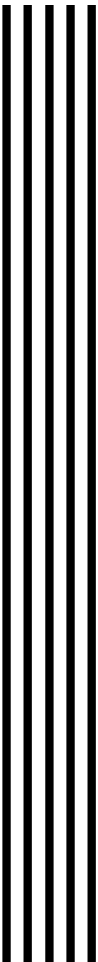


Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Методические указания
по дисциплине «Высшая математика»
для самостоятельной работы студентов
дневной формы обучения
всех специальностей

Севастополь
2005

УДК 51(075)

Функциональные ряды. Методические указания по дисциплине «Высшая математика» для самостоятельной работы студентов дневной формы обучения всех специальностей/ сост. А.И. Песчанский. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005. – 24 с.

Целью настоящих методических указаний является оказание помощи студентам при изучении темы «Функциональные ряды».

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № 5 от 05.02.2004 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: ст. преподаватель Агаханянц Р.Е.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. Теоретический раздел	4
2. Решение нулевого варианта.....	9
3. Расчетные задачи	14
Библиографический список	23

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Область сходимости функционального ряда [1-3]. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (1)$$

члены которого – функции от x , называется функциональным рядом. Совокупность значений x , при которых функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$

определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называют областью сходимости

функционального ряда. Для определения области абсолютной сходимости ряда (1) следует воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши. Именно, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = l(x), \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = l(x),$$

то для определения области абсолютной сходимости ряда (1) следует решить функциональное неравенство $l(x) < 1$, а для определения области расходимости – неравенство $l(x) > 1$. В точках, описываемых уравнением $l(x) = 1$, требуется дополнительное исследование.

1.2. Равномерная сходимость [1-3]. Сходящийся в области D функциональный ряд (1) называется равномерно сходящимся в этой области, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для остатка ряда (1)

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ при всех $n > N(\varepsilon)$ и $x \in D$ имеет место оценка $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Пусть функциональный ряд (1) сходится в области D и существует сходящийся

знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что для всех $x \in D$ и для

всех $n > N_0$ члены ряда (1) удовлетворяют условию $|u_n(x)| \leq a_n$. Тогда ряд (1) сходится абсолютно и равномерно в области D .

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется мажорирующим для ряда (1).

1.3. Область сходимости степенного ряда [1-3]. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

где $x_0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – действительные числа, называется степенным.

Для всякого степенного ряда существует интервал сходимости с центром в точке x_0 ($|x - x_0| < R$ или $x_0 - R < x < x_0 + R$), внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого ряд расходится. На концах интервала сходимости (в точках $x = x_0 \pm R$) различные степенные ряды ведут себя по-разному: могут сходиться абсолютно или условно на обоих концах, либо сходиться на одном конце и расходиться на другом, либо расходиться на обоих концах. Число R – половина длины интервала сходимости – называется радиусом сходимости степенного ряда и определяется по формуле Коши-Адамара.

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Радиус сходимости R может быть вычислен по формуле:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если этот предел существует.

1.4. Разложение функций в ряд Тейлора [1-3]. Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < r$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней бесконечный степенной ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_n)^n + \dots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

При $x_0 = a$ получаем так называемый ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

При решении задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

1.5. Приближенные вычисления значений функций и определенных и интегралов [1-3]. Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$

или интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в разложении $f(x)$ в степенной ряд сохраняются

первые n членов, а остальные члены отбрасываются. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму погрешности членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < u_{n+1}$, где u_{n+1} – модуль первого из отброшенных членов ряда.

1.6. Ряды Фурье [4,5]. Рядом Фурье функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Рядом Фурье функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-l, l]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (2)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на отрезке $[a, b]$, если сама функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ имеют на $[a, b]$ конечное число точек разрыва I-го рода.

Теорема. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ кусочно-гладкая на отрезке $[-l, l]$, то ряд Фурье (2) сходится к значению $f(x)$ в каждой её точке непрерывности и к значению $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ в точках разрыва. Если дополнительно, $f(x)$ непрерывна на всей оси, то ряд (2) сходится к $f(x)$ равномерно.

Ряд Фурье четной функции $f(x)$ содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

причем

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то её ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Для разложения в ряд Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, l]$, достаточно доопределить её на отрезке $[-l, 0]$ произвольным образом, а затем разложить в ряд Фурье, считая её заданной на отрезке $[-l, l]$. Наиболее

целесообразно функции доопределить так, чтобы она была четной или нечетной на отрезке $[-l, l]$.

