

УДК 517.5

И.М. Гуревич,

Ю.Е. Обжерин

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: vm@sevgtu.sebastopol.ua

О ТРАНЗИТИВНОСТИ ВЗАИМОСВЯЗИ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Исследуются свойства характеристик транзитивности взаимосвязанных классических случайных величин и взаимосвязанных квантовых состояний.

Введение. Одной из задач теории вероятностей и математической статистики является изучение взаимосвязи случайных величин. С этой целью разработан аппарат корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа. Для оценки связи между случайными величинами в теории вероятностей используются различные характеристики связи, такие как: корреляционный момент, корреляционное отношение, различные коэффициенты корреляции и т.д. С информационной точки зрения вопрос взаимосвязи случайных величин рассматривается в теории информации.

При изучении взаимосвязи случайных величин возникает задача транзитивности связей, установление условий, при выполнении которых это свойство имеет место.

Сцепленные состояния представляют собой физические объекты, свойства которых недостаточно изучены. В частности, также возникает вопрос о наличии свойства транзитивности связей у этих объектов.

В данной работе исследуются свойства характеристик транзитивности взаимосвязанных классических случайных величин и взаимосвязанных (сцепленных) квантовых состояний.

1. Исследование транзитивности информационных характеристик классических объектов

Пусть имеется трехмерная случайная величина (СВ) (X, Y, Z) . СВ X связана с СВ Y (совместной плотностью распределения, взаимной информацией, корреляцией,...), СВ Y связана с СВ Z . Возникает вопрос о взаимосвязи СВ X и Z .

Для решения этого вопроса рассмотрим взаимную информацию связи (по Шеннону) случайных величин, которая для двух СВ X и Y определяется равенством [1, 2, 4]:

$$I_{xy} = H_x + H_y - H_{xy}, \quad (1)$$

где H_x, H_y – энтропии СВ X, Y ; H_{xy} – энтропия двумерной СВ (X, Y) . Величина I_{xy} можно интерпретировать как количество информации об X , содержащейся в Y .

По аналогии с формулой (1) определяется информация связи и большего числа случайных величин. В общем случае n – кратная информация связи n – мерной СВ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ определяется формулой [1]:

$$I_{x_1 \dots x_n} = \sum_{i=1}^n H_{x_i} - \sum H_{x_i x_j} + \sum H_{x_i x_j x_k} - \dots + (-1)^{n+1} H_{x_1 \dots x_n}, \quad (2)$$

для трехмерной СВ (X, Y, Z) формула (2) имеет вид:

$$I_{xyz} = H_x + H_y + H_z - H_{xz} - H_{yz} + H_{xyz}. \quad (3)$$

Рассмотрим информацию связи гауссовых СВ. Пусть даны две группы гауссовых СВ:

$$\bar{X} = (X_1, \dots, X_r), \quad \bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_s) = (X_{r+1}, \dots, X_{r+s}).$$

Гауссовские многомерные СВ характеризуются [3] векторами средних значений

$$m_\alpha = MX_\alpha, \quad m_\beta = n_{\beta-r} = MY_{\beta-r} = MX_\beta$$

и ковариационными матрицами

$$\begin{aligned} R &= \|R_{\alpha\beta}\| = \|M(X_\alpha - m_\alpha)(X_\beta - m_\beta)\|, \\ S &= \|S_{\beta\sigma}\| = \|M(Y_{\beta-r} - n_{\beta-r})(Y_{\sigma-r} - n_{\sigma-r})\|, \\ U &= \|U_{\alpha\sigma}\| = \|M(X_\alpha - m_\alpha)(Y_{\sigma-r} - n_{\sigma-r})\|, \\ &\left(\alpha, \beta = 1, \dots, r; \quad \sigma = r+1, \dots, r+s \right). \end{aligned}$$

Совместная ковариационная матрица имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} R & U \\ U^T & S \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где T означает транспонирование.

В [1] показано, что информация связи между СВ $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ определяется формулой:

$$I_{\bar{X}\bar{Y}} = -\frac{1}{2} Sp \ln(1 - US^{-1}U^T R^{-1}), \quad (5)$$

где Sp – след матрицы.

Рассмотрим частный случай формулы (5).

