

Министерство образования и науки Украины  
Севастопольский национальный технический университет



## **ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ**

Методические указания  
к изучению дисциплины и выполнению контрольных работ  
для студентов заочной формы обучения  
направления подготовки 6.0502.01 – Системная инженерия

Севастополь  
2008



УДК 681.3.06

**Оптимальные и адаптивные системы:** Методические указания к изучению дисциплины и выполнению контрольных работ для студентов заочной формы обучения направления подготовки 6.50201 – Системная инженерия /Разработал Карапетян В.А. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. – 30с.

Изложены цели и задачи преподавания дисциплины, перечень знаний и умений, которые должны приобрести студенты в результате ее изучения. Приведены основное содержание дисциплины ОАС, списки рекомендуемой литературы и экзаменационных вопросов. Указаны темы лекционных занятий, методические указания к выполнению лабораторных работ, задания и требования к оформлению контрольных работ.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения направления 6.0502.01 – Системная инженерия. Предполагается владение базовыми понятиями теории автоматического управления.

Методические указания утверждены на заседании кафедры  
Технической кибернетики,  
протокол № 6 от "28" мая 2008г.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в  
качестве методических указаний.

Рецензент

Крамарь В.А., проректор СевНТУ

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ</b>                                                                      | 4  |
| 1.1. Цель преподавания дисциплины                                                                       | 4  |
| 1.2. Знания и умения, приобретаемые студентами при изучении дисциплины                                  | 4  |
| 1.3. Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо студентам для успешного изучения дисциплины        | 5  |
| <b>2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ</b>                                                                         | 5  |
| 2.1. Лекции, содержание и объем в часах                                                                 | 6  |
| 2.2. Лабораторные занятия, наименования и объем в часах                                                 | 6  |
| <b>3. ПЕРЕЧЕНЬ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВОПРОСОВ</b>                                                             | 6  |
| <b>4. ЛИТЕРАТУРА ПО ДИСЦИПЛИНЕ</b>                                                                      | 7  |
| <b>5. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА</b>                                                                            | 7  |
| <b>6. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ</b>                                                                           | 11 |
| 6.1. Цель работ                                                                                         | 11 |
| 6.2. Общие замечания                                                                                    | 11 |
| 6.3. Теоретические сведения                                                                             | 12 |
| 6.3.1. Общая постановка задачи оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием     | 12 |
| 6.3.2. Синтез детерминированных оптимальных линейных систем с квадратичным критерием. Задача слежения   | 14 |
| 6.3.3. Оптимальное оценивание состояния. Фильтр Калмана                                                 | 15 |
| 6.3.4. Оптимальное управление стохастическими системами при неполной и неточной информации о состоянии  | 16 |
| 6.4. Описание лабораторных работ                                                                        | 17 |
| 6.4.1. Лабораторная работа №1. Синтез оптимальной системы стабилизации химическим реактором             | 19 |
| 6.4.2. Лабораторная работа №2. Оптимальное оценивание состояния системы управления химическим реактором | 20 |
| 6.5. Требования к содержанию отчета                                                                     | 21 |
| 6.6. Порядок выполнения и защиты работ                                                                  | 21 |
| 6.7. Контрольные вопросы                                                                                | 21 |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ А</b>                                                                                     | 22 |
| Оптимальное управление                                                                                  | 22 |
| А.1. Аналитический синтез регулятора выхода                                                             | 22 |
| А.2. Синтез регулятора выхода в системе Matlab                                                          | 24 |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б</b>                                                                                     | 26 |
| Оптимальное оценивание состояния                                                                        | 26 |
| Б.1. Аналитическое решение задачи фильтрации                                                            | 26 |
| Б.2. Решение задачи фильтрации в системе Matlab                                                         | 28 |

# 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1.1. Цель преподавания дисциплины

Предметом изучения дисциплины являются основы математической теории, принципы построения и расчета оптимальных и адаптивных систем.

В настоящее время теория оптимального управления и оптимизационная идеология глубоко проникли в исследования и конструкторские разработки различных технических объектов и в особенности систем управления. Язык теории оптимальных процессов стал общим языком современной теории управления.

В последние десятилетия в связи с решением ряда проблем авиационной и космической техники, управления технологическими процессами, автоматизации различных отраслей промышленности получили развитие методы теории адаптивных систем.

Широкому внедрению в практику методов оптимального и адаптивного управления способствует применение средств вычислительной техники, несущей большие возможности для реализации этих методов.

Необходимость повышения эффективности производства на основе автоматизации производственных процессов и технических объектов определяет основные тенденции в развитии методов и теории оптимального и адаптивного управления. Задачи оптимального управления возникают во все более широких сферах науки, техники и производства. При этом теория оптимального управления развивается в направлении обобщения методов построения оптимальных решений. Особую актуальность приобретают направления исследований, повышающие эффективность проектирования оптимальных и адаптивных систем, в частности, разработка вычислительных методов и алгоритмов, позволяющих практически реализовать методы оптимального и адаптивного управления на основе средств современной вычислительной техники.

Целью преподавания дисциплины является подготовка высококвалифицированного специалиста, глубоко понимающего актуальность задачи автоматизации современного производства и технических объектов, значение теории оптимальных и адаптивных систем в решении такой задачи, владеющего методами этой теории и умеющего их применить при проектировании систем управления с использованием современных компьютерных технологий и средств.

## 1.2. Знания и умения, приобретаемые студентами при изучении дисциплины

На основе изучения дисциплины специалист должен приобрести высокий уровень теоретических знаний, практические умения и навыки в области синтеза оптимальных и адаптивных систем, овладеть навыками расчета таких систем с помощью современных программных систем инженерных и научных расчетов, таких, как система MATLAB.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**ЗНАТЬ:**

- теоретические основы, фундаментальные принципы и математические методы построения оптимальных и адаптивных систем;
- основные схемы систем оптимального и адаптивного управления, их состав и особенности функционирования;

**УМЕТЬ:**

- применять методы расчета и проектирования оптимальных и адаптивных систем с использованием современных компьютерных технологий и средств;
- использовать новые достижения теории оптимального и адаптивного управления и применять их в своей производственной деятельности;
- применять современные технологии обработки информации, управления, моделирования, анализа и синтеза компьютерных систем управления;
- содержательно ставить и формализовывать задачи проектирования САУ и оценивать качество принятых решений;
- выбирать оптимальный вариант компьютерных систем, средств автоматики и управления.

### 1.3. Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо студентам для успешного изучения дисциплины

Преподавание дисциплины ОАС базируется на знаниях, полученных студентами при изучении дисциплин "Высшая математика", "Теория вероятности и математическая статистика", "Стохастический анализ" "Специальные разделы математики", "Теория автоматического управления".

Перечень обеспечивающих дисциплин с указанием разделов, необходимых для успешного изучения дисциплины, приведен в таблице.

| Обеспечивающие дисциплины                      |                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Название дисциплины                            | Наименование разделов (тем)                                                                                                                                      |
| Высшая математика                              | Теория матриц, дифференциальное и интегральное исчисление, преобразование Лапласа                                                                                |
| Теория вероятности и математическая статистика | Случайные величины и их статистические характеристики                                                                                                            |
| Специальные разделы математики                 | Теория линейных пространств, преобразование Лапласа в теории систем                                                                                              |
| Стохастический анализ                          | Случайные процессы и их характеристики                                                                                                                           |
| Теория автоматического управления              | Математические модели линейных САУ, устойчивость линейных систем, переходные процессы и качество САУ, синтез САУ, применение методов оптимизации для синтеза САУ |

## 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Содержание дисциплины "Оптимальные и адаптивные системы" включает следующие разделы:

- Линейно-квадратическая оптимизация (ЛКО) детерминированных объектов управления, методы ЛКО;
- ЛКО стохастических объектов управления;

- Оптимальное управление детерминированным объектом с прямыми ограничениями на значения управляющих воздействий;
- Адаптивные системы управления.