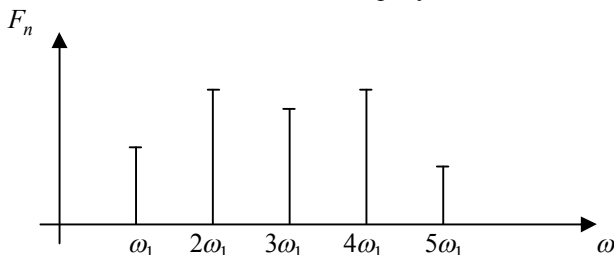
1.7. Спектры периодических функций [4,5]. Ряд Фурье (2) функции периода $2l$ может быть записан в виде

$$f(x) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\omega_1 x + \phi_n),$$

где $F_0 = \frac{a_0}{2}$, $F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\phi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$, $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$.

Совокупность величин F_n носит название спектра амплитуд, совокупность величин ϕ_n называется спектром фаз функции $f(x)$, $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$ — основная частота колебания.

Графически спектр амплитуд изображается вертикальными отрезками определенной длины, как показано на рисунке.



1.8. Спектральная плотность [4,5]. Спектральной плотностью функции $f(t)$ называется прямое преобразование Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Величина $\rho(\omega) = |S(\omega)|$ называется амплитудным спектром, а величина $\phi(\omega) = -\arg S(\omega)$ — фазовым спектром.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. *Функциональные ряды.* Область сходимости. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
2. *Степенные ряды.* Теорема Абеля. Интервал сходимости. Свойства степенных рядов. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

3. *Ряды Фурье.* Тригонометрическая система функций. Ряд Фурье. Разложение функции в ряд Фурье. Спектры периодических функций.

2. РЕШЕНИЕ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

Задача №1. (см. п. 1.1.) Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n+3}$.

Решение. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n |x|^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n+3}$ воспользуемся признаком Даламбера

$$l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} |x|^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{n+4}}{5^n |x|^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n+3}} = 5 |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+4} = 5 |x|.$$

Ряд сходится при $|x| < \frac{1}{5}$ и расходится при $|x| > \frac{1}{5}$.

При $x = \frac{1}{5}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{5(n+3)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

В точке $x = -\frac{1}{5}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{5(n+3)}$ сходится по признаку Лейбница.

Итак, областью сходимости функционального ряда является промежуток $\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Задача №2. (см. п. 1.2.) Для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^4}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$, построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на отрезке $[1;3]$.

Решение. На отрезке $[1;3]$ данный ряд мажорируется знакоположительным числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$, который

эквивалентен в смысле сходимости сходящемуся обобщенному гармоническому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. На основании признака Вейерштрасса функциональный ряд сходится равномерно на указанном отрезке.

Задача №3. (см. п. 1.3) Определить интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{n^2}$ и исследовать его поведение в граничных точках интервала сходимости.

Решение. Здесь $a_n = \frac{3^n}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (n+1)^2}{n^2 3^{n+1}} = \frac{1}{3}$.

Следовательно, ряд сходится, если $|x-1| < \frac{1}{3}$, т.е. $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$. Исследуем сходимость ряда на границах промежутка. Если $x = \frac{4}{3}$, то получаем ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится. Если $x = \frac{2}{3}$, то получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Этот ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Итак, областью сходимости степенного ряда является отрезок $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right]$.

Задача №4. (см. п. 1.4) Разложить функцию $\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. В разложении:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

заменяем x на $x-1$, получаем:

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \quad (0 < x \leq 2).$$

Радиус сходимости полученного ряда равен 1: $|x-1| < 1$.

Задача №5. (см. п. 1.5) Вычислить с точностью до 0,0001 определенный интеграл $\int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.

Решение. Заменим в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{1/2} \frac{1}{x^2} \left(1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots\right) dx = \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots\right) dx = \left(\frac{1}{2!}x - \frac{x^3}{4!3} + \frac{x^5}{6!5} - \dots\right) \Big|_0^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2!2} - \frac{1}{4!3 \cdot 2^3} + \frac{1}{6!5 \cdot 2^5} - \dots \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } \int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \approx 0,25 - 0,0017 = 0,2483.$$

Задача №6. (см. п. 1.5) Пользуясь соответствующим разложением вычислить $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ с точностью до 10^{-5} .

