

УДК 534.2

С.В. Доценко, доктор физ.-мат. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ЗВУКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В БЕЗГРАНИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сформулирована и решена задача нахождения поля акустического потенциала точечного источника звука с произвольным видом колебаний, движущегося в безграничном пространстве при различных числах Маха. Она может быть положена в основу определения акустического поля источников с различными конкретными видами колебаний.

Допустим, что точечный источник акустических колебаний движется равномерно прямолинейно вдоль оси Ox_1 в безграничном пространстве, заполненном акустически однородной средой (рисунок 1). Обозначим c скорость звука в среде, а V – скорость движения источника относительно этой среды. Найдем акустическое поле, создаваемое этим источником.

Волновое уравнение для скалярного акустического потенциала Ψ , создаваемого в пространстве таким источником, имеет вид [1]:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 4\pi Q(x_1, x_2, x_3, t). \quad (1)$$

Здесь величина $Q(x_1, x_2, x_3, t)$ определяет силу и направленность источника звука в среде. Она имеет размерность объемной скорости ($\text{см}^3/\text{с}$).

Чтобы выразить тот факт, что сила Q приложена лишь в месте нахождения точечного всенаправленного источника, который движется вдоль оси Ox_1 равномерно прямолинейно, положим [1]:

$$Q(x_1, x_2, x_3, t) = F(t) \delta(x_1 - Vt) \delta(x_2) \delta(x_3). \quad (2)$$

Величина $F(t)$ дает зависимость силы источника от времени в системе, связанной с источником. Благодаря введению дельта-функций Дирака, всюду равных нулю, кроме точки, где их аргумент обращается в нуль, сила Q будет отлична от нуля лишь в том месте, где находится в рассматриваемый момент времени t источник.

Через потенциал $\Psi(x_1, x_2, x_3, t)$ выражается колебательная скорость частиц среды $\vec{v}$, вызванная акустическими волнами, и звуковое давление P при помощи формул [2]:

$$\vec{v} = \text{grad} \Psi(x_1, x_2, x_3, t)$$

и

$$P = -\rho \frac{\partial \Psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t},$$

где ρ – плотность среды.

Перейдем к решению поставленной задачи.

В декартовой системе координат уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 4\pi Q(x_1, x_2, x_3, t). \quad (3)$$

Представим акустический потенциал в виде четырехкратного интеграла Фурье по волновым числам и частоте от его четырехмерного спектра $\tilde{\Psi}(k_1, k_2, k_3, \omega)$ [3]:

$$\Psi = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(k_1, k_2, k_3, \omega) \exp[j(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \omega t)] dk_1 dk_2 dk_3 d\omega. \quad (4)$$

(В дальнейшем, если не сказано иное, всюду интегрирование производится в бесконечных пределах, что для сокращения записи указываться не будет).

Подставим представление (4) потенциала Ψ в уравнение (3). Получим

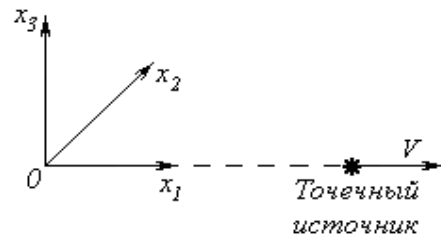


Рисунок 1 – Движущийся точечный источник звука

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \mathcal{T} \dots \mathcal{T}_{\mathbb{I}}^{\mathbb{K}} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\omega/c\right)^2 \mathcal{U}_{\mathbb{W}} \tilde{\Psi}(k_1, k_2, k_3; \omega) e^{j(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \omega t)} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega = 4\pi Q(x_1, x_2, x_3, t).$$

Умножим обе части найденного уравнения на $\exp(-j\omega' t)$, проинтегрируем по t в бесконечных пределах и учтем, что

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{T}_{-\tau}^{\tau} \exp[j(\omega - \omega') t] dt = \delta(\omega - \omega') \quad (5)$$

есть дельта-функция Дирака. Найдем

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{T} \dots \mathcal{T}_{\mathbb{I}}^{\mathbb{K}} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\omega/c\right)^2 \mathcal{U}_{\mathbb{W}} \tilde{\Psi}(k_1, k_2, k_3; \omega) \delta(\omega - \omega') e^{j(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega = 4\pi \mathcal{T}_{-\tau}^{\tau} Q(x_1, x_2, x_3, t) e^{-j\omega' t} dt$$

