

Высшая математика

для студентов факультета ЭиМ

Методические указания и контрольные задания для студентов заочной
формы обучения факультета экономики и менеджмента

1-й семестр

Севастополь
2006

УДК 517.031

Высшая математика для студентов экономических специальностей. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения / Разраб. С.Ф. Ледяев – Севастополь, 2006. – 67 с.: ил.

Настоящее пособие является методическим руководством для изучения курса высшей математики студентами - заочниками экономических специальностей в первом учебном семестре. Оно содержит материалы, необходимые для подготовки и успешной сдачи экзамена по высшей математике:

- контрольные задания для самостоятельной работы в первом семестре (десять вариантов), большинство задач снабжены ответами;
- краткий курс лекций, освещающий вопросы, вынесенные на экзамены;
- примеры выполнения контрольных заданий с достаточно подробными объяснениями.

Номер варианта контрольных заданий совпадает с последней цифрой номера студенческого билета (зачётной книжки). Вариант №10 соответствует нулю в конце номера студенческого билета.

Все контрольные задания составляют в сумме те контрольные работы, которые предусмотрены учебными планами экономических специальностей. Указания по группированию заданий в контрольные работы делает ведущий преподаватель на установочной сессии.

Пособие могут использовать и студенты очной формы обучения.

Электронный вариант пособия выполнен по принципу «главного документа». Всё содержание пособия, приведенное ниже, размещено в нескольких файлах. Каждый файл можно вызвать, щелкнув левой кнопкой мыши на цветном адресе.

Содержание

	Задания для контрольных работ за первый семестр
1	Линейная алгебра
1.1	Матрицы, частные виды матриц
1.2	Операции с матрицами
1.3	Пример выполнения задания 1 и его экономическое применение ..
1.4	Определители 2 и 3 порядков, вычисление, свойства
1.5	Минор, алгебраическое дополнение, разложение определителя по элементам ряда
1.6	Обратная матрица, её вычисление
1.7	Системы линейных алгебраических уравнений. Решение определенных систем с помощью обратной матрицы
1.8	Решение определенных систем с помощью правила Крамера
1.9	Метод Гаусса
1.10	Указание к выполнению задания 2. Применение линейных систем алгебраических уравнений в экономических расчетах
1.11	Ранг матрицы, Критерий совместности систем линейных алгебраических уравнений
2	Векторная алгебра и аналитическая геометрия
2.1	Векторы. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису
2.2	Скалярное произведение векторов
2.3	Понятие линейного пространства. Арифметический вектор. Линейное пространство арифметических векторов
2.4	Скалярное произведение, норма, ортогональность арифметических векторов
2.5	Пример выполнения задания 3
2.6	Уравнения прямой линии на плоскости, преобразования уравнения прямой, условия параллельности и перпендикулярности прямых ..
2.7	Пример выполнения задания 4
2.8	Уравнения плоскости в пространстве
2.9	Уравнения прямой линии в пространстве
3	Пределы, непрерывность функции
3.1	Предел бесконечной числовой последовательности
3.2	Предел функции при $x \rightarrow a$
3.3	Предел функции при $x \rightarrow \infty$
3.4	Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин
3.5	Свойства пределов
3.6	Два замечательных предела
3.7	Пример выполнения задания 5
3.8	Сравнение бесконечно малых функций
3.9	Эквивалентные бесконечно малые величины
3.10	Пример выполнения задания 6
3.11	Непрерывность функции
3.12	Пример выполнения задания 7
4	Производная функции
4.1	Производная. Геометрический и экономический смысл производной
4.2	Правила дифференцирования и таблица производных основных функций
4.3	Дифференцирование неявно заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование параметрически заданных функций
4.4	Эластичность функции
4.5	Производные высших порядков
4.6	Пример выполнения задания 8
4.7	Дифференциал функции, его свойства и применение
4.8	Применение 1-й и 2-й производной для исследования функций
4.9	Пример выполнения задания 9
	Библиографический список

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ЗА ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Задания для контрольных работ.doc

Матрицы, операции с матрицами

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Матрицы, операции с матрицами.doc

Определители

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Определители.doc

Обратная матрица

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Обратная матрица.doc

Системы, правило Крамера

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Системы, правило Крамера.doc

Метод Гаусса

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Метод Гаусса.doc

Ранг матрицы

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Ранг матрицы.doc

Векторы

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Векторы.doc

Скалярное произведение векторов

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Скалярное произведение.doc

Арифметические векторы

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Арифметические векторы.doc

Прямая на плоскости

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Прямая на плоскости.doc

Плоскость и прямая в пространстве

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Плоскость.doc

Пределы и непрерывность

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Пределы и непрерывность.doc

Производная функции

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Производная функции.doc

Библиографический список

D:\Мои Документы\БИБЛИОТЕКА!!!\md\2006_d060003\Библиографический список.doc

1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Матрицы, частные виды матриц

Понятие матрицы важно для экономистов. Объясняется это тем, что многие математические модели процессов и состояний в экономике записываются в простой и компактной матричной форме.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, переменных, функций, или других математических объектов. Эти математические объекты (числа, переменные и т.д.) называются **элементами матрицы** и в общем виде снабжаются двойной индексацией для обозначения места элемента в матрице.

Матрица обозначается круглыми скобками по бокам таблицы. Матрицы также обозначают большими латинскими буквами $A, B, C, E, X, \dots$

Примеры матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Здесь показаны различные типы матриц. Матрица A – **прямоугольная**, размерностью (2×3) , первая цифра указывает количество строк, вторая цифра – количество столбцов.

Матрица B – **квадратная**, у неё число строк равно числу столбцов.

Матрица C состоит из одного столбца (**матрица-столбец**), матрица F состоит из одной строки (**матрица-строка**).

Различают также **диагональные** матрицы – квадратные матрицы, у которых все элементы, кроме элементов, стоящих в главной диагонали, равны нулю.

Единичные матрицы – диагональные матрицы, у которых в главной диагонали стоят единицы. Например,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь D – диагональная матрица; E, I – единичные матрицы разной размерности.

1.2 Операции с матрицами

1. Две матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ одинаковой структуры

(одинаковых размеров) **равны** друг другу, если их соответствующие элементы равны. Понятие неравенства в матрицах не определено.

2. Две матрицы одинаковой размерности можно складывать и вычитать:

$A \pm B = C$. При этом $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$. Здесь a_{ij} , b_{ij} , c_{ij}

– элементы матриц A, B, C , стоящие на одинаковых местах. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Произведение матрицы A на число (скаляр) k определяется соотношением $kA = Ak = (k \cdot a_{ij})$. Каждый элемент матрицы умножается на это

$$\text{число: } k \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ k \cdot d & k \cdot e & k \cdot f \end{pmatrix}.$$

4. Операция замены строк матрицы столбцами с теми же номерами называется **транспонированием матрицы**. Эта операция обозначается так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$
 Повторное транспонирование приводит к исходной

матрице: $(A^T)^T = A$. Матрицы, удовлетворяющие условию $A = A^T$, называются **симметрическими**. Они характеризуются условием $a_{ij} = a_{ji}$. Пример

$$\text{симметрических матриц: } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Две матрицы согласованных размеров можно перемножить. Количество столбцов (длина строки) первой матрицы должно быть равно количеству строк (высоте столбца) второй:

$$A_{n \times m} \cdot B_{m \times l} = C_{n \times l}. \quad (1.1)$$

На рисунке 1.1 указаны размеры перемножаемых матриц и результата.

