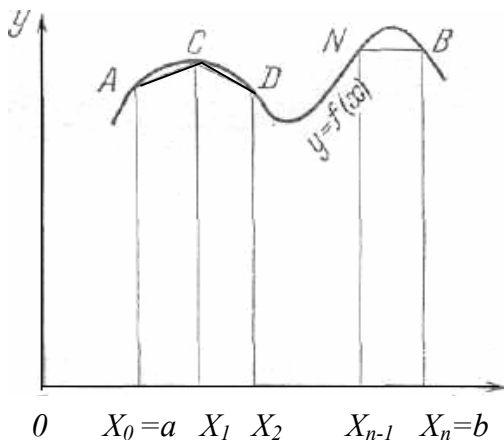


Рисунок 5 - Иллюстрация метода трапеций

3.1.3. Метод Симпсона

Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на $2n$ равных частей длины $h=(b-a)/2n$. Пусть точкам разбиения $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{2n} = b$ соответствуют значения подынтегральной функции $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ т. е. $y_i=f(x_i), x_i=a+i \cdot h, i=0,1,\dots,2n$. Теперь через три последовательные ординаты разбиения проводим квадратичную параболу, т.е. на отрезке $[x_0, x_2]$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменим параболой, проходящей через три точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, на отрезке $[x_2, x_4]$ - через точки $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ и т.д., таким образом получим:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

.....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив эти равенства, получим формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots y_{2n-2})). \quad (14)$$

3.2. Порядок выполнения работы

- 1) Записать расчетные формулы для решения задачи.
- 2) Разработать блок-схему алгоритма.
- 3) Разработать программу на языке Pascal для вычисления определенного интеграла с точностью $\varepsilon=10^{-4}$ указанным в варианте методом (таблица. 2). Вычисление одного приближения интеграла методом прямоугольников, трапеций

или Симпсона следует оформить либо в виде процедуры, либо в виде функции. Для функции формальными параметрами должны быть: границы интегрирования a и b , точность вычисления интеграла ε , а для процедуры - еще и полученное значение интеграла S .

4) Вычислить определенный интеграл средствами пакета MATHCAD.

5) Проанализировать полученные результаты.

3.3. Содержание отчета

Цель работы, постановка задачи, описание метода решения, блок-схема алгоритма, текст программы, описание входных и выходных данных, анализ полученных результатов, выводы.

3.4. Контрольные вопросы

- 1) Дать определение первообразной.
- 2) Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла.
- 3) Показать связь между определенным интегралом и первообразной.
- 4) В чем состоит метод трапеций?
- 5) В чем состоит метод Симпсона?
- 6) В чем состоит метод прямоугольников?

Таблица 2- Варианты задания

№ вар.	Подынтегральная функция	Отрезок интегрирования	Метод решения
1	$\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$	[1; 3,5]	1
2	$tg^2 x + ctg^2 x$	$[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$	2
3	$\frac{1}{x \lg x}$	[2; 3]	3
4	$\frac{\ln^2 x}{x}$	[1; 4]	1
5	$\sqrt{e^x - 1}$	[0; ln2]	2
6	$x \cdot e^x \sin x$	[0; 1]	3
7	$x \cdot shx$	[0; 2]	1
8	$\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$	[0; 2]	2
9	$\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$	[1; 2,5]	3
10	$x \cdot arctgx$	$[0; \sqrt{3}]$	1
11	$\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$	[0; 3]	2
12	$x^x (1 + \ln x)$	[1; 3]	3
13	$\frac{1}{\sqrt{1+3x+2x^2}}$	[0; 1]	1
14	$\frac{\sqrt{x^2 - 0,16}}{x}$	[1; 2]	2
15	2^{3x}	[0; 1]	3

16	$\frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$	$[0; 1]$	1
17	$\frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}$	$[0; 2]$	2
18	$\sin^2 x$	$[0; \pi/2]$	3
19	$x^2 \sqrt{4-x^2}$	$[0; 2]$	1
20	$e^x \cos^2 x$	$[0; \pi]$	2
21	$(x \ln x)^2$	$[1; e]$	3
22	$\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$	$[0; 3]$	1
23	$\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}$	$[0; 1]$	2
24	$\sin x \ln(\operatorname{tg} x)$	$[1; 1,5]$	3
25	$\frac{e^x (1 + \sin x)}{1 + \cos x}$	$[0; 1,5]$	1

В столбце “Метод решения” цифрами заданы следующие методы:

1- метод трапеций;

2- метод Симпсона;

3- метод прямоугольников.

