

является весом ортогональности функций $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ [2], [3].

Функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$, для которых существует вес $h(t)$ в виде (3), полученный с помощью системы уравнений (2), оказываются линейно независимыми.

Введем критерий минимума энергии весовой функции

$$I(h) = \int_{t_1}^{t_2} h^2(t) dt = \min. \quad (4)$$

Предложение 2. Вес, оптимальный по условию минимума энергии, представляет собой квадратичную форму от ортогонализируемых функций.

$$h(t) = \lambda_1 f_1^2(t) + \lambda_2 f_1(t) f_2(t) + \dots + \lambda_n f_2^2(t) + \dots, \quad (5)$$

где λ_k определяются путем решения системы уравнений, полученной после подстановки (5) в (1) [2], [3].

Применение данного метода позволило определить вид весовых функций для некоторых эквидистантных функций.

Теорема 1 [2, 3]. Функции вида $f_n = \frac{\sin^z \pi(t-n)}{\pi^z(t-n)^z}$, где z – целое число ортогональны на

бесконечном интервале изменения аргумента с весом $h(t) = \frac{z}{2} \cdot \frac{1+(-1)^{z-1}}{z-1} + 1 \sum_{z=1}^4 a_z (\sin \pi t)^{(z-\frac{1+(-1)^{z-1}}{2})}$, где a_z –

коэффициенты тригонометрического полинома.

2. Общие свойства классических ортогональных полиномов. Одной из аксиом теории специальных функций является положение о том, что вес ортогональности полиномов должен быть неотрицательной функцией [4]. Такое ограничение, накладываемое на вид весовых функций, связано с условиями неотрицательности нормы и меры функционального пространства и позволяет доказать теоремы Хаусдорфа, которые связаны с проблемой моментов для весовой функции. Однако, неотрицательность меры и нормы функционального пространства следуют непосредственно из условий ортогональности (1). Кроме того, можно показать, что в общем виде проблема моментов с требованием неотрицательности весовой функции не связана.

Определение. Числа

$$\mu_n = \int_{x_1}^{x_2} g(x) f_n(x) dx$$

называют моментами функции $g(x)$ относительно последовательности функций $f_n(x)$.

Проблема моментов состоит в том, чтобы указать необходимые и достаточные условия, для того чтобы наперед заданная последовательность чисел μ_n являлась последовательностью моментов. Пространство, в котором ищется функция $g(x)$ играет существенную роль. Пусть $f_n(x)$ принадлежит пространству функций, интегрируемых со степенью p (это пространство обозначается как L^p). Тогда верно следующее утверждение [5].

Теорема 2. Для того чтобы в пространстве L^p ($1 < p < \infty$) существовала функция $g(x)$, норма которой $\leq \gamma$ и последовательность моментов которой была бы μ_n , необходимо и достаточно, чтобы для всех конечных числовых систем $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \mu_k \xi_k \right| \leq \gamma \left(\int_{x_1}^{x_2} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k f_k(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

или при $p=1$

$$\left| \sum_{k=1}^n \mu_k \xi_k \right| \leq \gamma \int_{x_1}^{x_2} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k f_k(x) \right| dx.$$

Как видно из приведенного утверждения, требование неотрицательности функции $g(x)$ для существования ее моментов необязательно.

Таким образом, весовая функция может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения.

Покажем, что верно следующее утверждение.

Предложение 3. Моменты знакопеременной весовой функции определяют не только систему

ортогональных полиномов, но и саму эту весовую функцию.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений для определения веса, оптимального по условию минимума энергии, для двух полиномов $p_0(x) = a_{00}$, $p_1(x) = a_{11} + a_{12}x$:

$$\begin{cases} a_{00}^2 \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx = 1, \\ a_{00}a_{11} \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx + a_{00}a_{12} \int_{x_1}^{x_2} xh(x) dx = 0, \\ a_{11}^2 \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx + 2a_{11}a_{12} \int_{x_1}^{x_2} xh(x) dx + a_{12}^2 \int_{x_1}^{x_2} x^2 h(x) dx = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_{00}^2 m_0 = 1, \\ a_{11}m_0 + a_{12}m_1 = 0, \\ a_{12}(a_{11}m_1 + a_{12}m_2) = 1, \end{cases} \quad (6)$$

где m_i – моменты i -го порядка весовой функции $h(x)$.