Решение. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-1/5} = 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \dots$$

Воспользуемся приближенным равенством

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \frac{1}{4!5^4}.$$

Мы взяли 5 слагаемых, так как знакпеременный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, а поэтому допускаемая погрешность по абсолютной величине должна быть меньше первого из отброшенных членов

ряда. У нас первый из отброшенных членов ряда равен $\frac{1}{5!5^5} < 10^{-5}$.

$$\text{Итак, } \frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 0,81873.$$

Задача №7. Найти разложение в степенной ряд до степени x^4 решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

Решение. Из уравнения и начальных условий находим:
 $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$.

Дифференцируя данное уравнение, находим последовательно:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'', \quad y^{IV} = 6y'y'' + 2yy''''.$$

Полагая $x = 0$ и используя значение $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, находим последовательно:

$$y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 8, \quad y^{IV}(0) = 28.$$

Искомое решение имеет вид:

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \dots$$

Задача №8. (см. пп. 1.6, 1.7) Разложить функцию $f(x) = \pi + x$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$, найти и изобразить графически спектр амплитуд этой функции.

Решение. Определяем коэффициенты ряда Фурье. Находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cos nxdx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nxdx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определяем теперь коэффициенты b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \sin nxdx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nxdx = 0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nxdx =$$

$$= -\frac{2x}{\pi n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nxdx = -\frac{2}{n} \cos nx + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

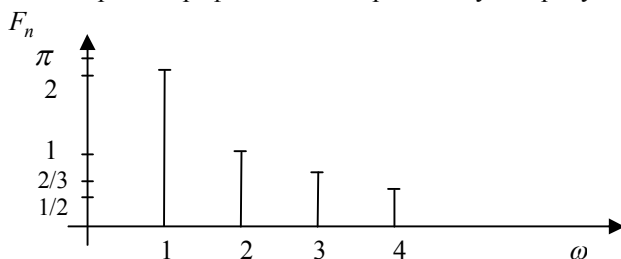
Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Находим спектр амплитуд по формулам:

$$F_0 = \frac{a_0}{2} = \pi; \quad F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \left| \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right| = \frac{2}{n}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{e} = 1.$$

Изобразим графически спектр амплитуд на рисунке.



Задача №9. (см. п. 1.8) Найти спектральную плотность функции

$$f(t) = \begin{cases} e^{-3t}, & t \geq 0, \\ e^{2t}, & t < 0. \end{cases}$$

Решение. Определяем спектральную плотность $S(\omega)$ по формуле

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-3t} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2 - i\omega} e^{t(2 - i\omega)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{3 + i\omega} e^{t(-3 - i\omega)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2 - i\omega} + \frac{1}{3 + i\omega} = \\ &= \frac{2 + i\omega}{\omega^2 + 4} + \frac{3 - i\omega}{\omega^2 + 9} = \frac{5\omega^2 + 30 + 5i\omega}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}. \end{aligned}$$

3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача №1. Найти область сходимости функционального ряда.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \operatorname{tg} \frac{2x}{3n},$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}},$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^n \sin \frac{x}{2n},$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{3n} \sin \frac{x}{2n+1},$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n \operatorname{arctg} \frac{3x}{2n+3},$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} 32^n x^{5n} \arcsin \frac{x}{2n},$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \operatorname{tg} \frac{x}{2n+1},$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n 2^{\frac{n}{x+1}},$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^n \sin \frac{2x}{n+3},$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n} \sin \frac{3x}{n+1},$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{2n},$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} 16^n x^{4n} \arcsin \frac{2x}{n+3},$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} x^{5n} \operatorname{tg} \frac{4x+1}{n+2},$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n 4^{\frac{n}{x-2}},$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} 4^{2n} x^n \sin \frac{5x}{2n+1},$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{2n} \operatorname{tg} \frac{x}{n+3},$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{2n} \operatorname{arctg} \frac{2x}{n+5},$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{2n} \arcsin \frac{3x}{n},$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \operatorname{tg} \frac{5x}{n+4},$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+2}\right)^n 5^{\frac{n}{x+2}},$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \sin \frac{7x}{n+5},$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \operatorname{tg} \frac{7x+1}{n},$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{3n-1}\right)^n 7^{\frac{n}{x-3}},$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} 7^n x^n \arcsin \frac{x^2+1}{n},$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \operatorname{tg} \frac{x^2+4}{n},$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{7n-1}\right)^n 7^{\frac{n}{x+3}},$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} x^n \sin \frac{x^3+2}{n+1},$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+1} x^n \operatorname{tg} \frac{3x+1}{n},$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+2} x^n \operatorname{arctg} \frac{2x^2+1}{n},$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n+3} x^n \arcsin \frac{x^2+1}{n}.$$

