



Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический
университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для изучения дисциплины «Прикладная математика»
для студентов специальности 7.091501
«Компьютерные системы и сети»
Раздел «Решение задач целочисленного линейного
программирования»
дневной и заочной форм обучения

Севастополь
2006

2

УДК 517.85

Методические указания для изучения дисциплины «Прикладная математика» для студентов специальности «Компьютерные системы и сети»
Раздел «Решение задач целочисленного линейного программирования»
дневной и заочной форм обучения/ Сост.: Балакирева И.А., Скاتков А.В.–
Севастополь: Изд-во СевНТУ,

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в выполнении курсового проекта по дисциплине «Прикладная математика»

Методические рекомендации рассмотрены и утверждены на заседании кафедры (протокол № от 2005 г.)

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний (протокол № _ от _____ 200_ г.).

Рецензент: Шипилов Юрий Николаевич, доцент, к.т.н.



СОДЕРЖАНИЕ

1 Постановка задачи. Краткая характеристика алгоритмов	4
2 Алгоритмы решения задач целочисленного программирования	6
2.1 Метод отсекающих плоскостей (метод Гомори)	6
2.2 Метод ветвей и границ	11
2.3 Решение задач целочисленного линейного программирования с булевыми переменными	14
3. Задание для выполнения курсового проекта	15
Библиографический список	16
Приложение А	17

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АЛГОРИТМОВ

Современная инженерная практика выдвигает огромное количество задач оптимизации дискретных технических систем. Все эти задачи объединяются общей постановкой и могут быть сведены к задачам целочисленного программирования, общая формулировка которых следующая.

Пусть R^m - m -мерное ($m \geq 1$) евклидово пространство, Z^m - его целочисленная решетка, т.е. подмножество R^m , состоящее из векторов $X^T = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, все компоненты которых целочисленны. На Z^m заданы функционал $F(X)$ и некоторое подмножество D решетки Z^m . Ставится задача нахождения такого X_{opt} , что

$$X_{opt} \in D \in Z^m, \quad (1.1)$$

$$F(X_{opt}) = \underset{X \in D}{\operatorname{opt}} F(X) \quad (1.2)$$

Здесь opt - операция определения минимума или максимума. В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что наша цель - минимизация функционала $F(X)$.

Множество D имеет смысл множества допустимых значений аргумента и задается, как правило, с помощью совокупности ограничений вида

$$g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X) \leq 0, n \geq 0 \quad (1.3)$$

Рассмотрим наиболее распространенные классы задач целочисленного программирования.

1. **Задачи линейного программирования.** К ним относятся задачи (1.1)-(1.3), у которых

$$F(X) = \sum_{i=1}^m c_i x_i$$

$$g_j(X) = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i,$$

где a_{ij} и c_i , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ заданы, а $X^T = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. В

случае нелинейности хотя бы одного ограничения g_j , $j = \overline{1, n}$ задачи (1.1)-(1.3) становятся задачей нелинейного целочисленного программирования.

2. **Задачи с булевыми переменными** $x_i \in \{0, 1\}$.



3. **Комбинаторные задачи целочисленного программирования.** Решение задачи определяется на конечном множестве задания функционала F .

4. **Выпуклые, вогнутые задачи целочисленного программирования,** задачи стохастического целочисленного программирования. Определяются соответствующей структурой критерия F и ограничений $g_j, j = \overline{1, n}$.

Вплотную к задачам целочисленного программирования примыкают задачи частично целочисленного программирования - задачи, у которых условие целочисленности наложено лишь на часть компонент оптимизируемого вектора $X^T = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

В настоящее время в теории целочисленной оптимизации можно выделить следующие три основные группы методов: методы отсекающих плоскостей, комбинаторные и приближенные (эвристические).