Выполним в левой части этого уравнения интегрирование по ω и затем заменим ω' на ω :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{T} \dots \mathcal{T}_{\mathbb{I}}^{\mathbb{K}} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\omega/c\right)^2 \mathcal{U}_{\mathbb{W}} \tilde{\Psi}(k_1, k_2, k_3; \omega) e^{j(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} dk_1 dk_2 dk_3 = 4\pi \mathcal{T}_{-\tau}^{\tau} Q(x_1, x_2, x_3, t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6)$$

Принимая во внимание соотношение (2) и вычисляя интеграл, входящий в правую часть уравнения (6), получим

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{T} \dots \mathcal{T}_{\mathbb{I}}^{\mathbb{K}} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\omega/c\right)^2 \mathcal{U}_{\mathbb{W}} \tilde{\Psi}(k_1, k_2, k_3; \omega) e^{j(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} dk_1 dk_2 dk_3 = \frac{4\pi}{V} F_{\mathbb{I}}^{\mathbb{K}} \frac{x_1}{V} \mathcal{U}_{\mathbb{W}} e^{-j\frac{\omega x_1}{V}} \delta(x_2) \delta(x_3).$$

Умножим обе части найденного уравнения на $\exp[j(k\check{y}_1 + k\check{y}_2 + k\check{y}_3)]_{\mathbb{W}}$, выполним интегрирование по x_1, x_2, x_3 в бесконечных пределах и обозначим $x_1 = Vt$, учитывая соотношения вида (5) и фильтрующее свойство дельта-функций. Получим

$$\mathcal{I}_{\mathbb{I}}^{\mathbb{K}} k\check{y}_1^2 + k\check{y}_2^2 + k\check{y}_3^2 - \left(\omega/c\right)^2 \mathcal{U}_{\mathbb{W}} \tilde{\Psi}(k\check{y}_1, k\check{y}_2, k\check{y}_3; \omega) = 4\pi \mathcal{T}_{-\tau}^{\tau} F(t) e^{-j(\omega + k\check{y}V)t} dt.$$

Отсюда найдем четырехмерный спектр акустического потенциала

$$\tilde{\Psi}(k_1, k_2, k_3; \omega) = 4\pi \frac{\tilde{F}(\omega + k_1 V)}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\omega/c\right)^2}, \quad (7)$$

где обозначен как

$$\tilde{F}(\omega) = \mathcal{T}_{-\tau}^{\tau} F(t) e^{-j\omega t} dt \quad (8)$$

частотный спектр зависимости силы источника от времени.

Подстановка спектра (7) в формулу (4) и замена всех переменных $k_i \rightarrow -k_i$ дает представление акустического потенциала поля точечного детерминированного акустического источника, прямолинейно равномерно движущегося в бесконечно протяженной среде, имеющей скорость звука c , в виде четырехкратного интеграла

$$\Psi(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \mathcal{T}_{-\tau}^{\tau} \dots \mathcal{T}_{-\tau}^{\tau} \frac{\tilde{F}(\omega - k_1 V) \exp[j(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)]_{\mathbb{W}}}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\omega/c\right)^2} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega. \quad (9)$$

Выделим в последнем выражении внутренний интеграл

$$I_1(k_1, k_2; \omega) = \mathcal{T}_{-\tau}^{\tau} \frac{\exp(-jk_3 x_3)}{k_3^2 + \gamma^2} dk_3, \quad (10)$$

в котором обозначено

$$\gamma = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \left(\omega/c\right)^2}.$$

Значение интеграла (10) равно [3] $I_1 = \pi \exp(-\gamma |x_3|) / \gamma$. Следовательно, выражение для потенциала (9) запишется как

$$\Psi(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{P} \mathcal{P} \mathcal{P} \frac{\tilde{F}(\omega - k_1 V)}{\gamma} \exp[j(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t) - \gamma |x_3|]_{\mathbb{W}} dk_1 dk_2 d\omega. \quad (11)$$

В соответствии с представлением (8) входящий в него спектр имеет вид

$$\tilde{F}(\omega - k_1 V) = \int_{-\tau}^{\tau} F(t\check{y}) e^{-j(\omega - k_1 V)t\check{y}} dt\check{y}.$$