Для расчета элемента $c_{i,j}$ элементы строки i матрицы A

перемножаются с элементами столбца j матрицы B по формуле:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} \cdot b_{k,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,m} \cdot b_{m,j}. \quad (1.2)$$

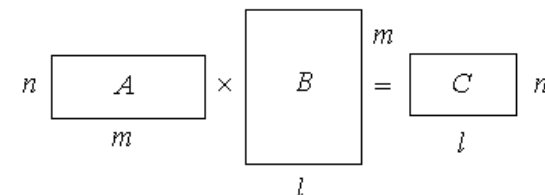


Рисунок 1.1 – Размеры перемножаемых матриц

Приведём пример, из которого несложно понять правило умножения матриц:

Пример 1.1 Перемножить матрицы $A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 4} = C_{3 \times 4}$.



Решение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 17 & 6 & 11 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 27 & 10 & 18 & 11 \end{pmatrix}.$$

В приведённом примере нельзя сомножители (матрицы) поменять местами, потому что их размеры будут не согласованы. Но и в общем случае произведение матриц *некоммутативное*, то есть $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Если же $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются *коммутируемыми*.

При умножении матрицы A на согласованную по размерам единичную матрицу E матрица A не изменяется: $AE=A$, $EA=A$. Это означает, что в матричной алгебре единичная матрица играет роль единицы обычной алгебры: при умножении числа на единицу результат равен исходному числу. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 7 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Свойство *ассоциативности* в матричной алгебре сохраняется. Это означает, что $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

1.3 Пример выполнения задания 1 и его экономическое применение

Задание 1. Вычислить произведение трёх матриц $A \cdot B \cdot C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Решение

Вычисляем произведение матриц в последовательности: $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$

Матрицы A и B согласованы по размерам, их можно перемножить. Результат имеет три строки и два столбца:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 10 & 11 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Теперь результат перемножения двух матриц умножим на матрицу C :

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 10 & 11 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \cdot 3 + 0 \cdot 7 \\ 10 \cdot 3 + 11 \cdot 7 \\ (-4) \cdot 3 + 10 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 107 \\ 58 \end{pmatrix}.$$

Экономическое применение произведения матриц рассмотрено в пособии [3].

Пусть план выпуска продукции задан матрицей строкой

$A = (100 \quad 80 \quad 130)$. Норма расхода сырья двух типов, которое идет на

производство каждого вида продукции, задана матрицей $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Стоимость единицы каждого типа сырья задано матрицей $C = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Тогда произведение матриц A и B определяет суммарные затраты сырья:

$$A \cdot B = (100 \quad 80 \quad 130) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \quad 980).$$

Общая стоимость сырья определяется произведением полученной матрицы на матрицу стоимости сырья:

$$(730 \quad 980) \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = (730 \cdot 30 + 980 \cdot 50) = (70900).$$

1.6 Обратная матрица, её вычисление

Если матрица A – квадратная, то обратной к ней матрицей называется такая матрица A^{-1} , для которой справедливо двойное равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad (1.7)$$

где E – единичная матрица.

Квадратная матрица A имеет обратную лишь в том случае, если её определитель $\det(A) \neq 0$. В этом случае она называется *неособенной*, или *невырожденной*. Например, для матрицы A её определитель $\det(A)$ не равен нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 7 = -26.$$

Матрица A неособенная. Всякая неособенная (невырожденная) матрица имеет обратную матрицу.

Обратная матрица квадратной матрицы A вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}, \quad (1.8)$$

где $\tilde{A}$ – называется присоединенной матрицей. Присоединенная матрица – это матрица алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы A .

Формула (1.8) для матрицы A третьего порядка имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Пример 1.2 Определить обратную матрицу (если она существует) для

матриц: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Определитель матрицы A , $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$,

следовательно, матрица невырожденная. Обратная матрица A^{-1} для матрицы A существует. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A . Для этого определяем миноры элементов и присваиваем им знак согласно формуле (1.5):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 14;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -46; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 22;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

По формуле (1.9) запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{70} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -46 & -3 \\ 7 & -14 & -7 \\ 14 & 22 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/70 & -46/70 & -3/70 \\ 7/70 & -14/70 & -7/70 \\ 14/70 & 22/70 & -6/70 \end{pmatrix}.$$

б) Определитель матрицы B , $\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 37 \neq 0$, матрица

невырожденная. Миноры элементов определителя второго порядка – определители первого порядка. Определитель первого порядка содержит только один элемент и равен этому элементу. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы B . Для этого определяем миноры элементов и присваиваем им знак согласно формуле (1.5):

$$A_{11} = |1| = 1, \quad A_{12} = -|-7| = 7, \quad A_{21} = -|5| = -5, \quad A_{22} = |2| = 2. \text{ Тогда}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/37 & -5/37 \\ 7/37 & 2/37 \end{pmatrix}.$$



1.7 Системы линейных алгебраических уравнений. Решение определенных систем с помощью обратной матрицы

Пусть задана система n уравнений с n неизвестными величинами $x_1, x_2, \dots, x_n$ вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1.10)$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ называются коэффициентами при неизвестных, $b_1, b_2, \dots, b_n$ называются правыми частями системы (свободными членами).

Все неизвестные величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ входят в систему в первой степени и образуют с коэффициентами линейную комбинацию. Такая система уравнений называется *линейной системой алгебраических уравнений*, порядок системы определяется величиной n .

Введём для системы (1.10) следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где A - квадратная матрица, называется матрицей системы (1.10); X - матрица-столбец неизвестных; B - матрица-столбец свободных членов.

Если определитель квадратной матрицы A не равен нулю, т.е. матрица A не вырожденная, то система (1.10) называется *определенной*. Решение определенных систем можно получить с помощью обратной матрицы.

С учетом введенных обозначений систему (1.10) можно записать в виде матричного уравнения

$$A \cdot X = B. \quad (1.11)$$

Умножаем обе части уравнения (1.11) на обратную матрицу:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Окончательно, решение уравнения (1.10) имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (1.12)$$

Остаётся найти обратную матрицу A^{-1} и умножить её на матрицу B . В результате получим решение системы (1.12). В этом состоит матричный метод решения систем алгебраических уравнений (метод обратной матрицы).

Пример 1.3 Дана система линейных алгебраических уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Найти решение системы уравнений методом обратной матрицы.

Решение

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 21 - 10 = -30.$$

$$\Delta = -30.$$

Матрица системы невырожденная и имеет обратную матрицу.

Определяем алгебраические дополнения элементов матрицы системы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -23,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Решение системы уравнений определяем по формуле (1.12), где обратная

матрица A^{-1} составляется по формуле (1.9):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -23 & 5 \\ -7 & 11 & -5 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$

1.8 Решение определенных систем с помощью правила Крамера

Решение определенных линейных систем алгебраических уравнений (1.10) можно получить с помощью правила Крамера. Обозначим определитель (детерминант) матрицы системы A символом Δ (дельта – греческий алфавит):

$$\Delta = \det A.$$

Сформулируем правило Крамера в применении к системам уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1.13)$$



Правило Крамера

1) система (1.13) имеет единственное решение, если определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$;

2) само решение определяется по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (1.14)$$

Определитель Δ составляется из коэффициентов при неизвестных, вспомогательные определители Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 получаются из определителя Δ путём замены первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Пример 1.4 Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Доказать единственность её решения и найти это решение по формулам Крамера.

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -30,$$

$$\Delta = -30.$$

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Для нахождения этого решения по формулам Крамера вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -30, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 60, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -60.$$

Подставляя значения полученных определителей в формулы (1.14), получаем решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-30}{-30} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{60}{-30} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-60}{-30} = 2.$$

1.4 Определители 2 и 3 порядков, вычисление, свойства

Квадратная таблица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, составленная из четырёх чисел,

называется квадратной матрицей 2-го порядка. Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице А, называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.3)$$

Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица 3-го порядка, то соответствующим ей определителем 3-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.4)$$

Например,

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 17;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot 2 = 11.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ называют элементами определителя; первая цифра индекса указывает номер строки, в которой стоит элемент, вторая цифра индекса указывает номер столбца. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} составляют главную диагональ определителя; элементы a_{31}, a_{22}, a_{13} - вспомогательную диагональ.

