

$$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3, \\ -\frac{3}{4}\pi + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x \neq 0. \end{cases} \text{Решение системы}$$

находим, задавая $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$. Получим $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. В ответе

объединяем решения уравнения и строгого неравенства.

Ответ: $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \{2\} \cup \{3\}$.

Упражнения

Решить неравенство.

1. $(\sin x - \cos x)(x - 2)\sqrt{5x - 4 - x^2} \geq 0$.

2. $(\cos x - \sqrt{3} \sin x)(2 - x)\sqrt{3x - x^2} \leq 0$.

3. $(\sqrt{3} \sin x - \cos x)(x + 1)\sqrt{-x^2 - 3x} \leq 0$.

Ответы. 1. $x \in \{1\} \cup \left[2; \frac{5}{4}\pi\right] \cup \{4\}$. 2. $x \in \{0\} \cup \left[\frac{\pi}{6}; 2\right] \cup \{3\}$.

3. $x \in \left[-3; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup [-1; 0]$.

Заказ № _____ от « _____ » _____ 2007 г. Тираж _____ экз.

Изд-во СевНТУ

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

ТРИГОНОМЕТРИЯ ПРИ ЭКЗАМЕНАЦИОННОМ ТЕСТИРОВАНИИ

Методические указания к экзаменационному тестированию по математике для учащихся лицейных классов и подготовительного отделения СевНТУ



Севастополь
2007

УДК 51(075)

Тригонометрия при экзаменационном тестировании. Методические указания к экзаменационному тестированию по математике для учащихся лицейных классов и подготовительного отделения СевНТУ/ Сост.: Е.Н. Ларионова, С.Ф. Ледяев, И.В. Ольшанская, Л.Т. Потепалова – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007 г., 68 с.

Целью методических указаний является подготовка абитуриентов по математике для поступления в Севастопольский национальный технический университет. Методические указания предназначены для учащихся лицеев, лицейных классов СевНТУ, г. Севастополя и городов Крыма, а также для учащихся подготовительного отделения СевНТУ.

Приведены основные понятия, формулы и методы решения тригонометрических задач. Теоретические положения широко иллюстрированы примерами. В качестве упражнений приведены задания экзаменационных работ по математике на вступительных экзаменах в Севастопольский национальный технический университет. Большинство задач снабжены ответами. Нумерация формул своя в каждом параграфе.

Материал 1, 2 и 4-го параграфов подготовила Л.Т. Потепалова, параграф 5 подготовила Е.Н. Ларионова, параграф 3 подготовили И.В. Ольшанская и Е.Н. Ларионова. Упражнения, рисунки и общее редактирование – С.Ф. Ледяев.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол №8 от 6 марта 2007 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., профессор, заведующий кафедрой высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Основные понятия, определения и формулы	3
2	Тригонометрические функции, их свойства и графики	21
3	Обратные тригонометрические функции	30
4	Тригонометрические уравнения	41
5	Тригонометрические неравенства	59

Смешанные неравенства

Многие неравенства, предлагаемые к решению на вступительных экзаменах не являются чисто тригонометрическими, показательными и т.д., а содержат выражения различных видов. В таких случаях при решении неравенства следует исходить из общего принципа эквивалентных неравенств.

Неравенствам вида $\frac{P(x)}{G(x)} > 0, P(x) \cdot G(x) > 0$ эквивалентна

совокупность двух систем неравенств: $\begin{cases} P(x) > 0, \\ G(x) > 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} P(x) < 0, \\ G(x) < 0. \end{cases}$

Неравенствам вида $\frac{P(x)}{G(x)} < 0, P(x) \cdot G(x) < 0$ эквивалентна

совокупность двух систем неравенств: $\begin{cases} P(x) > 0, \\ G(x) < 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} P(x) < 0, \\ G(x) > 0. \end{cases}$

Пример 5.10 Решить неравенство: $(\cos x - \sin x)(x - 2)^2 \sqrt{3x - x^2} \geq 0$.

Решение

Нестрогое неравенство эквивалентно совокупности уравнения и строгого неравенства. Решаем уравнение.

$$(\cos x - \sin x)(x - 2)^2 \sqrt{3x - x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - x^2 \geq 0, \\ x - 2 = 0, \\ \cos x - \sin x = 0, \\ 3x - x^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(3 - x) \geq 0, \\ x = 2, \\ \operatorname{tg} x = 1, \\ x = 0, x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ x = 2, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = 0, x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{\pi}{4}, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Решаем строгое неравенство: $(\cos x - \sin x)(x - 2)^2 \sqrt{3x - x^2} > 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x - x^2 > 0, \\ \cos x - \sin x > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 3) < 0, \\ \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$2. x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right], n \in \mathbb{Z}. \quad 3. x \in (k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Найти область определения функции на заданном отрезке

$$1. y = \sqrt{\sin x - 0,5} \text{ на отрезке } [0; 3\pi]. \quad 2. y = \sqrt{\operatorname{tg} x} \text{ на отрезке } [0; 2\pi].$$

$$3. y = \sqrt{\cos x - 0,5} \text{ на отрезке } [0; 2\pi].$$

Ответы.

$$1. \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right]. \quad 2. \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right). \quad 3. \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right].$$

Решить неравенство

$$1. \sqrt{4-x^2} (\cos 2x + \cos(2x + \arcsin 1)) > 0.$$

$$2. \sqrt{1-x^2} (\sin(\arccos 0 + 3x) + \sqrt{3} \sin 3x) < 0.$$

$$\text{Ответы. } 1. x \in \left(-\frac{3}{8}\pi; \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}; 2\right). \quad 2. x \in \left(-1; -\frac{\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{18}; 1\right).$$

Решить неравенство

$$1. |\sin x| \leq 1/2. \quad 2. \sin^2 2007^\circ + \cos^2 207^\circ \geq 2 \cos x / 2.$$

$$3. 2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 \geq 0. \quad 4. \sin^2 x - 2 \sin x + 1 \leq 0.$$

$$5. 4 \cos x - 2 \cos 2x - \cos 4x > 1. \quad 6. \sin x + \cos x < \sqrt{2}.$$

$$7. \sin x \cdot \cos x \geq 1/4. \quad 8. |\sin x| > |\cos x|.$$

$$9. \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1. \quad 10. 1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x.$$

$$11. 5 - 2 \cos^2 x < 3|2 \sin x - 1|. \quad 12. \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x < 0.$$

$$13. \sin x \cdot \sin 3x < 0,5. \quad 14. 2 \sin^2 3x + \sin^2 6x < 2.$$

Ответы (всюду $n \in \mathbb{Z}$).

$$1. \left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]. \quad 2. \left[\frac{2\pi}{3} + 4\pi n; \frac{10\pi}{3} + 4\pi n\right]. \quad 3. \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right].$$

$$4. \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad 5. \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right). \quad 6. x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

$$7. \left[\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right]. \quad 8. \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right). \quad 9. \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

$$10. \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right). \quad 11. (-\pi + 2\pi n; 2\pi n). \quad 12. \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi n}{2}\right)$$

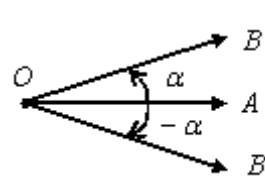
$$13. \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right). \quad 14. \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}\right).$$

§1 Основные понятия, определения и формулы

Слово «тригонометрия» составлено из греческих слов «тригонон» – треугольник и «метризас» – измерение, и означает «измерение треугольников».

Основная задача тригонометрии состоит в решении треугольников, т.е. в вычислении неизвестных величин треугольника по данным значениям других его величин, например, по сторонам треугольника находят его углы.

Вспомним, что углом называют фигуру, образованную вращением луча вокруг своей начальной точки, и обычно обозначают буквами: α, β, γ и т.д.



Знаки углов

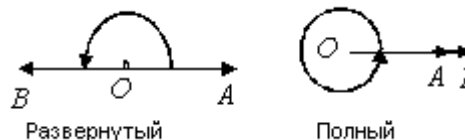
Часто бывает важно указать, в каком направлении происходит вращение луча. Условились считать меру угла положительной, если вращение совершается против часовой стрелки, и отрицательной в противном случае.

Виды углов и их измерение

Полный оборот луча вокруг своей начальной точки образует полный угол (окружность).



Различают острый, прямой, тупой, развернутый и полный углы.



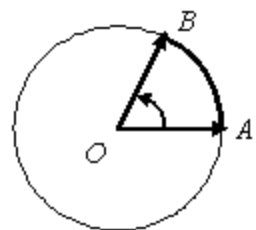
1/360 часть полного оборота называют градусом и обозначают 1° .

Развернутый угол содержит 180° , а прямой 90° .

Пусть отрезок OA описал полный угол при вращении его вокруг т. O. Острый угол, под которым видна из центра окружности её дуга, равная радиусу ($OA = \cup AB$), называют радианом.



Угол в полный оборот, которому соответствует длина окружности, содержит 360° или 2π радиан, поэтому формулы перехода от градусной меры к радианной и наоборот имеют вид:



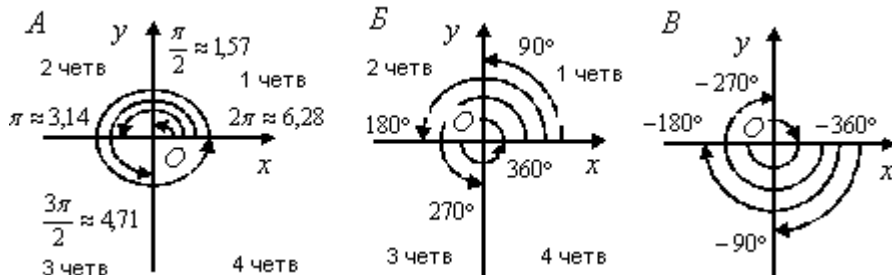
$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ \approx 57^\circ 17' 45'';$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0,01745 \text{ рад.}$$

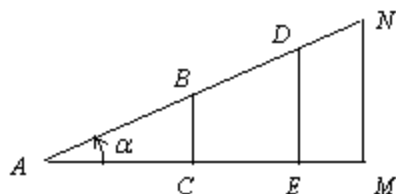
Пример 1.1 Найти градусную меру угла равного 4 радианам и радианную меру угла в 225° .

Решение: $4 \text{ рад} \approx 4 \cdot 57,3^\circ = 229,2^\circ$; $225^\circ = 225^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{4} \approx 3,93$.

Пусть в прямоугольной системе координат луч OA описал полный угол. Очевидно, что оси координат Ox и Oy разбивают полный угол (окружность) на четыре четверти. Запишем радианное (А) и градусное (Б, В) значение углов по четвертям (см. рисунок ниже).



Рассмотрим подобные прямоугольные треугольники $\triangle ACB$, $\triangle AED$, $\triangle AMN$ с острым углом A равным α ($\angle A = \alpha$).



Очевидно, что $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{NM}{AN}$

или $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AN}{AM}$ и др.

Соотношения не зависят от длин сторон треугольника, а зависят только

от величины угла.

$$\begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x_1 = 2\pi n, \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

Период функции $f(x)$: $T = 2\pi$, поэтому можно исследовать $f(x)$ на отрезке $[0; 2\pi]$. На этом отрезке находятся 5 корней функции $f(x)$:

$x = 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; 2\pi$. Для определения знака $f(x)$ в интервалах между корнями построим таблицу 2.

Таблица 2- Знаки функции $f(x)$

	$\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right)$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	+	-	-	+
$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$	+	+	-	-
$f(x)$	+	-	+	-

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Упражнения

Решить неравенство

- $2 \sin 3x < \sqrt{2}$.
- $\lg 2x > -1$.
- $2 \cos 3x < \sqrt{3}$.
- $\sin x \cdot \cos x > 0,25$.

Ответы.

- $\left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3}; \frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$.
- $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$.
- $\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}; \frac{11\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$.
- $\left(\frac{\pi}{12} + n\pi; \frac{5\pi}{12} + n\pi\right), n \in \mathbb{Z}$.

Найти область определения функции

- $y = \sqrt{\sin x}$.
- $y = \sqrt{\cos x}$.
- $y = \frac{1}{\sin x}$.

Ответы. 1. $x \in [2k\pi; \pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$.



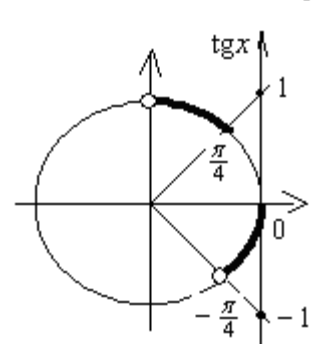
Пример 5.8 Решить неравенство $2\operatorname{tg}2x \leq 3\operatorname{tg}x$.

Решение. Переходим к одному аргументу формулой $\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$, затем

обозначим $\operatorname{tg}x = t$. Получим алгебраическое неравенство $\frac{4t}{1-t^2} \leq 3t$,

которое преобразуем к виду

$$\frac{t(3t^2 + 1)}{(t-1)(t+1)} \geq 0. \text{ Решаем}$$



неравенство методом интервалов. Получим два простейших неравенства: $-1 < \operatorname{tg}x \leq 0$ и $\operatorname{tg}x > 1$.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi n < x \leq \pi n;$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5.9 Решить неравенство $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$.

Решение. Так как $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, то
 $(\cos x - \sin x) - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) > 0$;

$(\cos x - \sin x)((\cos x + \sin x) - 1) < 0$. С учетом формул

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ и } \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

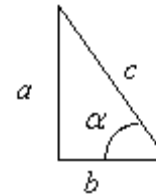
$$\text{неравенство примет вид } \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) < 0.$$

Для решения неравенства используем метод интервалов. Для этого обозначим

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0. \text{ Решим уравнение}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника называют тригонометрическими функциями его острого угла.