Подставим эту величину в формулу (9) и выделим в ней функцию

$$I_2(x_1, x_2; t\check{y}) = \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\exp\left\{-j\check{y}k_1(x_1 - Vt\check{y}) + k_2 x_2\right\} \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} |x_3|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}} dk_1 dk_2. \quad (12)$$

В результате формула (11) приобретает вид

$$\Psi(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F(t\check{y}) I_2(x_1, x_2; t\check{y}) \exp\{j\omega(t - t\check{y})\} dt\check{y} d\omega. \quad (13)$$

Переход в (12) к полярным координатам $k_1 = k \cos \varphi$, $k_2 = k \sin \varphi$, $dk_1 dk_2 = k dk d\varphi$, ($0 \leq k < \tau$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) дает

$$I_2(x_1, x_2; t\check{y}) = \int_0^{\tau} \frac{I_3(k)}{\gamma} \exp(-\gamma |x_3|) k dk, \quad (14)$$

где теперь

$$\gamma = + \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (15)$$

и обозначено

$$I_3(k; x_1, x_2; t\check{y}) = \int_0^{2\pi} \exp\{-jk\check{y}(x_1 - Vt\check{y}) \cos \varphi + x_2 \sin \varphi\} d\varphi.$$

Замена переменных: $x_1 - Vt\check{y} = r\check{y} \cos \theta$, $x_2 = r\check{y} \sin \theta$ при

$$r\check{y} = \sqrt{(x_1 - Vt\check{y})^2 + x_2^2}, \quad (16)$$

позволяет упростить последнюю формулу:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \exp\{-jkr\check{y} \cos(\varphi - \theta)\} d\varphi.$$

Величина этого интеграла равна [4]

$$I_3 = 2\pi J_0(kr\check{y}), \quad (17)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя (цилиндрическая функция первого рода) нулевого индекса. Здесь использован тот факт, что интегрирование производится по полному периоду подынтегральной функции (в результате исчезает зависимость от θ).

Подстановка (17) в (14) с учетом (16) и (15) дает

$$I_2(x_1, x_2; t\check{y}) = 2\pi \int_0^{\tau} k \frac{\exp\left\{-j\check{y}k_1(x_1 - Vt\check{y}) + k_2 x_2\right\} \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}} J_0(kr\check{y}) \sqrt{(x_1 - Vt\check{y})^2 + x_2^2} dk. \quad (18)$$

Воспользуемся значением интеграла [5]

$$\int_0^{\tau} x \frac{\exp\left(-p\sqrt{x^2 - z^2}\right)}{\sqrt{x^2 - z^2}} J_0(cx) dx = \frac{\exp\left(-jz\sqrt{p^2 + c^2}\right)}{\sqrt{p^2 + c^2}}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } c|, \quad \arg \sqrt{x^2 - z^2} = \pi/2 \text{ при } x < z.$$

Из сопоставления его с (18) следует, что

$$I_2(x_1, x_2; t\check{y}) = 2\pi \frac{\exp\left\{-j\frac{\omega}{c}\sqrt{(x_1 - Vt\check{y})^2 + x_2^2} + x_3^2\right\}}{\sqrt{(x_1 - Vt\check{y})^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Подстановка этой функции в (13) и интегрирование по ω дают

$$\Psi(x_1, r; t) = \int_{-t}^t F(t\ddot{y}) \frac{\delta \ddot{y} \frac{1}{c} \sqrt{(x_1 - Vt\ddot{y})^2 + r^2} + t\ddot{y} - t \frac{V}{c}}{\sqrt{(x_1 - Vt\ddot{y})^2 + r^2}} dt\ddot{y}. \quad (19)$$

Здесь $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ есть расстояние точки наблюдения акустического потенциала от оси, по которой движется источник звука.