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: изучение методов численного решения дифференциальных уравнений.

4.1. Теоретические сведения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется выражение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, т.е. обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (15)$$

Порядком дифференциального уравнения (15) называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Уравнение (15) называется разрешенным относительно старшей производной, если оно имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (16)$$

Функция $y = f(x)$, обращающая уравнение (15) в тождество, называется решением этого уравнения.

В общем случае дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Задача отыскания решений сводится к вычислению интеграла. Поэтому решение дифференциального уравнения называют его интегралом, а процесс отыскания всех решений – интегрированием дифференциального уравнения.

Общим решением уравнения (15) является семейство функций $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – параметры, определяющие частное решение. Выделение одного частного решения $y = f(x)$ производится путем задания начальных условий вида

$$y_0 = y(x_0), y'_0 = y'(x_0), y''_0 = y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}_0 = y^{(n-1)}(x_0)$$

при $x = x_0$. (17)

По этим начальным условиям определяются n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$. Геометрически каждому частному интегралу соответствует его график, называемый интегральной кривой уравнения.

Задача отыскания решения уравнения (16) при начальных условиях (17) называется задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Уравнение (16) сводится к системе n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка заменой y' на неизвестную функцию $P_1(x)$; y'' - на $P_2(x)$; ... $y^{(n-1)}$ - на $P_{n-1}(x)$. В результате получаем систему n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = P_1, \\ P' = P_2, \\ \dots \\ P'_{n-1} = f(x, y, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}), \end{cases}$$

$$\text{причем } y(x_0) = y_0, P_1(x_0) = y'_0, \dots, P_{n-1}(x_0) = y^{(n-1)}_0.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения любого порядка можно свести к решению уравнений первого порядка.

Часто решение уравнения не удастся найти в общем виде. Поэтому возникает необходимость применять численные методы, дающие приближенное решение задачи. Численные методы позволяют найти решение дифференциального уравнения в виде таблицы приближенных значений частного интеграла, удовлетворяющего указанным начальным условиям, на некотором заданном отрезке. Рассмотрим методы решения дифференциальных уравнений первого порядка [1-4,6].

4.1.1. Метод Эйлера

Метод Эйлера предназначен для отыскания решения уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ на заданном отрезке $[a, b]$. Геометрическая интерпретация метода Эйлера приведена на рисунке 6.

Отрезок $[a, b]$ разделим на n равных отрезков последовательными точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Обозначим $x_1 - a = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = h$. Следовательно,

$$x_k = a + k \cdot h \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad h = \frac{b - a}{n}.$$

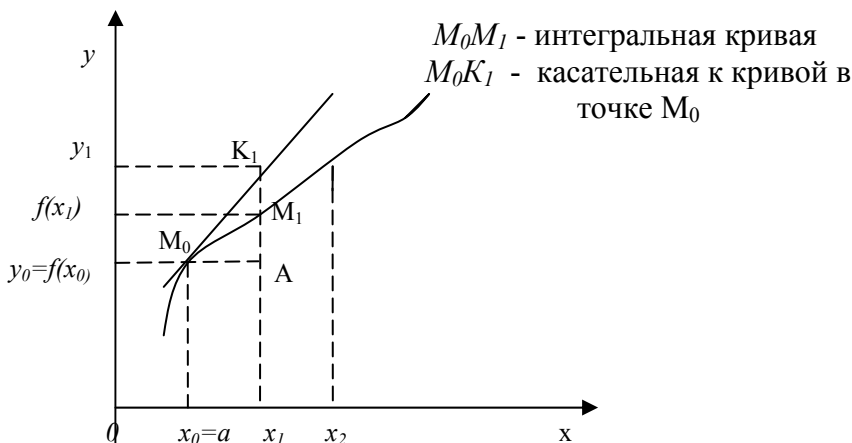


Рисунок 6 - Иллюстрация метода Эйлера

На первом отрезке $[a, x_1]$ искомая интегральная кривая M_0M_1 , проходящая через известную точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется касательной к ней M_0K_1 в точке M_0 :

$$y - y_0 = (x - x_0)y'(x_0, y_0).$$

Здесь $y'(x_0, y_0)$ - угловой коэффициент касательной M_0K_I (тангенс угла $K_I M_0 A$), откуда при $x = x_1$ получаем приближенное значение y_1 искомой функции в точке x_1 :