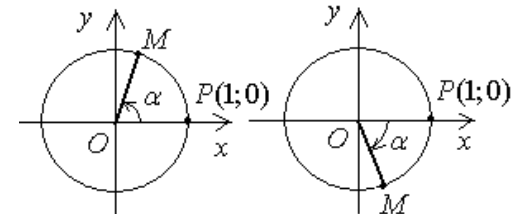
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}.$$

Тригонометрический круг и функции числового аргумента

Длина дуги окружности радиуса r , содержащей 1 радиан, равна r , а длина l дуги в α радиан определяется по формуле $l = \alpha r$. Особенно простой вид последняя формула имеет в том случае, когда радиус окружности $r = 1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т.е. $l = \alpha$.

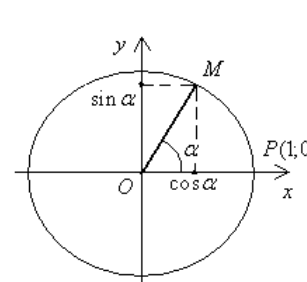
Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Её называют единичной окружностью. Пусть точка, двигаясь по единичной окружности от точки



$P(1; 0)$ против часовой стрелки, прошла путь длиной α . Конечную точку обозначим M . Длина дуги $\cup PM = \alpha$. Если точка движется от точки $P(1; 0)$ по часовой стрелке и прошла путь длиной α , то

длина дуги $\cup PM = |\alpha|$. Таким образом, α - любое действительное число, которому соответствует только одна точка M на единичной окружности.

Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k - целое число, задающих поворот точки $(1; 0)$ в точку M (обозначают $k \in \mathbb{Z}$).



Определение. Ордината точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α радиан, называется синусом числа α (обозначается $\sin \alpha$), а абсцисса этой точки - косинусом числа α (обозначается $\cos \alpha$).

Таким образом, $\sin \alpha = y$, где $-1 \leq y \leq 1$; $\cos \alpha = x$, где $-1 \leq x \leq 1$. Поэтому горизонтальную ось называют осью косинусов, а вертикальную - осью синусов.



Тангенсом числа α называется отношение синуса этого числа к его косинусу: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Котангенсом числа α называется отношение косинуса этого числа к его синусу: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента (основные тригонометрические тождества)

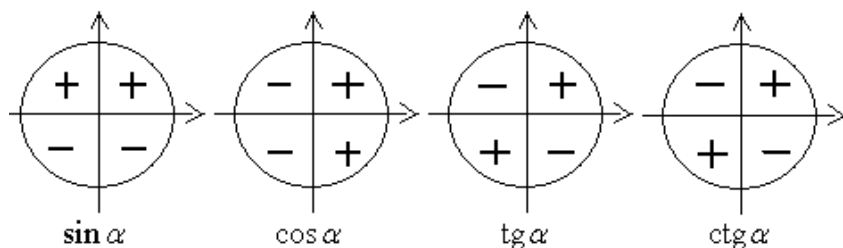
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (1)$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям



Четность и нечетность тригонометрических функций

Известно, что функция называется четной, если $f(-x) = f(x)$ и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$.

Рассмотрим окружность радиуса $AB = 1$ (такую окружность называют единичной) и углы α и $-\alpha$.

Очевидно, что абсциссы точек B и B_1 равны x , но тогда $\cos(\alpha) = x$ и $\cos(-\alpha) = x$.

Следовательно, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

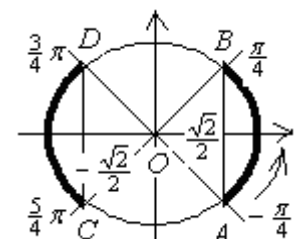
можно использовать те же приемы, что и при решении тригонометрических уравнений.

2. Применяется метод интервалов для определения числовых промежутков, в которых содержатся решения неравенства $f(x) > 0$. Для этого сначала решается соответствующее тригонометрическое уравнение $f(x) = 0$, определяются промежутки знакопостоянства с учетом области определения неравенства. Зная период T функции $f(x)$, можем для определения интервалов знакопостоянства выбрать любой отрезок её области определения $[x_0; x_0 + T]$. Удобнее всего началом интервала положить $x_0 = 0$, если точка x_0 является корнем $f(x)$ или ближайший от нуля корень. Составляя таблицу, определяем знаки сомножителей в том интервале, где это легче сделать. Знаки сомножителей в других интервалах определяются по правилу: знак сомножителей меняется на противоположный при переходе из одного интервала в другой только тогда, когда пограничное значение аргумента x обращает этот сомножитель в нуль (см. пример 5.9).

Пример 5.7 Решить неравенство $\left| \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Так как косинус – функция четная, неравенство запишем $\left| \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть $x - \frac{\pi}{3} = y$, тогда $|\cos y| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это

неравенство эквивалентно двум неравенствам: $\cos y \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos y \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, которые выполняются в секторах OAB и ODC (см. рисунок). Решение можно записать в виде:



$$y \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup$$

$$\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

С учетом того, что углы $\angle BOC$ и $\angle AOD$ – развернутые, решение запишем в виде:

$$y \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

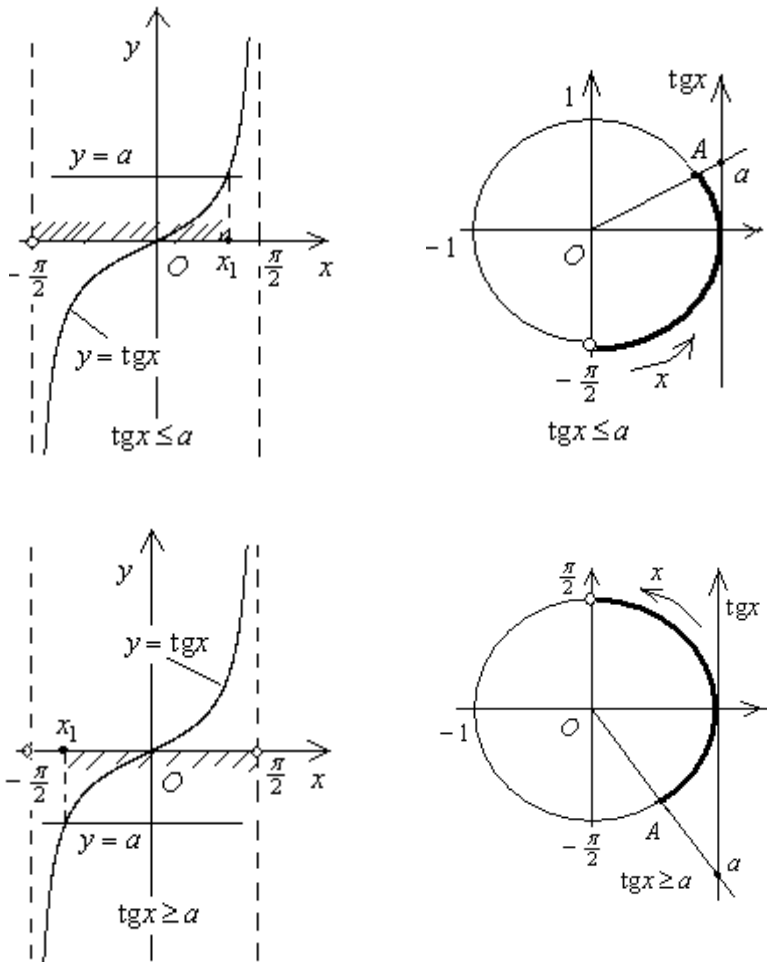
Возвращаясь к замене, получим $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$



Пример 5.6 Решить неравенство $\operatorname{tg} x \geq a$, $-\infty < a < \infty$.

Решение показано на рисунках ниже. С учетом периодичности тангенса и области его определения, получим: $\arctg a + n\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.



Основные приемы решения тригонометрических неравенств

При решении более сложных тригонометрических неравенств используются два основных приёма:

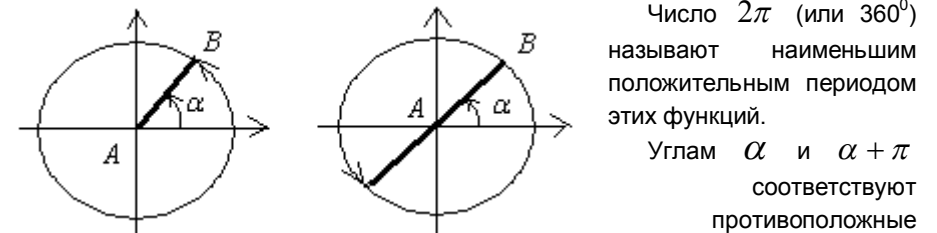
1. Данное неравенство с помощью эквивалентных преобразований сводится к простейшим тригонометрическим неравенствам. В процессе преобразований

Таким образом, функция $\cos \alpha$ есть четная функция.

Аналогично, видим, что ординаты точек B и B_1 равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки, тогда $\sin \alpha = y$, а $\sin(-\alpha) = -y$, следовательно, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ и функция $\sin \alpha$ является нечетной функцией. Нечетными являются $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ в силу основных тождеств (1).

Периодичность тригонометрических функций

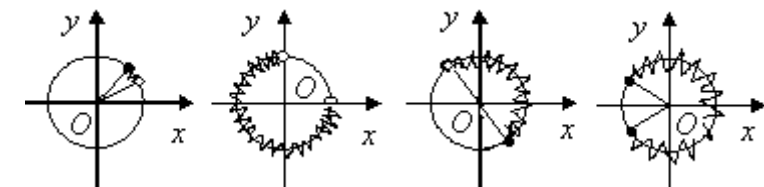
Углом α и $\alpha + 2\pi$ соответствует одно и то же положение отрезка AB , следовательно $\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi)$, а $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$.



положения отрезка AB . Однако $\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$ и следовательно

$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$ и поэтому число π (или 180°) называют наименьшим положительным периодом функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

Пример 1.2 На единичной окружности отмечены дуги, соответствующие указанным условиям:



$$\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{4}; \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 0; \quad -\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{2\pi}{3}; \quad |\alpha| \leq \frac{5\pi}{6}.$$



Пример 1.3 Найти область определения функции.

$$a) y = \frac{\sqrt{-x-2}}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}. \quad \text{Решение: } \begin{cases} \operatorname{tg} x \neq \sqrt{3}, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$б) y = 3\sqrt{\frac{4x-7}{\sqrt{-\cos x}}}. \quad \text{Решение: } -\cos x > 0 \Rightarrow \cos x < 0,$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n.$$

Пример 1.4 Определить знак выражения:

$$\sin 67^\circ \cdot \cos 267^\circ \cdot \cos 375^\circ \cdot \sin(-68^\circ) \cdot \cos(-68^\circ) \cdot \sin 2.$$

Решение. Определив знаки данных функций в четвертях, а также используя тот факт, что $\sin 2 \approx \sin(2 \cdot 57,3^\circ) \approx \sin 114,6^\circ > 0$, укажем знаки каждого множителя:

$$\begin{pmatrix} "+" \\ I \text{ чет} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} "-" \\ III \text{ чет} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} "+" \\ I \text{ чет} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} "-" \\ IV \text{ чет} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} "+" \\ IV \text{ чет} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} "+" \\ II \text{ чет} \end{pmatrix}.$$

Число отрицательных множителей четное, следовательно,

$$\sin 67^\circ \cdot \cos 267^\circ \cdot \cos(360^\circ + 15^\circ) \cdot \sin(-68^\circ) \cdot \cos(-68^\circ) \cdot \sin 2 > 0.$$

$$\text{Пример 1.5 Найти } \operatorname{tg} \alpha, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{1}{8} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Используя основные тождества (1), получим:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = -\frac{\sqrt{63}}{8}. \quad \text{Знак «-» выбрали из условия принадлежности}$$

угла α третьей четверти, где функция $\cos \alpha < 0$, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{8} : \left(-\frac{\sqrt{63}}{8}\right) = \frac{\sqrt{63}}{63}.$$

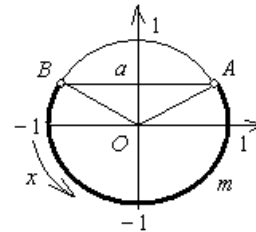
$$\text{Пример 1.6 Найти значение выражения } A = \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha}, \text{ если}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ и } \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

при $a > 1$ решение неравенства $x \in R$;

при $a \leq -1$ неравенство не имеет решений ($\in \emptyset$);

при $|a| < 1$ $x \in (2\pi n + \pi - \arcsin a; 2\pi n + 2\pi + \arcsin a)$, $n \in \mathbb{Z}$.



б) Решение с использованием единичного тригонометрического круга.

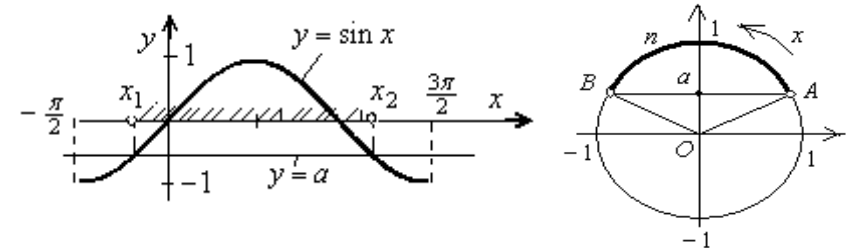
На оси синусов поставим точку $-1 < a < 1$. Неравенству соответствуют углы, оканчивающиеся в секторе $OBmA$, причем $B = \pi - \arcsin a$, $A = 2\pi + \arcsin a$. Решение записывается также, как в случае а).

Пример 5.4 Решить неравенство $\sin x > a$.

Решение с использованием графиков функций $y = \sin x$ и $y = a$ удобно

получить в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π . На тригонометрическом

круге неравенству соответствуют углы, оканчивающиеся в секторе $OAnB$, причем $x_1 = A = \arcsin a$, $x_2 = B = \pi - \arcsin a$. При $-1 < a < 1$ решение неравенства $x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.



Пример 5.5 Решить неравенство $\operatorname{tg} x \leq a$, $-\infty < a < \infty$.