Под знак интеграла (19) входит дельта-функция сложного аргумента. Это позволяет, заменив $t\ddot{y}$ на τ , записать его следующим образом:

$$\Psi(x_1, r; t) = \int_{-t}^t F(\tau) \frac{\delta \ddot{\varphi}(\tau) \frac{1}{c}}{\sqrt{(x_1 - V\tau)^2 + r^2}} d\tau, \quad (20)$$

причем аргумент входящей в него дельта-функции есть

$$\varphi(\tau) = \tau + \frac{1}{c} \sqrt{(x_1 - V\tau)^2 + r^2} - t. \quad (21)$$

Как известно [6], в случае сложного аргумента дельта-функции имеет место представление

$$\delta \ddot{\varphi}(x) \frac{1}{c} = \sum_{s=1}^N \frac{\delta(x - x_s)}{|\dot{\varphi}(x_s)|}, \quad (22)$$

где x_s – простые корни функции $\varphi(x)$, N – число этих корней.

Корни функции $\varphi(x)$ определяются из уравнения $\varphi(\tau_s) = 0$, т.е. в нашем случае из

$$\sqrt{(x_1 - V\tau)^2 + r^2} = c(t - \tau). \quad (23)$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, приведя подобные члены и разделив его на c^2 , получим, что корни τ_s должны удовлетворять уравнению

$$(1 - M^2)\tau_s^2 - 2\frac{M}{c}t\tau_s - \frac{x_1}{c}t + t^2 - \frac{x_1^2 + r^2}{c^2} = 0, \quad (24)$$

где отношение скорости движения источника к скорости звука в среде $M = V/c$ носит название числа Маха [1].

Будем вначале считать, что скорость источника меньше скорости звука, т.е. $M < 1$. Уравнение (24) имеет два решения

$$\tau_{1,2} = \frac{t - M \frac{x_1}{c} \mp \sqrt{\frac{M}{c}t - \frac{x_1}{c}t + \left(1 - M^2\right) \frac{M}{c} \frac{r^2}{c}}}{1 - M^2}, \quad (25)$$

где индекс 1 соответствует знаку «-», а индекс 2 – знаку «+» этой формулы.

Под знаком корня в этой формуле всегда содержится неотрицательная величина, поэтому оба числа $\tau_{1,2}$ действительны. Однако этого недостаточно, чтобы они удовлетворяли исходному уравнению (23). При его возведении в квадрат мог появиться лишний корень. Уравнению (23) удовлетворяют только те корни $\tau_{1,2}$, при которых выполняется условие

$$c(t - \tau) \geq r, \quad (r > 0), \quad (26)$$

так как ему удовлетворяет его левая часть.

Здесь следует сделать важное замечание. В формуле (20) корни $\tau_{1,2}$ соответствуют моментам излучения акустического сигнала $F(\tau_{1,2})$, а время t есть момент наблюдения созданного им потенциала $\Psi(x_1, r; t)$. В силу принципа причинности момент наблюдения не может предшествовать моменту излучения. Выражение (26) является следствием этого принципа.

Для того чтобы выяснить, какой из корней $\tau_{1,2}$ удовлетворяет уравнению (23), исследуем поведение функции $\varphi(\tau)$, определяемой формулой (21). Оценим величину дроби, входящей во второе слагаемое ее производной

$$\dot{\varphi}(\tau) = 1 + M \frac{V\tau - x_1}{\sqrt{(x_1 - V\tau)^2 + r^2}}. \quad (27)$$

Квадрат этой дроби $(V\tau - x_1)^2 / ((V\tau - x_1)^2 + r^2) \leq 1$ и равен единице только при $r = 0$. Так как по условию $M < 1$, то применение этого неравенства к формуле (27) показывает, что при любых значениях V, x_1, r и τ справедливо неравенство $\phi(\tau) > 0$. Это означает, что функция $\phi(\tau)$ монотонно растет с ростом τ и может обратиться в нуль только при единственном значении τ . Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что это – корень τ_1 . Корень τ_2 не удовлетворяет уравнению (23).

Итак, на основании изложенного и формулы (22) можно записать

$$\delta \ddot{\phi}(\tau) = \frac{\delta(\tau - \tau_1)}{\phi(\tau_1)}, \quad (28)$$

где $\phi(\tau)$ определяется по формуле (27).

Согласно выражению (25) имеем

$$\tau_1 = \frac{t - M \frac{x_1}{c} - \sqrt{\frac{3}{4} M^2 - \frac{x_1^2}{c^2} + (1 - M^2) \frac{3}{4} \frac{r^2}{c^2}}}{1 - M^2}. \quad (29)$$

Учитывая соотношения (28) и (27), упростим формулу (20):

$$\Psi(x_1, r; t) = \frac{F(\tau_1)}{c \phi(\tau_1) \sqrt{\frac{3}{4} M^2 - \frac{x_1^2}{c^2} + \frac{3}{4} \frac{r^2}{c^2}}}, \quad (30)$$

причем величина τ_1 дается формулой (29).