1. Пусть в каждой группе $\bar{X}$, $\bar{Y}$ имеется по одной гауссовой СВ X и Y . Совместная матрица в этом случае имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 R_1 \\ \sigma_1 \sigma_2 R_1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

где R_1 – коэффициент корреляции СВ X и Y , σ_1^2 , σ_2^2 – дисперсии СВ X и Y .

В этом случае [1]

$$I_{XY} = -\frac{1}{2} \ln(1 - R_1^2). \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что информация связи I_{XY} двух гауссовых СВ X и Y равна нулю тогда и только тогда, когда коэффициент корреляции $R_1=0$, т.е. СВ X и Y независимы; $I_{XY} \rightarrow \infty$ при $R_1 \rightarrow \pm 1$.

2. Гауссова трехмерная СВ (X, Y, Z) определяется в общем случае ковариационной матрицей:

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 R_3 & \sigma_1 \sigma_3 R_2 \\ \sigma_1 \sigma_2 R_3 & \sigma_2^2 & \sigma_2 \sigma_3 R_1 \\ \sigma_1 \sigma_3 R_2 & \sigma_2 \sigma_3 R_1 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где R_1 – коэффициент корреляции СВ Y и Z ; R_2 – X и Z ; R_3 – X и Y .

Используя формулу (6), находим парные взаимные информации связи СВ:

$$I_{XY} = -\frac{1}{2} \ln(1 - R_3^2), \quad I_{YZ} = -\frac{1}{2} \ln(1 - R_1^2), \quad I_{XZ} = -\frac{1}{2} \ln(1 - R_2^2).$$

Предположим, что парные взаимные информации $I_{XY} = I_{YZ} = 0$, $I_{XZ} \neq 0$. Это означает, что $R_1=R_3=0$, $R_2 \neq 0$. Ковариационная матрица K в этом случае имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \sigma_1 \sigma_3 R_2 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ \sigma_1 \sigma_3 R_2 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Для трехмерной гауссовой СВ (X, Y, Z) с ковариационной матрицей вида (8) СВ X и Y , Y и Z информационно не связаны, а X и Z информационно связаны.

Аналогичным образом строится гауссова СВ (X, Y, Z) , где $I_{XY} \neq 0$, $I_{YZ} \neq 0$, а $I_{XZ} = 0$.

Отсюда следует вывод: информационная мера связи (по Шеннону) свойством транзитивности не обладает.

Приведем выражение для информации связи трех гауссовых СВ. В [1] показано, что

$$I_{XYZ} = \frac{1}{2} \ln(1 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2 + 2R_1 R_2 R_3) - \frac{1}{2} \ln(1 - R_1^2) - \frac{1}{2} \ln(1 - R_2^2) - \frac{1}{2} \ln(1 - R_3^2).$$

Пусть $I_{XY} \rightarrow 0$, $I_{YZ} \rightarrow 0$, т.е. $R_3 \rightarrow 0$, $R_1 \rightarrow 0$. Тогда

$$I_{XYZ} \rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 - R_2^2) - \frac{1}{2} \ln(1 - R_2^2) = 0.$$

Следовательно, при стремлении к нулю двух парных взаимных информаций, тройная информация связи также стремится к нулю.

Таким образом, для классических систем в общем случае свойство транзитивности связей отсутствует. Представляет интерес выявления условий, при выполнении которых это свойство имеет место.

II. Исследование транзитивности информационных характеристик квантовых объектов (сцепленных состояний)

Сцепленные (запутанные) состояния представляют собой физические объекты, имеющие большое значение в теоретических и экспериментальных исследованиях многих вопросов квантовых вычислений.

Впервые на необычные свойства сцепленных состояний обратили внимание А. Эйнштейн, Подольский, Розен. Они решили, что свойства сцепленных состояний – сохранить первоначально заданное воздействие вне зависимости от их взаимного расположения – настолько необычны, что реализация в природе специальных состояний невозможна. Между тем, оказалось, сто именно они открыли новый класс физических объектов и взаимодействий. В 1935 году Э. Шредингер ввел сам термин – запутанное состояние – для чистых состояний систем, состоящих из взаимодействующих частей. Конструкцию сцепленных состояний, по-видимому, первым (в 1957 году) использовал Хью Эверет в предположенной им модели квантовой механики.