Решение неравенств с тангенсом также можно получить с использованием графиков функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = a$ или с помощью тригонометрического круга. Осью тангенсов на тригонометрическом круге называют ось, проходящую параллельно оси синусов через точку 1 на горизонтальной оси. Решение показано на рисунках ниже, где $x_1 = A = \arctg a$. С учетом периодичности тангенса и области его определения, получим:

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < x \leq \arctg a + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Пример 5.2 Решить неравенство $\cos x > a$.

Для решения с помощью графика функции удобно использовать отрезок $[-\pi; \pi]$. Корнями уравнения $\cos x = a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ являются $x_1 = -\arccos a$ и $x_2 = \arccos a$. На промежутке между корнями x_1 и x_2

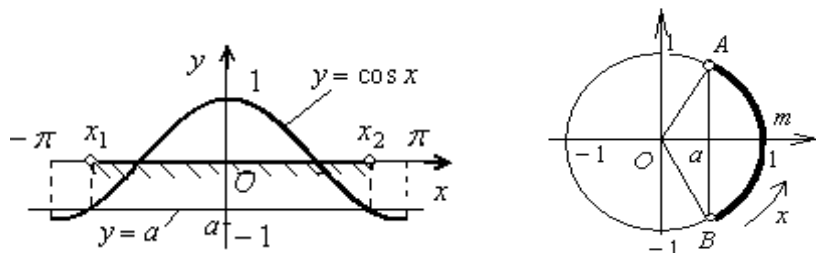
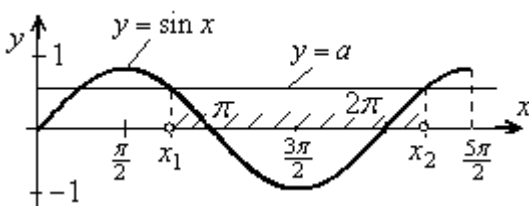


график функции $y = \cos x$ расположен выше прямой $y = a$, поэтому неравенство $\cos x > a$ выполняется для $x \in (x_1; x_2)$. В силу периодичности функции $\cos x$ такие интервалы для x повторяются через 2π , поэтому решением неравенства $\cos x > a$ является множество интервалов $x \in (-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решению неравенства на тригонометрическом круге соответствуют углы, оканчивающиеся в секторе $OBmA$, причем $B = -\arccos a$, $A = \arccos a$. Тогда $x \in (2\pi n - \arccos a; \arccos a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.3 Решить неравенство $\sin x < a$.

а) Решение с использованием графиков функций $y = \sin x$ и $y = a$ удобно получить в интервале



$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, длиной 2π .

Корнями уравнения $y = \sin x$ на указанном интервале являются $x_1 = \pi - \arcsin a$,

$x_2 = 2\pi + \arcsin a$. Как видно из рисунка, в интервале $(x_1; x_2)$ график функции $y = \sin x$ находится ниже прямой $y = a$, т.е. $\sin x < a$. Учитывая период, получим:

Решение. Упростим выражение

$$A = \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (\sin \alpha + 1)}{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1/2}{-\sqrt{1-1/4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таблица значений тригонометрических функций

Таблица 1 – значения тригонометрических функций

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
		30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Продолжение таблицы 1 - значения тригонометрических функций

α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-



Пример 1.7 Найти значение $B = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,2$.

Решение. Упростим: $B = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Возведем в квадрат выражение $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,2$:

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1,44;$$

$$\sin \alpha \times \cos \alpha = \frac{1,44 - 1}{2} = 0,22. \quad \text{Тогда } B = \frac{1}{0,22} = \frac{50}{11} = 4 \frac{6}{11}.$$

Пример 1.8 Доказать тождество: $\frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}$.

Решение. Разложив тригонометрическую единицу $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, преобразуем левую часть тождества:

$$\begin{aligned} \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)} &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 1)}{\cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1} = \text{правой части.} \end{aligned}$$

Формулы приведения

Эти формулы позволяют функции углов $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $(\pi \pm \alpha)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ и $(2\pi \pm \alpha)$ привести к функциям угла α .

Все формулы выведены в предположении, что угол α острый, но они верны для всяких углов α .

Для облегчения запоминания формул приведения используют следующие правила:

а) для углов $(2\pi \pm \alpha)$ и $(\pi \pm \alpha)$ название приводимой функции сохраняют; для углов $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ название меняют на сходственную (например, синус на косинус, тангенс на котангенс);

б) знак функции угла α определяется по знаку приводимой функции в соответствующей четверти.

§5 Тригонометрические неравенства

Решение простейших тригонометрических неравенств

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся: $\sin x < a$, $\sin x > a$, $\cos x < a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x > a$.

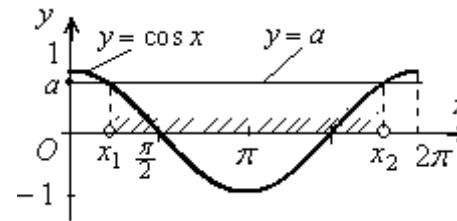
Неравенства $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x > a$ могут быть решены как $\operatorname{tg} x < 1/a$ и $\operatorname{tg} x > 1/a$.

Неравенство можно решать, используя график соответствующей функции или единичный тригонометрический круг.

Пример 5.1 Решить неравенство $\cos x < a$.

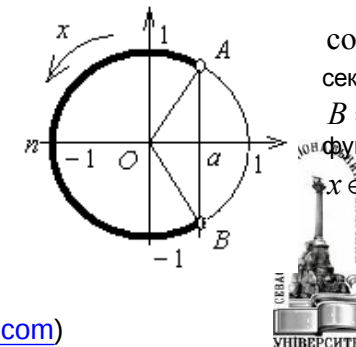
а) Решение с использованием графиков функций $y = \cos x$ и $y = a$.

На отрезке $[0; 2\pi]$, длиной, равной периоду функции $y = \cos x$, строим графики функций $y = \cos x$ и $y = a$. Так как $|\cos x| \leq 1$, то при $a \leq -1$ неравенство $\cos x < a$ не имеет решения, при $a > 1$ неравенство верно при $-\infty < x < \infty$. Рассмотрим случай, когда $a \in (-1; 1]$. Корнями уравнения $\cos x = a$ на отрезке $[0; 2\pi]$ являются $x_1 = \arccos a$ и $x_2 = 2\pi - \arccos a$. На промежутке между корнями x_1 и x_2 график функции $y = \cos x$ расположен ниже прямой $y = a$, поэтому неравенство $\cos x < a$ выполняется для $x \in (x_1; x_2)$. В силу периодичности функции $\cos x$ такие интервалы для x повторяются через 2π , поэтому решением неравенства $\cos x < a$ является множество интервалов $x \in (\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.



б) Решение с использованием единичного тригонометрического круга.

В пределах одного оборота неравенству $\cos x < a$ соответствуют углы, оканчивающиеся в секторе $OAnB$, причем $A = \arccos a$, $B = 2\pi - \arccos a$. С учетом периодичности функции $\cos x$ получим решение неравенства $x \in (\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.



$$\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{2} + \pi k + 2\pi n, \\ 2y = \frac{\pi}{2} + \pi k - 2\pi n. \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k + \pi n, \quad y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k - \pi n, \\ k, n \in \mathbb{Z}.$$

Упражнения

Решить систему уравнений.

$$1) \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 1/3, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 1, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \cos x. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = 0,5, \\ x - y = \frac{\pi}{3}. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = \sin x. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \sin^2 y, \\ \sin x \cdot \sin y = \cos^2 y. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \sin x + \sin y = 0,5, \\ \sin x \cdot \sin y = -0,5. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \sin^2 y, \\ \cos x \cdot \sin y = \cos^2 y. \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \cos x + \cos y = -0,5, \\ \cos x \cdot \cos y = -0,5. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \cos x \cdot \sin y = 1/\sqrt{2}, \\ x + y = 3\pi/4. \end{cases} \quad 10) \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 1/4, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

Ответы (всюду $n, k, m \in \mathbb{Z}$). 1) $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{6} + \frac{\pi}{2}(k+n)$,

$y = (-1)^k \frac{\pi}{12} - (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{6} + \frac{\pi}{2}(k-n)$. 2) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. 3) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \pi n\right)$,

$\left(\pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$. 4) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. 5) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\right)$

6) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$; $\left((-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$.

7) $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi m}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\right)$. 8) $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi m\right)$; $\left(\pi + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$.

9) $\left(\pi k; \frac{3}{4}\pi - \pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} - \pi n\right)$, 10) $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2n+k)$,

$y = \frac{\pi}{4} - (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2n-k)$.

Так углы вида $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и $(2\pi + \alpha)$ принадлежат 1-ой четверти,

$$\left\{\frac{\pi}{2} + \alpha\right\} - \text{II четверть}; \quad \left\{\frac{\pi + \alpha}{2} - \alpha\right\} - \text{III четверть}; \quad \left\{\frac{3\pi}{2} + \alpha\right\} - \text{IV ч.}$$

Пример 1.9

Упростить, пользуясь формулами приведения:

$$1) \cos(\pi - \alpha) = \begin{bmatrix} \text{четверть II} \\ \text{назв. сохр - ся} \\ \text{знак "-"} \end{bmatrix} = -\cos \alpha$$

$$2) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{bmatrix} \text{четверть IV} \\ \text{назв. меняется} \\ \text{знак "-"} \end{bmatrix} = -\cos \alpha.$$

$$3) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \begin{bmatrix} \text{четверть III} \\ \text{назв. меняется} \\ \text{знак "+"} \end{bmatrix} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$5) \operatorname{ctg}\left(\frac{19\pi}{2} + 3\alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(9\pi + \frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) = -\operatorname{tg} 3\alpha.$$

$$6) \sin(1914^\circ) = \sin(360^\circ \cdot 5 + 114^\circ) = \sin(90^\circ + 24^\circ) = \cos 24^\circ.$$

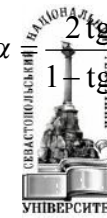
$$7) \cos(-1560^\circ) = \cos 1560^\circ = \cos(360^\circ \cdot 4 + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \\ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Тригонометрические функции двойных углов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \text{аналогично} \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$



Формулы понижения степени

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Пример 1.10 Вычислить без таблиц значения выражений А и В, если:

$$A = \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ, \quad B = \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ.$$

Решение.

$$\begin{aligned} A &= \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) \cdot \sin 15^\circ = \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \\ &= \frac{2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \frac{2 \cos 18^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \\ &= \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} \cdot \frac{2}{2} = \frac{\sin 72^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 18^\circ)}{4 \cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Пример 1.11 Найти $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ и $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

$$\text{Решение. } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{169}.$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{169 - 25}{169}} = -\frac{12}{13}; \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}.$$

Пример 1.12 Найти $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. Преобразуем, } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= \\ &= (\sin^2 \alpha)^2 + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Равенство $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ возведем в квадрат:

Системы тригонометрических уравнений

При решении систем тригонометрических уравнений используются известные приёмы решения систем уравнений:

- введение новой неизвестной, когда новой неизвестной обозначается тригонометрическая функция (например, $t = \sin x$, $u = \cos x$);
- выражение одной неизвестной через другую;
- сложение, вычитание уравнений, входящих в систему и т.д.

$$\text{Пример 4.23 Решить систему уравнений } \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } \begin{cases} y = \pi/4 - x, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1. \end{cases} \quad \text{Решаем второе уравнение.}$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4) \cdot \operatorname{tg} x} = 1. \quad \text{При } \operatorname{tg} x \neq -1$$

($x \neq -\pi/4 + \pi k$) имеем $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) = 0$, откуда

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pi n, \\ x_2 = \pi/4 + \pi m. \end{cases} \begin{cases} y_1 = \frac{\pi}{4} - x_1 = \frac{\pi}{4} - \pi n, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} - x_2 = -\pi m. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\pi n, \frac{\pi}{4} - \pi n\right); \left(\frac{\pi}{4} + \pi m, -\pi m\right), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Пример 4.24 Решить систему уравнений } \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -0,5, \\ \cos x \cdot \sin y = 0,5. \end{cases}$$

Решение. Сложим два уравнения, а затем вычтем из первого уравнения второе. В результате получим систему:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(x - y) = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

Сложим и вычтем уравнения системы, получим:



8. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi k$.
9. $\frac{\pi}{4} + \pi n; \arctg 3 + \pi m$. 10. $\pi n; \pm \arccos(\sqrt{6} - 2) + 2\pi m$.
11. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$. 12. $\frac{\pi}{4} + \pi n; \arctg 3 + \pi m$.
13. $\frac{\pi}{2} + \pi n; (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$. 14. $\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$. 15. $\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi m$. 16. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$. 17. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$. 18. $\pi(1 + 2n); 4\pi m$.
19. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. 20. $\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$. 21. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$.
22. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi m$. 23. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$. 24. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$.
25. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(2 - 2\sqrt{2}) + \frac{\pi k}{2}$.
26. $\frac{\pi m}{5}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; k = 2 + 3n, m, n \in \mathbb{Z}$. 27. $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}; \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{18}$.
28. $\frac{\pi}{4} + \pi k; 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi m$. 29. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. 30. $\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi m$.
31. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. 32. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{22} + \frac{2\pi m}{11}$. 33. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$.
34. Шесть решений $\left\{-2; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 2\right\}$.
35. $\frac{7\pi}{4}; \pi - \arctg 3$. 36. $\{0; \arctg 2; \pi; 2\pi; 2\pi - \arctg 2\}$.
37. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. 38. πm . 39. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. 40. $\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{11} + \frac{2}{11}\pi m$.
41. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k$. 42. $\frac{3\pi}{4}$. 43. π .
44. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$.

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}; \quad 1 - \frac{1}{4} = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \text{ или}$$

$\sin \alpha \cos \alpha = 3/8$. Тогда

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{23}{32}.$$

Примечание - в дальнейшем можно пользоваться готовыми формулами:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha;$$

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\cos 2\alpha.$$

Формулы сложения углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}.$$

Пример 1.13 Вычислить без таблиц $\sin 105^\circ$.