При вычислении определителя третьего порядка первые три слагаемые суммы снабжены знаком плюс и получены перемножением элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников, обозначенных на схеме 1.



Схема 1

Слагаемые определителя, снабженные знаком минус, вычисляются перемножением элементов, стоящих на вспомогательной диагонали и в вершинах треугольников со стороны, параллельной вспомогательной диагонали (схема 2).

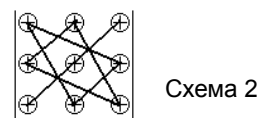


Схема 2

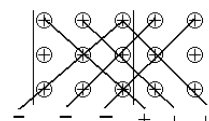


Схема 3

Определитель третьего порядка можно вычислить, если дописать к нему справа два его первых столбца, а затем перемножить элементы и сложить со знаками плюс или минус, как показано на схеме 3.

Свойства определителей (в справедливости указанных свойств определителей можно убедиться проверкой).

1. Определитель равен нулю, если:

- строка или столбец состоят из нулей;
- имеется два одинаковых ряда (две строки или два столбца);
- элементы параллельных рядов пропорциональны.

Например, пусть задан определитель с двумя одинаковыми столбцами:

17

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0. \quad \text{Свойство справедливо.}$$

2. При умножении определителя на некоторое число k элементы одного ряда

$$\text{нужно умножить на это число: } k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$= ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель не изменится, если:

- параллельные ряды поменять местами чётное число раз;
- строки сделать столбцами, а столбцы - строками (такая операция называется транспонированием определителя);
- к элементам одного ряда прибавить элементы другого ряда, умноженные на одно и то же число. Последнее свойство широко применяется при преобразованиях определителей с целью «обнуления» его элементов.

Например, задан определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$



Умножим первую строку на (-2) и прибавим её ко второй строке. Затем умножим первую строку на (-3) и прибавим её к третьей строке. В результате получим определитель с тремя нулевыми элементами:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4-4 & -2-2 & 5-6 \\ 6-6 & 3-3 & 7-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

1.5 Минор, алгебраическое дополнение, разложение определителя по элементам ряда

Минором M_{ij} элемента a_{ij} данного определителя называется определитель, полученный из данного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} . Здесь i - номер строки, j - номер столбца.

Например, для элемента a_{13} определителя (1.4) минор имеет вид:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$ в степени, равной сумме номеров строки и столбца:

18

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (1.5)$$

Каждый определитель может быть вычислен как сумма произведений элементов какого-либо ряда на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} \quad (1.6)$$

Здесь приведено вычисление определителя в двух вариантах: по элементам первой строки и по элементам второго столбца.

Формула (1.6) называется разложением определителя по элементам ряда.

Примечание – сумма произведений элементов одного ряда на алгебраические дополнения параллельного ряда всегда равна нулю. В этом легко убедиться на примере определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Для него $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$.

Тогда $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} = a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} = 0$.

1.9 Метод Гаусса

Метод Гаусса – универсальный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Он в отличие от выше рассмотренных методов может быть использован и при решении систем, когда число неизвестных не равно числу уравнений. Метод состоит из двух этапов. При «прямом ходе» последовательно уменьшают количество неизвестных в уравнениях системы. При этом можно каждое уравнение умножать на число, не равное нулю, складывать и переставлять уравнения. При «обратном ходе» непосредственно вычисляются значения неизвестных.

Пример 1.5 Решить систему алгебраических уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение

При умножении уравнений на число, не равное нулю, сложении и перестановке уравнений все изменения происходят с коэффициентами уравнений и свободными членами, поэтому для решения достаточно записать матрицу из коэффициентов и свободных членов. Такая матрица называется *расширенной матрицей системы*.

Расширенная матрица системы это матрица, в которой к матрице системы справа добавлен столбец свободных членов. Для заданной системы уравнений расширенная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array} \right).$$

В первом столбце выбираем ведущий элемент (помечен сверху волнистой чертой), с помощью которого «обнуляем» элементы первого столбца. Умножив первую строку на (-2), прибавим её ко второй строке. Умножив первую строку на (-3), прибавим её к третьей строке. Этим добиваемся того, что в первом столбце элементы ниже первого равны нулю. Затем выбираем во второй

строке ведущий элемент (коэффициент $-\tilde{5}$), с помощью которого «обнуляем» элемент, стоящий во втором столбце внизу. Для этого умножаем вторую строку на (-1) и прибавляем её к третьей строке. Результат вычислений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 0 & -\tilde{5} & 5 & 20 \\ 0 & -5 & 11 & 32 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -9 \\ 0 & -5 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array} \right).$$

На этом прямой ход метода Гаусса закончен, система уравнений приняла треугольный вид:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ -5x_2 + 5x_3 = 20, \\ 6x_3 = 12. \end{cases}$$

Из последнего уравнения определяем $x_3 = 2$ и подставляем это значение во второе уравнение, получим $x_2 = -2$. Из первого уравнения определяем $x_1 = -9 + 2x_3 - 3x_2 = -9 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

1.10 Указание к выполнению задания 2. Применение линейных систем алгебраических уравнений в экономических расчетах

В задании 2 требуется найти решение линейной определенной системы алгебраических уравнений третьего порядка одним из методов: с помощью обратной матрицы, с помощью правила Крамера или методом Гаусса.

Пример решения системы с помощью обратной матрицы рассмотрен в §1.5; пример решения системы с помощью правила Крамера рассмотрен в §1.6. Если Вы выберете для решения системы метод Гаусса, то внимательнее изучите §1.7.

Системы линейных алгебраических уравнений широко используются в расчетах, в том числе экономических [3].

Пусть обувная фабрика выпускает изделия трех видов: сапоги, кроссовки и ботинки; при этом используется сырье трех типов: s_1 , s_2 , s_3 . Норма расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расхода сырья на один день заданы таблицей:

Таблица 1 – норма расхода сырья

Вид сырья	Расход сырья на одну пару обуви, усл. ед.			Расход сырья на один день
	сапоги	кроссовки	ботинки	
s_1	2	3	2	86
s_2	2	2	3	89
s_3	3	4	1	98

Ставится задача: определить ежедневный объем выпуска каждого вида обуви, при условии строгого выполнения норм расхода сырья. Решение такой задачи сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений, где неизвестные x_1 , x_2 , x_3 – ежедневный объем выпуска каждого вида обуви, коэффициенты при неизвестных и правые части – нормы расхода сырья из таблицы 1:



$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 86, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 89, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 98. \end{cases}$$

Решение системы одним из методов: $x_1 = 15$, $x_2 = 10$, $x_3 = 13$.

1.11 Ранг матрицы, Критерий совместности систем линейных алгебраических уравнений

Пусть в матрице A размера $n \times m$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \leq \min(n, m)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k , определитель которой называется *минором k -го порядка матрицы A* .

Например, в матрице A имеются миноры 1-го, 2-го и 3-го порядков:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_1 = |2| = 2, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4, \quad \text{и т.д.},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 12 & 11 & 10 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \end{vmatrix}, \quad \text{и т.д.}$$

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется её *рангом*, а любой минор порядка r , отличный от нуля, называется *базисным*. Ранг матрицы A обозначается $RangA$.

Пример 1.6 Определить ранг матрицы B ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица имеет один минор 3-го порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Минор M_3 равен нулю, так как элементы первой и третьей строк пропорциональны.

Миноров второго порядка несколько. Некоторые из них не равны нулю:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0.$$

Следовательно, ранг матрицы равен двум.

Ответ: $RangB = 2$.

Примечание – в примере 1.6 ранг матрицы определяется простым перебором миноров. Однако существуют специальные методы определения ранга матрицы, например, метод элементарных преобразований, и другие.