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)y'(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot y'_0 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Для отрезка $[x_1, x_2]$ находим приближенное значение y_2 искомого интеграла уравнения в точке x_2 :

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1)y'(x_1, y_1) = y_1 + h \cdot y'_1 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1).$$

Таким образом, в процессе решения составляется таблица значений $y_k = y(x_k)$.

Значения y_{k+1} определяются по формуле:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (18)$$

где $f(x, y)$ - правая часть дифференциального уравнения I-го порядка, разрешенного относительно производной.

Выражение (18) составляет сущность метода Эйлера. Этот метод является наиболее простым методом, требующим минимальных затрат вычислительных ресурсов, однако, он обладает сравнительно низкой точностью. Погрешность вычислений на каждом шаге составляет $R_k = 0,5h^2 y''(\varepsilon)$, где $x_k \leq \varepsilon \leq x_{k+1}$.

Метод Эйлера, как правило, применяется для грубых приближений, так как имеет значительные погрешности и часто бывает неустойчив. Точность вычислений можно увеличить, уменьшая шаг изменения аргумента h .

4.1.2. Метод Рунге-Кутта

Наиболее часто при решении дифференциальных уравнений используются методы Рунге - Кутта, различающиеся порядком [1-6]. Метод Рунге-Кутта I-го порядка совпадает с методом Эйлера. Наиболее распространенным является метод Рунге-Кутта IV порядка. Методы Рунге-Кутта используют разложение функции в ряд Тейлора. В методе Рунге-Кутта IV

порядка рассчитываются координаты четырех внутренних точек.

Методы Рунге-Кутты предназначены для отыскания решения уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ на заданном отрезке $[a, b]$.

Отрезок $[a, b]$ делится на n частей последовательными точками $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$:

$$x_{k+1} = x_k + k \cdot h \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

На каждом шаге вычисления выполняются по формулам

$$y_{k+1} = y_k + \frac{(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)}{6}, \quad \text{где}$$

$$K_1 = hf(x_k, y_k),$$

$$K_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2}{2}\right),$$

$$K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3),$$

погрешность метода на каждом шаге имеет порядок h^5 .

Методы Рунге-Кутты являются одноступенчатыми. Это означает, что для нахождения очередного значения, нужна информация только о предыдущей точке. Они требуют лишь вычисления значения самой функции и не требуют вычисления производных. Методы Рунге-Кутты согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка h^p , где степень p называется порядком метода. К серьезным недостаткам методов Рунге-Кутты относится отсутствие простых способов для оценки их погрешностей.

4.2. Порядок выполнения работы

1) Привести заданное вариантом дифференциальное уравнение II порядка (таблица 3) к системе двух уравнений I порядка.

2) Разработать блок-схему алгоритма решения системы дифференциальных уравнений I порядка методом Эйлера.

3) Разработать программу на языке Pascal решения задачи с точностью $\varepsilon=10^{-4}$. Для вычисления правой части дифференциального уравнения использовать подпрограмму-функцию. Предусмотреть в программе вывод на экран таблицы, включающей приближенное решение, точное решение и абсолютную погрешность вычислений на заданном отрезке.

4) Отладить и выполнить программу на ЭВМ, получить решение в виде таблицы приближенных значений частного интеграла, удовлетворяющего начальным условиям, на заданном отрезке.

5) Решить заданное дифференциальное уравнение средствами пакета MATHCAD.

6) Проанализировать полученные результаты.

4.3. Содержание отчета

Цель работы, постановка задачи, описание метода решения, блок-схема алгоритма, текст программы, описание входных и выходных данных, анализ полученных результатов, выводы.

4.4. Контрольные вопросы

1) Как формулируется задача Коши?

2) В чем состоит задача численного решения дифференциального уравнения?

3) В чем состоит метод Эйлера?

4) В чем состоит метод Рунге-Кутты?