Решение. $\sin(105^\circ) = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ +$

$$+ \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

Пример 1.14 Найти $\cos(60^\circ - \alpha)$ если $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ и $\alpha \in \text{IV}$ четверти.

Решение. $\cos(60^\circ - \alpha) = \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha +$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = +\frac{5}{13} \text{ т.к. } \alpha \in \text{IV} \text{ четверти, тогда}$$

$$\cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{13} = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}.$$

Пример 1.15 Доказать тождество без таблиц: $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.



Решение. В левой части приведем дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ)}{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ \right)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = 4 \frac{(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = \\ &= 4 \frac{\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = 4 \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4. \quad \text{Тождество доказано.} \end{aligned}$$

Пример 1.16 Доказать, что $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$.

Решение

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Сумма, разность и произведение тригонометрических функций

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$26. 3 \sin 5x = \cos 2x - \cos 8x - \sin 15x.$$

$$27. (\sin 7x + \cos 7x)^2 = 2 \sin^2 11x. \quad 28. \cos 2x = \cos^3 x - \sin^3 x.$$

$$29. 2 \sin^2 x + \frac{1}{4} \cos^3 2x = 1. \quad 30. \sin 2x + \cos 2x = 2 \operatorname{tg} x + 1.$$

$$31. \sin^7 x \cdot \cos^3 x - \cos^7 x \cdot \sin^3 x = \cos 2x.$$

$$32. 2 \cos^2 3x + \sin 5x = 1. \quad 33. \cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25.$$

$$34. \text{Сколько решений имеет уравнение } \sqrt{4-x^2} (\sin \pi x - \sqrt{3} \cos \pi x) = 0? \\ \text{Найти эти решения.}$$

$$35. \text{Найти все корни уравнения } |\cos x| = 2 \cos x + \sin x \text{ на отрезке } [0, 2\pi].$$

$$36. \text{Найти все корни уравнения } 2|\sin x| \cos x = \sin^2 x \text{ на отрезке } [0, 2\pi].$$

$$37. \sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}. \quad 38. 5 \sin x - \sin^5 x = 0.$$

$$39. \cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}.$$

$$40. \sin 2x \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \sin 4x + \cos^2 4x.$$

$$41. \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

$$42. \text{Найти все решения уравнения } \frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right].$$

$$43. \text{Найти все решения уравнения } \frac{\cos x}{|\cos x|} = \sin 2x - 1 \text{ на отрезке } [0, \pi]$$

$$44. \text{Найти все решения } 1 - 5|\cos x| + 2 \sin^2 x = 0, \text{ если } \sin x \leq 0.$$

Ответы (всюду, где нет иных указаний, предполагается, что k, l, m, n принимают любые целые значения).

$$1. (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n. \quad 2. \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \quad (-1)^m \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2}. \quad 3. \frac{\pi k}{2}. \quad 4. 2\pi k. \quad \pi n.$$

$$5. \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}. \quad 6. (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k. \quad 7. \frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 2 + \pi m.$$



Упражнения

I Решить уравнение

1. $2\sin(2x) = \sqrt{3}$. 2. $2\cos(3x) = \sqrt{2}$. 3. $\cos 2x - \sin 2x = 0$.
 4. $\sqrt{3}\sin 4x + \cos 4x = 0$. 5. $\sin x + \sin 2x = 0$.
 6. $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$. 7. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$. 8. $\cos 3x + \cos 5x = 0$.
 9. $\sin 2x - \cos x = 0$. 10. $\sin 2x - \sin x = 0$.

Ответы (всюду предполагается, что k, m, n принимают любые целые значения).

1. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$. 2. $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{2m\pi}{3}$. 3. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. 4. $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{4}$.
 5. $\pi n, \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$. 6. $\frac{\pi}{2} + k\pi; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + n\pi$. 7. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$.
 8. $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$. 9. $\frac{\pi}{2} + n\pi; (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$. 10. $k\pi; \pm \frac{\pi}{3} + 3n\pi$.

II Решить уравнение

1. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$. 2. $(1 + \cos 4x) \cdot \sin 2x = \cos^2 2x$.
 3. $2\sin 2x + \cos x \cdot \sin x = 0$. 4. $2\cos x - \cos 2x = \cos^2 2x$.
 5. $3\sin^2 2x + 7\cos^2 2x - 3 = 0$. 6. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.
 7. $\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x = -1$. 8. $\sin x + 2\cos 2x = 1,5$.
 9. $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$.
 10. $\sin^3 x = 2\sin 2x - \sin x$. 11. $\cos 7x - \cos 4x + \cos x = 0$.
 12. $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$. 13. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.
 14. $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$. 15. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.
 16. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$. 17. $8\sin x + 5 = 2\cos 2x$.
 18. $2\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$. 19. $4 - 5\cos x - 2\sin^2 x = 0$.
 20. $\sin 6x + \sqrt{3}\cos 6x = 2$. 21. $\sqrt{3}\sin \frac{x}{2} - 3\cos \frac{x}{2} = 0$.
 22. $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$. 23. $\operatorname{ctg}^2 x - 8\sin^2 x = 1$.
 24. $9\operatorname{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$. 25. $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$.

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Для преобразования выражения $a \sin \alpha + b \cos \alpha$, где a и b любые числа, не равные нулю, используют формулу:

$$a \sin \alpha \pm b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha \pm \varphi),$$

где φ определяется из условий: $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Полезно знать такие частные случаи:

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4});$$

$$\sqrt{3} \sin \alpha \pm \cos \alpha = 2 \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{6});$$

$$\sin \alpha \pm \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{3}).$$

Пример 1.17 Доказать, что $(\sin 160^\circ + \sin 40^\circ)(\sin 140^\circ + \sin 20^\circ) + (\sin 50^\circ - \sin 70^\circ)(\sin 130^\circ - \sin 110^\circ) = 1$.

Решение. Применяя, известные формулы суммы и разности, получим:

$$\begin{aligned} & 2\sin 100^\circ \cos 60^\circ 2\sin 80^\circ \cos 60^\circ + 2\sin(-10^\circ) \cos 60^\circ 2\sin 10^\circ \cos 120^\circ = \\ & = 4\sin 100^\circ \frac{1}{2} \sin 80^\circ \cdot \frac{1}{2} - 2\sin^2 10^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ & = \sin 100^\circ \sin 80^\circ + \sin^2 10^\circ = \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 180^\circ) + \sin^2 10^\circ = \\ & = \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - \cos 20^\circ) = 1, \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$



Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента (универсальные формулы)

При решении различных тригонометрических задач часто возникает необходимость выразить все четыре тригонометрические функции ($\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$) через какую-нибудь одну функцию. Такие формулы имеются и их называют универсальными тригонометрическими формулами:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{где } \alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ и } \alpha \neq \pi + 2\pi l, \quad n, l \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{где } \alpha \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1.18 Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \sin 2\alpha &= \frac{2p/q}{1 + p^2/q^2} = \frac{2pq^2}{q(q^2 + p^2)} = \frac{2pq}{q^2 + p^2}; \\ \cos 2\alpha &= \frac{1 - p^2/q^2}{1 + p^2/q^2} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}. \end{aligned}$$

Пример 1.19 Найти $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2 \alpha + 7\operatorname{ctg} \alpha + 3 = 0$

и α удовлетворяет неравенствам: а) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$.

Решение

Пусть $\operatorname{ctg} \alpha = t$, тогда $2t^2 + 7t + 3 = 0$.

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отбор корней здесь удобно провести, используя график $y = \sin x$. Пересекая синусоиду прямыми $\sin x = 1$ и $\sin x = -1/2$, увидим число корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; 3\pi]$ (проделайте сами).

Ответ: 6 корней.

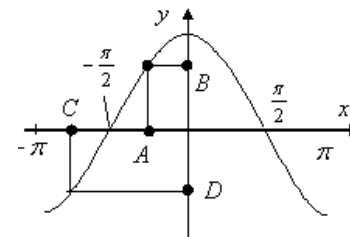
Пример 4.22 Решить уравнение $\frac{\cos x}{(x + \frac{3}{2})^2} = |\cos x|$.

Решение. ОДЗ: $x \neq -3/2$. Правая часть уравнения по свойству модуля неотрицательна, левая часть обязана быть неотрицательной, чтобы выполнялось равенство. Так как знаменатель неотрицателен, то $\cos x \geq 0$, но тогда $|\cos x| = \cos x$ и уравнение примет вид:

$$\frac{\cos x}{(x + \frac{3}{2})^2} = \cos x; \quad \frac{\cos x}{(x + \frac{3}{2})^2} - \cos x = 0; \quad \cos x \left(\frac{1}{(x + \frac{3}{2})^2} - 1 \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ (x + \frac{3}{2})^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = -2,5. \end{cases} \quad \text{Проверим знаки}$$

$\cos(-\frac{1}{2})$ и $\cos(-2,5)$. Воспользуемся косинусоидой.



Значения $-1/2$ и $-2,5$ отметим на оси Ox , проведя через эти точки прямые $\parallel$ оси Oy . Найдем точки пересечения с графиком и определим на оси Oy знаки функции косинуса в этих точках. Точка A имеет абсциссу $(-1/2)$, в точке B значение $\cos(-\frac{1}{2}) > 0$,

точка C имеет абсциссу $(-2,5)$, в точке D значение $\cos(-2,5) < 0$. Значит $x = -2,5$ посторонний корень.

Ответ: $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = -1/2$.



$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = t^2, \quad 1 - 2 \sin x \cos x = t^2,$$

$$1 - t^2 = 2 \sin x \cos x.$$

Подставим в (5) и получим:

$$3t + 4(1 - t^2) = 3 \Rightarrow 4t^2 - 3t - 1 = 0,$$

$$\begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = -\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x - \cos x = 1, \\ \sin x - \cos x = -\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1, \\ \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4\sqrt{2}},$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

VII. Тригонометрические уравнения с отбором корней

Пример 4.20 Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = -1$, если $x \in (0^\circ, 150^\circ)$.

Решение. $x = -15^\circ + 60^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Произведем отбор корней принадлежащих промежутку $(0^\circ, 150^\circ)$.

$$\text{при } n = 0 \quad x = -15^\circ,$$

$$\text{при } n = 1 \quad x = -15^\circ + 60^\circ = 45^\circ,$$

$$\text{при } n = 2 \quad x = -15^\circ + 120^\circ = 105^\circ,$$

$$\text{при } n = 3 \quad x > 150^\circ.$$

$$\text{Ответ: } x = 45^\circ; \quad x = 105^\circ.$$

Пример 4.21 Сколько корней уравнения $\sin x + \cos 2x = 0$ находится на отрезке $[-\pi; 3\pi]$?

Решение. Воспользуемся формулой двойного угла:

$$\sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 0, \quad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

$$\begin{cases} t_1 = -3, \\ t_2 = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha = -3, \\ \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}, \\ \operatorname{tg} \alpha = -2, \end{cases} \quad \text{как обратные функции.}$$

а) если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$ – это 4 четверть, где $\operatorname{tg} \alpha < 0$, то

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} < \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} \quad \text{или} \quad -\infty < \operatorname{tg} \alpha < -1. \quad \text{Таким образом } \operatorname{tg} \alpha = -2,$$

$$\text{тогда } \cos 2\alpha = \frac{1 - (-2)^2}{1 + (-2)^2} = -\frac{3}{5}.$$

б) если $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$, то $-1 < \operatorname{tg} \alpha < 0$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$ и

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - (-1/3)^2}{1 + (1/3)^2} = \frac{4}{5}.$$

Формулы тройных аргументов

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Пример 1.20 Преобразовать в произведение

$$A = \sin^3 \alpha \cos 3\alpha + \cos^3 \alpha \sin 3\alpha.$$

Решение. $A = \sin^3 \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) + \cos^3 \alpha (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) =$

$$= 4 \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha - 3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 3 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha = -3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 3 \sin \alpha \cos^3 \alpha =$$

$$= 3 \sin \alpha \cos \alpha (-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \frac{3}{2} \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{3}{4} \sin 4\alpha.$$



Упражнения**А. Преобразования тригонометрических выражений**

Преобразовать в произведение:

$$1. \cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

Доказать тождество:

$$2. \frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin \alpha. \quad 3. \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 3\beta}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\beta} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\beta}.$$

$$4. \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \cos 2\alpha - 2\cos^2 \alpha.$$

$$5. 3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 128\sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha..$$

$$6. \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \frac{\sin 8\alpha}{8\sin \alpha}.$$

Упростить выражение:

$$7. \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha.$$

$$8. \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos(\alpha + \pi).$$

Доказать тождество:

$$9. \sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

$$10. \frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{2\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = 1. \quad 11. \frac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right) \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)} = -1.$$

$$12. \text{ Упростить выражение при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi:$$

$$\left(\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}\right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2.$$

$$13. \text{ Упростить выражение при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{4}\pi: \sqrt{\frac{2 + 2\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} + \operatorname{tg} \alpha.$$

$$14. \text{ Упростить выражение при } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}:$$

$$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Частные случаи преобразования левой части уравнения приведены на странице 15.

$$\text{Пример 4.17} \quad \sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2\sin 7x.$$

Решение. Используя формулы страницы 15, получим:

$$2\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin 7x = 0 \quad | :2,$$

$$2\sin \frac{5x + \frac{\pi}{3} - 7x}{2} \cos \frac{5x + \frac{\pi}{3} + 7x}{2} = 0 \quad | :2;$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0, & x = \pi n + \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + 6x\right) = 0, & x = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Пример 4.18} \quad 3\sin 3x - 2\cos 3x = \sqrt{26}.$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}} \sin 3x - \frac{2}{\sqrt{13}} \cos 3x = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = \sqrt{2}.$$

Это уравнение не имеет решений, так как $\sqrt{2} > 1$.

$$\text{VI. Уравнения вида } f(\sin x \pm \cos x; \sin x \cdot \cos x) = 0$$

Заметим, что $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$, тогда

$$\sqrt{2} \left| \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}. \quad \text{Таким образом: } |\sin x \pm \cos x| \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Пример 4.19} \quad 3\sin x + 4\sin 2x - 3\cos x = 3.$$

$$\text{Решение.} \quad 3(\sin x - \cos x) + 4 \cdot 2\sin x \cos x = 3. \quad (5)$$

Пусть $\sin x - \cos x = t \leq \sqrt{2}$. Возведем это выражение в квадрат и выразим $2\sin x \cos x$ через t .