Аналогичные (6) системы уравнений можно получить для любого количества полиномов. Итак, моменты m_i весовой функции $h(x)$ действительно определяют систему ортогональных полиномов, однако неоднозначно, поскольку имеются уравнения второго порядка.

Поскольку $m_i = \int_{x_1}^{x_2} x^i h(x) dx$, а весовая функция, оптимальная по условию минимума энергии, имеет

вид $h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ij} p_i(x) p_j(x)$, то зная моменты можно определить неизвестные коэффициенты λ_{ij} из системы линейных алгебраических уравнений:

$$m_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ij} \int_{x_1}^{x_2} x^n p_i(x) p_j(x) dx. \quad (7)$$

Таким образом моменты весовой функции однозначно определяют саму весовую функцию. Предложение доказано.

Применим предложенный в [2] и [3] метод ортогонализации к определению веса некоторых классических ортогональных полиномов и функций Бесселя.

3. Полиномы Чебышева. Известно, что полиномы Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ортогональны на интервале $(-1, 1)$ с весом $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Согласно предложенному методу оптимальный по условию минимума энергии вес ортогональности функций $T_n(x)$ должен иметь вид

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} T_i(x) T_j(x). \quad (8)$$

Учитывая, что

$$T_i(x) T_j(x) = \begin{cases} T_i(x), & j = 0, \\ \frac{1}{2} T_{j+i}(x) + \frac{1}{2} T_{j-i}(x), & j \neq 0. \end{cases} \quad (9)$$

получаем

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n T_n(x). \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что число n является четным. Таким образом $h(x)$ является четной функцией.

Запишем условия ортогональности $T_n(x)$ с весом $h(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 T_0^2(x)h(x)dx = c_0, \\ \int_{-1}^1 T_0(x)T_1(x)h(x)dx = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \int_{-1}^1 T_n^2(x)h(x)dx = c_1, \\ \int_{-1}^1 T_n(x)T_{n+1}(x)h(x)dx = 0, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right. \quad (11)$$

Пределы интегрирования в данном случае задаются областью определения функции $\arccos x$.

Принимая во внимание свойство полиномов Чебышева (9), систему уравнений (11) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 T_0(x)h(x)dx = c_0, \\ \int_{-1}^1 T_1(x)h(x)dx = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \int_{-1}^1 T_0(x)h(x)dx + \int_{-1}^1 T_2(x)h(x)dx = 2c_1, \\ \int_{-1}^1 T_1(x)h(x)dx + \int_{-1}^1 T_3(x)h(x)dx = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \int_{-1}^1 T_0(x)h(x)dx + \int_{-1}^1 T_{2n}(x)h(x)dx = 2c_n, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right. \quad (12)$$

С целью соблюдения условий ортогональности в (12) принято $c_n = \frac{c_0}{2}$. Кроме того необходимо

$\int_{-1}^1 T_i(x)h(x)dx = 0$ при любых $i \neq 0$. Тогда система уравнений (12) принимает вид

$$\int_{-1}^1 T_i(x)h(x)dx = \begin{cases} c_0, i = 0, \\ 0, i \neq 0. \end{cases} \quad (13)$$

С учетом выражений (9) и (10) систему уравнений (13) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 \int_{-1}^1 T_0(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^1 T_n(x)dx = c_0, \\ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^1 T_{n-k}(x)dx + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^1 T_{n+k}(x)dx = 0, \quad k \neq 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

Поскольку $\int_{-1}^1 \cos(n \arccos x)dx = -\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}$, и n – четное число, из (14) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left[\frac{1}{4(n-k)^2-1} + \frac{1}{4(n+k)^2-1} \right] = \begin{cases} \frac{c_0}{2}, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Итак, имеется бесконечная система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов β_n , входящих в выражение (10) для весовой функции полиномов Чебышева $T_n(x)$.

На рисунке 1 приведены графики весовых функций, полученные для первых 10-ти и 20-ти полиномов $T_n(x)$. На этих же рисунках представлен график функции $\frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$.