5) Перечислите основные достоинства и недостатки методов Эйлера и Рунге-Кутты.

Таблица 3 - Варианты задания

№ вар	Уравнение	Начальн. условия	Отре- зок [a,b]	Шаг h	Точное решение
1	$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$	0;0,5	0,1	$\cos x + x \sin x + (\cos x) \cdot \ln(\cos x)$
2	$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 1$	0;0,5	0,05	$1 - x + 2 \ln(1+x)$
3	$y' + 4y' + 4y = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = -1$	0;1	0,1	$(1+x) \cdot e^{-2x}$
4	$y'' - 3y' = e^{5x}$	$y(0) = 2,2$ $y'(0) = 0,8$	0;0,2	0,02	$2 + 0,1 \cdot (e^{3x} + e^{5x})$
5	$y'' + 4y = \cos 3x$	$y(0) = 0,8$ $y'(0) = 2$	0;1	0,1	$\cos 2x + \sin 2x - 0,2 \cos 3x$
6	$y'' - y' + y = 5 \cdot x \cdot e^x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 2$	0;1	0,1	$e^x + x e^x + 5 e^x \frac{x^3}{6}$
7	$x^2 y'' - 2y = 0$	$y(0) = \frac{5}{6}$ $y'(0) = \frac{2}{3}$	1;2	0,1	$\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3x}$
8	$y'' + y = 1 + e^x$	$y(0) = 2,5$ $y'(0) = 1,5$	0;1	0,1	$\cos x + \sin x + 1 + \frac{1}{2} e^x$
9	$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 8x$	$y(0) = 4$ $y'(0) = 4$	1;1,5	0,05	$2x + \frac{1}{x} + x^3$
10	$x^2 y'' + x y' = 0$	$y(0) = 5$ $y'(0) = -1$	1;1,5	0,05	$5 - \ln x$

11	$y'' - 2y' + y = xe^x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 2$	0;0,5	0,05	$(1+x) \cdot e^x + x^3 \frac{e^x}{6}$
12	$y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$	$y(0) = 2,6$ $y'(0) = 3,2$	0;1	0,1	$e^x + e^{2x} + 0,2\sin x + 0,6\cos x$
13	$x^2 y'' + 2,5y'x - y = 0$	$y(0) = 2$ $y'(0) = 3,5$	1;2	0,1	$3\sqrt{x} - x^{-2}$
14	$4xy'' + 2y' + y = 0$	$y(0) = 1,38$ $y'(0) = -0,15$	1;2	0,1	$\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$
15	$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 2$	$y(0) = 1,433$ $y'(0) = 2,3$	1;2	0,1	$x^2 + 0,1x^3 + \frac{1}{3}$
16	$y'' - 3y' + 2y = \cos 2x$	$y(0) = 1,95$ $y'(0) = 2,7$	0;0,5	0,05	$e^x + e^{2x} - \frac{1}{20} \cdot (3\sin 2x + \cos 2x)$
17	$y'' - 0,5y' - 0,5y = 3e^{\frac{x}{2}}$	$y(0) = -4$ $y'(0) = -2,5$	0;1	0,1	$e^x + e^{-\frac{x}{2}} - 6 \cdot e^{\frac{x}{2}}$
18	$y'' + 4y' + 4y = 2x - 3$	$y(0) = -\frac{1}{4}$ $y'(0) = -\frac{1}{2}$	0;0,5	0,05	$(1+x)e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$
19	$y'' + y = x^2 - x + 2$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$	0;1	0,1	$\cos x + \sin x + x^2 - x$
20	$y'' + 4y = \sin x + \sin 2x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = -\frac{23}{12}$	0;1	0,1	$\cos 2x - \sin 2x + \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{4}x \cos 2x$

21	$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \cos x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$	0;0,5	0,05	$e^{-x} \left(\cos x + \sin x + x \cdot \sin x \right)$
22	$y'' + 4y = e^{3x} \cdot (13x - 7)$	$y(0) = 0$ $y'(0) = -4$	0;0,2	0,02	$\cos 2x - \sin 2x + e^{3x} \cdot (x - 1)$
23	$y'' - y = \sin x + \cos 2x$	$y(0) = 1,8$ $y'(0) = -0,5$	0;2	0,2	$e^x + e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{5} \cos 2x$
24	$y'' - y' - 6y = 2e^{4x}$	$y(0) = 1,433$ $y'(0) = -0,36$	0;1	0,1	$0,1e^{3x} + e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{4x}$
25	$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$	$y(0) = 5,1$ $y'(0) = 4,2$	0;1	0,1	$e^x + 0,1e^{2x} + \frac{x^2}{2} + 3x + 4$

5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Цель работы: изучение метода линейной интерполяции и метода Лагранжа, их применение для поиска приближенного значения функции в заданной точке.