Если $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$, то это уравнение имеет решение:

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ или}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi + \pi n, \text{ где угол } \varphi \text{ можно найти из формул (3)}$$

$$\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ или } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \text{ так как}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{a} : \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{a}.$$

Окончательно, решение уравнения (1) имеет вид:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.15 $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

Решение. Так как $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16}$, то

$$\frac{3}{\sqrt{9+16}} \sin x + \frac{4}{\sqrt{9+16}} \cos x = \frac{5}{\sqrt{9+16}}, \quad \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = 1,$$

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = 1, \quad \sin(x + \varphi) = 1, \quad x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.16 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$.

Решение. $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$,

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

В этом случае нам известно значение вспомогательного угла φ , тогда

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{1}{2}, \quad \sin(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2.$$

Упростить выражение:

$$15. 1 - \frac{1}{1 - \sin^{-1}\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}. \quad 16. \frac{1 - \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$17. \frac{1 - \cos(8\alpha - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha}. \quad 18. 1 - \left(1 - \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^{-1}.$$

Доказать тождество:

$$19. 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1 = \cos 4\alpha. \quad 28. 3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\sin^4 \alpha.$$

$$20. 8\sin^4 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 1 = \cos 4\alpha. \quad 30. 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha.$$

$$\text{Ответы. } 1. \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad 7. \sin^2 \alpha. \quad 8. -1 - \cos^2 \alpha. \quad 12. 0. \quad 13. -1. \quad 14. 0.$$

$$15. \frac{1}{2\cos^2 \alpha}. \quad 16. \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad 17. -\frac{1}{2} \sin 8\alpha. \quad 18. \frac{1}{2\sin^2 \alpha/2}.$$

Б. Вычисление тригонометрических выражений

1. Вычислить

$$1. \sin 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ. \quad 2. \cos 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ. \quad 3. \operatorname{tg} 30^\circ + \sin 45^\circ. \quad 4.$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ + \sin 90^\circ. \quad 5. \operatorname{tg} 615^\circ + \operatorname{tg} 735^\circ. \quad 6. \operatorname{ctg} \frac{25}{12} \pi - \operatorname{ctg} \frac{17}{12} \pi.$$

$$7. \operatorname{tg} 435^\circ - \operatorname{tg} 195^\circ. \quad 8. \operatorname{ctg} \frac{13}{12} \pi + \operatorname{ctg} \frac{5}{12} \pi.$$

$$9. \text{Известно, что } \sin \alpha = 1/3. \text{ Найти } \cos 2\alpha.$$

$$10. \text{Известно, что } \cos \alpha = 1/5. \text{ Найти } \cos 2\alpha.$$

$$11. \text{Известно, что } \operatorname{tg} \alpha = 1/2. \text{ Найти } \operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$12. \text{Известно, что } \operatorname{ctg} \alpha = 1/3. \text{ Найти } \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Вычислить:

$$13. 16 \sin 10^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \cos 20^\circ. \quad 14. 8 \cos \frac{7\pi}{18} \cdot \sin \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{18}.$$



$$15. 16 \sin 20^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 10^\circ. \quad 16. 8 \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \sin \frac{7\pi}{18} \cdot \cos \frac{2\pi}{9}.$$

$$\text{Ответы. 1. } 1,5. \quad 2. \frac{2+\sqrt{3}}{2}. \quad 3. \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}. \quad 4. \sqrt{3}+1. \quad 5. 4. \quad 6. 2\sqrt{3}.$$

$$7. 2\sqrt{3}. \quad 8. 4. \quad 9. \frac{7}{9}. \quad 10. -\frac{23}{25}. \quad 11. \frac{4}{3}. \quad 12. -\frac{3}{4}. \quad 13. 1. \quad 14. \sqrt{3}. \quad 15. 3. \quad 16. 1.$$

II Вычислить

$$1. A = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ.$$

$$2. \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha, \text{ если } \sin \alpha - \cos \alpha = 0,5.$$

$$3. B = \cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ.$$

$$4. \text{Найти } \operatorname{ctg} 2\alpha, \text{ если известно, что } \sin(\alpha - 90^\circ) = -\frac{2}{3}, \quad 270^\circ < \alpha \leq 360^\circ.$$

$$5. \text{Найти } \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ если известно, что } \cos(\alpha - 90^\circ) = 0,2 \text{ и } 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

$$6. \text{Вычислить } \frac{2}{3+4\cos 2\alpha}, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = 5.$$

$$7. \text{Найти } \operatorname{tg}^2 2\alpha, \text{ если } \sin \alpha = -2/\sqrt{11}.$$

$$8. \text{Найти } \operatorname{tg}^2 2\alpha, \text{ если } \cos \alpha = -\sqrt{13}/5.$$

$$9. \text{Известно, что } \cos \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \frac{5}{4}\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi. \text{ Найти } \sin \alpha, \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$10. \text{Известно, что } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \pi < \alpha < \frac{4}{3}\pi. \text{ Найти } \cos \alpha, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$11. \text{Найти } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \cos 2\alpha \leq \frac{1}{8}, \quad \cos \alpha \leq -\frac{3}{4}.$$

$$12. \text{Найти } \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \cos 2\alpha \leq -\frac{7}{8}, \quad \cos \alpha \leq -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответы. 1. } \frac{1}{8}. \quad 2. 23/32. \quad 3. \frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1). \quad 4. \frac{\sqrt{5}}{20}. \quad 5. -\frac{4\sqrt{6}}{23}.$$

$$6. \frac{26}{87}. \quad 7. \frac{112}{9}. \quad 8. 624. \quad 9. -\frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 10. -\frac{2}{3}; -\sqrt{5}. \quad 11. \pm \sqrt{7}.$$

$$12. \pm \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

б) При помощи универсальных тригонометрических формул.

$$3. \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 4 \cdot \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5, \text{ где } \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x \neq \pi + 2\pi n,$$

$$9\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n.$$

Применение универсальных формул изменяет ОДЗ уравнения, т.к. возможна потеря корней ($x \neq \pi + 2\pi n$ в данном случае). Поэтому необходима проверка подстановкой в исходное уравнение исключенных значений. Если при этом получим верное равенство, то исключенные значения записывают в окончательный ответ. Подставим $x = \pi$ в исходное уравнение, получим $3\sin \pi + 4\cos \pi = -4 \neq 5$. Следовательно, множество значений $x = \pi + 2\pi n$ не является решением.

Метод введения вспомогательного угла

$$\text{Пусть } a \sin x + b \cos x = c \quad (1)$$

Составим число: $\sqrt{a^2 + b^2}$. Разделим обе части уравнения на это число

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

$$\text{Так как } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

то существует некоторый угол φ , для которого

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

Уравнение (2) перепишем в виде:

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4)$$

Тогда

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \sin^2 x + d \cos^2 x,$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x - d \sin^2 x - d \cos^2 x = 0,$$

$$(a - d) \sin^2 x + b \sin x \cos x + (c - d) \cos^2 x = 0.$$

Получили однородное уравнение II порядка.

Пример 4.13 $6 \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x - \cos^2 x = 2.$

Решение. $6 \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x - \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 0,$

$$4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0 \quad |: \cos^2 x,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0, \quad 4t^2 + t - 3 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{8},$$

$$\begin{cases} t_1 = -1, \\ t_2 = \frac{3}{4}, \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \\ x = \arctg \frac{3}{4} + \pi n; \end{cases} \quad n \in Z.$$

2) Неоднородное уравнение первого порядка

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Это уравнение решается различными методами:

- а) сведением к однородному II порядка при помощи формул двойных углов для функций $\sin x$ и $\cos x$;
- б) при помощи универсальных тригонометрических формул;
- в) при помощи метода введения вспомогательного угла.

Пример 4.14 $3 \sin x + 4 \cos x = 5.$

Решение

а) Сведением к однородному II порядка при помощи формул двойных углов.

$$3 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 4(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) - 5 \sin^2 \frac{x}{2} - 5 \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$

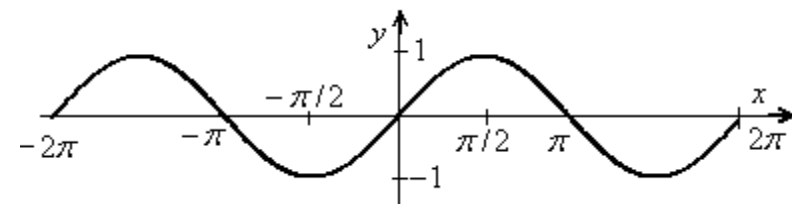
$$-9 \sin^2 \frac{x}{2} + 6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \quad |:-\cos^2 \frac{x}{2},$$

$$9 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2 \arctg \frac{1}{3} + 2\pi n;$$

§ 2 Тригонометрические функции, их свойства и графики

I Функция $y = \sin x$.

- 1) Область определения $D(y) = R$.
- 2) Область значений $E(y) = [-1; 1]$.
- 3) Функция периодическая, наименьший период $T = 2\pi$.
- 4) Нечетная функция.
- 5) Нули функции $x = \pi n, \quad n \in Z$.
- 6) Функция положительная для $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), \quad n \in Z$ и отрицательная для $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), \quad n \in Z$.
- 7) Функция возрастает для $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], \quad n \in Z$ и убывает для $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], \quad n \in Z$.
- 8) Точки максимума $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$ и точки минимума $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$.
- 9) Функция дифференцируема для всех $x \in R$:
 $(\sin x)' = \cos x$.
- 10) График функции называют синусоидой.

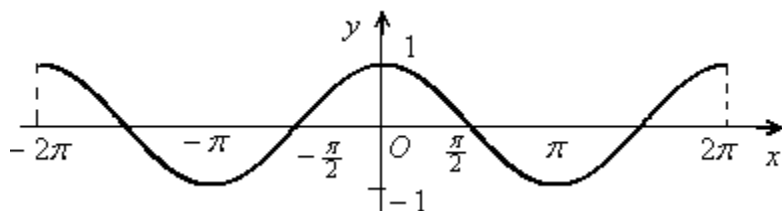


II Функция $y = \cos x$

- 1) Область определения $D(y) = R$.



- 2) Область значений $E(y) = [-1; 1]$.
- 3) Функция периодическая, наименьший период $T = 2\pi$.
- 4) Функция четная.
- 5) Нули функции $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.
- 6) Функция положительная для $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$ и отрицательная для $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$.
- 7) Функция возрастает для $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$ и убывает на промежутках $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$.
- 8) Точки максимума $x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ и минимума $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.
- 9) Функция дифференцируема для всех $x \in \mathbb{R}$:
 $(\cos x)' = -\sin x$.
- 10) График функции называют косинусоидой.



III Функция $y = \operatorname{tg} x$.

- 1) Область определения $D(y) = \{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\}$.
- 2) Область значений $E(y) = \mathbb{R}$.
- 3) Периодическая функция, наименьший период $T = \pi$.
- 4) Нечетная функция.
- 5) Нули функции $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

$$\sin^2(4\pi + \frac{\pi}{2} + x) + 4\sin^2 x - 4\sin x \cos x = 0,$$

$$\cos^2 x - 4\sin x \cos x + 4\sin^2 x = 0 \text{ — полный квадрат разности:}$$

$$(\cos x - 2\sin x)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2\sin x - \cos x = 0 \text{ — однородное уравнение I степени, разделим на } \cos x.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}. \quad \text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Пример 4.11 } 3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x.$$

$$\text{Решение. } \sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0, \quad \operatorname{tg} x = t, \quad t^2 + 2t - 3 = 0,$$

$$\begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Пример 4.12 } 4(1 - \cos x) = 3\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$$

$$\text{Решение. } 4 \cdot 2\sin^2 \frac{x}{2} - 3\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \text{ — неполное однородное уравнение.}$$

$$\text{Выносим общий множитель, } \sin \frac{x}{2} (8\sin \frac{x}{2} - 3\cos \frac{x}{2}) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{8}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\operatorname{arctg} \frac{3}{8} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

V. Неоднородные тригонометрические уравнения

1) Неоднородное уравнение II порядка

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d$$

Это уравнение сводится к однородному уравнению II порядка. Используя основное тригонометрическое тождество, представим число d так:

$$d = d \cdot 1 = d(\sin^2 x + \cos^2 x) = d\sin^2 x + d\cos^2 x \quad \text{и, подставив в уравнение, запишем:}$$



$$b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0,$$

$$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x = 0.$$

Сумма показателей каждого слагаемого в любом из уравнений должна быть одинаковой. Ее и называют порядком (или степенью) однородного уравнения.

Решаются эти уравнения делением на $\cos^n(x) \neq 0$ (или $\sin^n(x) \neq 0$) обеих частей уравнения, где n – порядок уравнения.

Убедимся, что $\cos^n(x) \neq 0$.

Предположим, что это не так и $\cos x = 0$. Подставив в любое из уравнений, получим:

а) $a \sin x + 0 = 0$, откуда следует, что $\sin x = 0$;

б) $a \sin^2 x + 0 + 0 = 0$, откуда следует, что $\sin x = 0$;

в) $a \sin^3 x + 0 + 0 + 0 = 0$, откуда так же следует, что $\sin x = 0$.

Видим, что $\sin x$ и $\cos x$ одновременно равны нулю, что противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Значит в уравнениях 1), 2), 3) и $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$, поэтому делим на $\cos^n x$ (или $\sin^n x$).