С понятием ранга матрицы связан критерий существования решений общих линейных систем алгебраических уравнений. Под общими системами понимаются системы, в которых число уравнений может не совпадать с числом неизвестных, а также такие системы, в которых определитель матрицы системы равен нулю.

Будем рассматривать общую систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Матрица системы A состоит из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Если в матрице системы добавить столбец свободных членов, то полученную матрицу называют *расширенной матрицей системы $\bar{A}$* :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Критерий существования решений системы (1.16) или, иначе, критерий совместности системы выражен *теоремой Кронекера – Капелли*.

Теорема. Система уравнений (1.16) совместна (имеет решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $\bar{A}$.

Следствие теоремы Кронекера – Капелли: если $RangA < Rang\bar{A}$, то система (1.16) несовместна и решений не имеет.

Неравенство $RangA > Rang\bar{A}$ невозможно, так как добавление столбца в матрицу не может привести к уменьшению её ранга.

Примеры приложения теоремы Кронекера – Капелли

Пример 1.7 Решить систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$



Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Минор второго порядка матрицы

совпадает с её определителем и равен нулю: $M_2 = d(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$.

Миноры первого порядка не равны нулю, следовательно, $Rang A = 1$.

Расширенная матрица системы $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, следовательно, $Rang \bar{A} = 2$. Получили неравенство $Rang \bar{A} > Rang A$, система не имеет решения.

Пример 1.8 Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решение

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = d(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Leftrightarrow Rang A = 2$.

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 \neq 0 \Leftrightarrow Rang \bar{A} = 2$. Получили $Rang A = Rang \bar{A}$,

система совместна, и имеет решение. Кроме того, определитель системы $d(A) \neq 0$, по правилу Крамера система имеет единственное решение $x = 1,5$; $y = -0,5$.

Пример 1.9 Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + 2y = 2, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$$

Решение. В матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ и расширенной матрице $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ все

миноры второго порядка равны нулю, миноры первого порядка не равны нулю, следовательно, $Rang A = Rang \bar{A} = 1$. Система уравнений совместна, имеет решение, но правило Крамера здесь не применимо. Метод решения таких систем будет рассмотрен в третьем учебном семестре в курсе математического программирования.

2 Векторная алгебра и аналитическая геометрия

2.1 Векторы. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису

Геометрическим вектором называется направленный отрезок или упорядоченная пара точек (точка начала и точка конца вектора). Обозначается $\vec{a}$, $\vec{b}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Два геометрических вектора называются **коллинеарными**, если существует прямая линия, которой они параллельны.

Три геометрических вектора называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, одинаковой длины и направлены в одну сторону. Основываясь на этом определении, у вектора можно менять точку начала. Такие вектора называются **свободными**, перемещение векторов ничем не ограничено. При этом три компланарных вектора будут лежать в одной плоскости.

Длина вектора (модуль вектора) обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

2.1.1 Умножение вектора на число, сложение векторов

Умножение вектора на число и сложение векторов относятся к линейным операциям с векторами.

Умножение вектора на число

Результатом умножения вектора $\vec{a}$ на число k является вектор $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

При этом векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны и сонаправленные при $k > 0$ и направлены в разные стороны при $k < 0$. Длина полученного вектора $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$. Если $k = 0$, получается нулевой вектор (нуль-вектор $\vec{0}$), направление которого не определено. Если $k = -1$, то векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называют противоположными.

Свойства операции умножения вектора на число:

- 1) для любых чисел $k, t \in \mathbb{R}$ и вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- 2) если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то для любого коллинеарного ему вектора $\vec{b}$ существует только одно число k , такое, что $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Сложение векторов

Сложение двух векторов можно провести методом параллелограмма. При этом точки начала векторов совмещаются, на векторах достраивается параллелограмм. Диагональ параллелограмма – сумма векторов (рисунок 2.1).

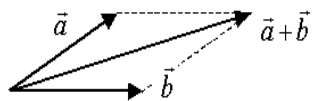


Рисунок 2.1 – Сумма векторов

При другом методе сложения двух векторов точка начала второго вектора помещается в конец первого вектора. Замыкающий вектор является суммой (рисунок 2.2). При сложении нескольких векторов строится векторный многоугольник, в котором замыкающий вектор является суммой (рисунок 2.3).

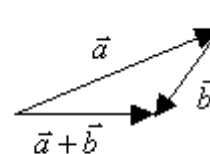


Рисунок 2.2 – Сложение двух векторов

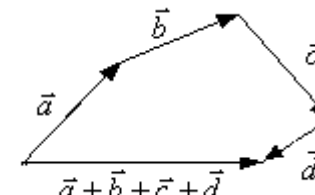


Рисунок 2.3 – Сложение нескольких векторов

Свойства операции сложения векторов:

- 1) операция обладает свойством коммутативности $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) сложение векторов ассоциативно $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
- 3) сложение дистрибутивно по отношению к умножению на число $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- 4) для любых чисел $k, t \in \mathbb{R}$ и вектора $\vec{a}$ выполняется равенство $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$.

2.1.2 Разложение вектора по базису

Задача разложения вектора по заданным направлениям возможна и имеет единственное решение для векторов на плоскости и для векторов в пространстве.

Векторы на плоскости. Два неколлинеарных упорядоченных вектора на плоскости образуют **базис**. Они линейно независимы, то есть ни один из них не может быть выражен через другой вектор. Любой третий вектор на плоскости единственным образом может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Частным случаем базиса на плоскости является пара векторов единичной длины, перпендикулярных друг другу. Они называются **ортами** и обозначаются $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Совокупность указанного базиса и выбранной точки О, из которой выходят орты – основа прямоугольных декартовых координат с осями Ох (ось абсцисс), Оу (ось ординат).

Совместим начало некоторого произвольного вектора $\vec{a}$ с точкой О (рисунок 2.4). Из конца вектора $\vec{a}$ проведем линии, параллельные направлениям векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$. В точках пересечения этих линий с осями Ох, Оу укажем концы вспомогательных векторов $\vec{a}_i$, $\vec{a}_j$. Вектор $\vec{a}$ – сумма вспомогательных векторов, так как он является диагональю параллелограмма:



$\vec{a} = \vec{a}_i + \vec{a}_j$ (рисунок 2.4). Векторы $\vec{a}_i, \vec{i}$ - коллинеарные, следовательно, существует единственное число a_x , такое, что $\vec{a}_i = a_x \cdot \vec{i}$. Аналогично, векторы $\vec{a}_j, \vec{j}$ - коллинеарные, следовательно, существует единственное

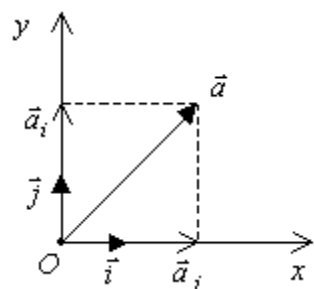


Рисунок 2.4 – Базис на плоскости

число a_y , такое, что $\vec{a}_j = a_y \cdot \vec{j}$. Из равенства $\vec{a} = \vec{a}_i + \vec{a}_j$ получим разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Числа a_x, a_y называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Векторы в пространстве

Базисом в пространстве называются три любых некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятых в определённом порядке.

Любой четвертый вектор $\vec{a}$ можно представить единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 \quad (2.1)$$

где α, β, γ называются координатами вектора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

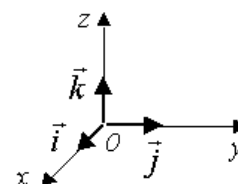
Вектор базиса нельзя выразить через другие векторы базиса в виде линейной их комбинации. Говорят, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы. Добавление любого четвёртого вектора $\vec{a}$ к базисным приводит к выполнению равенства (2.1); говорят, что система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{a}$ линейно зависима.