5.1. Теоретические сведения

Пусть задана функция $y=f(x)$. Если получение значений $f(x)$ требует громоздких вычислений, то для практических расчётов имеет смысл заменить её достаточно простой аналитической зависимостью $F(x)$, близкой к $f(x)$ в некотором смысле и удобной для вычислений.

Кроме того, при проведении экспериментов часто удается получить лишь небольшое число значений функции при некоторых значениях аргументов и требуется определить значения функции при других значениях аргументов. Это также требует получения соответствующей аналитической зависимости.

Обе эти задачи относят к задачам приближения функций. Различают два основных способа выбора приближения функций: интерполяцию и аппроксимацию [1,2,4-6].

Пусть функция $f(x)$ задана таблицей её значений $y=y_0, y_1, \dots, y_n$ в точках $x=x_0, x_1, \dots, x_n$, называемыми узлами интерполяции. Задача интерполяции заключается в выборе функции $F(x)$, принимающей в узлах интерполяции $x_i \in [x_0, x_n]$ ($i=0, 1, \dots, n$), значения, совпадающие с заранее заданными значениями неизвестной функции $y = f(x)$, т.е.

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_i) = y_i, \dots, F(x_n) = y_n \quad (19)$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y = F(x)$, проходящую через систему точек $M(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, \dots, n$).

Как правило, в качестве интерполирующих функций выбирают многочлены. Поскольку число узлов равно $n+1$, то степень интерполяционного многочлена равна n .

Во многих случаях, особенно когда значения функций $f(x)$ получены экспериментально и содержат погрешности, нет необходимости точного совпадения значений $F(x)$ и $f(x)$ в узловых точках. Более того, для практики можно пользоваться многочленами меньшей степени m ($m < n$) или аналитической зависимостью иного вида, график которой проходил бы достаточно близко от точек $M(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) на всём протяжении интервала изменения x . Процедура построения функции из заранее определённого понятия близости называется аппроксимацией.

В общем случае задача интерполяции имеет бесконечное множество решений или совсем не имеет решения. Если о функции $f(x)$ ничего неизвестно, кроме значений в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, то значение функции в точке x , отличной от всех этих точек, может быть совершенно произвольным. Задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям (19), т.е.

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_i) = y_i, \dots, P_n(x_n) = y_n.$$

Полученную интерполяционную формулу $Y = P(x)$ обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции для любого $x \neq x_i$ $i = 0, 1, \dots, n$. Такая операция называется интерполяцией или интерполированием, а $P(x)$ - интерполяционным многочленом. Различают интерполяцию в узком смысле, когда $x \in [x_0, x_n]$, и экстраполяцию, когда $x \notin [x_0, x_n]$. Интерполяционные формулы имеет смысл применять в том случае, если функция достаточно «гладкая», т.е. обладает достаточным числом не слишком быстро возрастающих производных.

Экстраполяцию часто используют с целью прогнозирования поведения различных процессов при значениях x , выходящих за пределы отрезка наблюдения. Однако надежность такого прогноза при значениях x , удаленных на значительное расстояние от $[x_0, x_n]$ как правило, не велика.

5.1.1. Метод Лагранжа

Интерполяция по Лагранжу применяется в общем случае для произвольно расположенных узлов.

Пусть n - число узлов, x – точка, в которой необходимо найти приближенное значение функции $f(x)$.

Функцию $f(x)$ заменяют более простой интерполирующей функцией $F(x)$, значения которой в узлах интерполирования $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ совпадают с соответствующими значениями $f(x)$. Согласно методу Лагранжа $F(x)$ отыскивают в виде обобщенного многочлена $P_n(x)$.