Формула (30) – искомое выражение для акустического потенциала точечного источника, излучающего временной сигнал $F(t)$ и равномерно прямолинейно движущегося в однородном пространстве с дозвуковой скоростью V . В ней t – момент наблюдения потенциала, x_1 – абсцисса точки наблюдения этого потенциала, а r – расстояние этой точки до линии движения источника звука.

В частном случае неподвижного источника $V = 0$, $M = 0$ получим $\tau_1 = t - R/c$, $\phi(\tau_1) = 1$, и выражение (30) для потенциала упрощается:

$$\Psi(R; t) = \frac{F(t - R/c)}{R},$$

где $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

В общем случае аргумент функции $F(\tau_1)$, стоящей в числителе формулы (30), можно рассматривать как фазу колебания точечного источника $F(t)$, имевшего место в момент времени τ_1 . Остальная часть формулы – амплитудный множитель.

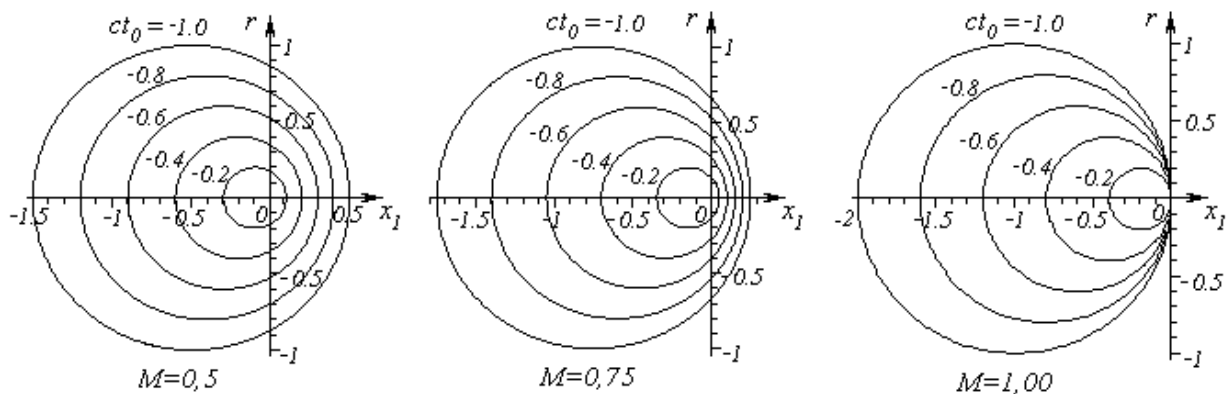
Допустим, что выбран некоторый момент t_0 , и выясним, как изменяется в пространстве с течением времени поверхность равной фазы, которую имела функция $F(t)$ в момент t_0 . Очевидно, эта поверхность описывается уравнением $\tau_1 = t_0$. После несложных преобразований получим уравнение этой поверхности в геометрических координатах

$$(Mct_0 - x_1)^2 + r^2 = c^2(t - t_0)^2.$$

Если считать, что потенциал наблюдается в момент $t = 0$, то это уравнение примет вид

$$(Mct_0 - x_1)^2 + r^2 = (ct_0)^2. \quad (31)$$

В силу условия (26) момент t_0 излучения звука должен предшествовать моменту наблюдения, т.е. в нашем случае $t_0 < 0$.

Рисунок 2 – Сечения поверхностей равной фазы при $M \neq 1$

Уравнение (31) в трехмерном пространстве описывает сферы радиуса ct_0 , центры которых расположены на оси абсцисс на удалении Mct_0 от начала координат. На рисунке 2 представлены окружности – сечения этих сфер вертикальной плоскостью, проходящей через траекторию движения источника звука. При $M < 1$ эти окружности вложены друг в друга без взаимного касания. При $M = 1$ все они имеют одну общую точку – точку $x_1 = 0$, которая соответствует разным моментам t_0 излучения звука источником. Это – особая точка. В ней происходит концентрация акустического поля от источника, излучаемого им в последовательные моменты времени, что при определенной его мощности может привести к нарушению сплошности среды и возникновению ударных волн.