Ведущими российскими и зарубежными учеными исследуются и предлагаются способы построения и использования специальных состояний [5 – 8]. Наиболее известно использование сцепленных состояний для сверхплотного кодирования и квантовой телепортации. Предлагаемое использование сцепленных состояний двух частей системы связано с их необычным свойством – сохранять первоначально заданное взаимодействие (квантовую коррекцию) все зависимости от их взаимного расположения. В связи с тем, что сцепленные состояния квантовых систем имеют определенную структуру транзитивность взаимосвязи может быть исследована более детально.

1) Сцепленное состояние q-битов в общем случае

В подразделах 1 – 3 использованы результаты [9].

Состояния системы из одного q-бита имеет определенную логическую структуру – 0, 1.

Сцепленное состояние двух q-битов 1 и 2 в общем случае имеет вид:

$$\psi = a/0_1 > /0_2 > + b/0_1 > /1_2 > + c/1_1 > /0_2 > + d/1_1 > /1_2 > ,$$

где $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ и $ad \neq bc$; $a/0_1 > /0_2 >, b/0_1 > /1_2 >, c/1_1 > /0_2 >, d/1_1 > /1_2 >$ – векторы, входящие в состав сцепленного состояния, $/0_1 >, /0_2 >, /0_1 >, /1_2 >, /1_1 >, /0_2 >, /1_1 > /1_2 >$ – компоненты векторов, входящих в состав сцепленного состояния.

При $ad = bc$ состояние Ψ является прямым произведением q-битов 1 и 2.

Пусть

$$\psi_1 = (a_1/0_1 > + b_1/1_1) \text{ и } \psi_2 = (a_2/0_2 > + b_2/1_2) .$$

$$|a_1|^2 + |b_1|^2 = 1, |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1 .$$

$$\psi = \psi_1 \psi_2 = (a_1/0_1 > + b_1/1_1)(a_2/0_2 > + b_2/1_2) .$$

Тогда,

$$\psi = (a_1 a_2 /0_1 > /0_2 > + a_1 b_2 /0_1 > /1_2 > + b_1 a_2 /1_1 > /0_2 > + b_1 b_2 /1_1 > /1_2 >) ,$$

и

$$a = a_1 a_2, b = a_1 b_2, c = b_1 a_2, d = b_1 b_2 .$$

Следовательно,

$$ad = a_1 a_2 b_1 b_2 = bc = a_1 b_2 b_1 a_2 .$$

Следует отметить, что наличие состояний не представимых в виде прямого произведения двумерных векторов является геометрическим свойством, а не свойством присущим именно квантовым состояниям.

Сцепленное состояние двух q-битов 1 и 2

$$\psi = a/0_1 > /0_2 > + b/0_1 > /1_2 > + c/1_1 > /0_2 > + d/1_1 > /1_2 > ,$$

характеризуется наличием связи между q-битами 1 и 2.

Само наличие связи характеризуется логически: есть связь, нет связи. «Силу» связи между q-битами 1 и 2 можно охарактеризовать информационными характеристиками, в частности информацией связи. Состояния системы из 2 q-битов имеет определенную логическую структуру – ее можно представить в виде подмножества прямого произведения логических структур 2 q-битов. Сцепленные состояния различаются как по структуре логической связи, так по величине информационной взаимосвязи.

В случае сцепленного состояния двух q-битами 1 и 2

$$\psi = a/0_1 > /0_2 > + b/0_1 > /1_2 > + c/1_1 > /0_2 > + d/1_1 > /1_2 > ,$$

при реализации компоненты $/0_1 >$ первого и второго вектора ($a/0_1 > /0_2 >$ и $b/0_1 > /1_2 >$), входящего в состав специального состояния, возможна реализация компонент $/0_2 >$ и $/1_2 >$ первого и второго вектора ($a/0_1 > /0_2 >$ и $b/0_1 > /1_2 >$), входящих в состав специального состояния. При реализации компоненты $/1_1 >$ третьего и четвертого векторов ($c/1_1 > /0_2 >$ и $d/1_1 > /1_2 >$), входящего в состав специального

состояния, возможна реализация компонент $/0_2 >$ и $/1_2 >$ третьего и четвертого векторов ($c/1_1 > /0_2 >$ и $d/1_1 > /1_2 >$), входящего в состав специального состояния. Таким образом, в рассмотренном примере выбор одной из компонент не определяет однозначно выбор другой компоненты.