Алгоритмы метода отсекающих плоскостей предназначены для решения задач линейного целочисленного программирования. Общая схема метода заключается в следующем. Вначале задача (1.1)-(1.3) решается без учета целочисленности переменных. Если полученное решение целочисленно, то оно является решением задачи (1.1)-(1.3). В противном случае к ограничениям (1.3), комплекующим множество D , добавляется новое ограничение, обладающее тем свойством, что множество допустимых решений новой задачи включает любое допустимое решение целочисленной задачи и не содержит оптимального решения предыдущей задачи без ограничений целочисленности. Затем указанный процесс повторяется с добавлением новых ограничений, получивших (по смыслу эффекта их действия) названия отсекающих плоскостей. В настоящее время наиболее распространены алгоритмы Гомори, предназначенные для решения задач полностью и частично целочисленного линейного программирования.

Комбинаторные методы предназначены для решения задач целочисленного программирования с конечным множеством допустимых значений D . В основе комбинаторных методов лежит идея использования частичного или полного перебора такого множества. Наиболее популярны такие комбинаторные методы и алгоритмы, как методы ветвей и границ, аддитивный алгоритм Баллаша.

В настоящее время в современной инженерной практике, особенно в практике автоматизированного выбора наилучших решений, возрос интерес к приближенным методам дискретной оптимизации. Это обусловлено тем, что приближенные методы позволяют получить приемлемые для практики результаты в широком диапазоне решаемых задач, в то время как точные методы ориентированы на узкоспециализированные задачи. Среди приближенных методов можно выделить методы локальной оптимизации, методы случайного поиска, методы, являющиеся модификацией точных, а также различные их комбинации.

2. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1 Метод отсекающих плоскостей (метод Гомори)

Во многих практических приложениях представляет большой интерес задача целочисленного программирования, в которой дана система линейных неравенств и линейная форма

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n,$$

$$x_j - \text{целые}$$

Требуется найти целочисленное решение системы (2.1), которое минимизирует целевую функцию F , причем, все коэффициенты a_{ij}, c_j, b_i - целые.

Один из методов решения задачи целочисленного программирования предложен Гомори. Идея метода заключается в использовании методов непрерывного линейного программирования, в частности, симплекс-метода.

1) Определяется с помощью симплекс-метода решение задачи (2.1), (2.2), у которой снято требование целочисленности решения; если решение оказывается целочисленным, то искомое решение целочисленной задачи будет также найдено;

2) В противном случае, если некоторая координата x_i - не целая, полученное решение задачи проверяется на возможность существования целочисленного решения (наличие целых точек в допустимом многограннике):

- если в какой-либо строке с дробным свободным членом b_i , все остальные коэффициенты a_{ij} окажутся целыми, то в допустимом многограннике нет целых точек и задача целочисленного программирования решения не имеет;

- в противном случае вводится дополнительное линейное ограничение, которое отсекает от допустимого многогранника часть, бесперспективную для поиска решения задачи целочисленного программирования;

3) Для построения дополнительного линейного ограничения, выбираем l -



тую строку с дробным свободным членом b_l и записываем дополнительное ограничение

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{lj} x_j \geq \beta_l, \quad (2.3)$$

где α_{lj} и β_l - соответственно дробные части коэффициентов a_{lj} и свободного

члена b_l . Введем в ограничение (2.3) вспомогательную переменную u_l :

$$u_l = -\beta_l - \sum_{j=1}^n \alpha_{lj} x_j \quad (2.4)$$

Определим коэффициенты α_{lj} и β_l , входящие в ограничение (2.4):

$$\begin{aligned} \beta_l &= b_l - [b_l] \\ \alpha_{lj} &= a_{lj} - [a_{lj}] \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $[b_l]$ и $[a_{lj}]$ - ближайšie целые снизу для b_l и a_{lj} соответственно.

4) Далее с помощью симплекс-метода снова решается задача линейного программирования при наличии дополнительного ограничения и т.д.

Гомори доказал, что конечное число подобных шагов приводит к такой задаче линейного программирования, решение которой будет целочисленным и, следовательно, искомым.