В общем виде интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$P_n(x) = y_0 b_0(x) + y_1 b_1(x) + \dots + y_n b_n(x),$$

где y_i - заданные значения функции в точках x_i ;

$b_i(x)$ - многочлены степени n , коэффициенты которых можно найти с помощью $(n+1)$ -го уравнения $P_n(x_i) = y_i, i=1, 2, \dots, n$.

В результате получаем систему уравнений

Существенным недостатком интерполяции по Лагранжу является то, что при известном значении многочлена $P_n(x)$, построенного по значениям $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ в n узлах, введение нового $(n + 1)$ -го узла требует проведения всех вычислений заново.

5.1.2. Линейная интерполяция

Линейная интерполяция – простейший вид интерполяции. При линейной интерполяции искомое значение определяется по двум узлам интерполяции. Значения функции в узлах интерполяции соединяют прямой линией.

Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) имеет вид:

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x) - f(x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}.$$

Значение функции $y = f(x)$ в точке x , удовлетворяющей неравенству $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, принимают равным значению

$$y = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) + f(x_i) \quad (21)$$

линейной функции, совпадающей с $f(x)$ в точках $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$.

5.2. Порядок выполнения работы

1) Разработать блок-схему алгоритма нахождения приближенного значения функции, заданной таблично при указанном значении аргумента (таблица 4) методом Лагранжа и методом линейной интерполяции.

2) Разработать и отладить программу на языке Pascal.

- 3) Выполнить программу на ЭВМ.
- 4) Решить задачу интерполяции средствами пакета MATHCAD.
- 4) Проанализировать полученные результаты.

5.3.Содержание отчета

Цель работы, постановка задачи, описание метода решения, блок-схема алгоритма, текст программы, описание входных и выходных данных, анализ полученных результатов, выводы.

5.4.Контрольные вопросы

- 1) Что такое приближение функций?
- 2) Как формулируется задача интерполяции?
- 3) Что такое экстраполяция функции?
- 4) Что такое аппроксимация функции?
- 5) В чем состоит метод линейной интерполяции?
- 6) В чем состоит метод Лагранжа?
- 7) Перечислите основные достоинства и недостатки рассматриваемых методов.

Таблица 4- Варианты задания

№ вар.	Функция							Значение аргумента x
1	x	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75	0,702
	y	1,636	1,732	1,877	2,033	2,223	2,357	
2	x	1,12	1,27	1,39	1,53	1,58	1,65	1,315
	y	2,453	2,735	3,981	4,036	4,567	5,115	
3	x	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64	0,454
	y	2,739	2,301	1,968	1,788	1,595	1,343	
4	x	0,41	0,46	0,52	0,60	0,65	0,73	0,478
	y	2,574	2,325	2,093	1,862	1,849	1,621	
5	x	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75	0,521
	y	1,636	1,732	1,877	2,033	2,223	2,357	
6	x	0,02	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30	0,119
	y	1,023	1,096	1,147	1,215	1,345	1,527	
7	x	0,35	0,41	0,47	0,53	0,58	0,65	0,515
	y	2,741	2,303	1,981	1,788	1,569	1,341	
8	x	0,68	0,73	0,80	0,88	0,93	0,99	0,854
	y	0,809	0,895	1,031	1,218	1,369	1,524	
9	x	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	0,40	0,224
	y	9,054	6,617	4,692	3,352	2,744	2,365	
10	x	0,47	0,54	0,67	0,79	0,87	0,92	0,691
	y	1,814	2,031	2,816	3,138	3,905	4,744	
11	x	3,11	3,31	3,44	3,58	3,70	3,79	3,522
	y	2,352	2,831	3,425	4,012	4,647	5,125	
12	x	0,36	0,43	0,49	0,54	0,59	0,65	0,514
	y	4,739	5,301	5,968	6,288	6,595	7,343	
13	x	0,22	0,37	0,42	0,50	0,55	0,63	0,334
	y	1,592	1,317	1,046	0,835	0,712	0,621	
14	x	0,63	0,68	0,75	0,82	0,90	0,95	0,801
	y	1,645	1,724	1,883	1,997	2,123	2,307	
15	x	0,12	0,18	0,22	0,27	0,33	0,40	0,247
	y	1,025	1,097	1,151	1,208	1,335	1,471	