В случае сцепленного состояния двух q-битов 1 и 2

$$\psi = a/0_1 > /0_2 > + d/1_1 > /1_2 > ,$$

при реализации компоненты $/0_1 >$ первого вектора ($a/0_1 > /0_2 >$), входящего в состав специального состояния, возможна реализация компонент $/0_2 >$ первого вектора ($a/0_1 > /0_2 >$), входящих в состав специального состояния. При реализации компоненты $/1_1 >$ второго вектора ($d/1_1 > /1_2 >$), входящего в состав специального состояния, возможна реализация компоненты $/0_2 >$ и $/1_2 >$ второго вектора ($d/1_1 > /1_2 >$), входящего в состав специального состояния. Таким образом, в данном примере выбор одной из компонент определяет однозначно выбор другой компоненты.

2) Информация связи между q-битами 1 и 2

Вычислим информацию связи между q-битами 1 и 2, взаимодействие которых задано сцепленным состоянием

$$\psi = a/0_1 > /0_2 > + b/0_1 > /1_2 > + c/1_1 > /0_2 > + d/1_1 > /1_2 > .$$

В матрице $P_{\text{сов}}$ приведены $p(i, j)$ – вероятности совместного осуществления событий $/0_1 > /0_2 >$; $/0_1 > /1_2 >$; $/1_1 > /0_2 >$; $/1_1 > /1_2 >$.

$$P_{\text{сов}} = \begin{pmatrix} |a|^2 & |b|^2 \\ |c|^2 & |d|^2 \end{pmatrix}.$$

Вероятности событий $/0_1 >$; $/1_1 >$; $/0_2 >$; $/1_2 >$ равны

$$P(/0_1 >) = |a|^2 + |b|^2 .$$

$$P(/1_1 >) = |c|^2 + |d|^2 .$$

$$P(/0_2 >) = |a|^2 + |c|^2 .$$

$$P(/1_2 >) = |b|^2 + |d|^2 .$$

В матрице $P_{\text{усл}}$ приведены $p(i, j)$ – условные вероятности осуществления событий $/0_2 > // 0_1 >$; $/0_2 > // 1_1 >$; $/1_2 > // 0_1 >$; $/1_2 > // 1_1 >$; i – номер строки, j – номер столбца.

$$P_{\text{усл}} = \begin{pmatrix} \frac{|a|^2}{|a|^2 + |b|^2} & \frac{|b|^2}{|a|^2 + |b|^2} \\ \frac{|c|^2}{|c|^2 + |d|^2} & \frac{|d|^2}{|c|^2 + |d|^2} \end{pmatrix}.$$

Неопределенность (информационная энтропия) совместного распределения состояний q-битов 1, 2 равна

$$N(1,2) = -(|a|^2 \log |a|^2 + |b|^2 \log |b|^2 + |c|^2 \log |c|^2 + |d|^2 \log |d|^2).$$

Неопределенность (информационная энтропия) состояний q-бита 1 равна

$$N(1) = -(|a|^2 + |b|^2) \log(|a|^2 + |b|^2) + (|c|^2 + |d|^2) \log(|c|^2 + |d|^2).$$

Неопределенность (информационная энтропия) состояний q-бита 2 равна

$$N(2) = -(|a|^2 + |c|^2) \log(|a|^2 + |c|^2) + (|b|^2 + |d|^2) \log(|b|^2 + |d|^2).$$

Условная неопределенность (условная информационная энтропия) состояний q-бита 2 при заданных состояниях q-бита 1 равна

$$N_{2/1} = - \sum_{i,j} p(i, j) \log p(i, j) = -(|a|^2 \log |a|^2 / (|a|^2 + |b|^2) + |b|^2 \log |b|^2 / (|a|^2 + |b|^2) + |c|^2 \log |c|^2 / (|c|^2 + |d|^2) + |d|^2 \log |d|^2 / (|c|^2 + |d|^2)).$$

Информация связи между q-битами 1 и 2, входящими в сцепленное состояние

$$\psi = a/0_1 > /0_2 > + b/0_1 > /1_2 > + c/1_1 > /0_2 > + d/1_1 > /1_2 > ,$$

где $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ и $ad \neq bc$.