Иное решение имеют уравнения частных случаев 4).

Это, так называемые, неполные однородные уравнения.

Их нельзя решать при помощи деления на $\cos^n x$ (или $\sin^n x$), т.к. произойдет потеря корней.

Действительно, из условия $\cos x = 0$ в этих уравнениях совсем не следует условие $\sin x = 0$. Подставим: $b \sin x \cdot 0 + 0 = 0$,

$$b \sin^2 x \cdot 0 + c \sin x \cdot 0 + d \cdot 0 = 0.$$

Слагаемые с синусами обнуляются за счет условия $\cos x = 0$. Поэтому такие уравнения решают при помощи метода разложения на множители:

$$\cos x(b \sin x + c \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ b \sin x + c \cos x = 0, \end{cases}$$

или

$$\cos x(b \sin^2 x + c \sin x \cos x + d \cos^2 x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ b \sin^2 x + c \sin x \cos x + d \cos^2 x = 0. \end{cases}$$

Пример 4.10 $\sin^2(4,5\pi + x) + 4 \sin^2 x = 2 \sin 2x$.

Решение. Применяя формулы, упрощаем:

6) Функция положительная для всех $x \in (\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in Z$ и

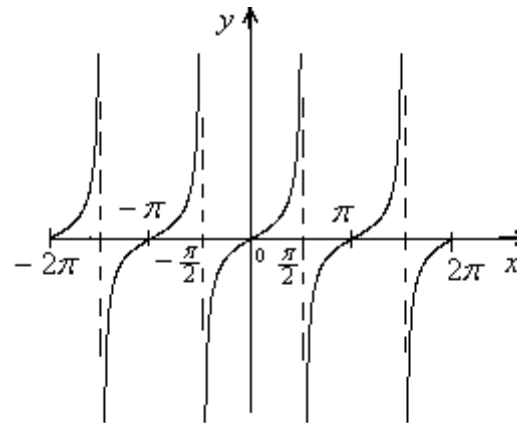
отрицательная для $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, $n \in Z$.

7) Возрастает для всех $x \in$ области определения.

8) Экстремумов нет.

9) Дифференцируема для всех x из области определения:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$



10) График функции называют тангенсоидой.

IV Функция $y = \operatorname{ctg} x$.

1) Область определения $D(y) = \{x \neq \pi n, n \in Z\}$.

2) Область значений $E(y) = R$.

3) Периодическая функция, наименьший период $T = \pi$.

4) Нечетная функция.

5) Нули функции $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

6) Положительна для всех $x \in (\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in Z$ и отрицательна

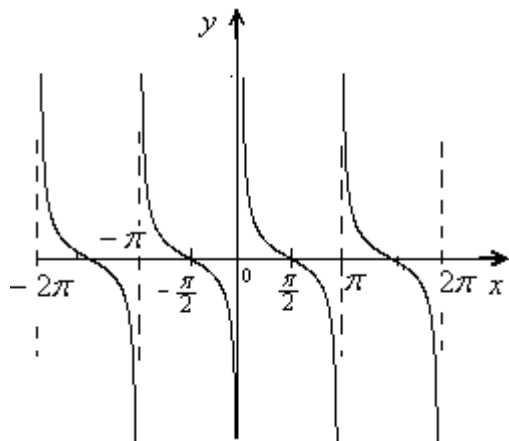
для $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, $n \in Z$.



- 7) Функция убывает для всех $x \in$ области определения.
 8) Экстремумов нет.
 9) Функция дифференцируема для всех $x \in D(y)$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- 10) График функции называют котангенсоидой.



Преобразование графиков тригонометрических функций

При построении графиков различных функций часто используют элементарные преобразования графиков.

Так, например, для построения графика функции

$$y = Af(kx + a) + b$$

используют график функции $y = f(x)$, который:

1. параллельно переносят:
 - а) вдоль оси Ox влево (при $a > 0$) или вправо (при $a < 0$);
 - б) вдоль оси Oy вверх (при $b > 0$) или вниз (при $b < 0$);
2. сжимают по оси абсцисс (при $k > 1$) или растягивают (при $0 < k < 1$);
3. сжимают по оси ординат (при $0 < A < 1$) и растягивают (при $A > 1$).

$$\begin{aligned} (\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}) &= \frac{1}{2}, \\ -1 \cdot (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) &= \frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Пример 4.8 $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$.

Для первого слагаемого применим формулу двойного угла, а для второго – понижения степени.

$$2\cos^2 2x - 1 + 1 - \cos 2x = 0, \quad \cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0.$$

$$\cos 2x = 0, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}, \quad 2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.9 $2\sin^2(2x + \frac{\pi}{4}) + 3\sin 5x + 3\sin 3x = 1$.

$$1 - \cos(4x + \frac{\pi}{2}) + 3 \cdot 2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2} = 1,$$

$$1 + \sin 4x + 6 \sin 4x \cos x = 1, \quad \sin 4x(1 + 6 \cos x) = 0,$$

$$\sin 4x = 0, \quad x = \frac{\pi n}{4}; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -\frac{1}{6}, \quad x = \pm(\pi - \arccos \frac{1}{6}) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

IV. Однородные тригонометрические уравнения

Рассмотрим следующие однородные относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ тригонометрические уравнения:

1) первого порядка, $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$; $b \neq 0$;

2) второго порядка, $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$, где $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$;

3) третьего порядка, $a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$, где $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$; $d \neq 0$;

4) частные случаи, $b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$,
 $a \sin^2 x + b \sin x \cos x = 0$,



$$a \operatorname{ctg}^2 \alpha x + b \operatorname{ctg} \alpha x + c = 0, \quad a \operatorname{tg} \alpha x + b \operatorname{ctg} \alpha x = 0, \\ a \operatorname{tg} \alpha x + b \operatorname{ctg} \alpha x + c = 0.$$

Эти тригонометрические уравнения заменой сводятся к решению квадратного алгебраического уравнения.

Следует заметить, что целые уравнения, содержащие только синусы и косинусы, имеют область допустимых значений все множество действительных чисел R .

Пример 4.5 $8 \sin^2 x + 6 \cos x = 3$.
Решение

$$8(1 - \cos^2 x) + 6 \cos x - 3 = 0, \quad 8 \cos^2 x - 6 \cos x - 5 = 0. \text{ Пусть}$$

$$\cos x = t, \text{ тогда } 8t^2 - 6t - 5 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{5}{4}, \text{ не подходит,} \\ t_2 = -\frac{1}{2}, \end{array} \right. \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm(\pi - \arccos \frac{1}{2}) + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Пример 4.6 $3 \cos 2x = 7 \sin x$.

Решение. Уравнение содержит функции с различными аргументами. Чтобы перейти к одному и тому же аргументу, применим формулу двойного угла.

$$3(1 - 2 \sin^2 x) = 7 \sin x, \quad 6 \sin^2 x - 7 \sin x - 3 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{3}{2}, \\ \sin x = \frac{1}{3}, \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \emptyset, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in Z. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \arcsin 1/3 + \pi n, \quad n \in Z.$$

III. Способ разложения на множители

Для решения уравнений этим методом используют:

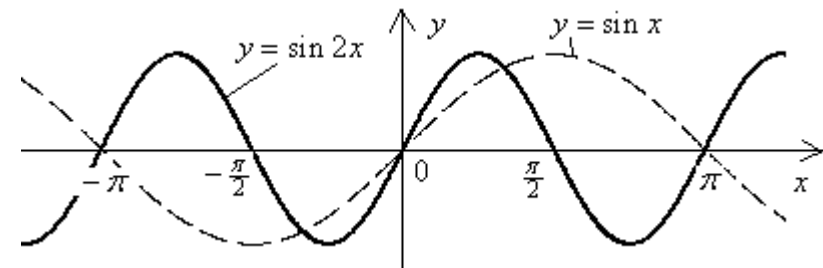
- вынесение общего множителя за скобки;
- группировку;
- формулы сокращенного умножения;
- известные тригонометрические формулы.

Пример 4.7 $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

Используем формулу разности квадратов:

Указанные правила преобразования графиков рассмотрим на следующих примерах.

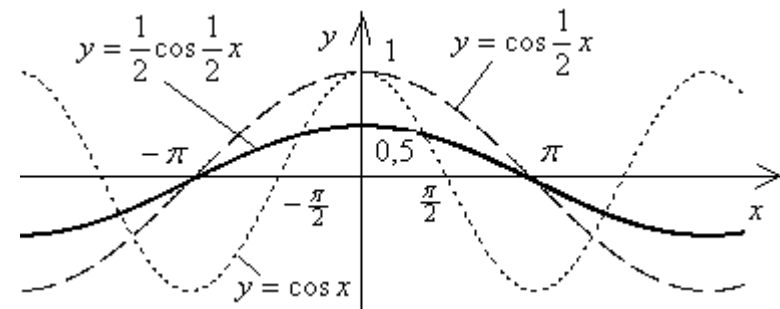
Пример 2.1 $y = \sin 2x$.

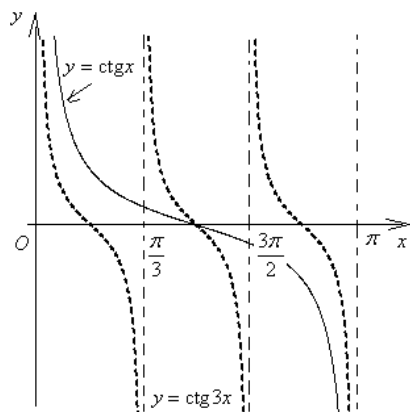
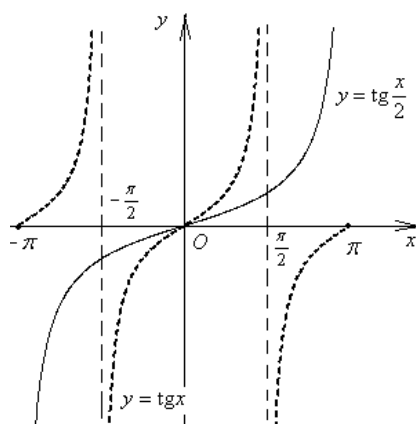
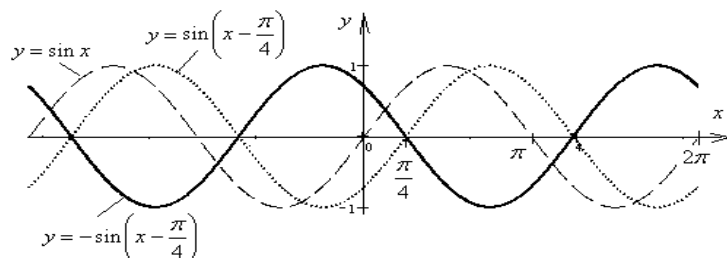
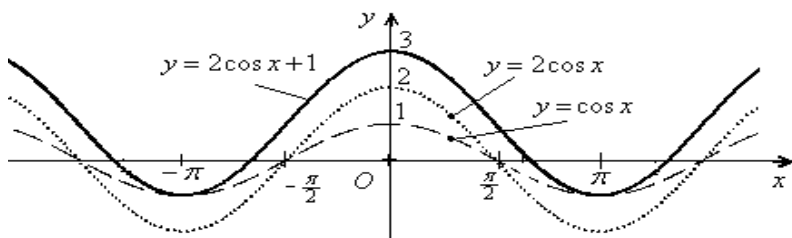


Решение. График $y = \sin x$ сжимается по оси Ox в 2 раза (т.е. абсциссы его уменьшаются в 2 раза, а ординаты не изменяются).

Пример 2.2 $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$.

Решение. График функции $y = \cos x$ растягивается по оси Ox (т.е. абсциссы увеличиваются в 2 раза) и сжимается по оси Oy (т.е. ординаты уменьшаются в 2 раза).



Пример 2.3 $y = \operatorname{ctg} 3x$ Пример 2.4 $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ Пример 2.5 $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ Пример 2.6 $y = 2\cos x + 1$ 

$$3x = -105^\circ + 180^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = -35^\circ + 60^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.2 $(\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2})(\sin \frac{3x}{2} + \frac{1}{2})(\cos x - \frac{3}{2}) = 0$

Решение.
$$\begin{cases} \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin \frac{3x}{2} = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{3}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pm(\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n, \\ \frac{3x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi m, \\ x = \emptyset \text{ т.к. } \frac{3}{2} > 1, \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \pm \frac{(\pi - \frac{\pi}{4}) + 2\pi n}{3}, \\ x = \left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n\right) \cdot \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пример 4.3 $\sin \sin x = 1$

Решение. $\sin x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Так как $\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right| > 1$ при $n \in \mathbb{Z}$, то это уравнение не имеет решений.

Пример 4.4 $\operatorname{ctg}(3x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. Можно не использовать замену.

Решение. $3x + \frac{\pi}{3} = \operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \pi n, \quad 3x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

II. Тригонометрические уравнения, сводимые к квадратным уравнениям вида:

$$a \sin^2 \alpha x + b \sin \alpha x + c = 0,$$

$$a \cos^2 \alpha x + b \cos \alpha x + c = 0,$$

$$a \operatorname{tg}^2 \alpha x + b \operatorname{tg} \alpha x + c = 0,$$



$$x = \pm \arccos \sqrt{a} + \pi n, \quad n \in Z.$$

3) Уравнение вида $\operatorname{tg} x = a$.

Это уравнение имеет решение для любых значений a , и решение имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z, \quad \text{где } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}.$$

Частные случаи:

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x = \pm 1, \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z;$$

если $\operatorname{tg}^2 x = a$, где $a \in (0; \infty)$, то $x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{a} + \pi n, \quad n \in Z$.

4) Уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$.

Оно имеет решение для любых значений a

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z, \quad \text{где } 0 < \operatorname{arcctg} a < \pi.$$

Частные случаи:

$$\operatorname{ctg} x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg} x = -1, \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z;$$

если $\operatorname{ctg}^2 x = a$, где $a \in (0; \infty)$, то $x = \pm \operatorname{arcctg} \sqrt{a} + \pi n, \quad n \in Z$.