16	x	0,34	0,42	0,48	0,55	0,59	0,66	0,495
	y	3,541	3,401	2,891	2,799	2,612	2,324	
17	x	0,66	0,71	0,78	0,86	0,91	0,97	0,814
	y	1,829	1,935	2,034	2,256	2,392	2,518	
18	x	0,41	0,45	0,51	0,59	0,65	0,73	0,473
	y	5,1542	4,707	4,392	4,052	3,743	3,365	
19	x	0,23	0,28	0,35	0,42	0,49	0,57	0,386
	y	1,435	1,513	1,677	1,833	2,023	2,257	
20	x	0,82	0,88	0,92	0,97	1,13	1,30	1,009
	y	1,023	1,096	1,147	1,215	1,345	1,527	
21	x	0,64	0,71	0,77	0,83	0,88	0,95	0,802
	y	2,758	2,413	1,968	1,775	1,554	1,327	
22	x	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75	0,622
	y	1,636	1,732	1,877	2,033	2,223	2,357	
23	x	1,12	1,27	1,39	1,53	1,58	1,65	1,425
	y	2,453	2,735	3,981	4,036	4,567	5,115	
24	x	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64	0,467
	y	2,739	2,301	1,968	1,788	1,595	1,343	
25	x	0,41	0,46	0,52	0,60	0,65	0,73	0,528
	y	2,574	2,325	2,093	1,862	1,849	1,621	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе/ Д. Мак-Кракен, У.Дорн. - М.: Мир, 1977.
2. Светозарова Г.И. Практикум по программированию на алгоритмических языках/ Г.И. Светозарова, Е.В. Сагитов, А.В. Козловский. - М.: Наука, 1980.
3. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие/ А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова.- М.: Высшая школа, 1994.
4. Бахвалов А.С. Численные методы/ А.С. Бахвалов, А.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Наука, 2003.
5. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование/ Ю.П. Боглаев. - М.: Высшая школа, 1990.
6. Волков Е.А. Численные методы/ Е.А. Волков. - М.: Наука, 1987.
7. Воробьева Г.А. Практикум по вычислительной математике/ Г.А. Воробьева, А.Н. Данилова. - М.: Высшая школа, 1990.
8. Дьяконов В.А. МATHCAD 2000: учебный курс/ В.А. Дьяконов.-СПб:Питер, 2001.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Краткие сведения по работе с пакетом MATHCAD

Среда MATHCAD предназначена для решения вычислительных задач. Переменные могут быть обозначены символами латинского или греческого алфавита с учетом регистра. Для ввода символов греческого алфавита вводится символ латинского алфавита в соответствии с нижеприведенной таблицей, а затем выполняется преобразование с помощью комбинации клавиш Ctrl+G.

α	a	η	h	$\omicron$	o	ω	v
β	b	ι	i	π	p	ϖ	w
χ	c	ψ	j	θ	q	ξ	x
δ	d	κ	k	ρ	r	Ψ	y
ϵ	e	λ	l	σ	s	ζ	z
ϕ	f	μ	m	τ	t		
γ	g	ν	n	υ	u		

A	A	H	H	O	O	ς	V
B	B	I	I	Π	P	Ω	W
X	C	Φ	J	Θ	Q	Ξ	X
Δ	D	K	K	P	R	Ψ	Y
E	E	Λ	L	Σ	S	Z	Z
Φ	F	M	M	T	T		
Γ	G	N	N	Y	U		

Выражения в MATHCAD записываются согласно правилам математики. Слева должно стоять имя переменной, а справа – выражение. Между левой и правой частями должен находиться символ присваивания := (клавиша «:»).

Для ввода операций используются следующие клавиши:

сложение	+
деление	/

возведение в степень	^
факториал	!
умножение	*
вычитание	-
корень n-й степени	Ctrl+\
квадратный корень	\

Для вывода результатов вычислений следует ввести имя переменной или выражение и нажать клавишу «=».

Решение уравнений с одним неизвестным

Пусть задано уравнение в виде

$$f(x) = 0.$$

Решение даётся встроенными функциями *root*:

root(f(x),x) и *root(f(x),x,a,b)*, где *f(x)*-левая часть рассматриваемого уравнения, *x*- переменная, относительно которой решается уравнение, *a* и *b* – левая и правая границы интервала локализации корня. При использовании функции *root(f(x),x)* переменная *x* должна получить начальное приближение.