Из формулы (30) с учетом (29) следует, что амплитуда потенциала убывает обратно пропорционально расстоянию точки его наблюдения от источника излучения.

Теперь допустим, что источник движется со скоростью V , превышающей скорость звука c . При этом число Маха $M > 1$, и корни (25) принимают вид

$$\tau_{1,2} = \frac{M \frac{x_1}{c} - t \pm \sqrt{\frac{M}{3} M t - \frac{x_1^2}{c^2} - (M^2 - 1) \frac{r^2}{3 c^2}}}{M^2 - 1}.$$

Эти значения действительны, если величина, стоящая под знаком квадратного корня, неотрицательна, т.е. при

$$|Mct - x_1| \geq r \sqrt{M^2 - 1}. \quad (32)$$

Если это условие не выполняется, то $\Psi = 0$.

С помощью численных расчетов можно убедиться, что условию (26) удовлетворяет корень

$$\tau_2 = \frac{M \frac{x_1}{c} - t - \sqrt{\frac{M}{3} M t - \frac{x_1^2}{c^2} - (M^2 - 1) \frac{r^2}{3 c^2}}}{M^2 - 1}.$$

Следовательно, в случае $M > 1$ выражение для акустического потенциала имеет вид

$$\Psi(x_1, r; t) = \frac{F(\tau_2)}{c |\phi(\tau_2)| \sqrt{\frac{M}{3} M \tau_2 - \frac{x_1^2}{c^2} + \frac{r^2}{3 c^2}}},$$

если выполняется условие (32), и равно нулю в противном случае.

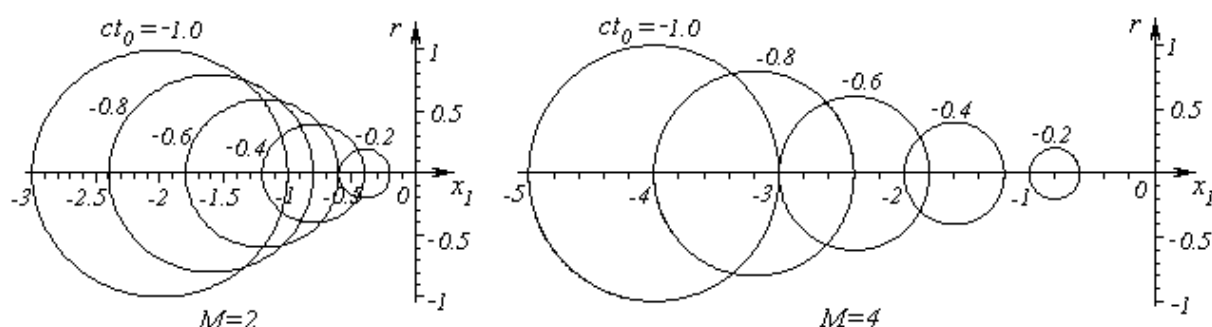


Рисунок 3 – Сечения поверхностей равной фазы при $M > 1$

Примеры окружностей равных фаз для случаев $M > 1$ представлены на рисунке 3. Соседние окружности имеют по две общие точки. Огибающие семейств этих окружностей представляют собой полубесконечные отрезки прямых линий, имеющих общую точку ($x = 0, r = 0$) и составляющих с осью абсцисс угол α , величина которого определяется выражением $\sin \alpha = 1/M$. Этот угол зависит только от числа Маха и он тем острее, чем это число больше.

Решение представленной задачи является основой для определения акустического поля от точечных источников, излучающих колебания сложной формы, в том числе и при движении их в ограниченном пространстве.

Библиографический список

1. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. / Д.И. Блохинцев. — М.: Наука, 1981. — 206 с.
2. Бреховских Л.М. Теоретические основы акустики океана / Л.М. Бреховских, Ю.П. Лысанов. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 264 с.
3. Марков Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. — М.-Л.: Энергия, 1967. — 376 с.
4. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: ФМ, 1962. — 1100 с.
5. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Наука, 1983. — 750 с.
6. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. Справочник геофизика. / Под ред. Дмитриева В.И. — М.: Недра, 1990. — 498 с.

Поступила в редакцию 02.02.2007 г.