$$I(1,2) = N(1) + N(2) - N(1,2) = N(2) - N(2/1) = -\left(\left(|a|^2 + |b|^2\right)\log\left(|a|^2 + |b|^2\right) + \left(|c|^2 + |d|^2\right)\log\left(|c|^2 + |d|^2\right)\right) - \left(\left(|a|^2 + |c|^2\right)\log\left(|a|^2 + |c|^2\right) + \left(|b|^2 + |d|^2\right)\log\left(|b|^2 + |d|^2\right)\right) + \left(|a|^2 \log|a|^2 + |b|^2 \log|b|^2 + |c|^2 \log|c|^2 + |d|^2 \log|d|^2\right). \quad (9)$$

3) Сцепленное состояние нескольких q-битов

Сцепленное состояние трех q-битов 1, 2, 3 в общем случае имеет вид

$$\Psi = a_{000}/0_1 > /0_2 > /0_3 > + a_{001}/0_1 > /0_2 > /1_3 > + a_{011}/0_1 > /1_2 > /1_3 > + a_{100}/1_1 > /0_2 > /0_3 > + a_{101}/1_1 > /0_2 > /1_3 > + a_{110}/1_1 > /1_2 > /0_3 > + a_{111}/1_1 > /1_2 > /1_3 > ,$$

где $\sum_{ijk} |a_{ijk}|^2 = 1$ и состояние Ψ не раскладывается в тензорное произведение состояний трех q-битов в тензорное произведение состояний одного и двух q-битов.

Логически связанное сцепленное состояние трех q-битов 1, 2, 3, например, имеет вид

$$\Psi = a_{000}/0_1 > /0_2 > /0_3 > + a_{111}/1_1 > /1_2 > /1_3 > .$$

Многомерное состояние из n q-битов 1, 2, 3, ..., n в общем случае имеет вид

$$\Psi = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} /S_{\alpha_1} > /S_{\alpha_2} > \dots /S_{\alpha_n} >$$

где α_i принимает значение 0 и 1. При $\alpha_i = 0/S_{\alpha_i} > = /0_i > .$ При $\alpha_i = 1/S_{\alpha_i} > = /1_i > .$ Сумма берется по всем возможным сочетаниям $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$. Всего в сумму входят 2^n слагаемых. $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ образуют полную группу событий. $|a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}|^2$ – вероятность события $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$. $\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} |a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}|^2 = 1$.

Множество состояний системы из n q-битов имеет простую логическую структуру (структуру n-мерного куба) – ее можно представить в виде множества вершин n-мерного куба – прямого произведения логических структур n q-битов.

Произвольное состояние системы из n q-битов имеет определенную логическую структуру – ее можно представить в виде подмножества вершин n-мерного куба – прямого произведения логических структур n q-битов.

4) Условие транзитивности взаимосвязи сцепленных состояний

Теперь можно исследовать условие транзитивности взаимосвязи сцепленных состояний. Рассмотрим сцепленные состояния $\Psi_\alpha, \Psi_\beta, \Psi_\gamma$

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha &= \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} /S_{\alpha_1} > /S_{\alpha_2} > \dots /S_{\alpha_n} > , \\ \Psi_\beta &= \sum_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} a_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} /S_{\beta_1} > /S_{\beta_2} > \dots /S_{\beta_n} > , \\ \Psi_\gamma &= \sum_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n} a_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n} /S_{\gamma_1} > /S_{\gamma_2} > \dots /S_{\gamma_n} > . \end{aligned}$$

Рассмотрим множества (логические конструкции) $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma$ построенные на состояниях q-битов 1, 2, ..., n – $/S_{\alpha_1} > , /S_{\alpha_2} > , \dots , /S_{\alpha_n} > .$

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \bigcup_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} /S_{\alpha_1} > /S_{\alpha_2} > \dots /S_{\alpha_n} > , \\ S_\beta &= \bigcup_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} /S_{\beta_1} > /S_{\beta_2} > \dots /S_{\beta_n} > , \\ S_\gamma &= \bigcup_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n} /S_{\gamma_1} > /S_{\gamma_2} > \dots /S_{\gamma_n} > . \end{aligned}$$

Определение 1

Сцепленные состояния Ψ_α, Ψ_β взаимосвязаны, если их взаимная информация связи $I_{xy} = H_x + H_y - H_{xy}$, больше нуля.