Задача №2. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}, \quad [0,2].$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}, \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad [-2,2]$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}, \quad [-1,6]$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, \quad [2,4]$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi-x) \cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}, \quad [0, \pi]$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}, \quad [-1,3]$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad [-5,-1]$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^{2n}}{(n+1)^2}, \quad [1,3]$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad [-3,3]$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}, \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

$$14. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n \ln n}, \quad [-2,2].$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}, \quad [-7,-3]$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}, \quad [-3,-1]$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1}, \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n}, \quad \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}, \quad [-6,-4]$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)}{(2n-1)2^n}, \quad [1,3]$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1) \sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}, \quad [-3,0]$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, \quad [-1,1]$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \sqrt{n^2+1}}, \quad [-6,-4]$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^{n^2}}, \quad [-2, 2]$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{\pi}{2^n})(x-2)^n, \quad [1, 3]$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}, \quad [0, 2]$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}, \quad [-1, 0]$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 \sqrt[3]{n+2}}, \quad [-3, -1]$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\sqrt{n+1}}, \quad [2, 4]$$

Задача №3. Определить интервал сходимости степенного ряда и исследовать его поведение в граничных точках интервала сходимости.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n},$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}},$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^{n+1}},$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n},$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n,$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)},$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{2^n(n+1)},$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{5^{n+2}},$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n3^{n+2}},$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)2^{n+1}},$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(n+1)} x^n,$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+2)3^n},$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n x^n,$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{\sqrt[3]{n+1}},$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}},$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n^2+4}},$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! 0^{n+1}},$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1},$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n^2 3^n},$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n},$$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^3 (n+1)},$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n (2n-1)},$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n^3+1)2^n},$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3},$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n} (x+4)^n,$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3},$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n^2},$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{2n+1} (x+1)^{2n}.$

Задача № 4. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости полученного ряда.

1. $\frac{9}{20-x-x^2}, x_0 = 0.$
2. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}, x_0 = 0.$
3. $\ln(1+5x-6x^2), x_0 = 0.$
4. $2x \cos^2 \frac{x}{2} - x, x_0 = 0.$
5. $\frac{1}{x^2-5x+6}, x_0 = 1.$
6. $\frac{1}{x^2-2x+3}, x_0 = 1.$
7. $\frac{1}{x^2-6x+18}, x_0 = 3.$
8. $\frac{1}{\sqrt{x^2-12x+40}}, x_0 = 6.$
9. $(x-1)\sin 5x, x_0 = 0.$
10. $\frac{2}{x^2-2x+2}, x_0 = 1.$
11. $\frac{6}{8+2x-x^2}, x_0 = 0.$
12. $\frac{1}{\sqrt{16-3x}}, x_0 = 0.$
13. $\ln(1-x-2x^2), x_0 = 0.$
14. $\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}}, x_0 = 5.$
15. $\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}, x_0 = 3.$
16. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-8x+24}}, x_0 = 4.$
17. $(x+1)\cos^2 x, x_0 = 0.$
18. $\ln(x^2+2x+2), x_0 = -1.$
19. $2x \sin^2 \frac{x}{2} - x, x_0 = 0.$
20. $\ln(x^2-10x+30), x_0 = 5.$
21. $x \cos^2 x, x_0 = 0.$
22. $x \sqrt[3]{27-2x}, x_0 = 0.$
23. $\ln(1+x-12x^2), x_0 = 0.$
24. $\frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x, x_0 = 0.$

25. $\ln(1+x-6x^2)$, $x_0 = 0$.

27. $\sqrt[4]{16-5x}$, $x_0 = 0$.

29. $(2-e^x)^2$, $x_0 = 0$.

26. $\ln(1-x-6x^2)$, $x_0 = 0$.

28. $\ln(1-x-20x^2)$, $x_0 = 0$.

30. $\ln \frac{x^2-2x+3}{2-x}$, $x_0 = 1$.

Задача № 5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$.

2. $\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx$.

3. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

5. $\int_0^1 \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$.

6. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\frac{x}{5})}{x} dx$.

7. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

8. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$.