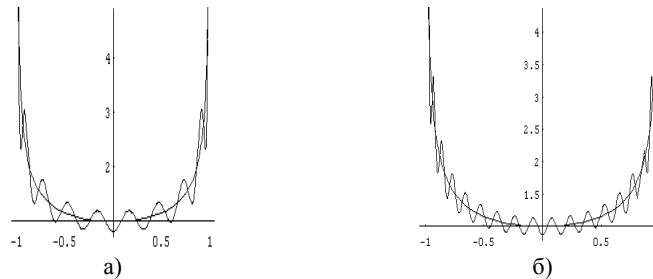


Рисунок 1 – Графики функции $\frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$ и весовых функций, вычисленных для:

а) – первых 10-ти полиномов $T_n(x)$; б) – первых 20-ти полиномов $T_n(x)$

Как видно из рисунка 1, можно говорить о том, что полученные весовые функции при увеличении количества $T_n(x)$ сходятся к функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, которая в таком случае является весом, оптимальным по условию минимума энергии.

Необходимо отметить, что вес ортогональности $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ полиномов Чебышева $T_n(x)$ нельзя разложить в ряд по этим полиномам. Действительно, интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos x) dx}{1-x^2}$$

расходится. Однако, мы получили, что при увеличении количества ортогонализируемых функций $T_n(x)$, вес их ортогональности стремится к функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Этот факт можно объяснить тем, что на концах интервала степенной ряд не обязательно будет сходиться к аппроксимируемой функции.

В приведенных выше расчетах мы считали полиномы Чебышева $T_n(x)$ определенными только на интервале $(-1, 1)$. Однако, выражение $\cos(n \arccos x)$ при различных значениях n дает функции вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k, \quad (16)$$

которые имеют своей областью определения всю числовую ось. Производя действия, аналогичные изложенным выше, можно определить вес ортогональности функций $P_n(x)$ на каком-либо симметричном интервале $(-q, q)$, отличном от $(-1, 1)$. Так, на рисунке 2 представлены графики весовых функций для нескольких полиномов $P_n(x)$ при $q = 2$ и график функции $\frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$.

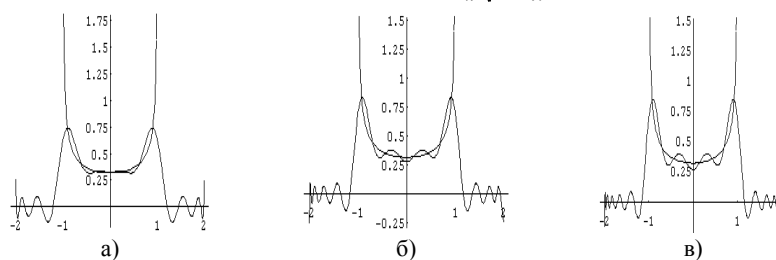


Рисунок 2 – Графики функции $\frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$ и весовых функций, вычисленных для:

а) – первых 10-ти полиномов $P_n(x)$; б) – первых 20-ти полиномов $P_n(x)$;

в) – первых 40-ка полиномов $P_n(x)$

Как видно из рисунка 2, вес ортогональности полиномов $P_n(x)$ на интервале $(-1, 1)$ при увеличении количества $P_n(x)$ стремиться к функции $\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, а на интервалах $(-2, -1)$ и $(1, 2)$ – к нулю.

Таким образом можно сделать вывод о том, что единственным интервалом ортогональности полиномов $P_n(x)$ является интервал $(-1, 1)$. Иными словами, как ортогональные, полиномы $P_n(x)$ тождественны полиномам Чебышева $T_n(x)$.

4. Полиномы Эрмита. Известно, что полиномы Эрмита

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} \quad (17)$$

ортогональны на интервале $(-\infty, \infty)$ с весом $h(x) = e^{-x^2}$, где

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n - \text{четное,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{если } n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Как и в случае с полиномами Чебышева, вес ортогональности полиномов Эрмита будем искать в виде

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} H_i(x) H_j(x), \quad (18)$$

используя тот факт, что произведение полиномов Эрмита имеет вид

$$H_m(x) H_n(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} 2^k k! C_m^k C_n^k H_{m+n-2k}(x), \quad (19)$$

где

$$C_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & 0 \leq n < k, \end{cases} \quad \text{и} \quad C_m^k = \begin{cases} \frac{m!}{k!(m-k)!}, & 0 \leq k \leq m, \\ 0, & 0 \leq m < k. \end{cases}$$

Учитывая формулу (19) вес ортогональности полиномов Эрмита можно переписать в виде