Определение 2

Взаимосвязи сцепленных состояний $\Psi_\alpha, \Psi_\beta, \Psi_\gamma$ транзитивны, если из взаимосвязи между сцепленными состояниями Ψ_α и Ψ_β и взаимосвязи между сцепленными состояниями Ψ_β и Ψ_γ следует взаимосвязь между сцепленными состояниями Ψ_α и Ψ_γ .

Утверждение 1

Сцепленные состояния ψ_α, ψ_β взаимосвязаны тогда и только тогда, когда пересечение множеств S_α, S_β не пусто

$$S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset.$$

Доказательство.

а) Предположим, что $S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$ и докажем что сцепленные состояния ψ_α, ψ_β взаимосвязаны. Не пустота пересечения означает, что $S_\alpha \cap S_\beta = S_{\alpha\beta}$. На подмножестве $S_{\alpha\beta}$ определена совместная вероятность событий $\psi_\alpha, \psi_\beta - P(\psi_\alpha \cap \psi_\beta)$. Определены условные вероятности $P(\psi_\alpha / \psi_\beta) = P(\psi_\alpha \cap \psi_\beta) / P(\psi_\beta)$, и $P(\psi_\beta / \psi_\alpha) = P(\psi_\alpha \cap \psi_\beta) / P(\psi_\alpha)$. Следовательно, определена и не равна $H_x + H_y$ совместная энтропия. Тем самым $I_{xy} = H_x + H_y - H_{xy}$ больше нуля.

б) Предположим, что сцепленные состояния ψ_α, ψ_β взаимосвязаны и докажем что $S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$. Предположим противное $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$. Тогда совместная вероятность событий $\psi_\alpha, \psi_\beta - P(\psi_\alpha \cap \psi_\beta) = 0$. Условные вероятности $P(\psi_\alpha / \psi_\beta) = P(\psi_\alpha \cap \psi_\beta) / P(\psi_\beta) = 0$, и $P(\psi_\beta / \psi_\alpha) = P(\psi_\alpha \cap \psi_\beta) / P(\psi_\alpha) = 0$. Следовательно, определена и равна $H_x + H_y$ совместная энтропия. Тем самым $I_{xy} = H_x + H_y - H_{xy}$ равна нулю.

Утверждение 2

Взаимосвязи сцепленных состояний $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_\gamma$ транзитивны если пересечение множеств $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma$ не пусто

$$S_\alpha \cap S_\beta \cap S_\gamma \neq \emptyset.$$

Доказательство.

Предположим, что $S_\alpha \cap S_\beta \cap S_\gamma \neq \emptyset$ и докажем что взаимосвязь транзитивна. Не пустота пересечения означает, что $S_\alpha \cap S_\beta \cap S_\gamma = S_{\alpha\beta\gamma}$ $S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$, $S_\beta \cap S_\gamma \neq \emptyset$. Следовательно, в соответствии с утверждением 1 ψ_α и ψ_β взаимосвязаны, ψ_β, ψ_γ взаимосвязаны.

Кроме того, $S_\alpha \cap S_\gamma \supseteq S_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$. Следовательно, ψ_α и ψ_γ также взаимосвязаны.

Таким образом, для квантовых объектов – сцепленных q-битов достаточным условием транзитивности взаимосвязи является логическое условие, определенное на подмножествах состояний q-битов.

Рассмотрим сцепленные состояния трех q-битов 1, 2, 3 специального вида

$$\psi_1 = /0_1 > /1_2 > /0_3 > ,$$

$$\psi_2 = /1_1 > /0_2 > /0_3 > ,$$

$$\psi_3 = /0_1 > /0_2 > /1_3 > .$$

$$\psi_1 \cap \psi_2 \neq \emptyset.$$

$$\psi_2 \cap \psi_3 \neq \emptyset.$$

$$\psi_1 \cap \psi_3 \neq \emptyset, \text{ а}$$

$$\psi_1 \cap \psi_2 \cap \psi_3 = \emptyset.$$

Утверждение 3

Существуют сцепленные состояния ψ_1, ψ_2, ψ_3 такие что $\psi_1 \cap \psi_2 \neq \emptyset$,

$$\psi_2 \cap \psi_3 \neq \emptyset, \psi_1 \cap \psi_3 \neq \emptyset, \text{ а } \psi_1 \cap \psi_2 \cap \psi_3 = \emptyset.$$

В качестве примера можно привести состояния

$$\psi_1 = /0_1 > /1_2 > /0_3 > ,$$

$$\psi_2 = /1_1 > /0_2 > /0_3 > ,$$

$$\psi_3 = /0_1 > /0_2 > /1_3 > .$$

Утверждение 4

Существуют сцепленные состояния ψ_1, ψ_2, ψ_3 для которых не выполняется условие транзитивности – такие что $\psi_1 \cap \psi_2 \neq \emptyset, \psi_2 \cap \psi_3 \neq \emptyset$, а $\psi_1 \cap \psi_3 = \emptyset$.