Частным случаем базиса в пространстве является тройка ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - векторов единичной длины, взаимно перпендикулярных друг другу. Совокупность указанного базиса и выбранной точки О, из которой выходят орты – основа прямоугольных декартовых координат с осями Ох (ось абсцисс), Оу (ось ординат), Oz (ось аппликата), (см. рисунок 2.5).

Каждый вектор можно спроектировать на оси координат. Разложение вектора по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. Здесь

a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат (координаты вектора).

Вывод – геометрический вектор на плоскости определяется однозначно двумя числами a_x, a_y , вектор в пространстве определяется тремя числами a_x, a_y, a_z



Если вектор задаётся двумя точками $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\vec{AB}$ определяются разностями координат конечной и начальной точек: $(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)$.

Рисунок 2.5 – Базис в пространстве. Оси координат
Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$ и вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.2)$$

Если вектор задан своими координатами, то при умножении вектора на число каждая координата умножается на это число:

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot a_x \cdot \vec{i} + k \cdot a_y \cdot \vec{j} + k \cdot a_z \cdot \vec{k}. \quad (2.3)$$

При сложении двух векторов складываются их координаты:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}. \quad (2.4)$$

Из свойства 2 операции умножения вектора на число и из формулы (2.3) следует **условие коллинеарности векторов**. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, если пропорциональны их координаты:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.5)$$

Пример 2.1 Вектор задан точкой начала $A(1; -4; 3)$ и точкой конца $B(3; 7; 1)$ в декартовой системе координат. Определить координаты вектора $\vec{AB}$ и его длину.

Решение. Координаты вектора $\vec{AB}$ определяем разностями координат конечной и начальной точек: $(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)$, а именно:

$$\vec{AB} = (3 - 1) \vec{i} + (7 - (-4)) \vec{j} + (1 - 3) \vec{k} = 2 \vec{i} + 11 \vec{j} - 2 \vec{k}.$$

Длину вектора определяем по формуле (2.2):

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 11^2 + (-2)^2} = \sqrt{129}.$$



2.2 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}). \quad (2.6)$$

Свойства скалярного произведения

1. При перестановке сомножителей произведение не изменится: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Это объясняется тем, что при перестановке скалярных множителей произведение не меняется $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$, а также тем, что косинус – функция чётная: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{b}, \vec{a})$.

2. Скалярный сомножитель (число m) можно вынести за знак произведения: $(m \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Это свойство – следствие свойства операции умножения вектора на число.

3. Скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой или векторы перпендикулярны (так как $\cos 90^\circ = \cos(-90^\circ) = 0$).

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (следует из того, что $\cos 0 = 1$).

5. Скалярное произведение обладает распределительным свойством: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}. \quad \text{В силу свойств 2, 3, 4, 5}$$

произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ можно вычислить как произведение многочлена на многочлен. С учетом того, что

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0,$$

$\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$, скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (2.7)$$

Из свойства 3 и формулы (2.7) следует **условие перпендикулярности двух векторов**:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (2.8)$$

Из формулы (2.6) следует формула для определения угла между векторами (с учетом формул (2.7) и (2.2)):

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.9)$$

Физическое приложение скалярного произведения. Если материальная точка, на которую действует сила $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$ движется по вектору $\vec{AB} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, то работа A силы $\vec{F}$ по перемещению точки по направленному отрезку $\vec{AB}$ равна скалярному произведению

$$A = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F_x \cdot a_x + F_y \cdot a_y + F_z \cdot a_z. \quad (2.10)$$

Пример 2.2 Вычислить работу силы $\vec{F}(2,3,5)$ при перемещении материальной точки из положения А(-2,0,-3) в положение В(1,4,-2). (Предполагаются согласованные единицы силы и перемещения).

Решение

Найдём координаты вектора $\vec{AB}$ как разность координат точки конца вектора и точки начала:

$$\vec{AB} = (1 - (-2))\vec{i} + (4 - 0)\vec{j} + (-2 - (-3))\vec{k}, \quad \vec{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}.$$

Работу вычисляем по формуле (2.10): $A = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 23$.

Ответ: $A=23$ (единиц работы).



2.3 Понятие линейного пространства. Арифметический вектор. Линейное пространство арифметических векторов

Одной из характерных черт геометрических векторов является возможность производить над ними линейные действия: складывать вектора и умножать вектор на число. Результатом линейной операции является также вектор. Такие действия можно производить и над другими объектами, например, над матрицами, многочленами.

Множество L называется *линейным пространством*, а его элементы – *векторами*, если:

- 1) задан закон (операция сложения), по которому для двух элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из множества L ($\bar{x}, \bar{y} \in L$) определено понятие суммы, принадлежащей множеству L , $(\bar{x} + \bar{y}) \in L$;
- 2) задан закон (операция умножения вектора на число), по которому для элемента $\bar{x} \in L$ и числа $\alpha \in R$ определено понятие произведения, принадлежащего множеству L , $\alpha \cdot \bar{x} \in L$.

34

Геометрические векторы – это один из примеров линейных пространств. Другим важным примером линейных пространств является *пространство арифметических векторов*.

Определение. Всякая упорядоченная совокупность из n действительных чисел называется *действительным арифметическим n -компонентным вектором*.

То, что совокупность из n чисел упорядочена, означает, что составляющие её числа пронумерованы. Арифметический вектор обозначается $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – компоненты вектора $\bar{x}$.

Над арифметическими векторами введены операции:

- 1) сложение двух векторов; если $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$;
- 2) умножение вектора на число; если $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\alpha \in R$, то $\alpha \cdot \bar{x} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$.

Определение. Множество всех арифметических n -компонентных векторов с введенными операциями 1) и 2) называется *вещественным пространством арифметических векторов* и обозначается R^n .

Система арифметических векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не все одновременно равные нулю, такие, что выполняется равенство:

$$\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k = \bar{0}. \quad (2.11)$$

Если равенство (2.11) выполняется только, когда все числа равны нулю, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, система векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$ называется *линейно независимой*.

Пусть Q – произвольное множество (может быть и конечное) арифметических n -компонентных векторов. Система векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$ называется *базисом* множества Q , если выполняются следующие условия: $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\} \in Q$; система $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$ линейно независима; для любого вектора $\bar{y} \in Q$ найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, такие, что вектор $\bar{y}$ будет представлен линейной комбинацией векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$, а именно,

$$\bar{y} = \lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k \quad (2.12)$$

Формула (2.12) называется разложением вектора $\bar{y}$ по базису $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$. Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ однозначно определяются вектором $\bar{y}$, и называются координатами этого вектора в базисе $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$.

Справедливы следующие утверждения:

– всякая система векторов $Q \subset R^n$ имеет хотя бы один базис; при этом все базисы системы состоят из одинакового числа векторов, это число называется *рангом* системы Q , и обозначается $\text{rang} Q$;

– ранг всего пространства R^n равен n и называется размерностью этого пространства.

Пример 2.3 Проверить, являются ли векторы $(5, 2)$ и $(3, -2)$ линейно независимыми.

Решение

Предположим, что указанные векторы линейно зависимые, и при $\lambda_2 \neq 0$ выполняется равенство:



$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = -\lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Обозначим}$$

$$k = \frac{\lambda_1}{-\lambda_2}. \text{ Тогда } k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Последнее равенство не выполняется при}$$

любом значении k . Такой же вывод получим, если предположим, что $\lambda_1 \neq 0$.

Следовательно, векторы $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ линейно независимы. Так как два

двухкомпонентных вектора линейно независимы, они составляют базис в пространстве R^2 , любой вектор из R^2 можно представить линейной комбинацией векторов базиса, например,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

В качестве базиса R^n можно взять систему векторов, каждый из которых имеет компонентой одну единицу и $(n-1)$ нулей:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \bar{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{e}_n &= (0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Этот базис называется *каноническим*.