Пример 1. Максимизировать функцию

$$F = -x_1 + 2x_2 \quad (2.6)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{целые} \end{cases} \quad (2.7)$$

Приведем систему линейных ограничений и функцию цели к канонической форме:

$$-F = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$$

Выбираем допустимое базисное решение:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - (5x_1 + 3x_2) \\ x_4 = 8 - (6x_1 + 3x_2) \\ -F = -(-x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

Определим оптимальное решение системы линейных ограничений, временно отбросив условие целочисленности. Используем для этого симплекс-метод. В таблице 2.1 представлено исходное решение задачи, в таблицах 2.2 и 2.3 приведены преобразования исходной таблицы с целью получения оптимального решения задачи (2.6), (2.7)

Таблица 2.1

	b_i	x_1	x_2
x_3	4	5	3
x_4	8	6	3
$-F$	0	-1	2

Таблица 2.2

	b_i	x_1	x_2
x_3	4 $\frac{4}{3}$	5 $\frac{5}{3}$	3 $\frac{1}{3}$
x_4	8 -4	6 -5	3 -1
$-F$	0 $-\frac{8}{3}$	-1 $-\frac{10}{3}$	2 $-\frac{2}{3}$

Таблица 2.3

	b_i	x_1	x_3
x_2	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_4	4	1	-1
$-F$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Из таблицы 2.3 видно, что получено следующее оптимальное решение системы линейных ограничений:

$$F_{\max} = \frac{8}{3}, \quad X^T = \{0, \frac{4}{3}, 0, 4\}.$$

Найденная оптимальная точка целочисленной не является. Целочисленность решения нарушается по координате $x_2 = \frac{4}{3}$. Чтобы определить, имеется ли целое решение задачи в области допустимых решений, проверяем коэффициенты в строке x_2 таблицы 2.3. Коэффициенты в этой строке не целые, поэтому в области допустимых решений D этой системы линейных ограничений должно быть целочисленное решение. Составляет дополнительное линейное ограничение для строки x_2 , пользуясь соотношением (2.5). Вычислим коэффициенты

$$\beta_2 = b_2 - [b_2] = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_{21} = a_{21} - [a_{21}] = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{23} = a_{23} - [a_{23}] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Линейное ограничение будет иметь следующий вид:

$$u_2 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \right).$$

Записываем это ограничение дополнительной строкой в таблицу 2.3, и получаем таблицу 2.4. Решаем задачу линейного программирования, используя двойственный симплекс-метод. Определение оптимального решения задачи представлено в таблицах 2.4-2.5:

Таблица 2.4

	b_i	x_1	x_3
x_2	$\frac{4}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$ $-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$ 1
x_4	4 1	1 2	-1 -3
u_2	$-\frac{1}{3}$ 1	$-\frac{2}{3}$ 2	$-\frac{1}{3}$ 3
$-F$	$-\frac{8}{3}$ $\frac{2}{3}$	$-\frac{13}{3}$ $\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$ -2

Таблица 2.5

	b_i	x_1	x_3
x_2	$\frac{4}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$ $-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$ 1
x_4	4 1	1 2	-1 -3
u_2	$-\frac{1}{3}$ 1	$-\frac{2}{3}$ 2	$-\frac{1}{3}$ -3
$-F$	$-\frac{8}{3}$ $\frac{2}{3}$	$-\frac{13}{3}$ $\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$ -2

Получили решение: $F_{\max} = -F = 2$, при $X^T = \{0, 1, 1, 5\}$

Видно, что максимальное значение целевой функции при целочисленном векторе решений изменилось в меньшую сторону, по сравнению с ее максимальным значением при нецелом решении.