В качестве примера можно привести состояния

$$\psi_1 = /0_1 > /0_2 > /0_3 > ,$$

$$\psi_2 = /0_1 > /1_2 > /0_3 > ,$$

$$\psi_3 = /1_1 > /1_2 > /1_3 > .$$

Для получения необходимого и достаточного условия транзитивности на множестве логических конструкций $S_\alpha = /S_{\alpha 1} > /S_{\alpha 2} > \dots /S_{\alpha n} > , S_\beta = /S_{\beta 1} > /S_{\beta 2} > \dots /S_{\beta n} > , \dots$ введем метрику ρ .

$$\rho(S_\alpha, S_\beta) = \sum_i |S_{\alpha i} - S_{\beta i}|.$$

Данная метрика является метрикой Хемминга. (Расстояние по Хеммингу между двумя последовательностями из нулей и единиц равно количеству несовпадающих элементов). Например, для состояний

$$S_1 = /0_1 > /0_2 > /0_3 > ,$$

$$S_2 = /0_1 > /1_2 > /0_3 > ,$$

$$S_3 = /1_1 > /1_2 > /1_3 > .$$

$$\rho(S_1, S_2) = 1, \rho(S_2, S_3) = 2, \rho(S_3, S_1) = 3.$$

В общем случае при

$$S_\alpha = \bigcup_{\alpha 1 \alpha 2 \dots \alpha n} /S_{\alpha 1} > /S_{\alpha 2} > \dots /S_{\alpha n} > = \bigcup S_{\alpha i}$$

$$S_\beta = \bigcup_{\beta 1 \beta 2 \dots \beta n} /S_{\beta 1} > /S_{\beta 2} > \dots /S_{\beta n} > = \bigcup S_{\beta j}$$

расстояние между S_α и S_β определяется, как минимальное расстояние между парами выражений $/S_{\alpha 1} > /S_{\alpha 2} > \dots /S_{\alpha n} > \subseteq S_\alpha$ и $/S_{\beta 1} > /S_{\beta 2} > \dots /S_{\beta n} > \subseteq S_\beta$.

$$\rho(S_\alpha, S_\beta) = \min_{ij} \rho(S_{\alpha i}, S_{\beta j}) = \min_{\alpha i \beta j} \rho(/S_{\alpha 1} > /S_{\alpha 2} > \dots /S_{\alpha n} > , /S_{\beta 1} > /S_{\beta 2} > \dots /S_{\beta n} >) .$$

Утверждение 5

Рассмотрим состояния вида $S_\alpha = /S_{\alpha 1} > /S_{\alpha 2} > \dots /S_{\alpha m} > .$ Взаимосвязи сцепленных состояний $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_\gamma \subset \psi$ транзитивны тогда и только тогда, когда расстояния между множествами $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma \subset S$ не превосходят $m - 1$

$$\rho(S_\alpha \subset S, S_\beta \subset S) \leq m - 1.$$

$$\rho(S_\beta \subset S, S_\gamma \subset S) \leq m - 1.$$

$$\rho(S_\gamma \subset S, S_\alpha \subset S) \leq m - 1.$$

Доказательство.

а) Докажем необходимость условия утверждения 5. Пусть взаимосвязи сцепленных состояний $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_\gamma \subset \psi$ транзитивны. Тогда каждая пара состояний имеет, по крайней мере, один общий элемент. Следовательно

$$\rho(S_\alpha, S_\beta) \leq m - 1, \rho(S_\beta, S_\gamma) \leq m - 1, \rho(S_\gamma, S_\alpha) \leq m - 1.$$

б) Докажем достаточность условия утверждения 5.