9. $\int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$.

10. $\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$.

11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

12. $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$.

13. $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{x} dx$.

14. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

15. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$.

16. $\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$.

17. $\int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx$.

18. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

19. $\int_0^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx$.

20. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$.

21. $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

22. $\int_0^{0,4} e^{-\frac{3}{4}x^2} dx$.

$$23. \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$$

$$24. \int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$$

$$25. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}.$$

$$26. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$27. \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$$

$$28. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$$

$$29. \int_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}} dx.$$

$$30. \int_0^{0,1} \sin x^2 dx.$$

Задача № 6. Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности α , следующее значение функции.

$$1. e^2, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$2. \sqrt{e}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$3. \frac{1}{e}, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$4. \frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$5. \sin 1, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$6. \cos 1^\circ, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$7. \sin 10^\circ, \quad \alpha = 10^{-5}.$$

$$8. \cos 10^\circ, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$9. \ln 1,3, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$10. \sqrt[3]{130}, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$11. \ln 1,2, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$12. \operatorname{arctg} 0,2, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$13. \sqrt[10]{1000}, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$14. \ln 1,25, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$15. \sin 18^\circ, \quad \alpha = 10^{-5}.$$

$$16. \operatorname{tg} 9^\circ, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$17. e^{-2}, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$18. \ln 1,3, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$19. \sqrt[3]{30}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$20. \sqrt[3]{70}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$21. \sqrt[3]{500}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$22. \sqrt[3]{1,015}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$23. \sqrt[5]{250}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$24. \sqrt[3]{129}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$25. \sqrt[10]{1027}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$26. \frac{1}{\sqrt[5]{e}}, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$27. \sqrt[3]{e}, \quad \alpha = 10^{-3}.$$

$$28. \operatorname{arctg} 0,25, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$29. \ln 1,4, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

$$30. \operatorname{arctg} 0,5, \quad \alpha = 10^{-4}.$$

Задача № 7. Найти разложение в степенной ряд (до указанной степени) решения следующего дифференциального уравнения.

$$1. \quad y'' = (y')^2 + xy, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \quad (\text{до } (x-1)^4).$$

2. $y' = x^2 - y^2, \quad y(1) = 2 \quad (\partial o \quad (x-1)^4).$
3. $y' = y + xe^y, \quad y(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$
4. $y' = x^2 + y^3, \quad y(1) = 1 \quad (\partial o \quad (x-1)^4).$
5. $y' = xy + e^y, \quad y(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$
6. $y'' = xy' - y + e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$
7. $y'' = xy^2 - y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$
8. $y'' = x + y \cos y', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\pi}{3} \quad (\partial o \quad x^4).$
9. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$
10. $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^8).$
11. $y' = x + x^2 + y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^4).$
12. $y'' = x \sin y', \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \frac{\pi}{2} \quad (\partial o \quad (x-1)^5).$
13. $y'' = xy' - y + 1, \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^6).$
14. $y'' = xy y', \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^6).$
15. $y''' = e^x y, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^6).$
16. $y''' = (y')^2, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^5).$
17. $y^{IV} = xy + x^2 y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^7).$
18. $y^{IV} = e^x y + y', \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^6).$
19. $y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^4).$
20. $y' = e^x + y^2, \quad y(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$
21. $y' = y + y^2, \quad y(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^4).$
22. $y' = 2e^y - xy, \quad y(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$
23. $y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^4).$
24. $y' = e^x + y, \quad y(0) = 4 \quad (\partial o \quad x^4).$
25. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 2 \quad (\partial o \quad x^4).$
26. $y' = \sin x + 0,5y^2, \quad y(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^4).$
27. $y' = 2e^y + xy, \quad y(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$

$$28. y' = x + x^2 + y^2, \quad y(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$$

$$29. y'' - e^x y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (\partial o \quad x^4).$$

$$30. y' + x^2 y - x^3 = 0, \quad y(0) = 1 \quad (\partial o \quad x^4).$$

Задача № 8. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале (a, b) , найти и изобразить графически спектр амплитуд этой функции.

$$1. f(x) = x + 1, \quad (-\pi, \pi).$$

$$2. f(x) = x^2 + 1, \quad (-2, 2).$$

$$3. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad (-\pi, \pi).$$

$$4. f(x) = 1 + |x|, \quad (-1, 1).$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad (-\pi, \pi).$$

$$6. f(x) = 1 - x, \quad (-2, 2).$$

$$7. f(x) = x - 1, \quad (-1, 1).$$

$$8. f(x) = x^2, \quad (-\pi, \pi).$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad (-\pi, \pi).$$

$$10. f(x) = |x| - 3, \quad (-\pi, \pi).$$

$$11. f(x) = 2x + 3, \quad (0, \pi)$$

$$12. f(x) = 3 - 2x, \quad (0, \pi),$$

по косинусам.