2.2. Метод ветвей и границ

Суть метода ветвей и границ заключается в следующем. Задача линейного программирования решается без учета целочисленности любыми известными методами непрерывного линейного программирования, например, симплекс-методом. Далее рассматривается одна из переменных x_l , на которую накладывается ограничение целочисленности, но которая в непрерывном решении получила дробное значение. На основании полученного решения составляются дополнительные ограничения:

$$\begin{aligned} x_l &\leq [x_l] \\ x_l &\geq [x_l] + 1 \end{aligned}$$

где $[x_l]$ - целая часть нецелочисленного значения переменной x_l в оптимальном решении, и затем решаются еще две задачи линейного программирования, в каждую из которых вошли все исходные ограничения и одно из дополнительных.

Полученное решение новых задач проверяется на целочисленность переменных. Если решение не удовлетворяет требованию целочисленности, на основе каждой из задач составляются две новые, аналогичные рассмотренным выше и т.д. если одно из решений удовлетворяет требованию целочисленности, значение целевой функции принимается за граничное F_{cp} . При этом рассмотрение других задач продолжается до тех пор, пока не будет получено:

1) на одной из ветвей недопустимое решение, тогда дальнейшие вычисления по этой ветви прекращаются;

2) на одной из ветвей целочисленное решение; тогда значение целевой функции при данных значениях переменных сравнивается с нижним (верхним при максимизации) граничным значением F_{cp} , если полученное решение хуже, то оно отбрасывается, если лучше, то принимается за граничное;

3) на одной из ветвей нецелочисленное решение, однако при этом значение целевой функции хуже граничного, тогда дальнейшее рассмотрение также прекращается.

Граничное значение на первом цикле расчета принимается равным $F_{cp} = -\infty$ при максимизации и $F_{cp} = \infty$ при минимизации.

Проиллюстрируем метод ветвей и границ на примере 1.

В результате решения этой задачи симплекс-методом получили следующее решение (табл. 2.3):

$$F_{\max} = \frac{8}{3}, \quad X^T = \{0, \frac{4}{3}, 0, 4\}.$$

Целочисленность нарушена по переменной $x_2 = \frac{4}{3}$. На основании полученного решения вводим дополнительные ограничения по переменной x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 &\leq \left[\frac{4}{3}\right] \text{ и } x_2 \leq \left[\frac{4}{3}\right] + 1, \text{ или} \\ x_2 &\leq 1 \text{ и } x_2 \geq 2. \end{aligned}$$

Для дальнейшего решения составим две новых задачи; туда войдут исходные ограничения и по одному из вновь введенных.

Задача 2

$$F = -(-x_1 + 2x_2) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 3

$$F = -(-x_1 + 2x_2) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Проверим системы ограничений каждой задачи на совместность. Система ограничений задачи 3 несовместна, по этой ветви решение обрывается, решаем задачу 2 симплекс-методом. Решаем задачу 2 симплекс-методом, для этого приведем задачу 2 к каноническому виду

$$\begin{aligned} -F &= -(-x_1 + 2x_2) \\ \begin{cases} x_3 &= 4 - (5x_1 + 3x_2) \\ x_4 &= 8 - (6x_1 + 3x_2) \\ x_5 &= 1 - (x_2) \end{cases} \end{aligned}$$

и заполним таблицу 2.6. В таблицах 2.7, 2.8 представлено решение задачи 2.



Таблица 2.6

	b_i	x_1	x_2
x_3	4	5	3
x_4	8	6	3
x_5	1	0	1
$-F$	0	-1	2

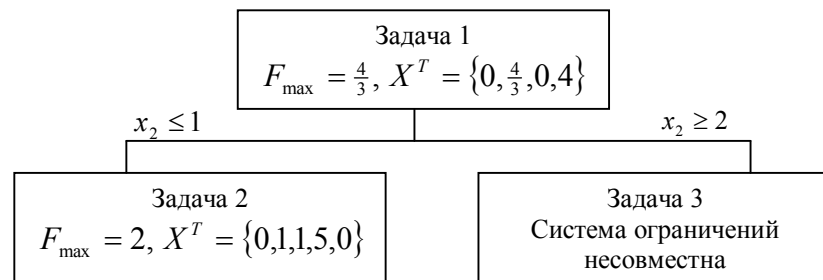
Таблица 2.7

	b_i	x_1	x_2
x_3	4	5	3
	-3	0	-3
x_4	8	6	3
	-3	0	-3
x_5	1	0	1
	1	0	1
$-F$	0	-1	2
	-2	0	-2