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k H_k(x). \quad (20)$$

Определим вес ортогональности для первых трех полиномов Эрмита. В качестве интервала ортогональности примем $(-a, a)$, где a может принимать как конечные, так и бесконечные значения. Система уравнений для определения λ_k имеет вид

$$\begin{cases} \int_{-a}^a H_0^2(x) h(x) dx = \int_{-a}^a H_0(x) h(x) dx = c_0, \\ \int_{-a}^a H_0(x) H_1(x) h(x) dx = \int_{-a}^a H_1(x) h(x) dx = 0, \\ \int_{-a}^a H_0(x) H_2(x) h(x) dx = \int_{-a}^a H_2(x) h(x) dx = 0, \\ \int_{-a}^a H_1^2(x) h(x) dx = \int_{-a}^a (2H_0(x) + H_2(x)) h(x) dx = 2 \int_{-a}^a H_0(x) h(x) dx = 2c_0, \\ \int_{-a}^a H_1(x) H_2(x) h(x) dx = \int_{-a}^a (4H_1(x) + H_3(x)) h(x) dx = \int_{-a}^a H_3(x) h(x) dx = 0, \\ \int_{-a}^a H_2^2(x) h(x) dx = \int_{-a}^a (8H_0(x) + 8H_2(x) + H_4(x)) h(x) dx = 8c_0 + \int_{-a}^a H_4(x) h(x) dx = 8c_0. \end{cases}$$

Постоянные числа в правых частях уравнений необходимо выбирать так, чтобы соблюдались условия ортогональности. Приведенная выше система уравнений может быть переписана в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-a}^a H_0(x)h(x)dx = c_0, \\ \int_{-a}^a H_1(x)h(x)dx = 0, \\ \int_{-a}^a H_2(x)h(x)dx = 0, \\ \int_{-a}^a H_3(x)h(x)dx = 0, \\ \int_{-a}^a H_4(x)h(x)dx = 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

Принимая во внимание формулы (20) и (19), из (21) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 \int_{-a}^a H_0(x)dx + \lambda_1 \int_{-a}^a H_1(x)dx + \lambda_2 \int_{-a}^a H_2(x)dx + \lambda_3 \int_{-a}^a H_3(x)dx + \lambda_4 \int_{-a}^a H_4(x)dx = c_0, \\ \lambda_0 \int_{-a}^a H_1(x)dx + \lambda_1 \int_{-a}^a (2H_0(x) + H_2(x))dx + \lambda_2 \int_{-a}^a (4H_1(x) + H_3(x))dx + \lambda_3 \int_{-a}^a (6H_2(x) + H_4(x))dx + \lambda_4 \int_{-a}^a (8H_3(x) + H_5(x))dx = 0, \\ \lambda_0 \int_{-a}^a H_2(x)dx + \lambda_1 \int_{-a}^a (4H_1(x) + H_3(x))dx + \lambda_2 \int_{-a}^a (8H_0(x) + 8H_2(x) + H_4(x))dx + \lambda_3 \int_{-a}^a (24H_1(x) + 12H_3(x) + H_5(x))dx + \\ + \lambda_4 \int_{-a}^a (48H_2(x) + 16H_4(x) + H_6(x))dx = 0, \\ \lambda_0 \int_{-a}^a H_3(x)dx + \lambda_1 \int_{-a}^a (6H_2(x) + H_4(x))dx + \lambda_2 \int_{-a}^a (24H_1(x) + 12H_3(x) + H_5(x))dx + \\ + \lambda_3 \int_{-a}^a (48H_0(x) + 72H_2(x) + 18H_4(x) + H_6(x))dx + \lambda_4 \int_{-a}^a (192H_1(x) + 144H_3(x) + 24H_5(x) + H_7(x))dx = 0, \\ \lambda_0 \int_{-a}^a H_4(x)dx + \lambda_1 \int_{-a}^a (8H_3(x) + H_5(x))dx + \lambda_2 \int_{-a}^a (48H_2(x) + 16H_4(x) + H_6(x))dx + \\ + \lambda_3 \int_{-a}^a (192H_1(x) + 144H_3(x) + 24H_5(x) + H_7(x))dx + \lambda_4 \int_{-a}^a (384H_0(x) + 768H_2(x) + 288H_4(x) + 32H_6(x) + H_8(x))dx = 0. \end{array} \right.$$