### 2.1. Лекции, содержание и объем в часах

| № | Тема лекции                                                                                                          | Час |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1 | Основная задача ЛКО. Постановка задачи и ее обобщения. Решение задачи ЛКО. Метод полного квадрата.                   | 2   |
| 2 | Задача ЛКО управления выходами. Теорема Калмана. Задача ЛКО в стационарной постановке.                               | 2   |
| 3 | Оптимальный стохастический наблюдатель. Выбор оптимальной матрицы усиления наблюдателя. Полное описание наблюдателя. | 2   |
| 4 | Оптимальное управление стохастическим объектом. Основные соотношения и структура оптимальной системы управления.     | 2   |

### 2.2 Лабораторные занятия, наименования и объем в часах

| № | Тема лабораторного занятия                                                                                   | Час |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1 | Применение системы Matlab и пакета программ Control System Toolbox в задачах теории оптимального управления. | 2   |
| 2 | Синтез оптимальной системы стабилизации скорости двигателя постоянного тока.                                 | 2   |
| 3 | Оптимальное оценивание состояния системы управления химическим реактором.                                    | 2   |

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВОПРОСОВ

1. Цель и задачи оптимального управления.
2. Классификация задач оптимального управления.
3. Задачи адаптивного управления.
4. Задача модального управления линейными САУ.
5. Задачи оптимального детерминированного управления линейными системами с квадратичным критерием качества (задачи ЛКО).
6. Задача о регуляторе состояния.
7. Задача о регуляторе состояния для стационарных систем.
8. Задача о регуляторе выхода.
9. Задача слежения.
10. Задачи оценки состояния линейных систем.
11. Синтез наблюдателей полного порядка.
12. Синтез наблюдателей пониженного порядка.
13. Задача оптимального оценивания состояния. Фильтр Калмана.
14. Принцип двойственности задач оптимального управления и оптимального оценивания.
15. Фильтр Калмана для стационарных систем.
16. Оптимальный регулятор при неполных и неточных измерениях.
17. Теорема разделения в задаче оптимального стохастического управления.
18. Оптимальные стохастические следящие системы.

#### 4. ЛИТЕРАТУРА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы /А.Г. Александров – М.: Высшая школа, 1989. – 236 с.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами /Ю.Н. Андреев – М.: Наука, 1976. – 424 с.
3. Андриевский Б.Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB /Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков. – СПб.: Наука, 1999. – 467 с.
4. Атанс М. Оптимальное управление /М. Атанс, П. Фалб – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
5. Иванов В.А. Теория оптимальных систем автоматического управления /В.А. Иванов, Н.В. Фалдин – М.: Наука, 1981. – 336 с.
6. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления /Х. Квакернаак, Р. Сиван – М.: Мир, 1977. – 650 с.
7. Ким Д.П. Теория автоматического управления: уч. пособие. В 2 т. Т.2. Многомерные нелинейные, оптимальные и адаптивные системы /Д.П. Ким. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464с.
8. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник. В 5 т. Т.4. Теория оптимизации систем автоматического управления /Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
9. Рей У. Методы управления технологическими процессами /У. Рей – М.: Мир, 1983. – 368 с.
10. Теория автоматического управления. В 2 ч. Ч.2 /Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – 504 с.
11. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы /Е.П. Чураков – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.
12. Лазарев Ю.Ф. Моделирование процессов и систем в Matlab. Учебный курс /Ю.Ф. Лазарев. – СПб.: Питер; К.: Издательская группа BHV, 2005. – 512с.

#### 5. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа содержит два задания:

- а) Синтез оптимальной системы стабилизации угловой скорости вращения вала двигателя постоянного тока;
- б) Синтез фильтра Калмана для оценки состояния системы стабилизации угловой скорости вращения вала двигателя постоянного тока.

В контрольной работе рассматривается система стабилизации угловой скорости вращения вала двигателя постоянного тока. Функциональная схема системы приведена на рисунке 5.1.

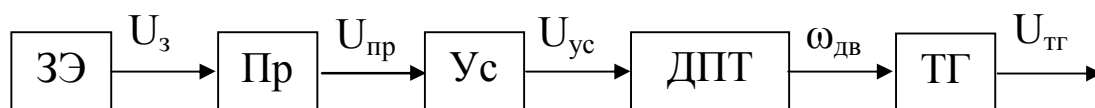


Рисунок 5.1 – Функциональная схема системы стабилизации



Здесь ЗЭ – задающий элемент, Пр – преобразователь, Ус – усилитель, ДПТ – двигатель постоянного тока, ТГ – тахогенератор,  $U_{xx}$  – напряжения (В) на выходах соответствующих устройств,  $\omega_{дв}$  – угловая скорость вращения вала двигателя (рад/сек).

Структурная схема системы приведена на рисунке 5.2.

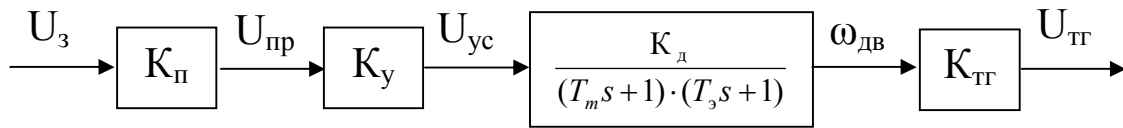


Рисунок 5.2 – Структурная схема системы стабилизации

В первом задании (а) требуется синтезировать ЛКО регулятор выхода в виде обратной связи по состоянию. Структура оптимальной системы приведена на рисунке 5.3.

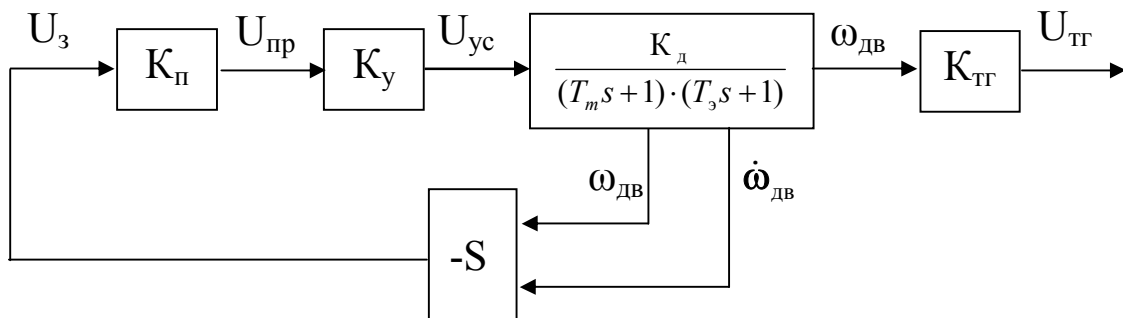


Рисунок 5.3 – Структурная схема оптимальной системы стабилизации

Во втором задании (б) следует синтезировать фильтр Калмана для оценки компонент вектора состояния системы. Структура системы с фильтром приведена на рисунке 5.4.

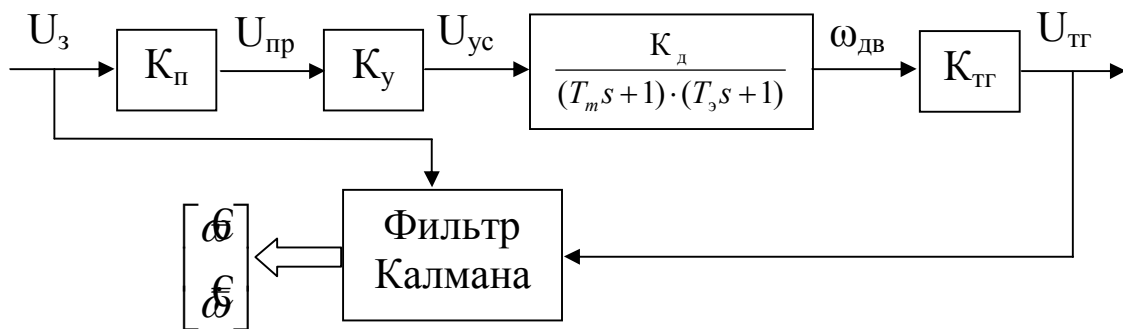


Рисунок 5.4 – Фильтр Калмана в системе стабилизации

### Задание а) – Синтез оптимальной системы стабилизации угловой скорости вращения вала двигателя постоянного тока

Рассматривается система стабилизации угловой скорости вращения вала двигателя постоянного тока. Линеаризация уравнений динамики модели относительно номинального режима работы приводит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка (см. рисунок 5.2). Это уравнение связывает отклонения угловой скорости  $\omega_{дв}$  вращения вала двигателя и задающего напряжения  $u_3$ :



$$T_{\varepsilon} T_{\text{м}} \ddot{\omega} + (T_{\text{м}} + T_{\varepsilon}) \dot{\omega} + \omega = k_{\text{д}} k_{\text{у}} k_{\text{п}} u_{\text{з}}, \quad u_{\text{тг}} = k_{\text{тг}} \omega. \quad (5.1)$$

Здесь:  $T_{\varepsilon}$ ,  $T_{\text{м}}$  – электромагнитная и электромеханические постоянные двигателя;  $\omega$  – отклонение угловой скорости вращения вала двигателя от номинальной;  $u_{\text{з}}$ ,  $u_{\text{тг}}$  – отклонения от номинальных значений напряжений в цепи якоря двигателя и на выходе тахогенератора;  $k_{\text{д}}$ ,  $k_{\text{у}}$ ,  $k_{\text{п}}$ ,  $k_{\text{тг}}$  – коэффициенты усиления двигателя, усилителя, преобразователя и тахогенератора.

Для преобразования исходной модели "вход-выход" в пространство состояний введем вектор состояния  $x = [\omega \quad \dot{\omega}]^T$ . Здесь следует привести модель системы стабилизации в стандартной форме пространства состояний, т.е. в виде

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

и записать матрицы этой модели в буквенном и числовом (для своего варианта) видах.