Таблица 2.8

	b_i	x_1	x_5
x_3	1	5	-3
x_4	5	6	-3
x_2	1	0	1
$-F$	-2	-1	-2

Как и в предыдущем случае получили решение: $F_{\max} = -F = 2$, при $X^T = \{0, 1, 1, 5, 0\}$. Ход решения задачи можно представить в виде дерева:



2.3 Решение задач целочисленного линейного программирования с булевыми переменными.

Решение задач с булевыми переменными можно производить методом ветвей и границ, как с обычными целочисленными переменными, для которых заданы граничные условия $0 \leq x_i \leq 1$. Однако применение такого метода для данных задач в ряде случаев оказывается нецелесообразным. Существуют специальные методы частичного перебора для решения таких задач, наиболее совершенный из них называется аддитивным алгоритмом Баллаша с фильтром.

Суть этого метода сводится к следующему:

- 1) расположить переменные по возрастанию коэффициентов при них в целевой функции;
- 2) принять некоторый набор значений X , удовлетворяющий всем ограничениям;
- 3) значение целевой функции при удовлетворении п. 2 принять в качестве дополнительного фильтрующего ограничения (фильтра);
- 4) методом перебора X определить значение фильтрующего ограничения и проверить удовлетворение его заданным ограничениям;
- 5) если при некотором наборе X значение фильтрующего ограничения окажется для целевой функции лучшим, следует от первоначального набора перейти к новому и продолжить процедуру.

Рассмотрим этот метод на следующем примере.

Пример 3.

Необходимо максимизировать функцию

$$F = -3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 4 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 5 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \leq 3 & (4) \end{cases}$$

$$X \in \{0, 1\}$$

Коэффициенты функции цели расположены по возрастанию. Зададимся некоторым допустимым решением X и вычислим функцию цели: при $X = \{0, 1, 0\}$ $F = 2$. Это значит, что в оптимальном решении значение функции цели должно быть не меньше 2. Такое положение запишем в виде дополнительного ограничения:



$$-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 2 \quad (0),$$

которое будем называть фильтрующим.

Таким образом, получается система, состоящая из пяти ограничений, которым должно удовлетворять искомое решение. Далее для всех возможных наборов переменных вычисляем значение ограничений. Результаты вычислений заносим в таблицу 3.1

Таблица 3.1

№ строки	x_1	x_2	x_3	Выполнение ограничений					Значение F
				(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
1	0	0	0	0					$F_\phi = 5$
2	0	0	1	5	+	+	+	+	
3	0	1	0	2					
4	0	1	1	7	+	+	+	+	$F_\phi = 7$
5	1	0	0	-3					
6	1	0	1	2					
7	1	1	0	-1					
8	1	1	1	4					

При полном переборе значений всех ограничений необходимо было бы провести 8 вычислений значений всех пяти ограничений, то есть всего 40. Применяя алгоритм Баллаша, число вычислений сократилось до 16, или на 60%.

3. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

1. Решить задачу целочисленного линейного программирования, используя методы Гомори и метод ветвей и границ. При реализации симплекс-метода рекомендуется использовать программы Mathcad, Matlab, Excel. Номер варианта равен остатку от деления двух последних цифр зачетной книжки на 30. При делении без остатка выбрать вариант № 30. Варианты заданий приведены в Приложении А.