Пусть $\rho(S_\alpha, S_\beta) \leq m - 1, \rho(S_\beta, S_\gamma) \leq m - 1, \rho(S_\gamma, S_\alpha) \leq m - 1$. Покажем, что взаимосвязи сцепленных состояний $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_\gamma \subset \psi$ транзитивны. Каждая пара состояний различается не более, чем на $m - 1$ элемент. Поэтому каждая пара состояний имеет, по крайней мере, один общий элемент. В силу утверждения 1 все пары взаимосвязаны.

В общем случае

$$S_\alpha = \bigcup_{\alpha 1 \alpha 2 \dots \alpha n} /S_{\alpha 1} > /S_{\alpha 2} > \dots /S_{\alpha n} > ,$$

$$S_\beta = \bigcup_{\beta 1 \beta 2 \dots \beta n} /S_{\beta 1} > /S_{\beta 2} > \dots /S_{\beta n} > ,$$

$$S_\gamma = \bigcup_{\gamma 1 \gamma 2 \dots \gamma n} /S_{\gamma 1} > /S_{\gamma 2} > \dots /S_{\gamma n} > .$$

доказательство аналогично.

5) Аксиома Б. Спинозы как следствие Утверждения 1

Интересно отметить, что данное утверждение фактически обосновывает аксиому 5 Б. Спинозы [10] и эквивалентный ей закон преемственности Н.Г. Гладких [11].

«Вещи, не имеющие между собой ничего общего, не могут быть и познаваемы одна через другую; иными словами – представление одной не включает в себе представление другой» [10].

«Для развития информации необходимо, чтобы получаемые данные органически сочетали в себе новое, неизвестное со старым, известным и чтобы новое и известное содержали идентичную часть» [11].

Авторы выражают благодарность Директору института проблем информатики Российской академии наук, члену-корреспонденту РАН Соколову И.А. и профессору Колина К.К. за поддержку и внимание без которых эта работа не могла бы быть выполнена.

6) Заключение

1. Показано, что для классических систем в общем случае свойство транзитивности связей отсутствует.
2. Логическую структуру состояния произвольной квантовой системы из n q -битов можно представить в виде подмножества прямого произведения логических структур n q -битов.
3. Взаимосвязь квантовых объектов определяется логической конструкцией объектов – наличием в их пересечении общего ненулевого элемента.
4. Транзитивность связи квантовых объектов определяется логической конструкцией объектов: для транзитивности взаимосвязи n квантовых объектов необходимо и достаточно, чтобы расстояние по Хеммингу между любой парой систем было не более $m - 1$.
5. Утверждение о взаимосвязи сцепленных состояний фактически обосновывает одну из аксиом Б. Спинозы и эквивалентный ей закон преемственности Н.Г. Гладких.
6. Представляет интерес дальнейшее уточнение условий, при выполнении которых свойство транзитивности имеет место и использование свойства транзитивности при реализации квантовых вычислений.

Библиографический список

1. Стратанович Р.Л. Теория информации / Р.Л. Стратанович. — М.: Сов. радио, 1975. — 424 с.
2. Гуревич И.М. Законы информатики – основа строения и познания сложных систем / И.М. Гуревич. — Москва: РИФ «Антиква», 2003.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и её инженерные приложения. / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — М.: Высш. шк.: учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., стер., 2000. — 480 с.
4. Шеннон К. Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетики / К. Шеннон. — Москва: издательство иностранной литературы, 1963. — С. 243 – 332.
5. Валиев К.А. Квантовые компьютеры: надежда и реальность / К.А. Валиев, А.А. Конин. Москва. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. — 2001.
6. Bennet C.H. Phis. Rev. Lett. / C.H. Bennet, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jorsa, A. Peres, W.K. Wootters — 1993. — 70. — P. 1985.
7. Bennet C.H. Phis. Rev. Lett. / C.H. Bennet, H.J. Bernstein, S. Popescu, B. A Schumacher. — 1996. — 53. — P. 2046.
8. Стин Э. Квантовые вычисления / Э. Стин. — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
9. Гуревич И.М. Информационные характеристики сцепленных состояний / И.М. Гуревич. В печати. Москва. — 2004.
10. Спиноза Б. Этика. Часть 1. О БОГЕ. Аксиомы / Б. Спиноза. — Фолио, 2001. — С. 388.
11. Гладких Н.Г. Информационная динамика / Н.Г. Гладких. — Москва: ИД «АКСОН», 2004. — С. 25.

Поступила в редакцию 22.06.2006 г.