Далее формулируется, в виде математических соотношений и уравнений, задача линейно-квадратичной оптимизации и ее решение – процедура синтеза регулятора выхода для системы (5.2).

Проверяется выполнение свойств управляемости и наблюдаемости исходной системы (5.2).

Следующий шаг – *аналитическое* решение матричного уравнения Риккати  $KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + C^T QC = 0$  и вычисление матрицы оптимальных коэффициентов усиления в обратной связи  $S$ :  $S = r^{-1}B^T K$ .

С помощью полученной матрицы усиления в цепи обратной связи  $S$  следует сформировать уравнения динамики оптимальной системы. Затем, для ненулевых начальных условий ( $\omega(0) = 1$ ,  $\dot{\omega}(0) = 0$ ), *аналитически* рассчитать и построить графики собственного движения исходной и оптимальной систем, а также график оптимального управления  $u(t)$ .

Составить программу (*m*-файл) в среде Matlab для расчета оптимального регулятора выхода системы стабилизации и построения собственных движений исходной системы и оптимальной.

В среде Matlab провести расчеты и построения для различных значений (в диапазоне 0.1÷100) коэффициентов штрафов в функционале качества: для четных вариантов заданий – изменяется значение штрафа при управлении  $R$ , матрица  $Q$  при этом принимается единичной; для нечетных вариантов заданий – изменяется значение штрафа при выходе  $Q$ , матрица  $R$  при этом принимается единичной.

По результатам исследований сделать вывод о характере влияния величины штрафов на свойства оптимальной системы и объяснить причины такого влияния.

**Задание б)** – Синтез фильтра Калмана для оптимальной оценки вектора состояния системы стабилизации угловой скорости вращения вала двигателя постоянного тока

На основании: уравнения "вход-выход" (5.1); определения вектора состояния  $x = [\omega \ \dot{\omega}]^T$ ; учета случайных возмущений в уравнениях состояния и выхода – требуется построить модель в пространстве состояний в виде

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \\ y(t) = Cx(t) + v(t). \end{cases} \quad (5.3)$$

Здесь  $w(t)$  и  $v(t)$  – случайные независимые векторные центрированные нормальные белые шумы с матрицами интенсивностей  $W$  и  $V$ . Известны характеристики начального состояния системы  $x(0)=x^0$  – нормальный случайный центрированный вектор с ковариацией  $Q_0$ . Матрицы  $W$ ,  $Q_0$  и  $V$  имеют следующие числовые значения (здесь  $N$  – номер варианта задания)

$$W = \begin{bmatrix} 1 * N & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.01 * N \end{bmatrix}, \quad V = [10 * N]$$

Требуется синтезировать фильтр Калмана для восстановления компонент вектора состояния  $x(t)$  – получения оптимальных оценок  $\hat{x}(t)$ .

В контрольной работе необходимо выполнить:

- записать математические соотношения для оптимального фильтра;
- проверить свойство наблюдаемости системы;
- решить аналитически задачу синтеза фильтра Калмана – вычислить значения элементов матрицы усиления ошибки оценки в уравнении фильтра;
- составить программу (*m*-файл) в среде Matlab для синтеза фильтра Калмана. Построить графики оценок компонент вектора состояния  $\hat{x}(t)$  и самого вектора состояния  $x(t)$ ;

– проанализировать зависимость установившихся значений дисперсий ошибок оценок от величины интенсивности шума: для четных вариантов – в измерениях (матрица  $V$ ); для нечетных вариантов – в объекте (матрица  $W$ ).

Варианты задания контрольной работы выбираются по последней цифре зачетной книжки и определяются набором коэффициентов для модели (5.1).

| № Вар. | $T_\omega$ | $T_{\dot{\omega}}$ | $K_d$ | $K_\pi$ | $K_y$ | $K_{\text{тг}}$ |
|--------|------------|--------------------|-------|---------|-------|-----------------|
| 0      | 0.1        | 0.2                | 1     | 2       | 1.0   | 0.1             |
| 1      | 0.2        | 0.4                | 2     | 4       | 1.2   | 0.2             |
| 2      | 0.3        | 0.6                | 3     | 6       | 1.4   | 0.3             |
| 3      | 0.4        | 0.8                | 4     | 8       | 1.6   | 0.4             |
| 4      | 0.5        | 0.2                | 5     | 10      | 1.8   | 0.5             |
| 5      | 0.6        | 0.4                | 6     | 2       | 2.0   | 0.6             |
| 6      | 0.7        | 0.6                | 7     | 4       | 2.2   | 0.7             |
| 7      | 0.8        | 0.8                | 8     | 6       | 2.4   | 0.8             |
| 8      | 0.9        | 0.2                | 9     | 8       | 2.6   | 0.9             |
| 9      | 0.1        | 0.4                | 10    | 10      | 2.8   | 1.0             |

Задания контрольной работы выполняются в системе Matlab.

Контрольная работа оформляется в письменном виде и является отчетным документом, который хранится на кафедре. Отчет по работе оформляется в текстовом процессоре *MS Word* и представляется в виде одностороннего печатного текста на листах формата А4 в портретной ориентации. Поля стандартные. Шрифты: основной текст – *Times New Roman* размер 14 пунктов; заголовки – *Arial*. Параметры абзаца: отступ 1,25 см; выравнивание по ширине; полуторный междустрочный интервал. Математические выражения исполняются в редакторе формул *MS Equation*.

Контрольная работа является обязательным видом контроля и служит основанием для допуска студентов к сессии.

Контрольные работы студентов должны быть выполнены в течение семестра, переданы на кафедру не менее чем за 2 недели до начала сессии. Результаты предварительной проверки контрольной работы сообщаются студентам во время сессии. Контрольная работа должна быть защищена до экзамена. Студенты, которые получили неудовлетворительную оценку по контрольной работе, обязаны её исправить до сдачи экзамена по дисциплине.

## 6. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Лабораторные работы выполняются в период установочной сессии. В зачетную сессию в установленное время, при наличии надлежащим образом оформленных отчетов, лабораторные работы должны быть защищены.

### 6.1. Цель работ

Изучение классических постановок и алгоритмов решения задач оптимизации линейных непрерывных систем с квадратичными критериями качества. Усвоение основных математических соотношений и уравнений для решения задач оптимального детерминированного и стохастического управления, оптимальной калмановской фильтрации. Закрепление теоретических знаний, приобретение навыков практического применения специальных программных средств (Matlab) для синтеза оптимальных систем управления.

### 6.2. Общие замечания

Задача управления физической системой состоит в том, чтобы сформировать такое воздействие на систему, которое приведет ее к достижению определенной цели. При этом должны быть обеспечены некоторые качественные показатели и учтены некие ограничения общего характера (на поведение системы, на мощность воздействия и т.п.).

Перевод этих интуитивно понятных требований на язык математики предполагает получение таких математических объектов, как:

- математическая модель системы, которой необходимо управлять;
- закон формирования управляющего воздействия на систему;
- функция желаемого поведения физической системы;
- множество разрешенных (допустимых) управлений;
- функционал, оценивающий эффективность управления системой.

Для большинства физических систем цель управления может быть достигнута с помощью различных допустимых управлений, дающих различные переходные процессы. Необходимо выбрать среди этого множества управляющих и переходных процессов наилучший в некотором смысле. Это требует формирования численного критерия (функционала), по значениям которого можно будет сравнить эти процессы и выбрать среди них лучший. С формальной, математической точки зрения задача оптимального управления САУ формулируется как вариационная задача. Решение задачи оптимального управления состоит в том, чтобы найти управление  $u$ , доставляющее экстремум заданному функционалу качества  $J(u)$ .

В зависимости от вида и типа уравнений математических моделей САУ, наличия или отсутствия ограничений на состояние и управление, учета или не учета случайных воздействий, формы функционала и т.п., существует обширная классификация задач оптимизации САУ. Из всего этого множества задач здесь рассматриваются только три. Эти задачи относятся классу линейно-квадратичной оптимизации (ЛКО). Основными признаками этих задач являются: линейность математической модели объекта управления и системы измерений состояния; отсутствие явных ограничений на управление и состояние; функционал качества построен на квадратичных формах относительно состояния и управления. Теория ЛКО САУ считается наиболее разработанным разделом общей теории оптимального управления.

### 6.3. Теоретические сведения

Здесь приведены необходимые краткие теоретические сведения о постановках и решениях некоторых задач оптимизации линейных непрерывных динамических систем с квадратичными критериями качества.

#### 6.3.1. Общая постановка задачи оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием

В довольно общей постановке задача оптимального управления линейной системой с квадратичным критерием формулируется в следующем виде.