Всякий вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно записать его разложением в каноническом базисе следующим образом:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n,$$

то есть, *координатами вектора $\bar{x}$ в каноническом базисе являются его компоненты*.

Пример 2.4 Представить вектор $\bar{a} = (3, 5, -7)$ разложением в каноническом базисе.

$$\begin{aligned} &\text{Решение} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4 Скалярное произведение, норма, ортогональность арифметических векторов

Линейное пространство L называется *евклидовым пространством*, если введено понятие скалярного произведения любых двух его элементов.

Также как для пространства (множества) геометрических векторов понятие скалярного произведения введено для пространства арифметических векторов.

Скалярным произведением двух арифметических векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется число, равное сумме произведений компонент

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (2.14)$$

В евклидовом пространстве введено понятие нормы вектора, которое обобщает понятие длины геометрического вектора на иные векторы евклидова пространства. Норма вектора $\bar{x} \in L$ обозначается $\|\bar{x}\|$ и вычисляется для

пространства R^n формулой

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Вектор, норма которого равна единице, $\|\bar{x}\| = 1$, называется *нормированным*.

Норма вектора обладает следующими свойствами (аксиомами):

- 1) $\|\bar{x}\| > 0$, если $\bar{x} \neq \bar{0}$; $\|\bar{x}\| = 0$, если $\bar{x} = \bar{0}$;
- 2) если $\alpha \in R$, $\|\alpha \cdot \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$;
- 3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

Если для двух векторов $\bar{x}, \bar{y} \in L$ скалярное произведение равно нулю, то они называются *ортогональными*. Понятие ортогональности обобщает понятие перпендикулярности геометрических векторов.

Условием ортогональности векторов пространства R^n является равенство:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0.$$

Например, векторы канонического базиса

$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$... $\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ попарно ортогональны и нормированы (норма каждого вектора равна единице).

Скалярное произведение арифметических векторов имеет **экономический смысл**. Если $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор объемов различных товаров, а $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ - вектор их цен, то скалярное произведение $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ выражает суммарную стоимость этих товаров.



2.5 Пример выполнения задания 3

Задание 3. Задан вектор объемов различных товаров $\bar{x} = (3; 5; 16; 10; 7)$ и вектор их цен в гривнах $\bar{y} = (1; 5; 3,5; 10,3; 5)$. Определить суммарную стоимость этих товаров.

Решение

Суммарная стоимость товаров равна скалярному произведению арифметических векторов объемов товаров и их цен:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 16 \cdot 3,5 + 10 \cdot 10,3 + 7 \cdot 5 = 222 \text{ (гривны)}$$

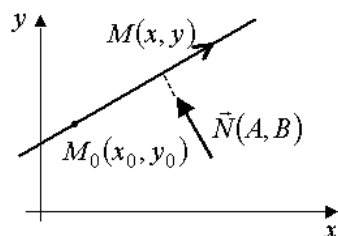
2.6 Уравнения прямой линии на плоскости, преобразования уравнения прямой, условия параллельности и перпендикулярности прямых

Уравнения прямой линии на плоскости можно получить как из условия перпендикулярности векторов, так и из условия коллинеарности векторов.

Общее уравнение прямой линии и его следствия

Положение прямой на плоскости однозначно определяет точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая прямой линии и вектор $\vec{N}(A, B)$, перпендикулярный прямой (см. рисунок 2.6). Векторы $\vec{N}(A, B)$ и $\vec{M_0M}$ перпендикулярны (точка $M(x, y)$ - переменная точка прямой). Запишем условие перпендикулярности векторов, которое выражается в равенстве нулю их скалярного произведения:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2.15)$$



Полученное уравнение (2.15) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору*. Если в этом уравнении раскрыть скобки и постоянное слагаемое обозначить $C = -Ax_0 - By_0$, то получим уравнение

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.16)$$

Рисунок 2.6 – Прямая на плоскости

Уравнение (2.16) называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Важно, что в общем уравнении прямой коэффициенты при переменных x, y являются координатами нормального (перпендикулярного прямой) вектора. Например, если задано уравнение прямой $4x - 3y + 7 = 0$, то ей перпендикулярен вектор $\vec{N}(4; -3)$.

Если в общем уравнении прямой выразить y через x , то получим уравнение вида ($B \neq 0$; $k = -A/B$; $b = -C/B$)

$$y = kx + b, \quad (2.17)$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. В этом уравнении угловой коэффициент k равен тангенсу угла, который составляет прямая с положительным направлением оси Ox : $k = \tan \alpha$.

Если в общем уравнении прямой $B = 0$, $A \neq 0$, то получим уравнение прямой, проходящей перпендикулярно оси Ox (обозначим $a = -C/A$):

$$x = a.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом:

$$y = y_0 + k(x - x_0). \quad (2.18)$$

Уравнение прямой в отрезках на осях:

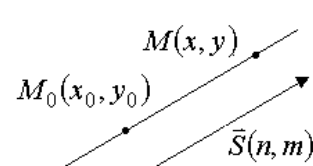
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.19)$$

Здесь a, b -- отрезки, отсечённые прямой на осях Ox, Oy .

Каноническое уравнение прямой

Положение прямой на плоскости однозначно определяет точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая прямой линии и вектор $\vec{S}(n, m)$, параллельный прямой. Вектор $\vec{S}(n, m)$ называется направляющим вектором

(см. рисунок 2.7). Запишем условие коллинеарности векторов $M_0\vec{M}$ и



$\vec{S}(n, m)$.

Условие коллинеарности векторов заключается в том, что их одноименные координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (2.20)$$

Рисунок 2.7 – Прямая на плоскости

Уравнение (2.20) называется *каноническим*.

Если в качестве направляющего вектора выбрать две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, принадлежащие прямой, то из (2.20) получим *уравнение прямой, проходящей через две точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.21)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

Пусть заданы две прямые линии на плоскости уравнениями

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{или} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

$$y = k_2x + b_2 \quad \text{или} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Условия параллельности прямых:

$$k_1 = k_2 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (2.22)$$

Условия перпендикулярности прямых:



$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad \text{или} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (2.23)$$

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.24)$$

2.7 Пример выполнения задания 4

Задание 4. Даны две точки на плоскости: $M(-2; 1)$, $P(3; 7)$.

Требуется:

- 1) определить общее уравнение прямой линии MP ;
- 2) найти расстояние от начала координат до прямой MP ;
- 3) построить прямую MP на плоскости, а также построить вектор нормали к прямой MP с началом в точке $O(0; 0)$.

Решение

1) Так как прямая задана двумя точками, для определения её уравнения используем уравнение прямой, проходящей через две точки: (2.21)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\text{Для прямой } MP: \frac{x - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{y - 1}{7 - 1}, \quad \frac{x + 2}{5} = \frac{y - 1}{6}, \quad 6x + 12 = 5y - 5.$$

Окончательно, общее уравнение прямой линии MP : $6x - 5y + 17 = 0$

2) Расстояние от начала координат до прямой MP определяем по формуле

$$(2.24): \quad \rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad \text{Здесь } x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad A, B -$$

коэффициенты при переменных x, y в общем уравнении прямой MP . Таким

$$\text{образом, } \rho = \frac{|6 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 17|}{\sqrt{6^2 + (-5)^2}} = \frac{|17|}{\sqrt{61}} = \frac{17}{\sqrt{61}}.$$

3) Координаты вектора нормали $\vec{N}(6; -5)$ к прямой MP равны коэффициентам при переменных x, y в общем уравнении прямой MP .

Первую координату откладываем по оси Ox , а вторую координату откладываем по оси Oy (с учетом из знаков). В точку пересечения

перпендикуляров из поставленных точек на осях координат проводим вектор $\vec{N}(6; -5)$ из начала координат. Прямая MP и вектор нормали $\vec{N}(6; -5)$ построены на рисунке 2.8.