5) Тригонометрические уравнения вида:

$$\sin(ax + b) = m; \quad \cos(ax + b) = m;$$

$$\operatorname{tg}(ax + b) = c; \quad \operatorname{ctg}(ax + b) = c;$$

где $(ax + b)$ линейная функция, $a \neq 0$, $|m| \leq 1$, x, b, c — любые числа, сводится к простейшим уравнениям при помощи замены $ax + b = y$.

Пример 4.1 $\operatorname{tg}(3x + 45^\circ) = -\sqrt{3}$.

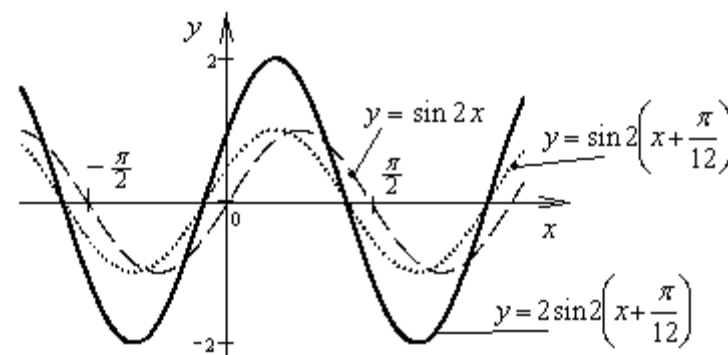
Решение. Пусть $3x + 45^\circ = y$, $\operatorname{tg} y = -\sqrt{3}$,

$$y = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in Z, \quad 3x + 45^\circ = -60^\circ + 180^\circ n, \quad n \in Z,$$

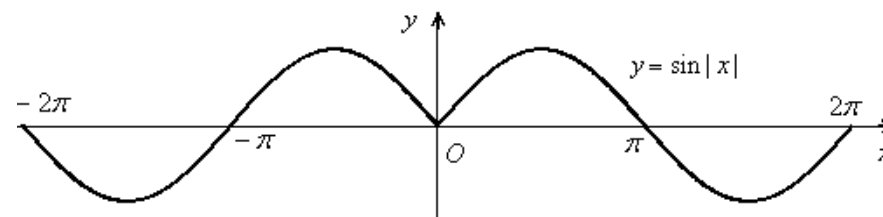
Пример 2.7 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. Для построения графика преобразуем

функцию к виду $y = 2 \sin 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$. Построение графика проводим в

последовательности: $y = \sin 2x$, $y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$, $y = 2 \sin 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$.

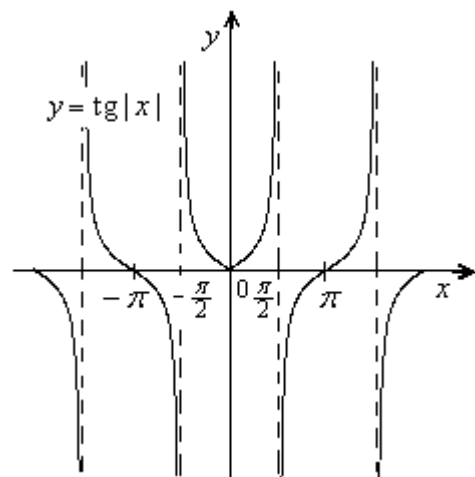


Пример 2.8 $y = \sin |x|$. Строим график функции $y = \sin x$ для $x > 0$ и отобразим симметрично относительно оси Oy .



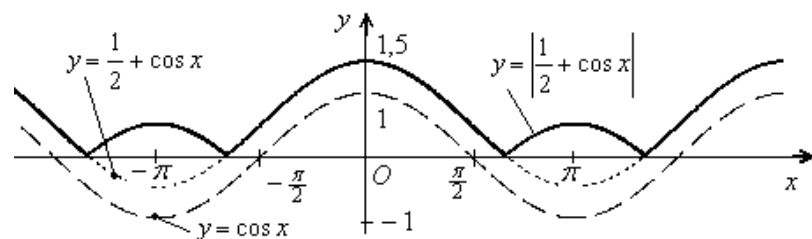
Пример 2.9 $y = \operatorname{tg} |x|$. Строим график $\operatorname{tg} x$ для $x > 0$ и отобразим его симметрично относительно оси Oy .



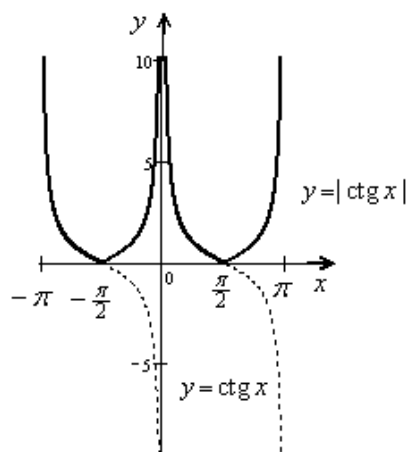


Пример 2.10 $y = \left| \frac{1}{2} + \cos x \right|$.

Строим график функции $y = \frac{1}{2} + \cos x$ и часть графика расположенную ниже оси абсцисс, отображаем симметрично вверх относительно этой оси.



Пример 2.11 $y = |\operatorname{ctg} x|$.



Пример 2.12
 $y = 2 \sin x \cdot |\cos x|$. Если $\cos x \geq 0$, то $y = \sin 2x$. Если $\cos x < 0$, то $y = -\sin 2x$.

Пример 2.13 $y = \sin x + |\sin x|$. Если $\sin x \geq 0$, то $y = 2 \sin x$. Если $\sin x < 0$, то $y = 0$.

§4 Тригонометрические уравнения

Тригонометрическим называется уравнение, в которое неизвестное входит под знак тригонометрической функции.

1. Простейшие тригонометрические уравнения

1) Уравнения вида $\sin x = a$.

Это уравнение имеет решение при $|a| \leq 1$ и выражается формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \text{ где}$$

$$n \in Z, \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}.$$

При условии $|a| > 1$ уравнение не имеет решений.

Частные случаи:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\sin^2 x = a, \quad \text{где } 0 \leq a \leq 1, \\ x = \pm \arcsin \sqrt{a} + \pi n, \quad n \in Z.$$

2) Уравнения вида $\cos x = a$.

Это уравнение так же имеет решение только в случае $|a| \leq 1$ и выражается оно формулой

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Если $|a| > 1$, то это уравнение не имеет решений.

Частные случаи:

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

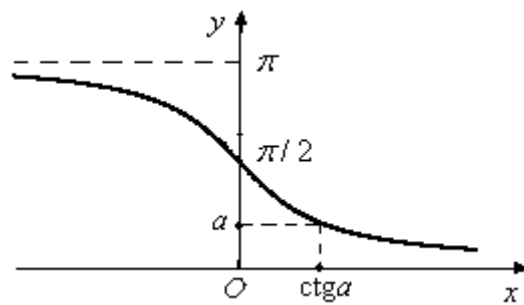
$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\text{если } \cos x = -b, \quad \text{где } b \in (0;1), \text{ то} \\ x = \pm(\pi - \arccos b) + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\text{если } \cos^2 x = a, \quad \text{где } 0 \leq a \leq 1, \text{ то}$$





Поставим точку a на оси Oy , $0 < a < \pi$. Отобразим точку на ось Ox , используя график функции $y = \arctg x$. Очевидно, неравенству $\arctg x > a$ соответствует решение $x \in (-\infty; \operatorname{ctg} a)$. Неравенству $\arctg x < a$ соответствует решение $x \in (\operatorname{ctg} a; +\infty)$.

Пример 3.15 а) $\arctg x > \frac{\pi}{6}$; б) $\arctg x < \frac{3\pi}{4}$.

Решение: а) $x \in (-\infty; \sqrt{3})$; б) $x \in (-1; +\infty)$.

Упражнения

1) Решить неравенство

1. $\arcsin x \leq 5$. 2. $\arcsin x \geq -2$. 3. $\arctg x > -\pi/3$. 4. $\arctg x > 2$.

5. $\arccos x < \pi/6$. 6. $\arccos x \geq \pi/2$. 7. $\arcsin 3x \geq 0$.

8. $\arctg 2x > \pi/6$. 9. $\arccos(3x - 2) < \pi/4$.

10. $\arctg(0,5x + 1) < 5\pi/6$.

2) Решить неравенство

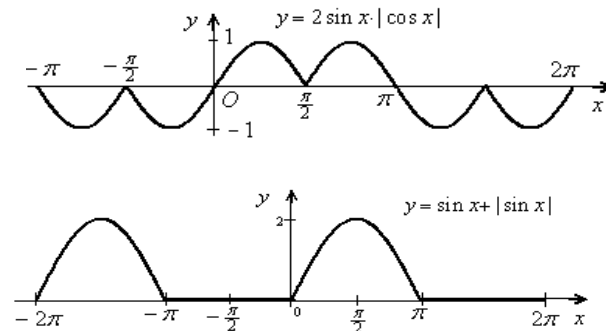
1. $\arccos x \leq \arccos 0,25$.

2. $\arctg^2 x - 4\arctg x + 3 > 0$.

3. $4(\arccos x)^2 - 1 \geq 0$.

3) Найти область определения функции $y = \sqrt{\pi - 4\arccos \frac{x}{2}}$.

Ответы. 2) 1. $[0,25; 1]$. 2. $(-\infty; \operatorname{tg} 1)$. 3. $[-1; \cos \frac{1}{2}]$. 3) $[\sqrt{2}; 2]$



Упражнения

1. Постройте графики функций:

1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 3) $y = \cos 2x$. 4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

5) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. 6) $y = \sin 2x$. 7) $y = \sin \frac{x}{2}$. 8) $y = \cos \frac{x}{2}$.

9) $y = \frac{x}{|x|} \cos 2x$. 10) $y = \frac{|x|}{x} \sin 2x$. 11) $y = |\cos x|$. 12) $y = -|\sin x|$.

13) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. 14) $y = |\operatorname{tg} x|$. 15) $y = \frac{|x-1|}{x-1} \cdot \operatorname{tg} x$.

16) $y = 2 - |\cos 0,5x|$. 17) $y + 1 = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$. 18) $y = \frac{\cos x + \cos 3x}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$.

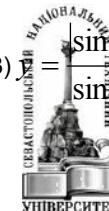
19) $y = \frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{2 - 2\cos 2x}}$. 20) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{1 - \cos 2x}$.

21) $y = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{2 + 2\cos 2x}$. 22) $y = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{2 + 2\cos 2x}$.

23) $y = \sqrt{\sin^2 2x} + 2\sin x \cdot \cos x$. 24) $y = \cos x \sqrt{\cos^2 x} - \sin x \sqrt{\sin^2 x}$.

2. На отрезке $[-2; 2]$ постройте графики функций: 1) $y = \frac{|\cos(0,5\pi \cdot x)|}{\cos(0,5\pi \cdot x)}$;

2) $y = \frac{\sin(\pi \cdot x)}{|\sin(\pi \cdot x)|}$; 3) $y = \frac{|\sin(0,5\pi \cdot x)|}{\sin(0,5\pi \cdot x)}$; 4) $y = \frac{\operatorname{tg}(0,5\pi \cdot x)}{|\operatorname{tg}(0,5\pi \cdot x)|}$.



§3 Обратные тригонометрические функции

Рассмотрим задачу о нахождении угла по известному значению его тригонометрической функции.

Например, найти значение угла α , если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Углов, синус которых равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ может быть очень много: это и $\frac{\pi}{4}$, и $\frac{3\pi}{4}$, и $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$, и $\frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4}$ и т.д. Значит, решение этой задачи не является однозначным.

Упростим её и выберем один, ближайший к нулю промежуток углов $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, где функция $\sin \alpha$ монотонно возрастает, принимая все свои возможные значения от -1 до 1.

Теперь на выбранном промежутке находится лишь одно значение угла $\alpha = \frac{\pi}{4}$, синус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это значение называют арксинусом числа

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и записывают: } \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Определение 1. Арксинусом числа a называют угол α (число) из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Из определения следует: $\sin \alpha = a$, $\alpha = \arcsin a$, где $|a| \leq 1$

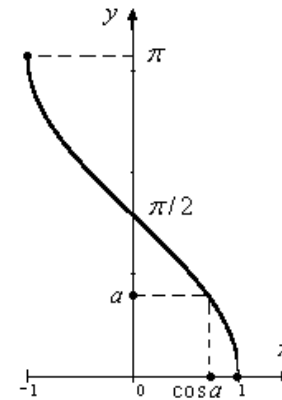
$$\text{и } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Пример 3.1 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Пример 3.2 } \sin \alpha = -\frac{1}{2}; \alpha = \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right); \alpha = -\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Пример 3.12 а) } \arcsin x > \frac{\pi}{6}; \text{ б) } \arcsin x \leq -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Решение: а) } x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]; \text{ б) } x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

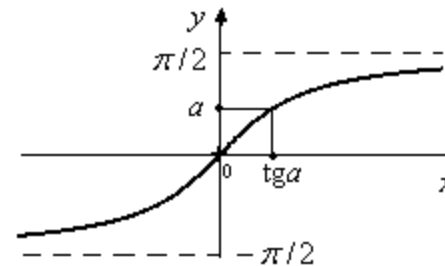


Поставим точку a на оси Oy , $0 < a < \pi$. Отобразим точку на ось Ox , используя график функции $y = \arccos x$. Очевидно, неравенству $\arccos x > a$ соответствует решение $x \in [-1; \cos a)$. Неравенству $\arccos x < a$ соответствует решение $x \in (\cos a; 1]$.

$$\text{Пример 3.13 а) } \arccos x \geq \frac{3\pi}{4};$$

$$\text{б) } \arccos x < \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Решение: а) } x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]; \text{ б) } x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right].$$



Поставим точку a на оси Oy , $|a| < \pi/2$. Отобразим точку на ось Ox , используя график функции $y = \arctg x$. Очевидно, неравенству $\arctg x > a$ соответствует решение $x \in (tg a; +\infty)$. Неравенству

$\arctg x < a$ соответствует решение $x \in (-\infty; tg a)$.

$$\text{Пример 3.14 а) } \arctg x > -\frac{\pi}{3}; \text{ б) } \arctg x < \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Решение: а) } x \in (-\sqrt{3}; +\infty); \text{ б) } x \in (-\infty; 1).$$



Ответы. 1. $x = -4$. 2. $x = 2$. 3. $x = \sqrt{2}$. 4. $x = -3$

5. $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$; $(-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$; $n, k \in \mathbb{Z}$. 6. $\frac{\pi}{4} + \pi n$;

$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; $k, n \in \mathbb{Z}$. 7. πn ; $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

8. πn ; $(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$; $k, n \in \mathbb{Z}$. 9. $\frac{\pi}{4} + \pi n$;

$\pi k - \arctg 2$; $k, n \in \mathbb{Z}$. 10. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\arctg 3 + \pi k$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

2. Решить уравнения

1. $4\arctg(x^2 - 4x + 4) = \pi$. 2. $6\arccos(3x^2 + x + \sqrt{3}) = \pi$.