Задана математическая модель линейного управляемого объекта

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

где  $x(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $u(t)$  –  $r$ -мерный вектор управления;  $x(t_0)$  – случайный вектор со средним значением  $\bar{x}_0$  и матрицей дисперсий  $Q_0$ ;  $w(t)$  – векторный белый шум с матрицей интенсивностей  $W(t)$ .

Задана модель системы наблюдения за состоянием объекта управления

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (6.2)$$

где  $y(t)$  –  $m$ -мерный вектор наблюдений (измерений);  $v(t)$  – векторный белый шум с матрицей интенсивностей  $V(t)$ .

Известно выражение для управляемой переменной объекта

$$z(t) = D(t)x(t), \quad (6.3)$$

где  $z(t)$  –  $l$ -мерный вектор управляемого выхода.

Желаемое поведение управляемого выхода системы задано в виде известной на интервале  $[t_0, t_f]$   $l$ -мерной вектор функции  $\xi(t)$ .

Требуется выбрать управляющую вектор-функцию  $u(t)$  таким образом, чтобы квадратичный критерий качества управления

$$J = M \left\{ \left[ \xi_f - z_f \right]^T F \left[ \xi_f - z_f \right] + \int_{t_0}^{t_f} \left[ (\xi(t) - z(t))^T Q(t) (\xi(t) - z(t)) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt \right\} \quad (6.4)$$

достигал минимума.

В этой формуле:

- $M\{\cdot\}$  – операция взятия математического ожидания;
- $\xi_f$  и  $z_f$  – значения векторов в момент времени  $t_f$ ;
- весовые матричные функции  $F$ ,  $Q(t)$  и  $R(t)$  соответственно неотрицательно ( $F \geq 0$ ,  $Q \geq 0$ ) и положительно ( $R > 0$ ) определены.

Дополнительно должны выполняться следующие условия. Все случайные процессы являются нормальными. Случайные векторы  $x_0$ ,  $w(t)$  и  $v(t)$  взаимно независимы. Матрицы интенсивностей шумов  $W(t)$  и  $V(t)$  соответственно неотрицательно и положительно определены. Оптимальное управление  $u(t)$  должно быть сформировано как функция состояния  $x(t)$ , т.е. в виде обратной связи. В этом случае говорят о синтезе управления.

Данная задача получила название задачи *синтеза линейной оптимальной в среднеквадратичном следящей системы по неполным и неточным измерениям*:

- *синтеза* – формирование управления в виде обратной связи;
- *линейной* – уравнения объекта (6.1), измерителя (6.2), выражение для управляемой переменной (6.3) являются линейными математическими соотношениями;
- *оптимальной* – минимизация критерия качества управления (6.4);
- *среднеквадратичном* – вид критерия качества управления (6.4) – математическое ожидание (среднее) от квадратичного функционала;
- *следящей* – оптимальная система должна отслеживать задающее воздействие (желаемое поведение)  $\xi(t)$ ;
- *неполным* – измеряются не все компоненты вектора состояния (6.2);
- *неточным* – измерения (6.2) производятся с ошибками (вектор  $v(t)$ ).

Решение этой задачи основано на применении теоремы разделения, суть которой состоит в следующем. Управление системой (6.1), (6.2), (6.3) формируется в виде линейной оптимальной обратной связи по оптимальной оценке вектора состояния. "Раздельно" решаются задача оптимальной калмановской фильтрации (для получения оценок состояния системы) и задача оптимального слежения (для формирования управляющего воздействия в виде обратных связей по оценкам состояния).

Различные упрощения задачи (6.1) – (6.4) приводят к известным постановкам задач линейно-квадратической оптимизации для нестационарных и стационарных динамических систем:

- задача о регуляторе состояния;
- задача о регуляторе выхода;
- задача слежения;



- задача оптимального восстановления (оценки) вектора состояния системы (фильтр Калмана);
- задача оптимального стохастического управления при наличии полной информации о состоянии системы.

### 6.3.2. Синтез детерминированных оптимальных линейных систем с квадратичным критерием. Задача слежения

Рассматривается нестационарная линейная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0. \quad (6.5)$$

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (6.6)$$

где:  $x(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы;  $u(t)$  –  $r$ -мерный вектор управления;  $y(t)$  –  $m$ -мерный вектор выхода;  $f(t)$  –  $n$ -мерный вектор внешних воздействий;  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  – матрицы динамических коэффициентов системы ( $n \times n$ ), управлений ( $n \times r$ ) и выхода ( $m \times n$ ) соответственно;  $[t_0, t_f]$  – интервал управления системой;  $x^0$  – вектор начального состояния системы. На вектор управления  $u(t)$  не накладываются никакие явные ограничения. Требуется лишь его кусочная гладкость на интервале управления системой.

Пусть вектор наблюдений  $y(t)$  совпадает с вектором управляемых переменных  $z(t)$ . Введем  $m$ -мерный вектор  $\xi(t)$ , известный на всем интервале управления и который представляет собой желаемый выход системы.

Обозначим через  $e(t)$

$$e(t) = \xi(t) - y(t) \quad (6.7)$$

$m$ -мерный вектор ошибки следящей системы.

Требуется таким образом синтезировать (сформировать в виде функции состояния) управление  $u(t)$ , чтобы минимизировать функционал

$$J(u) = e^T(t_f)Fe(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt, \quad (6.8)$$

где  $F$  и  $Q(t)$  –  $m \times m$ -мерные неотрицательно определенные постоянная и функциональная матрицы, а  $R(t)$  –  $r \times r$ -мерная положительно определенная функциональная матрица.

Таким образом, целью управления является минимизация рассогласования выхода системы и ее желаемого поведения. Минимизация понимается в смысле критерия качества (6.8).

Из этой постановки задачи следуют как частные случаи:

- задача об оптимальном регуляторе состояния ( $\xi(t) \equiv 0$  и  $y(t) = x(t)$ );
- задача об оптимальном регуляторе выхода ( $\xi(t) \equiv 0$ ).

Задача оптимального слежения имеет следующее решение, которое можно записать в аналитическом виде.

*Оптимальное управление*

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)[K(t)x(t) - g(t)], \quad (6.9)$$

где  $K(t)$  –  $n \times n$ -мерная действительная, симметричная положительно определенная матричная функция, являющаяся решением

уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - C^T(t)Q(t)C(t) \quad (6.10)$$

с начальными условиями на правом конце интервала управления

$$K(t_f) = C^T(t_f)FC(t_f).$$

Вектор-функция  $g(t)$  размерности  $n \times 1$  удовлетворяет линейному дифференциальному векторному уравнению

$$\dot{g}(t) = -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]^T g(t) + K(t)f(t) - C^T(t)Q(t)\xi(t) \quad (6.11)$$

с начальными условиями на правом конце интервала управления

$$g(t_f) = C^T(t_f)F\xi(t_f).$$

Часто рассматриваются задачи оптимального управления *стационарными* линейными системами на бесконечном интервале управления. В этом случае требуется выполнение следующих условий: матрицы системы  $A$ ,  $B$  и  $C$  – постоянные; система (6.5), (6.6) должна быть полностью управляемой и наблюдаемой; желаемое поведение  $\xi(t)$  – постоянный вектор; матрица штрафа  $F \equiv 0$ ; матрицы штрафов  $Q$  и  $R$  – постоянные и положительно определенные; интервал управления – полубесконечный –  $[0, \infty)$ .

В этом случае задача оптимального слежения (6.5) – (6.8) формулируется следующим образом:

– Математическая модель системы управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, \infty), \quad x(0) = x^0, \quad (6.12)$$

$$y(t) = Cx(t); \quad (6.13)$$

– Функционал качества управления

$$J(u) = \int_0^\infty [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)]dt. \quad (6.14)$$

Решение задачи оптимального слежения (6.9) – (6.11) определяется следующими соотношениями:

Оптимальное управление

$$u(t) = -R^{-1}B^T[\bar{K}x(t) - \bar{g}], \quad (6.15)$$

Матрица  $\bar{K}$  определяется как решение матричного нелинейного алгебраического уравнения типа Риккати

$$-\bar{K}A - A^T\bar{K} + \bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K} - C^TQC = 0. \quad (6.16)$$

Вектор  $\bar{g}$  является решением векторного линейного уравнения

$$[A - BR^{-1}B^T\bar{K}]^T \bar{g} + C^TQ\xi = 0. \quad (6.17)$$

### 6.3.3. Оптимальное оценивание состояния. Фильтр Калмана

Рассматривается линейная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + G(t)w(t), \quad t > t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.18)$$



где  $x(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $x(t_0)$  – случайный вектор со средним значением  $\bar{x}_0$  и неотрицательно определенной матрицей ковариаций  $Q_0$ ;  $w(t)$  – векторный центрированный нормальный белый шум с неотрицательно определенной матрицей интенсивностей  $W(t)$ .