2. Составить и решить задачу целочисленного линейного программирования с булевыми переменными. Размерность задачи: количество переменных не

менее пяти, ограничений не менее шести. Задачу решить методами полного перебора и используя алгоритм Баллаша. Сравнить количество вычислений при использовании различных методов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Карпелевич В. И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования/ В.И. Карпелевич.-М.: Наука, 1967.- 312 с.
- 2 Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : Учеб. пособие/ И.Л. Акулич.- М.: Высшая школа, 1985.- 319 с.
- Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения/ З Д.Б. Юдин.- М.: Наука, 1969.- 319 с.
- 3 Ляшенко И.Н. и др. Линейное и нелинейное программирование/ И.Н. Ляшенко.-К.: Вища школа, 1975,- 372 с.
- 4 Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ./ Б. Банди.- М.: Радио и связь, 1989.- 176 с.
- 5 Зайченко Ю.П., Шумилова С.А., Исследование-операций: Сборник задач 2-е изд. перераб. и доп. / Ю.П. Зайченко. - К.: Вища школа, 1990.-239с.
- 6 Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие/ В.Г. Карманов.- М.: Наука, 1986.- 288 с.



ПРИЛОЖЕНИЕ А

1	$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 4x_2 \leq 17$ $10x_1 + 3x_2 \leq 15$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	2	$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + x_2 \leq 9.5$ $x_1 + x_2 \geq -2$ $2x_1 + x_2 \leq 10.6$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
3	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 2x_2 \leq 7$ $4x_1 - 5x_2 \leq 9$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	4	$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$ $3x_1 + 5x_2 \leq 11$ $4x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
5	$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 5x_2 \leq 12$ $4x_1 + x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	6	$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 4x_2 \leq 7$ $10x_1 + 3x_2 \leq 15$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
7	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $5x_1 + 7x_2 \leq 21$ $-x_1 + 3x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	8	$F = 1.6x_1 + 10x_2 \rightarrow \min$ $-2x_1 + x_2 \leq -3.3$ $x_1 - x_2 \leq 1$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
9	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $6x_1 + 5x_2 \leq 20$ $2x_1 + 3x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	10	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 9x_2 \leq 36$ $x_1 + x_2 \leq 7$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
11	$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 5x_2 \leq 11$ $4x_1 + x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	12	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + x_2 \leq 18$ $x_1 + 2x_2 \leq 16$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$

13	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + 2x_2 \leq 10$ $x_1 + 2x_2 \geq 2$ $2x_1 + x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	14	$F = 1.6x_1 + 10x_2 \rightarrow \min$ $-2x_1 + x_2 \leq -3.3$ $x_1 - x_2 \leq -2$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
15	$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 3x_2 \leq 12.6$ $4x_1 + x_2 \geq 10$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	16	$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + 4x_2 \leq 14$ $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
17	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $3x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	18	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $20x_1 + 10x_2 \leq 75$ $12x_1 + 7x_2 \leq 55$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
19	$F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ $5x_1 + 2x_2 \leq 1$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	20	$F = 4x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ $4x_1 + 3x_2 \leq 5.8$ $2x_1 + x_2 \leq 9.2$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
21	$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$ $2x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - x_2 \geq 1$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	22	$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 3x_2 \leq 11$ $4x_1 + x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
23	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 11x_2 \leq 38$ $x_1 + x_2 \leq 7$ $4x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	24	$F = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$ $3x_1 + 2x_2 \geq 6$ $2x_1 - 3x_2 \geq -6$ $x_1 - x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$



25	$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1 + 3x_2 \geq 6$ $3x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	26	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $6x_1 + 5x_2 \leq 20.6$ $2x_1 + x_2 \leq 16$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
27	$F = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + x_2 \leq 5$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	28	$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$ $2x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - x_2 \leq 1$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$
29	$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $7x_1 + 4x_2 \leq 28$ $-x_1 + 2x_2 \leq 14$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$	30	$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ $x_1 + 2x_2 \geq 16$ $2x_1 + x_2 \geq 16$ $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые}$