Учитывая симметричность пределов интегрирования и четность полиномов, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 \int_{-a}^a H_0(x)dx + \lambda_2 \int_{-a}^a H_2(x)dx + \lambda_4 \int_{-a}^a H_4(x)dx = c_0, \\ \lambda_1 \int_{-a}^a (2H_0(x) + H_2(x))dx + \lambda_3 \int_{-a}^a (6H_2(x) + H_4(x))dx = 0, \\ \lambda_0 \int_{-a}^a H_2(x)dx + \lambda_2 \int_{-a}^a (8H_0(x) + 8H_2(x) + H_4(x))dx + \lambda_4 \int_{-a}^a (48H_2(x) + 16H_4(x) + H_6(x))dx = 0, \\ \lambda_1 \int_{-a}^a (6H_2(x) + H_4(x))dx + \lambda_3 \int_{-a}^a (48H_0(x) + 72H_2(x) + 18H_4(x) + H_6(x))dx = 0, \\ \lambda_0 \int_{-a}^a H_4(x)dx + \lambda_2 \int_{-a}^a (48H_2(x) + 16H_4(x) + H_6(x))dx + \lambda_4 \int_{-a}^a (384H_0(x) + 768H_2(x) + 288H_4(x) + 32H_6(x) + H_8(x))dx = 0. \end{array} \right.$$

Вычислив интегралы и решив систему уравнений относительно λ_k , получим:

$$\lambda_2 = \frac{105c_0(945 - 810a^2 + 276a^4 + 40a^6)}{2048a^9}, \quad \lambda_0 = \frac{15c_0(6615 - 7560a^2 + 3864a^4 - 1120a^6 + 240a^8)}{2048a^9},$$

$\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, откуда видно, что λ_k являются функциями от a . Следовательно, три первых полинома

Эрмита ортогональны с полученным весом на любом симметричном интервале, в том числе и на бесконечном. Аналогичным образом можно вычислить коэффициенты λ_k , определяющие вес ортогональности, для любого количества полиномов Эрмита. На рисунке 3 представлены графики весовых функций для различных интервалов ортогональности и различного количества полиномов $H_n(x)$. Там же представлен график функции e^{-x^2} .

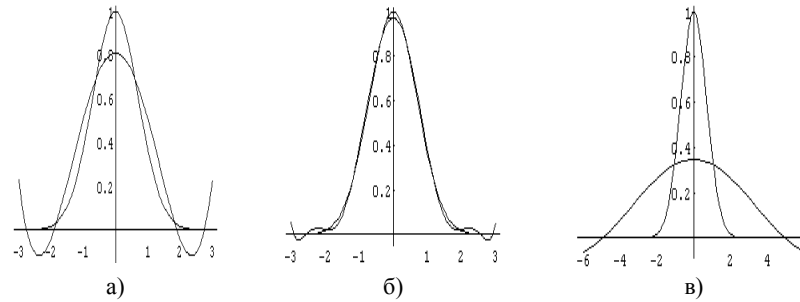


Рисунок 3 – Графики весовых функций, вычисленных для:
а) – первых 3-х полиномов $H_n(x)$, $a=3$; б) – первых 5-х полиномов $H_n(x)$, $a=3$;
в) – первых 5-ти полиномов $H_n(x)$, $a=15$

Как видно из рисунка 3, полученный вес ортогональности хорошо аппроксимирует функцию e^{-x^2} на конечном интервале (при $a=15$ увеличение количества полиномов Эрмита приводит к графику весовой функции, аналогичному графикам, показанным на рисунках 3 а), б)). Можно сделать вывод о том, что функции Эрмита ортогональны не только с весом e^{-x^2} , но имеют бесконечное количество весовых функций, которые можно рассчитать для любого симметричного интервала изменения аргумента.

5. Функции Бесселя. Будем рассматривать функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ порядка ν . Далее будем рассматривать только вещественные значения x и ν . Как известно, для функций Бесселя произвольного порядка существует условие ортогональности:

$$\int_0^1 x J_\nu(\gamma_m x) J_\nu(\gamma_n x) dx = \begin{cases} 0, n \neq m, \\ \frac{(J_{\nu+1}(\gamma_m))^2}{2}, n = m, \end{cases} \quad (22)$$

где γ_m и γ_n – два положительных нуля функции $J_\nu(x)$, $\nu > -1$ (в этом случае все нули $J_\nu(x)$ вещественны).