Задана модель системы наблюдения за состоянием объекта управления

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (6.19)$$

где  $y(t)$  –  $m$ -мерный вектор наблюдений (измерений);  $v(t)$  – векторный центрированный нормальный белый шум с положительно определенной матрицей интенсивностей  $V(t)$ . Предполагается, что система (6.18), (6.19) полностью наблюдаема и  $w(t)$ ,  $v(t)$  и  $x(t_0)$  взаимно независимы.

Требуется построить линейную динамическую систему восстановления вектора состояния  $x(t)$ , формирующую несмещенную оценку  $\hat{x}(t)$  с минимальной дисперсией. Это означает, что для вектора состояния  $x(t)$  системы (6.18) и вектора оценки  $\hat{x}(t)$  должно выполняться условие несмещенности

$$M\{x(t)\} = M\{\hat{x}(t)\} = \bar{x}(t) \quad (6.20)$$

и квадратичный функционал

$$J = M\{e^T(t)L(t)e(t)\} \quad (6.21)$$

достигал минимума. Здесь  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  – вектор ошибки оценки состояния, а матрица  $L(t)$  – произвольная положительно определенная матричная функция.

В силу условия несмещенности (6.20) видно, что математическое ожидание ошибки оценки  $\bar{e}(t)$  равно нулю на всем интервале оценивания состояния системы  $\bar{e}(t) = \overline{x(t) - \hat{x}(t)} = \bar{x}(t) - \bar{\hat{x}}(t) = 0$ .

Решением этой задачи является линейная динамическая система, называемая оптимальным фильтром Калмана. Математически оптимальный фильтр представляется в виде совокупности следующих соотношений:

- уравнение для оптимальной оценки состояния

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + S(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad t > t_0, \quad \hat{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad (6.22)$$

- матричный коэффициент усиления ошибки оценки наблюдения

$$S(t) = P(t)C^T(t)V^{-1}(t); \quad (6.23)$$

- уравнение для матрицы ковариаций ошибки оценки – матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + GW(t)G^T - P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t), \quad t > t_0 \quad (6.24)$$

с начальными условиями  $P(t_0) = Q_0$ .

#### 6.3.4. Оптимальное управление стохастическими системами при неполной и неточной информации о состоянии

Рассматривается линейная система вида (6.1), (6.2)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.25)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (6.26)$$

где:  $x(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы;  $u(t)$  –  $r$ -мерный вектор управления;  $y(t)$  –  $m$ -мерный вектор измеряемого выхода;  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  – матрицы динамиче-

ских коэффициентов системы ( $n \times n$ ), управлений ( $n \times r$ ) и выхода ( $m \times n$ ) соответственно;  $[t_0, t_f]$  – интервал управления системой;  $x(t_0)$  – случайный вектор со средним значением  $\bar{x}_0$  и неотрицательно определенной матрицей ковариаций  $Q_0$ ;  $w(t)$  – векторный центрированный нормальный белый шум с неотрицательно определенной матрицей интенсивностей  $W(t)$ ;  $v(t)$  – векторный центрированный нормальный белый шум с положительно определенной матрицей интенсивностей  $V(t)$ . Предполагается, что система полностью наблюдаема и  $w(t)$ ,  $v(t)$  и  $x(t_0)$  взаимно независимы.

Требуется таким образом синтезировать управление  $u(t)$ , чтобы минимизировать функционал

$$J(u) = M \left\{ x^T(t_f) F x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \right\}, \quad (6.27)$$

где  $F$  и  $Q(t)$  –  $n \times n$ -мерные неотрицательно определенные постоянная и функциональная матрицы, а  $R(t)$  –  $r \times r$ -мерная положительно определенная функциональная матрица.

Целью управления является удержание вблизи нуля средних значений составляющих вектора состояния  $x_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$ .

Эта задача интуитивно представляется некоторым "объединением" задач оптимального управления и оптимальной фильтрации, рассмотренных выше. В действительности это так. По известной *теореме разделения* оптимальное управление здесь формируется по тем же соотношениям, что и в п. 6.3.2, только в виде обратной связи не по вектору состояния  $x(t)$ , а по его калмановской оценке  $\hat{x}(t)$ . Оценка же находится из решения задачи п. 6.3.3.

Оптимальное управление находится из следующих соотношений:

- оптимальное управление

$$u(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) K(t) \hat{x}(t); \quad (6.28)$$

- уравнение Риккати для матрицы обратных связей

$$\dot{K}(t) = -K(t) A(t) - A^T(t) K(t) + K(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) K(t) - Q(t), \quad (6.29)$$

$$K(t_f) = F;$$

- уравнение для оценки состояния

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \hat{x}(t) + P(t) C^T(t) V^{-1}(t) [y(t) - C(t) \hat{x}(t)], \quad \hat{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad (6.30)$$

- уравнение Риккати для матрицы ковариаций ошибки оценки

$$\dot{P}(t) = A(t) P(t) + P(t) A^T(t) + W(t) - P(t) C^T(t) V^{-1}(t) C(t) P(t), \quad t > t_0, \quad (6.31)$$

$$P(t_0) = Q_0.$$

#### 6.4. Описание лабораторных работ

В лабораторных работах исследуется один конкретный объект управления – химический реактор. Математическая модель, коэффициенты модели, постановки задач взяты из [9].

Пусть имеется изотермический химический реактор с непрерывным перемешиванием реагентов  $A$  и  $B$ , в котором происходит необратимая реакция первого по-

рядка:  $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_3} C$ , причем скорости реакций заданы как  $r_1 = k_1 C_A$ ,  $r_3 = k_3 C_B$ . Здесь  $k_1$  и  $k_3$  – константы скоростей реакций. Необратимость реакции означает равенство нулю ( $r_2 = 0$ ) скорости реакции  $B \rightarrow A$ .

Математическая модель химической реакции описывается уравнениями баланса масс реагентов А и В

$$\begin{cases} V \frac{dC_A}{dt'} = F(C_{Af} - C_A) - V k_1 C_A, & C_A(0) = C_{A0}, \\ V \frac{dC_B}{dt'} = F(C_{Bf} - C_B) + V(k_1 C_A - k_3 C_B), & C_B(0) = C_{B0}. \end{cases}$$

Требуется поддерживать  $C_A$  и  $C_B$  как можно ближе к заданным уставкам  $C_{Ad}$  и  $C_{Bd}$ , изменяя концентрации реагентов А и В, т.е.  $C_{Af}$  и  $C_{Bf}$ . Введем относительные координаты:

$$D_{a_1} = k_1 V / F; \quad D_{a_3} = k_3 V / F; \quad t = t' F / V; \quad x_1 = C_A / C_{Aref}; \quad x_2 = C_B / C_{Aref};$$

$$u_1 = C_{Af} / C_{Aref}; \quad u_2 = C_B / C_{Aref}.$$

$C_{Aref}$  – некоторое произвольно выбранное значение концентрации  $C_A$ .

В этих координатах уравнения системы примут следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -(1 + D_{a_1})x_1 + u_1, & x_1(0) = x_{10}, \\ \frac{dx_2}{dt} = D_{a_1}x_1 - (1 + D_{a_3})x_2 + u_2, & x_2(0) = x_{20}. \end{cases}$$

Формулируется задача управления так – требуется поддерживать выходные концентрации  $x_1$  и  $x_2$  на заданном уровне, изменяя входные концентрации  $u_1$  и  $u_2$ . Для упрощения задачи будем считать, что управлять мы можем только изменением концентрации реагента А, т.е. управлением  $u = u_1$ . Предполагается также, что в системе существует возможность непрерывного измерения концентрации вещества В. Таким образом, модель измерителя можно представить соотношением  $y(t) = x_2(t)$ .

Значения коэффициентов модели [9] таковы:  $D_{a1} = 3.0$  и  $D_{a3} = 1.0$ .

Запишем уравнения модели системы в векторно-матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

В соответствии с соотношениями (6.5), (6.6) матрицы модели системы управления имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

В дальнейшем математические модели объекта управления (6.32) и системы измерений (6.33), а также значения матриц модели (6.34) будут неоднократно использоваться в качестве исходных данных. Специфика каждой отдельной задачи будет проявляться в дополнительных условиях и соотношениях.

#### 6.4.1. Лабораторная работа №1. Синтез оптимальной системы стабилизации химическим реактором

Необходимо решить задачу синтеза оптимальной системы стабилизации для объекта управления (6.32). Предположим, что уравнения (6.32) описывают систему управления в отклонениях от стационарного режима. Таким образом, необходимо удерживать вектор состояния вблизи нуля. Будем считать также, что требуется синтезировать регулятор выхода.

В этом случае задача (6.12 – 6.16) формулируется следующим образом:

– Математическая модель системы управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x^0;$$

– Функционал качества управления

$$J(u) = \int_0^{\infty} [y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t)]dt.$$

Решение задачи определяется следующими соотношениями:

– Оптимальное управление

$$u(t) = -R^{-1}B^TKx(t);$$

– Матрица  $K$  определяется как решение матричного нелинейного алгебраического уравнения типа Риккати

$$KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + C^TQC = 0.$$

В нашем случае размерность матрицы  $K$  будет  $2 \times 2$ , а матрицы  $Q$  и  $R$  являются скалярами ( $1 \times 1$ ) в силу того, что в системе один управляющий вход –  $u_I$  и один управляемый выход  $y_I$ .