3. $\frac{3}{\pi} \arccos(x^3 - 2x^2 + 3x - 5,5) = \tg\left(-\frac{67\pi}{4}\right)$.

4. $\arcsin x = 2 \arccos x$. 5. $\arcsin x \cdot \arccos x = \pi^2/18$.

6. $\arcsin x + \arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$. 7. $\arcsin x = 2\arctg x$.

Ответы. 1. $\{1, 3\}$. 2. $\{0, -1/3\}$. 3. $\{2\}$. 4. $\{\sqrt{3}/2\}$. 5. $\{0, 5\}$. 6. $\{2/\sqrt{5}\}$. 7. $\{-1\}$.

Простейшие неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции

К простейшим неравенствам относятся: $\arcsin x > a$, $\arcsin x < a$,

$\arccos x > a$, $\arccos x < a$, $\arctg x > a$,

$\arctg x < a$, $\text{arccctg} x > a$, $\text{arccctg} x < a$.

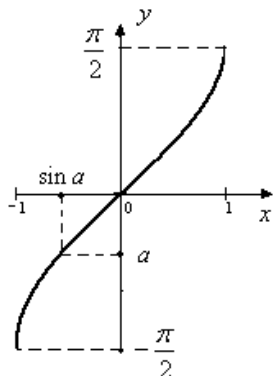
Решение простейших неравенств с обратными тригонометрическими функциями легко объяснить, используя графики этих функций.

Поставим точку a на оси Oy , $|a| < \pi/2$.

Отобразим точку на ось Ox , используя график функции $y = \arcsin x$. Очевидно, неравенству

$\arcsin x > a$ соответствует решение $x \in (\sin a; 1]$.

Неравенству $\arcsin x < a$ соответствует решение $x \in [-1; \sin a)$.



Определение 2. Арккосинусом числа a называют угол α (число) из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Из определения следует: $\cos \alpha = a$, $\alpha = \arccos a$,

где $|a| \leq 1$ и $\alpha \in [0; \pi]$.

Пример 3.3 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$.

Пример 3.4 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$; $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\alpha = \frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$.

Определение 3. Арктангенсом числа a называют угол α (число) из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Из определения следует: $\tg \alpha = a$, $\alpha = \arctg a$, $a \in \mathbb{R}$ и

$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 3.5 $\tg \alpha = \sqrt{3}$; $\alpha = \arctg \sqrt{3}$; $\alpha = \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 3.6 $\tg \alpha = -1$; $\alpha = \arctg(-1)$; $\alpha = -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Определение 4. Аркотангенсом числа a называют угол α (число) из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

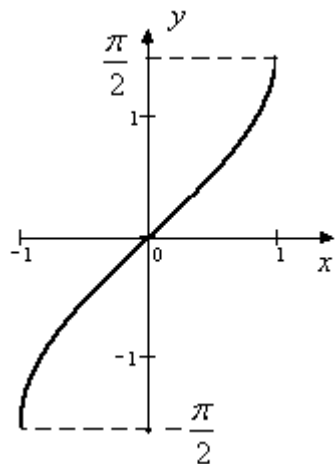
Из определения следует: $\text{ctg} \alpha = a$, $\alpha = \text{arccctg} a$, где a - любое действительное число, $\alpha \in (0; \pi)$.

Пример 3.7 а) $\text{ctg} \alpha = 1$; $\alpha = \text{arccctg} 1$; $\alpha = \frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$.

б) $\text{ctg} \alpha = -1$; $\alpha = \text{arccctg}(-1)$; $\alpha = \frac{3\pi}{4} \in (0; \pi)$.



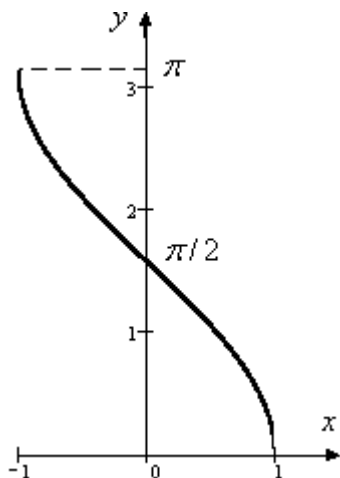
Свойства и графики обратных тригонометрических функций

I Функция $y = \arcsin x$.

- 1) Область определения $D(y) = [-1; 1]$.
- 2) Область значений $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 3) Функция нечетная: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.
- 4) Нуль функции $x = 0$.
- 5) Функция положительна на $(0; 1]$ и отрицательна на $[-1; 0)$.
- 6) Функция возрастает на $D(y)$.
- 7) Экстремумов нет.

8) Дифференцируема на $D(y)$, причем $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9) $\sin(\arcsin a) = a$; $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, для $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

II Функция $y = \arccos x$.

- 1) Область определения $D(y) = [-1; 1]$.
- 2) Область значений $E(y) = [0; \pi]$.
- 3) Функция общего вида: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.
- 4) Нуль функции $x = 1$.
- 5) Функция положительна на $[-1; 1]$.
- 6) Функция убывает на $D(y)$.
- 7) Экстремумов нет.
- 8) Дифференцируема на $D(y)$:

$$\sin u = \sin \frac{\pi}{3} \cos t - \cos \frac{\pi}{3} \sin t \quad \text{или} \quad 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t. \quad \text{С учетом}$$

$$\text{формулы } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{имеем: } 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} x. \quad \text{Тогда}$$

$$5x = \sqrt{3(1-x^2)}, \quad 28x^2 = 3. \quad \text{Ответ: } x = \sqrt{\frac{3}{28}}$$

Пример 3.11 Решить уравнение $\operatorname{arctg} x = \arccos x$

Так как $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\arccos x \in [0; \pi]$, то общая область изменения функций $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, откуда $x > 0$. В уравнении переходим к равенству косинусов. По определению $\cos(\arccos x) = x$, а также имеем формулу $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Получим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = x, \quad x^2(1+x^2) = 1, \quad x^4 + x^2 - 1 = 0. \quad \text{Решая биквадратное}$$

$$\text{уравнение, получим } x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}. \quad \text{Ответ: } x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Упражнения

1. Решить уравнения

1. $\arcsin(x+4) = 0$. 2. $\arccos(x-2) = \frac{\pi}{2}$.

3. $\arcsin(x-\sqrt{2}) = 0$. 4. $\arccos(x+3) = \frac{\pi}{2}$.

5. $2 \sin^2 3x + \cos(3x - \arcsin 1) - 1 = 0$.

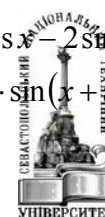
6. $2 \cos^2(2x + \arccos 0) - \sin 2x - 1 = 0$.

7. $3 + 2 \cos(x - \arccos 0) - 3 \cos 2x = 0$.

8. $3 \cos 2x - 2 \sin(x + \arccos(-1)) - 3 = 0$.

9. $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2 \sin^2(x - \arccos 0) = 0$.

10. $\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \sin(x + \arcsin 1) - 3 \cos^2 x = 0$.



$$\text{д) } \frac{2}{\pi} \arcsin(-1) + \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{\pi} \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 0.$$

2. Вычислить

$$\text{а) } \cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right); \quad \text{б) } \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3}); \quad \text{в) } \sin\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\text{г) } \operatorname{tg}(\pi + \arcsin(-0,5)); \quad \text{д) } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos(-1)\right);$$

$$\text{е) } \operatorname{ctg}\left(2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right); \quad \text{ж) } \sin(3 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})); \quad \text{з) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Вычислить

$$\text{а) } \arcsin(\sin(-4)); \quad \text{б) } \arccos(\cos 4); \quad \text{в) } \arcsin(\cos 5).$$

Ответы. 1. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{11\pi}{12}$; г) $-\frac{\pi}{2}$; д) -2. 2. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) 1; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) 0; з) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. а) $4 - \pi$; б) $2\pi - 4$; в) $5 - 3\pi/2$.

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

При решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции часто применяется переход от равенства углов к равенству тригонометрических функций этих углов. При этом расширяется область определения уравнения, поэтому возможно появление посторонних корней. Следовательно, необходима проверка полученных решений.

Рассмотрим на примерах принципы решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Пример 3.10 Решить уравнение $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3} - \arcsin x$.

Решение. Область определения задается двумя неравенствами: $|2x| \leq 1$ и

$$|x| \leq 1, \text{ поэтому область определения } |x| \leq 1/2.$$

Обозначим $\arcsin x = t$, $\arcsin 2x = u$, тогда $\sin t = x$, $\sin u = 2x$. В

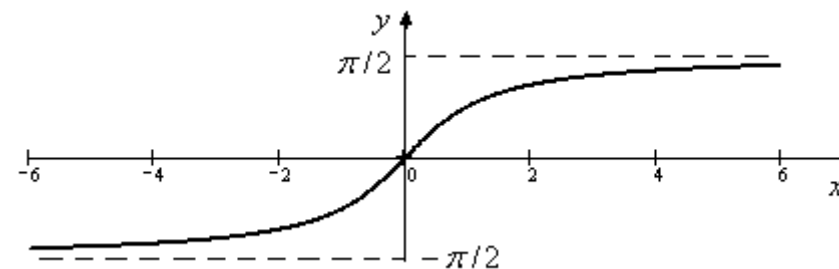
$$\text{этих обозначениях уравнение примет вид } u = \frac{\pi}{3} - t, \quad u, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Найдем синус обеих частей равенства: } \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right).$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9) \cos(\arccos a) = a, \arccos(\cos \alpha) = \alpha \text{ для } \alpha \in [0; \pi].$$

III Функция $y = \operatorname{arctg} x$.



$$1) \text{ Область определения } D(y) = R.$$

$$2) \text{ Область значений } E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$3) \text{ Нечетная функция: } \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

$$4) \text{ Нуль функции } x = 0.$$

$$5) \text{ Функция положительна на } (0; \infty) \text{ и отрицательна на } (-\infty; 0).$$

$$6) \text{ Функция возрастающая на } D(y).$$

$$7) \text{ Экстремумов нет.}$$

$$8) \text{ Дифференцируема на } D(y): (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$9) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a; \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha, \text{ для } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

IV Функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

$$1) \text{ Область определения } D(y) = R.$$

$$2) \text{ Область значений } E(y) = (0; \pi).$$

$$3) \text{ Функция общего вида } \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$



4) Нулей нет.

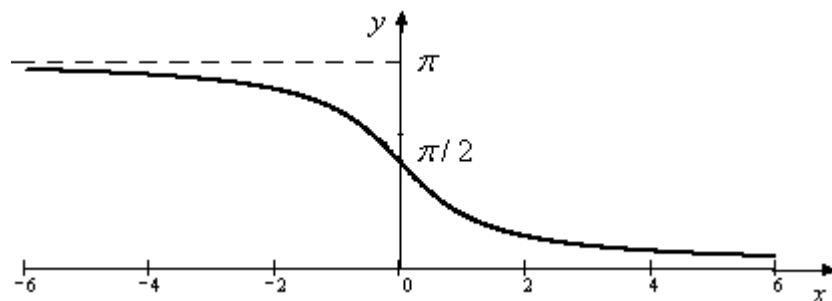
5) Функция положительна на R .

6) Функция убывающая.

7) Экстремумов нет.

8) Дифференцируема на R : $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

9) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} a) = a$; $\operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$, для $\alpha \in (0; \pi)$.



Основные соотношения между обратными тригонометрическими функциями (с ограничениями, указанными выше)

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x;$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{x}, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos(\operatorname{arccotg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 3.8 Вычислить: а) $\cos\left(\arcsin \frac{5}{13}\right)$; б) $\arccos\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)$.

Решение

а) Пусть $\arcsin \frac{5}{13} = x$, тогда $\sin x = \frac{5}{13}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдем

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = + \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

$$\text{б) } \arccos\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right) = \frac{3\pi}{10}.$$

Пример 3.9 Вычислить а) $\arcsin\left(\sin \frac{10\pi}{3}\right)$; б) $\arccos(\cos 7)$.

Решение

а) Так как $\frac{10\pi}{3}$ не принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то нельзя сразу

применить формулу $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$. Нужно заменить $\sin \frac{10\pi}{3}$ на синус

аргумента, принадлежащего отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. По свойствам синусов:

$$\sin \frac{10\pi}{3} = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно,

$$\arcsin\left(\sin \frac{10\pi}{3}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

б) $\arccos(\cos 7) = \arccos(\cos(7 - 2\pi)) = 7 - 2\pi$. При этом $0 < 7 - 2\pi < \pi$.

Упражнения

1. Вычислить

а) $\operatorname{arccotg}(-1) - \operatorname{arctg} 1$;

б) $\arcsin 0 - \arccos 0$;

в) $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