Кроме того, имеют место соотношения

$$\int_0^\infty x^{-1} J_{\nu+2n+1}(x) J_{\nu+2m+1}(x) dx = \begin{cases} 0, n \neq m, \\ (4n+2\nu+2)^{-1}, n = m, \nu > -1. \end{cases} \quad (23)$$

Воспользовавшись методом, изложенным в п.1, можно ввести условия ортогональности для функций Бесселя, отличные от (22) и (23):

$$\int_{x_1}^{x_2} J_{\nu(n)}(x) J_{\mu(m)}(x) h(x) dx = \begin{cases} 0, \nu(n) \neq \mu(m), \\ q_\nu, \nu(n) = \mu(m), \end{cases} \quad (24)$$

где $\nu(n)$ и $\mu(m)$ – порядок функций Бесселя (такое обозначение введено для того, чтобы показать, что порядок может быть как полуцелым, так целым числом), x_1 и x_2 – пределы интегрирования, которые могут быть приняты для функций Бесселя полуцелых порядков как $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$, а для функций Бесселя целых порядков $x_1 = -\infty$, $x_2 = \infty$.

Вес ортогональности, входящий в условия (24), может быть представлен в виде ряда $h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g_i(x)$, составленного из линейно независимых функций $g_i(x)$. Очевидным требованием, которое предъявляется к таким линейно независимым функциям, является сходимость интеграла $\int_{x_1}^{x_2} J_{\nu(n)}(x) J_{\mu(m)}(x) g_i(x) dx$. Так, для любых натуральных m и k сходятся следующие интегралы:

$$\int_0^{\infty} J_{\frac{1}{2}+k}(x) J_{\frac{1}{2}+m}(x) \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}+n}} = \frac{2^{\frac{1}{2}-n} \Gamma\left[\frac{3}{4} + \frac{k+m-n}{2}\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}+n\right]}{2 \Gamma\left[\frac{3}{4} + \frac{k-m+n}{2}\right] \Gamma\left[\frac{3}{4} + \frac{m-k+n}{2}\right] \Gamma\left[\frac{5}{4} + \frac{k+m+n}{2}\right]}, \quad (25)$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} J_{2k}(x) J_{2m}(x) \frac{dx}{x^{2n}} = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2} + k+m-n\right] \Gamma[2n]}{2^{2n} \Gamma\left[\frac{1}{2} + k-m+n\right] \Gamma\left[\frac{1}{2} + m-k+n\right] \Gamma\left[\frac{1}{2} + k+m+n\right]}, \quad (26)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} J_{2k+1}(x) J_{2m+1}(x) \frac{dx}{x^{2n}} = \frac{\Gamma\left[\frac{3}{2} + k+m-n\right] \Gamma[2n]}{2^{2n} \Gamma\left[\frac{1}{2} + k-m+n\right] \Gamma\left[\frac{1}{2} + m-k+n\right] \Gamma\left[\frac{3}{2} + k+m+n\right]}, \quad (27)$$

причем интеграл (25) сходится для $n=0, 1, 2, \dots$, а интегралы (26) и (27) – для $n=1, 2, 3, \dots$. Значения интегралов (25), (26), (27) уменьшаются с увеличением m, k и n достаточно быстро, поэтому можно говорить о сходимости рядов

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{\frac{1}{2}+n}} \quad (28)$$

и

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^{2n}}, \quad (29)$$

которые являются весами ортогональности функций Бесселя полуцелого и целого порядков соответственно. Заметим, что вес ортогональности функций Бесселя четных порядков отличается от веса ортогональности функций Бесселя нечетных порядков, как это следует из формул (26) и (27).

Интеграл

$$\int_0^{\infty} J_{2k+1}(x) J_{2m}(x) \frac{dx}{x^{2n}} \quad (30)$$

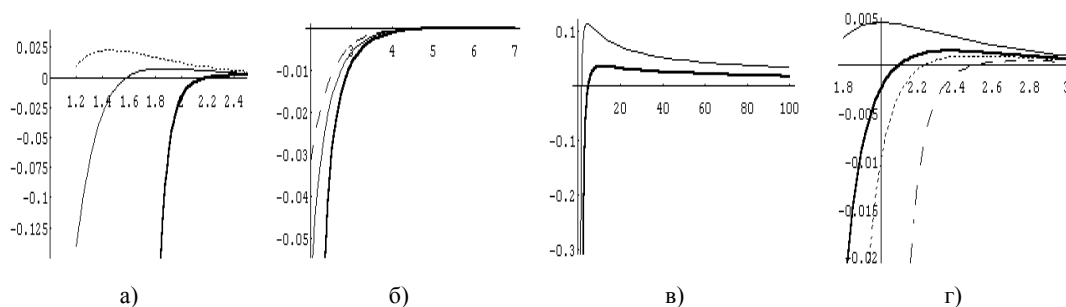
сходится не всегда, так он расходится при $k=1, m=1, n=3$. Следовательно, ортогонализировать одновременно функции Бесселя четных и нечетных порядков на интервале $(0, \infty)$ нельзя. Однако, отношение значений интегралов (27) и (26) имеет вид