#### Программа работы\*

1. Записать математические соотношения для оптимального управления и поведения системы.
2. Проверить свойства управляемости и наблюдаемости системы.
3. Решить аналитически задачу синтеза регулятора состояния, предполагая выбор матриц штрафов ( $Q$ ,  $R$ ) диагональными с произвольными символьными постоянными.
4. Провести расчет коэффициентов оптимальной обратной связи и вычислить значения собственных чисел матрицы динамических коэффициентов оптимальной системы ( $A - R^{-1}B^TK$ ) средствами Matlab.
5. Провести расчеты п.4 для различных значений (в диапазоне  $0.1 \div 100$ ) коэффициента штрафа при управлении ( $R$ ) в функционале качества (матрица  $Q$  при этом

\* Пункты 1, 2 и 3 программы работ выполняются при подготовке предварительного отчета.

должна быть единичной), построить корневой годограф собственных чисел матрицы  $(A-R^{-1}B^TK)$  системы.

6. Повторить расчеты и построения пункта 5 для различных значений (в диапазоне 0.01 – 10) коэффициентов штрафов при состоянии ( $Q$ ) в функционале качества (матрица  $R$  при этом должна быть единичной).

7. Провести (для характерных значений матриц штрафов) расчет и построение оптимальных процессов (управления, выхода, всех компонент вектора состояния) в САУ с синтезированным регулятором средствами системы Matlab.

#### 6.4.2. Лабораторная работа №2. Оптимальное оценивание состояния системы управления химическим реактором

Пусть математическая модель процесса в химическом реакторе с непрерывным перемешиванием имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + w(t), \quad t \in [0, \infty], \quad x(0) = x^0 + \xi^0, \\ y(t) &= Cx(t) + v(t),\end{aligned}$$

где  $w(t)$  и  $v(t)$  – случайные независимые векторные центрированные нормальные белые шумы с матрицами интенсивностей  $W$  и  $V$ , которые могут быть обусловлены колебаниями расходов, температур или какими-либо иными неконтролируемыми воздействиями и ошибками измерений. Известны характеристики начальных отклонений –  $\xi^0$  – нормальный случайный центрированный вектор с ковариацией  $Q_0$ .

Требуется синтезировать оптимальный фильтр Калмана для восстановления компонент вектора состояния  $x(t)$  – получения оптимальных оценок  $\hat{x}(t)$ .

Решение этой задачи определяется соотношениями (6.22), (6.23) и (6.24) с учетом стационарности модели системы и измерений и характера шумов.

В нашем случае матрицы  $W$  и  $Q_0$  будут иметь размерность  $2 \times 2$ , а матрица  $V$  является скаляром ( $1 \times 1$ ) в силу того, что измеряется одна компонента вектора состояния. Пусть заданы следующие числовые характеристики

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad V = [400], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### Программа работы\*

1. Записать математические соотношения для оптимального фильтра.
2. Проверить свойство наблюдаемости системы.
3. Решить аналитически задачу синтеза фильтра Калмана, предполагая выбор матриц интенсивностей шумов ( $W$ ,  $V$ ) диагональными с произвольными символьными постоянными.

4. Провести расчет установившихся значений коэффициентов матрицы  $S$  в уравнении фильтра (6.22) и вычислить значения собственных чисел матрицы динамических коэффициентов  $(A - SC)$  средствами Matlab.

5. Провести моделирование процессов в фильтре Калмана средствами системы Matlab. Построить графики оценок компонент вектора состояния  $\hat{x}(t)$  и самого вектора состояния  $x(t)$ . Проанализировать зависимость установившихся значений дис-

\* Пункты 1, 2 и 3 программы работ выполняются при подготовке предварительного отчета.



персий ошибок оценок (диагональные элементы матрицы  $P$  (уравнение 1.24)) от величины интенсивности шума в измерениях (матрица  $V$ ).

### 6.5. Требования к содержанию отчета

В отчете по лабораторной работе должны быть отражены цель, краткие теоретические сведения о постановке и решении конкретной задачи линейно-квадратичной оптимизации, приведены соответствующие определения и математические соотношения.

Необходимо привести описание средств системы Matlab, использованных для решения поставленной задачи. Полученные численные результаты должны иметь подробные комментарии и служить для формулировки окончательных выводов по работе.

### 6.6. Порядок выполнения и защиты работ

1. Ознакомиться с пунктами раздела 6 настоящих указаний.
2. Подготовить предварительный отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
  - описание математической модели исследуемого процесса, системы управления и измерений;
  - характеристики свойств управляемости и/или наблюдаемости
  - математические соотношения для определения оптимальных процессов в системе управления и/или оценивания;
  - аналитическое решение соответствующей задачи оптимизации;
  - перечень и последовательность операций в системе Matlab для решения задачи синтеза;
  - исходные данные для проведения вычислений
3. Провести в соответствии с заданием необходимые расчеты и построения в системе Matlab.
4. Проанализировать результаты расчетов, сформулировать выводы по работе и оформить окончательный отчет.
5. Защита работы производится за компьютером.

### 6.7. Контрольные вопросы

1. Общая характеристика задач линейно-квадратичной оптимизации САУ.
2. Общая постановка и решение задач синтеза оптимальных регуляторов состояния, выхода, задача слежения.
3. Задачи ЛКО САУ в стационарной постановке.
4. Физический смысл матриц штрафов в функционалах качества.
5. Необходимость требований управляемости и наблюдаемости систем.
6. Особенности численных алгоритмов решения задач ЛКО САУ.
7. Общая характеристика средств системы Matlab для решения задач синтеза оптимальных и моделирования САУ.



## ПРИЛОЖЕНИЕ А

(рекомендуемое)

### Оптимальное управление

#### А.1. Аналитический синтез регулятора выхода

Рассматривается система управления двигателем постоянного тока. Линеаризация уравнений динамики модели относительно номинального режима работы приводит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Это уравнение связывает отклонения угловой скорости  $\omega$  вращения вала двигателя и напряжения в цепи якоря  $u$ :

$$T_e T_m \ddot{\omega} + T_m \dot{\omega} + \omega = k_d k_u k_p u_d,$$

$$u_{tg} = k_{tg} \omega.$$

Здесь:  $T_e$ ,  $T_m$  – электромагнитная и электромеханические постоянные двигателя;  $\omega$  – отклонение угловой скорости вращения вала двигателя от номинальной;  $u_d$ ,  $u_{tg}$  – отклонения от номинальных значений напряжений в цепи якоря двигателя и на выходе тахогенератора;  $k_d$ ,  $k_u$ ,  $k_p$ ,  $k_{tg}$  – коэффициенты усиления двигателя, усилителя, преобразователя и тахогенератора.

Для преобразования исходной модели "вход-выход" в пространство состояний введем вектор состояния  $x = [\omega \ \dot{\omega}]^T$ . Тогда модель системы в пространстве состояний будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_e T_m} & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_d k_u k_p}{T_e T_m} \end{bmatrix} u_d, \\ y = [k_{tg} \quad 0] x. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases}$$

Пусть численные значения параметров системы таковы:

$$T_e = 0.2; \quad T_m = 0.5; \quad k_d = 2.5; \quad k_u = 4.0; \quad k_p = 1.5; \quad k_{tg} = 0.2.$$

Тогда матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  модели системы будут иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix}, \quad C = [0.2 \quad 0].$$

Сформулируем задачу линейно-квадратичной оптимизации. Пусть требуется синтезировать регулятор выхода системы управления двигателем постоянного тока, стабилизирующий выход системы  $y$  в окрестности номинального режима. При этом качество управления будем оценивать следующим квадратичным функционалом

$$J = \int_0^{\infty} [y^T Q y + u^T R u] dt.$$

Здесь  $Q$  и  $R$  – матрицы штрафов функционала. В нашем случае это числа, т.к. управляющее воздействие  $u$  и выход системы  $y$  являются скалярными функциями.

Оптимальное управление формируется в виде обратной связи

$$u(t) = -R^{-1} B^T K x(t), \quad KA + A^T K - KBR^{-1} B^T K + C^T Q C = 0.$$

Прежде всего, проверим выполнение свойств управляемости и наблюдаемости системы. Для этого построим матрицы управляемости *Ctrl* и наблюдаемости *Obsrv*.

$$Ctrl = [B : AB] = \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 150 \\ 150 & -750 \end{bmatrix},$$

$$Obsrv = [C^T : A^T C^T] = \left[ \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Видно, что детерминанты этих матриц отличны от нуля. Следовательно, можно сделать вывод, что система полностью управляема и полностью наблюдаема.