Рассмотрим уравнение:

$$\cos(x) = x + 0.2.$$

Пусть известно, что на интервале $[-1,1]$ имеется единственный корень уравнения.

Тогда, чтобы решить его в MATHCAD, надо записать:

root(cos(x) - x - 0.2,x,-1,1) и нажать клавишу «=».

Численное интегрирование

Для получения численного значения определенного интеграла функции *f(x)* на отрезке $[a,b]$, необходимо записать

$$\int_a^b f(x)dx \text{ и нажать клавишу «=»}.$$

Здесь

- $f(x)$ есть скалярная функция, определённая на отрезке $[a, b]$;
- x есть переменная интегрирования;
- a и b – границы интегрирования.

Например,

$$\int_1^3 x^2 e^x dx = 97.709 \quad .$$

Решение дифференциальных уравнений

Для решения дифференциального уравнения средствами пакета MATHCAD следует использовать функцию *rkfixed*($y, x1, x2, npoints, D$) из категории Differential Equation Solving (Решение дифференциальных уравнений). Функция *rkfixed* предназначена для решения уравнений и систем уравнений I порядка методом Рунге-Кутты IV порядка. Функция возвращает матрицу, в которой первый столбец содержит значения аргумента, остальные столбцы содержат соответствующие значения функции и первых $n-1$ производных.

Рассмотрим уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$$

с начальными условиями $y(0)=5.1$; $y'(0)=4.2$.

Пусть задан отрезок интегрирования: $[0;1]$ и шаг интегрирования 0.1.

Положим $p=y'$. Тогда исходное уравнение можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = 3 \cdot p - 2 \cdot y + x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$$

Перед вызовом функции *rkfixed*($y, x1, x2, npoints, D$) необходимо определить ее аргументы:

y – вектор начальных условий;

$x1$ – начало отрезка интегрирования;

$x2$ – конец отрезка интегрирования;

$npoints$ – число точек, в которых вычисляется решение;

D – 2-х элементный вектор правых частей системы уравнений I порядка (первых производных искомых функций).

Для приведенного примера

$$y = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 4.2 \end{pmatrix}$$

$$x1=0$$

$$x2=1$$

$$npoints=10$$

$$D(t, y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ 3 \cdot y_1 - 2 \cdot y_0 + x^2 + 3 \cdot x \end{pmatrix}$$

Интерполяция

Для нахождения значения функции в заданной точке x следует использовать встроенную функцию $linterp(vx, vy, x)$, которая возвращает значение функции в указанной точке, полученное с помощью линейной интерполяции. Кроме уже определенного параметра x , параметрами функции являются:

vx – вектор вещественных значений аргументов, упорядоченных по возрастанию, он соответствует точкам $x_0, x_1, \dots, x_n$;

vy – вектор вещественных значений функции, соответствующих величинам $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Размерность векторов vx и vy должна быть одинаковая, точка x должна быть в диапазоне $x_0, \dots, x_n$.

Например, имеются два вектора:

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 89 \\ 22.5 \\ 78 \\ 90 \\ 33.78 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

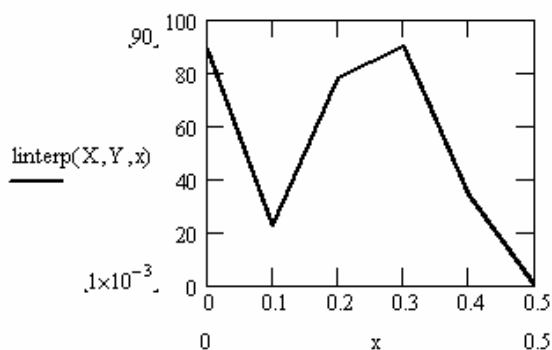
Присвоив переменной t значение функции в точке 0.33

$t := \text{interp}(X, Y, 0.33)$,

получим

$t = 73.134$ ■

Построим график интерполяционной функции $F(x)$:



По графику можно убедиться, что в узловых точках значения $F(x)$ и заданные значения функции Y совпадают.

Заказ № _____ от « ____ » _____ 200 ____ Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