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\Gamma\left[\frac{3}{2} + k+m-n\right] \Gamma\left[\frac{1}{2} + k+m+n\right]}{\Gamma\left[\frac{3}{2} + k+m+n\right] \Gamma\left[\frac{1}{2} + k+m-n\right]},$$

а это говорит о том, что строки матрицы, составленные из значений интегралов (27) и (26) не являются линейно зависимыми, что позволяет определить вес ортогональности функций Бесселя любого целого порядка на интервале $(-\infty, \infty)$. Расходимость интеграла (30) в данном случае не принципиальна, так как

интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} J_{2k+1}(x) J_{2m}(x) \frac{dx}{x^{2n}}$ в силу четности $J_{2m}(x)$, $\frac{1}{x^{2n}}$ и нечетности $J_{2k+1}(x)$ равен нулю в смысле

его главного значения. Графики полученных весовых функций для различного количества функций Бесселя представлены на рисунке 4. При увеличении количества ортогонализируемых функций, график веса смещается вправо и «прижимается» к оси x , что может являться свидетельством сходимости рядов (28) и (29).



а) б) в) г)

Рисунок 4 – Графики весовых функций в логарифмическом масштабе для:

а) – 3-х, 4-х и 5-ти функций Бесселя с нечетными целыми индексами, $x \in (0, \infty)$;

б) – 3-х, 4-х и 5-ти функций Бесселя с четными целыми индексами, $x \in (0, \infty)$;

в) – 3-х и 4-х функций Бесселя с полуцелыми индексами, $x \in (0, \infty)$;

г) – 6-ти, 7-ми, 8-ми и 9-ти функций Бесселя с четными и нечетными индексами, $x \in (-\infty, \infty)$

Выводы. Итак, рассмотренный в [2], [3] и п.1 метод ортогонализации позволяет не только описать свойства систем эквидистантных линейно независимых функций, но и выявить некоторые новые особенности уже известных специальных функций.

1. Моменты весовой функции, оптимальной по условию минимума энергии, определяют как систему ортогональных полиномов, так саму весовую функцию.

2. Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ является оптимальным по условию минимума энергии весом ортогональности полиномов Чебышева $T_n(x)$. Этот вес можно представить в виде ряда из $T_n(x)$, несмотря на расходимость интеграла $\int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos x) dx}{1-x^2}$.

3. Полиномы Эрмита ортогональны на любом симметричном интервале изменения аргумента с оптимальным весом, который можно представить в виде степенного ряда. На бесконечном интервале этот ряд сходится к функции e^{-x^2} . На конечном интервале, за исключением его концов, данный степенной ряд хорошо аппроксимирует функцию e^{-x^2} .

4. Для функций Бесселя первого рода целого и полуцелого порядков имеют место условия ортогональности, отличные от известных. На бесконечном интервале функции $J_\nu(x)$ целого порядка ортогональны с весом, который можно представить в виде ряда $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^{2n}}$. На неотрицательном интервале функции Бесселя полуцелого порядка ортогональны с весом $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{\frac{1}{2}+n}}$.

Библиографический список

1. Никифоров А.Ф. Основы теории специальных функций / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. — М.: Наука, 1974. — 303 с.
2. Агаханянц Р.Е. Методы ортогонализации линейно независимых функций / Р.Е. Агаханянц, А.Н. Дегтярев // Прикладные задачи математики и механики. Матер. XII науч. конф. ученых Украины, России, Беларуси, 15 – 21 сентября, 2003 г. — Севастополь, 2003. — С. 40 – 45.
3. Дегтярев А.Н. Ортогонализация функций, дискретизация и восстановление сигналов в физически реализуемых системах / А.Н. Дегтярев, Р.Е. Агаханянц // Зв'язок — 2005. — № 2(54). — С. 45 – 52.
4. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функциональный анализ / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 542 с.
5. Качмаж С. Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. — 507 с.

Поступила в редакцию 23.10.2006 г.