Приведем кратко последовательность действий при аналитическом решении матричного уравнения Риккати  $KA + A^T K - KBR^{-1} B^T K + C^T Q C = 0$ .

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix} [r^{-1}] [0 \quad 150] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} [q] [0.2 \quad 0] = 0$$

После проведения матричных операций с учетом симметричности матрицы  $K$  (т.е.  $k_{12}=k_{21}$ ) получим систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} -20k_{12} - 150^2 r^{-1} k_{12}^2 + 0.04q = 0, \\ k_{11} - 5k_{12} - 10k_{22} - 150^2 r^{-1} k_{12} k_{22} = 0, \\ 2k_{12} - 10k_{22} - 150^2 r^{-1} k_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем  $k_{12}$ . Подставив его в третье уравнение – найдем  $k_{22}$ . Зная теперь  $k_{12}$  и  $k_{22}$ , найдем из второго соотношения коэффициент  $k_{11}$ .

$$k_{12} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 9r^{-1}q}}{2250r^{-1}}; \quad k_{22} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 1800r^{-1}k_{12}}}{4500r^{-1}}; \quad k_{11} = 5k_{12} + 10k_{22} + 150^2 r^{-1} k_{12} k_{22}.$$

Если выбрать значения  $r=1$  и  $q=1$ , то значения коэффициентов матрицы Риккати  $K$  будут равны  $k_{11} = 9.34 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_{12} = 9.61 \cdot 10^{-4}$ ,  $k_{22} = 1.45 \cdot 10^{-4}$ .

Коэффициенты оптимальной отрицательной обратной связи по состоянию в нашем случае найдем из выражения  $S = r^{-1} B^T K$

$$S = r^{-1} B^T K = 1 \cdot [0 \quad 150] \cdot \begin{bmatrix} 9.34 \cdot 10^{-3} & 9.61 \cdot 10^{-4} \\ 9.61 \cdot 10^{-4} & 1.45 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = [0.144 \quad 0.022]$$

Собственные числа матрицы  $A-B\bar{S}$  оптимальной системы управления будут иметь следующие значения  $\lambda_{1,2} = -4,131 \pm 3,816i$ .

## А.2. Синтез регулятора выхода в системе Matlab

Ниже приведен *m*-файл системы Matlab, содержащий последовательность команд, решающих задачу синтеза регулятора выхода. На рисунке А.1 приведены графики собственного движения системы (*sys*) без регулятора и с оптимальным регулятором (*sysopt*) выхода.

```
%Тестовый пример для заочников
%Dвигатель постоянного тока
%Параметры системы
Te=0.2; Tm=0.5; Kd=2.5; Ku=4; Kp=1.5; Ktg=0.2;
%Матрицы системы
A=[ 0 1;
    -1/(Te*Tm) -1/Te];
B=[ 0
    Kd*Ku*Kp/(Te*Tm) ];
C=[Ktg 0];
D=[0];
sys=ss(A,B,C,D);
%Начальное значение вектора состояния x0
x0=[1;0];
%Матрицы штрафов в функционале
Q=[1]; R=[1];
% Решение задачи оптимального управления по выходу (Y)
[S,K,E]=lqry(sys,Q,R);
Aopt=A-B*S; % Динамическая матрица оптимальной системы
sysopt=ss(Aopt,B,C,D); % Формирование оптимальной системы
initial(sys,'k',sysopt,'k',x0) %Моделирование систем
```

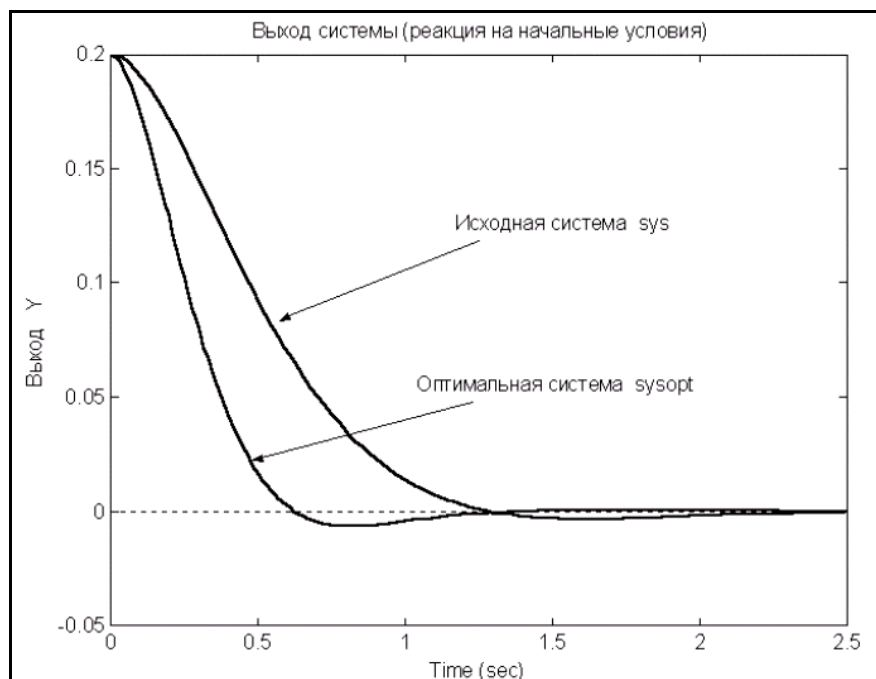


Рисунок А.1 – Собственное движение исходной и оптимальной систем

В приведенной программе использованы функции специализированного пакета *System Control Toolbox*:

- **ss** – функция, предназначенная для формирования модели линейной стационарной САУ в терминах пространства состояний;

- **lqry** – функция, предназначенная для решения задачи синтеза линейно-квадратического регулятора выхода (*linear quadratic regulator*). Здесь **S** – матричный коэффициент оптимальной обратной связи по состоянию; **K** – решение уравнения Риккати в задаче оптимального управления; **E** – вектор собственных чисел матрицы динамических коэффициентов оптимальной системы управления.

- **initial** – функция, предназначенная для моделирования собственного движения линейной стационарной системы, вызванного заданными начальными условиями  $X_0$ .

Все надписи в поле графика на рисунке А.1 введены в режиме ручного редактирования атрибутов графика, построенного функцией **plot**, предусмотренных средствами и инструментами объектов **figure** и **axes** системы Matlab.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(рекомендуемое)

### Оптимальное оценивание состояния

#### Б.1. Аналитическое решение задачи фильтрации

Рассматривается задача оценки состояния системы управления двигателем постоянного тока. Уравнения системы управления и измерений представлены ниже

$$T_e T_m \ddot{\omega} + T_m \dot{\omega} + \omega = k_d k_u k_p u_d + w(t),$$

$$u_{tg} = k_{tg} \omega + v(t).$$

Здесь:  $T_e$ ,  $T_m$  – электромагнитная и электромеханические постоянные двигателя;  $\omega$  – отклонение угловой скорости вращения вала двигателя от номинального значения;  $u_d$ ,  $u_{tg}$  – отклонения от номинальных значений напряжений в цепи якоря двигателя и на выходе тахогенератора;  $k_d$ ,  $k_u$ ,  $k_p$ ,  $k_{tg}$  – коэффициенты усиления двигателя, усилителя, преобразователя и тахогенератора;  $w(t)$  – случайное внешнее воздействие на объект управления;  $v(t)$  – ошибка измерений. Процессы  $w(t)$  и  $v(t)$  являются нормальными стационарными центрированными белыми шумами с дисперсиями  $W$  и  $V$ .

Для преобразования исходной модели "вход-выход" в пространство состояний введем вектор состояния  $x = [\omega \ \dot{\omega}]^T$ . Тогда модель системы в пространстве состояний будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_e T_m} & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_d k_u k_p}{T_e T_m} \end{bmatrix} u_d + \begin{bmatrix} -\frac{0}{T_e T_m} \\ \frac{1}{T_e T_m} \end{bmatrix} w(t), \\ y = [k_{tg} \ 0] x + v(t). \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Gw(t), \\ y = Cx + v(t). \end{cases}$$

Пусть численные значения параметров системы таковы:

$$T_e = 0.2; \quad T_m = 0.5; \quad k_d = 2.5; \quad k_u = 4.0; \quad k_p = 1.5; \quad k_{tg} = 0.2.$$

Тогда матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $G$  и  $C$  модели системы будут иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix}, \quad C = [0.2 \ 0], \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Оптимальную оценку состояния системы будем формировать на основе установившегося решения уравнений фильтра Калмана (1.22 – 1.24):

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + Bu(t) + S[y(t) - [0.2 \ 0]\hat{x}(t)], \quad t > 0, \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0;$$

$$S = P[0.2 \ 0]^T V^{-1}; \quad AP + PA^T + GWG^T - PC^T V^{-1} CP = 0.$$

Свойство наблюдаемости системы проверяется так же, как и в Приложении

$$A: \det \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = 0.04 \neq 0 - \text{система наблюдаема.}$$

Решим матричное уравнение Риккати и найдем установившееся значение матрицы ковариаций ошибки оценки  $P$ .