по синусам.

$$13. f(x) = 4x + 1, \quad (-\pi, \pi).$$

$$14. f(x) = 1 - 2x, \quad (-\pi, \pi).$$

$$15. f(x) = x + 2, \quad (-1, 1).$$

$$16. f(x) = x - 2, \quad (-1, 1).$$

$$17. f(x) = 2x - 1, \quad (0, \pi),$$

$$18. f(x) = 1 - 3x, \quad (0, \pi)$$

по синусам.

по синусам.

$$19. f(x) = x^2 - 1, \quad (-\pi, \pi).$$

$$20. f(x) = x^2, \quad (0, \pi)$$

по синусам.

$$21. f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & 2 < x < \pi, \end{cases} \quad (0, \pi),$$

$$22. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2, \\ 0, & 2 < x < \pi, \end{cases} \quad (0, \pi),$$

по косинусам.

по косинусам.

$$23. f(x) = 3 - x, \quad (-1, 1).$$

24.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi + x}{2}, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad (-\pi, \pi).$$

$$25. f(x) = 2 - 3x, \quad (-\pi, \pi).$$

$$26. f(x) = 2x + 3, \quad (-\pi, \pi).$$

27. $f(x) = x^2 - 1, (-\pi, \pi).$

29. $f(x) = 2x - 3, (-3, 3).$

28. $f(x) = 5x - 1, (-5, 5).$

30. $f(x) = 3 - |x|, (-5, 5).$

Задача № 9. Найти спектральную плотность функции.

1. $f(t) = \begin{cases} |t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} t - 1, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t < 0, t > 2. \end{cases}$

7. $f(t) = \begin{cases} t + 2, & -2 \leq t < 0, \\ -t + 2, & 0 \leq t < 2, \\ 0, & |t| \geq 2. \end{cases}$

8. $f(t) = \begin{cases} t, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} -t - 1, & -1 < t < 0, \\ -t + 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$

11. $f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$

12. $f(t) = \begin{cases} \cos t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 3, \\ 0, & |t| \geq 3. \end{cases}$

14. $f(t) = e^{-|t|}.$

15. $f(t) = \begin{cases} |t|, & |t| < 3, \\ 0, & |t| \geq 3. \end{cases}$

16. $f(t) = \begin{cases} \sin 3t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$

17. $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & |t| > 1, \\ 0, & |t| < 1. \end{cases}$

18. $f(t) = \begin{cases} te^{-4t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

$$19. f(t) = \begin{cases} t+3, & -3 < t < 0, \\ -t+3, & 0 < t < 3, \\ 0, & |t| \geq 3. \end{cases}$$

$$21. f(t) = \begin{cases} \cos 4t, & |t| < 2\pi, \\ 0, & |t| > 2\pi. \end{cases}$$

$$23. f(t) = \begin{cases} t^2, & |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

$$25. f(t) = \begin{cases} 1-t, & |t| < 2, \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

$$27. f(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ e^t, & t < 0. \end{cases}$$

$$29. f(t) = \begin{cases} |t-1|, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t < 0, t > 2. \end{cases}$$

$$20. f(t) = e^{-2|t|}.$$

$$22. f(t) = \begin{cases} t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$

$$24. f(t) = \begin{cases} \sin 7t, & |t| < 2\pi, \\ 0, & |t| > 2\pi. \end{cases}$$

$$26. f(t) = te^{-|t|}.$$

$$28. f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0, \\ e^{2t}, & t < 0. \end{cases}$$

$$30. f(t) = \begin{cases} 2-t^2, & |t| \leq 1, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов/Н.С. Пискунов. –Т.2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учеб. пособие для втузов./ Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1985. – 464 с.
3. Воробьев Н.Н. Теория рядов/ Н.Н. Воробьев.– М.: Наука, 1979. – 408 с.
4. Толстов Г.П. Ряды Фурье/ Г.П. Толстов.– М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П.И. Романовский. – М.: Наука, 1980. – 336 с.