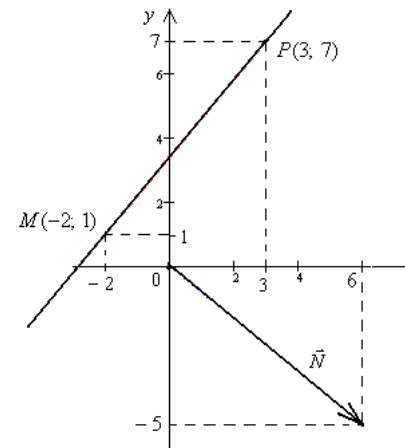


Рисунок 2.8 – Прямая и вектор нормали в задании 4

2.8 Уравнения плоскости в пространстве

В пространстве с заданной декартовой системой координат однозначное расположение плоскости можно задать различными способами, существуют различные уравнения плоскости в пространстве.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой. Тогда через них можно провести плоскость, причем только одну. Пусть в этой же плоскости лежит точка $M(x, y, z)$ с текущими координатами. Тогда уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.25)$$

Пример 2.7 Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,2,0)$, $B(3,-2,5)$, $C(0,-3,6)$.

Решение

Считая точку A - первой, точку B - второй, точку C - третьей точкой, подставим координаты точек в уравнение (2.25).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 3-1 & -2-2 & 5 \\ -1 & -3-2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1) - (y-2) \cdot 17 + z \cdot (-14) = 0, \quad x - 17y - 14z + 33 = 0.$$

После вычисления определителя получили уравнение плоскости, линейное относительно переменных x, y, z .

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{N}(A, B, C)$

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Пусть точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости.

Прямая линия M_0M и вектор $\vec{N}$ перпендикулярны друг другу. Тогда и $M_0\vec{M} \perp \vec{N}$. Запишем условие перпендикулярности векторов $M_0\vec{M}$ и $\vec{N}$ и получим уравнение плоскости:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.26)$$

Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (2.26) раскрыть скобки и обозначить свободный член через D , получим **общее уравнение плоскости**:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.27)$$

Таким образом, в примере 2.7 после преобразований получено общее уравнение плоскости.

Если в общем уравнении (2.27) один из коэффициентов A, B, C равен нулю, то плоскость проходит параллельно соответствующей оси. Если два коэффициента из A, B, C равны нулю, плоскость параллельна одной из координатной плоскости. Например, плоскость $4x - 5z - 1 = 0$ проходит параллельно оси Oy , плоскость $y + 3 = 0$ проходит параллельно координатной плоскости xOz через точку $y = -3$ на оси Oy . Коэффициенты A, B, C в общем уравнении являются одновременно координатами вектора, перпендикулярного плоскости.

Разделив уравнение (2.27) на $(-D)$, получим **уравнение плоскости в отрезках**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.28)$$

Здесь a, b, c - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат. Например,

плоскость $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{1} = 1$ пересекает оси координат в точках $x = 2, y = -3, z = 1$.

Условия перпендикулярности и параллельности двух плоскостей

Две плоскости перпендикулярны (параллельны) друг другу, если перпендикулярны (параллельны) их векторы нормали. Поэтому, если даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то **условие перпендикулярности плоскостей**:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \quad (2.29)$$

условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.30)$$

Угол между плоскостями можно определить по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.31)$$

2.9 Уравнения прямой в пространстве

Положение прямой линии в пространстве однозначно определяет точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит прямая и вектор $\vec{S}(n, m, p)$, параллельный прямой. Такой вектор называется **направляющим** вектором. Создадим вектор $\vec{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, где $M(x, y, z)$ - принадлежащая



прямой линии точка с переменными координатами. Векторы $\vec{S}$ и $\vec{M_0M}$ коллинеарные. Запишем условие коллинеарности векторов, которое выражается в пропорциональности их соответствующих координат:

$$\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}. \quad (2.32)$$

Полученные уравнения называются *каноническими* уравнениями прямой в пространстве. В частном случае, когда прямая линия и направляющий вектор лежат в плоскости xOy , координата по оси z отсутствует, получим каноническое уравнение прямой на плоскости (см. параграф 2.6):

$$\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m}.$$

Если направляющий вектор задан двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые проходит прямая линия, то векторы $\vec{M_1M_2}$ и $\vec{M_1M}$ - коллинеарные. Из условия коллинеарности указанных векторов получим *уравнения прямой, проходящей через две точки*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (2.33)$$

Обозначим параметром t каждую дробь в уравнениях (2.32): $\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p} = t$. Отсюда получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in (-\infty; \infty); \quad (2.34)$$

Условия перпендикулярности и параллельности двух прямых

Две прямые линии в пространстве, заданные каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{n_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{n_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ будут параллельны,

если соответствующие направляющие векторы коллинеарные: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Две прямые перпендикулярны, если перпендикулярны направляющие векторы: $n_1n_2 + m_1m_2 + p_1p_2 = 0$.

Условия перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости

Пусть задана плоскость (p) $Ax + By + Cz + D = 0$, нормальный вектор которой $\vec{N}(A, B, C)$, и прямая L в пространстве

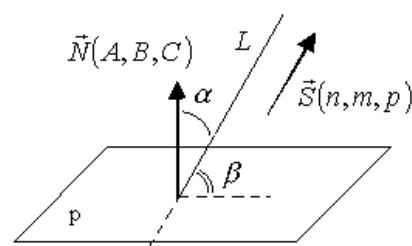


Рисунок 2.9 – Прямая и плоскость

Если прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{S}$ коллинеарные:

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}.$$

Если прямая параллельна плоскости, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{S}$ перпендикулярные:

$$A \cdot n + B \cdot m + C \cdot p = 0.$$

Угол β между прямой и плоскостью можно определить по формуле:

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{|An + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{n^2 + m^2 + p^2}}. \quad (2.35)$$

3 ПРЕДЕЛЫ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Понятие предела бесконечной числовой последовательности и предела функции лежит в основе всей теории дифференциального и интегрального исчисления.

3.1 Предел бесконечной числовой последовательности

Бесконечной числовой последовательностью называется совокупность чисел, каждому из которых присвоен определённый порядковый номер $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Числовая последовательность задаётся общим членом x_n , записанным в виде функции номера: $x_n = f(n)$. Например, последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ задаётся её общим членом $x_n = \frac{1}{n}$.

Число a называется пределом последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε (ипсilon) найдётся такое положительное число N , что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

В этом случае пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

(Читается: предел последовательности равен a при n стремящемся к бесконечности).

Числовая последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называется *бесконечно малой*, если её предел при $n \rightarrow \infty$ равен нулю. Так, числовая последовательность с общим членом $1/n$ является бесконечно малой.

Числовая последовательность называется *бесконечно большой*, если для каждого сколь угодно большого положительного числа M можно указать такое число $N(M) > 0$, что для всех значений $n > N(M)$ выполняется неравенство $|x_n| > M$. В этом случае пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Примером бесконечно большой последовательности является последовательность натуральных чисел $1, 2, \dots, n, \dots$. Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

Предел постоянной величины $x_n = C$ равен самой этой величине, так как неравенство $|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ выполняется при любых $\varepsilon > 0$.

Не всякая числовая последовательность имеет предел, например, последовательность с общим членом $x_n = 1 - (-1)^n$. Последовательность имеет вид: $2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots$. С ростом номера члены числовой последовательности не приближаются к какому-то одному числу, для них нельзя указать число a , для которого выполнялось бы неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$.

3.2 Предел функции при $x \rightarrow a$

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ (при x стремящемся к a), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε (ипсilon) найдётся такое число (дельта) $\delta > 0$, величина которого зависит от ε , что при всех x , не равных a и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Это записывается так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Из определения предела следует:

- 1) закон, по которому изменяется переменная x при $x \rightarrow a$ - произвольный; x может оставаться по одну сторону от точки a , но может и колебаться относительно этой точки;
- 2) при любом законе изменения $x \neq a$.