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} [w] \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} [v^{-1}] \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

После проведения матричных операций с учетом симметричности матрицы  $P$  (т.е.  $p_{12}=p_{21}$ ) получим систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2p_{12} - 0.04v^{-1}p_{11}^2 = 0, \\ p_{22} - 10p_{11} - 5p_{12} - 0.04v^{-1}p_{11}p_{12} = 0, \\ -20p_{12} - 10p_{22} + 100w - 0.04v^{-1}p_{12}^2 = 0. \end{cases}$$

Выразим  $p_{12}$  из первого уравнения и подставим его во второе и третье. Затем подставим  $p_{22}$  в третье. В результате получим уравнение четвертой степени относительно  $p_{11}$

$$16p_{11}^4 + 8 \cdot 10^3 v p_{11}^3 + 1.4 \cdot 10^6 v^2 p_{11}^2 + 10^8 v^3 p_{11} - 10^8 w \cdot v^3 = 0.$$

Решение этого уравнения в общем виде (с произвольными  $w$  и  $v$ ) затруднительно. Предположим, что значения интенсивностей шумов – единичные, т.е.  $w=1$  и  $v=1$ . Тогда уравнение относительно  $p_{11}$  примет вид

$$16p_{11}^4 + 8 \cdot 10^3 p_{11}^3 + 1.4 \cdot 10^6 p_{11}^2 + 10^8 p_{11} - 10^8 = 0.$$

В силу физической интерпретации параметра  $p_{11}$  – дисперсия ошибки оценки – значение  $p_{11}$  должна быть неотрицательной. Предварительный несложный качественный анализ последнего уравнения показывает, что среди четырех корней это уравнение имеет один положительный корень *немногим меньший единицы*. Это следует из положительности членов с  $p_{11}$ , отрицательности свободного члена и одинаковости коэффициентов у  $p_{11}$  и свободного члена ( $10^8$ ). Больше положительных корней у этого уравнения нет. Найти данный корень не представляет сложности даже подбором.

Команда системы Matlab

```
roots([16, 8*10^3, 1.4*10^6, 10^8, -10^8])
```

найдет нули данного полинома и выведет на экран следующую информацию

ans =

```
1.0e+002 *
-2.50986303953969
-1.250000000000000 + 0.98094591002674i
-1.250000000000000 - 0.98094591002674i
0.00986303953969
```

Здесь установлен для вывода данных числовой формат *long*.

Как мы и предполагали, уравнение имеет один положительный корень  $p_{11} \approx 0.009863 \cdot 10^2 = 0.9863$

Вычисление двух других коэффициентов матрицы ковариаций ошибки оценки ( $p_{12}$  и  $p_{22}$ ) не представляет труда:

$$p_{12} = \frac{0.04 p_{11}^2}{2} = 0.02 \cdot 0.9863 = 0.0195; \quad p_{22} = 10 p_{11} + 5 p_{12} + 0.04 p_{11} p_{12} = 9.9611.$$



Далее следует вычислить матрицу коэффициентов усиления в уравнении фильтра Калмана (6.23).

## Б.2. Решение задачи фильтрации в системе Matlab

Для решения задачи оптимальной оценки состояния средствами Matlab сначала формируется модель исходной системы, затем задаются характеристики случайных воздействий. Далее формируется стационарный фильтр Калмана – решается уравнение Риккати для матрицы ковариаций ошибок оценивания  $P$  и определяется матрица оптимальных коэффициентов обратных связей  $L$ .

Чтобы провести моделирование обобщенной (объединенной) системы требуется сформировать объединенную модель исходной системы и фильтра Калмана. Эта модель, названная в программе *SYSm*, формируется на основе следующих соображений:

а) входом обобщенной модели является объединение внешних воздействий на систему – вектор  $[u; w; v]$ ;

б) выходом обобщенной модели выступает объединенный вектор  $[y; \hat{x}]$ , состоящий из выхода исходной системы и оптимальной оценки выхода.

Исходя из этих посылок, характеристик случайных воздействий и требований языка Matlab на подготовку матриц моделируемого объекта, исходные соотношения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + S(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)), \\ y = Cx(t) + Du(t) + Hw(t) + v(t), \\ \hat{x}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

необходимо представить в следующей форме

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ SC & A - SC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & G & 0 \\ B & SH & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & H & I \\ D & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Ниже приведен *m*-файл системы Matlab, содержащий последовательность команд, решающих задачу синтеза фильтра Калмана. На рисунке Б.1 представлены графики изменения значения выхода и его оценки.

```

%Тестовый пример для заочников
%Dвигатель постоянного тока
    %Синтез фильтра Калмана
%Параметры системы
%  $\dot{x} = Ax + Bu + Gw$   $M\{w\}=0$   $M\{ww'\}=W \cdot d(t)$   $M\{x_0\}=\sim x_0$ 
%  $y = Cx + Du + Hw + v$   $M\{v\}=0$   $M\{vv'\}=V \cdot d(t)$   $M\{wv'\}=N=0$ 
Te=0.2; Tm=0.5; Kd=2.5; Ku=4; Kp=1.5; Ktg=0.2;
%Матрицы системы
A=[ 0 1;
    -1/(Te*Tm) -1/Te];
B=[ 0
    Kd*Ku*Kp/(Te*Tm)];
G=[ 0
    1/(Te*Tm)];
C=[Ktg 0]; D=[0]; H=[0];
%Модель исходной расширенной системы
sys=ss(A,[B,G],C,[D,H]);
%Характеристики шумов объекта и измерителя
W=[100]; V=[1];
%Начальное значение вектора состояния
x0=[1;0];
t=0:0.02:3;
u=ones(size(t)); % Единичный управляющий вход
w=normrnd(0,sqrt(W),size(t)); % Случайное возмущение
v=normrnd(0,sqrt(V),size(t)); % Ошибки измерений
[Y,T,X]=lsim(sys,[u' w'],t,x0); % Моделирование исходной системы
Yv=C*X'+v; % Формирование выхода системы
%Построение фильтра Калмана
[Kest,S,P]=kalman(sys,W,V);
%Моделирование движения фильтра Калмана
[Y,T,X]=lsim(Kest,[u' Yv'],t, x0');
plot(T,Y(:,1),'b',T,Yv,'k');

```

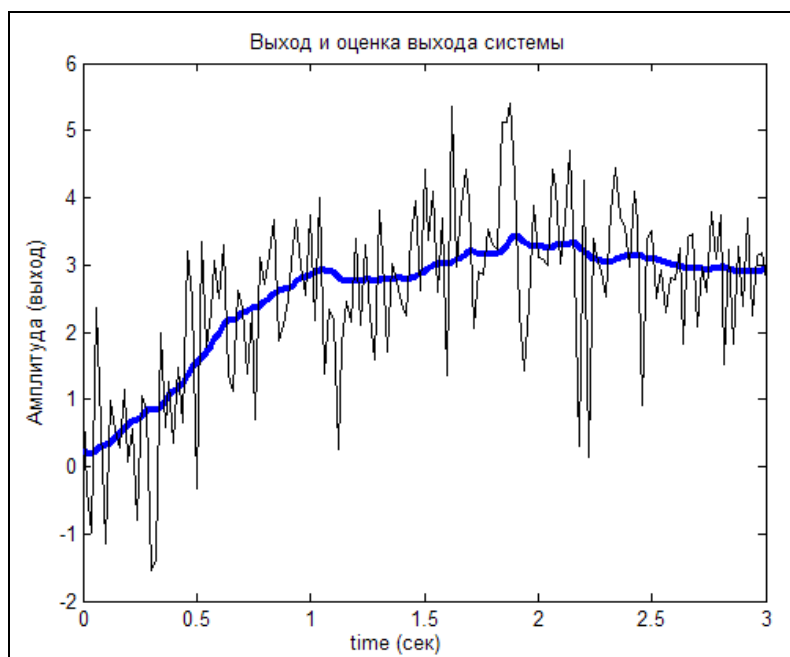


Рисунок Б.1 – Выход системы и его оценка

В приведенной программе (в дополнении к функциям, описанным в Приложении А) использованы следующие функции специализированного пакета *System Control Toolbox*:

– ***kalman*** – функция, предназначенная для синтеза оптимального стохастического наблюдателя (***Kest*** – фильтра Калмана), вычисления матрицы ковариаций ошибки оценки состояния ***P*** (решения уравнения Риккати) и матрицы коэффициентов усиления фильтра Калмана ***S***;

– ***lsim*** – функция, предназначенная для моделирования движения линейной стационарной системы, вызванного заданными начальными условиями и заданным внешним воздействием.



Заказ № \_\_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2008г. Тираж \_\_\_\_\_ экз.