Если $x \rightarrow a$ и при этом $x < a$, то пишут $x \rightarrow a - 0$. Если $x \rightarrow a$ и при этом $x > a$, то пишут $x \rightarrow a + 0$. В этом случае предел

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$ называется левосторонним, предел $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$ называется правосторонним. Для существования предела функции при $x \rightarrow a$ необходимо и достаточно, чтобы $b_1 = b_2$.

Условно записывают $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > A$ при

$0 < |x - a| < \delta$, где A - произвольное большое положительное число. В этом случае функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow a$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$.



3.3 Предел функции при $x \rightarrow \infty$

Число b называется пределом функции при $x \rightarrow \infty$, если для любого малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M , величина которого зависит от ε , что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Записывается так: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Условно записывают $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > A$ при $|x| > M$, где

A - произвольное большое положительное число.

В этом случае функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow \infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow \infty$.

3.4 Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин

Свойства бесконечно малых величин представлены следующими теоремами.

Теорема 1. О связи между пределами и бесконечно малыми

а) Если переменная величина $f(x)$ стремится к конечному пределу b , то разность между нею и её пределом есть бесконечно малая величина $\alpha(x)$.

б) Обратно, если переменная величина $f(x)$ равна сумме некоторой постоянной величины b и величины бесконечно малой, то эта постоянная величина есть предел переменной $f(x) : \lim f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x)$.

Теорема 2. О сумме бесконечно малых величин

Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой величиной.

Теорема 3. О произведении с бесконечно малой величиной

Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является величиной бесконечно малой.

Следствия теоремы:

- 1) произведения бесконечно малых являются бесконечно малыми;
- 2) произведение бесконечно малой и постоянной величины является величиной бесконечно малой;
- 3) любая натуральная степень бесконечно малой – бесконечно малая.

Теорема 4. О связи бесконечно малых и бесконечно больших

Бесконечно большие функции $A(x)$ и бесконечно малые $\alpha(x)$ связаны между собой равенством (при $x \rightarrow a$ или при $x \rightarrow \infty$)

$$\lim \alpha(x) = \lim \frac{1}{A(x)}. \quad (3.1)$$

Обратное равенство справедливо, если при изменении бесконечно малой $\alpha(x)$ она не принимает значений, равных нулю:

$$\lim A(x) = \lim \frac{1}{\alpha(x)}. \quad (3.2)$$

Условно связи (3.1) и (3.2) можно выразить так: $0 = \frac{1}{\infty}$, $\infty = \frac{1}{0}$.

Свойства бесконечно больших величин рассматриваются как следствия теорем 2, 3, 4 о бесконечно малых.

- 1) сумма бесконечно большой и постоянной (или ограниченной величины $z(x)$) есть величина бесконечно большая;
- 2) произведение бесконечно большой и постоянной (или бесконечно большой) – величина бесконечно большая.

48

Условно указанные свойства можно выразить так: $\infty + C = \infty$; $\infty + z(x) = \infty$; $\infty \times C = \infty$; $\infty \times \infty = \infty$. Иные случаи сочетания бесконечно

больших и бесконечно малых функций, а именно, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$,

называются неопределенностями. Раскрытие неопределенностей – основная сложность при вычислении пределов.

3.5 Свойства пределов

Свойства пределов справедливы как для пределов числовых последовательностей, так и для пределов функций. Свойства справедливы как для $x \rightarrow a$, так и для $x \rightarrow \infty$.

1. Предел суммы переменных равен сумме их пределов

$$\lim(f + g) = \lim f + \lim g.$$

2. Предел произведения переменных равен произведению их пределов

$$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g.$$

3. Предел дроби двух переменных равен дроби их пределу, если предел делителя отличен от нуля.



$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}, \text{ если } \lim g \neq 0.$$

4. Постоянный множитель выносится за знак предела
 $\lim C \cdot f = C \cdot \lim f$.

5. Предел постоянной равен самой постоянной, $\lim C = C$, где $C = \text{const}$.

3.6 Два замечательных предела

Первым замечательным пределом называют предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3.3)$$

Замечателен он тем, что раскрывает неопределенность вида $\frac{0}{0}$, возникающую

при вычислении пределов тригонометрических выражений.

Второй замечательный предел имеет несколько формулировок:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\dots,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e = 2,71828\dots \quad (3.4)$$

Число $e = 2,7182818284\dots$ называется числом Непера. Оно лежит в основании натуральных логарифмов, показательной функции e^x . Это иррациональное число, имеющее в математике значение не менее важное, чем число «пи».

Сам же предел замечателен тем, что раскрывает неопределенность вида $(1)^\infty$, так как выражение в скобках стремится к единице. Доказательство замечательных пределов можно изучить в литературе [1].

3.7 Пример выполнения задания 5

Задание 5. Найти пределы числовых последовательностей (в пункте б используйте второй замечательный предел):

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 6}{n^2 + 2n - 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

а) В задачах этого пункта имеет место неопределенность вида ∞/∞ . Чтобы раскрыть неопределенность вида ∞/∞ , нужно разделить числитель и

знаменатель на наивысшую степень переменной, входящую в выражение. В результате, если многочлены числителя и знаменателя одинаковой степени, предел равен отношению старших коэффициентов числителя и знаменателя. Если в числителе степень многочлена выше, чем в знаменателе, то предел равен бесконечности. Если степень числителя ниже степени знаменателя, то предел равен нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 6}{n^2 + 2n - 7}. \text{ При } n \rightarrow \infty \text{ числитель и знаменатель дроби -}$$

бесконечно большие величины, неопределенность вида ∞/∞ . Для раскрытия неопределенности разделим числитель и знаменатель на наибольшую степень переменной, то есть, разделим на n^2 .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 6}{n^2 + 2n - 7} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3/n + 6/n^2}{1 + 2/n - 7/n^2} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n + 6 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n - 7 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2} = \frac{2 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0 - 7 \cdot 0} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

б) Вычисляя предел от выражения, стоящего в скобках, получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-3/x}{1+2/x}\right) = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

В то же время, показатель степени выражения стремится к бесконечности.

Таким образом, в пределе б) имеет место неопределенность вида $(1)^\infty$. Для вычисления предела преобразуем выражение так, чтобы выделить в нем второй замечательный предел.

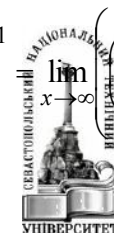
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+2)-5}{x+2}\right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x+2}\right)^{2x+1}.$$

При $x \rightarrow \infty$ выражение $\frac{-5}{x+2} \rightarrow 0$, поэтому преобразуем выражение к

формулировке второго замечательного предела в виде

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x+2}\right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-5} \cdot \frac{-5(2x+1)}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-10x-5}{x+2}} =$$



$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x-5}{x+2}} = e^{-10}.$$

Ответ: а) 2; б) e^{-10} .

3.8 Сравнение бесконечно малых функций

Большую роль в математическом анализе имеет дробь двух бесконечно малых величин. Предел дроби может иметь разные значения. Всего существует четыре разных случая для предела дроби бесконечно малых величин $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой *высшего*

порядка малости по сравнению с $\beta(x)$, при этом $\beta(x)$ - бесконечно малая *низшего порядка малости* по сравнению с $\alpha(x)$.

2. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой *низшего*

порядка малости по сравнению с $\beta(x)$, при этом $\beta(x)$ - бесконечно малая *высшего порядка малости* по сравнению с $\alpha(x)$.

3. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = q \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми *одного порядка малости*.

В частном случае, две бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*, если предел их дроби равен единице:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

4. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется *несравнимыми* бесконечно малыми.

3.9 Эквивалентные бесконечно малые величины

Две бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*, если предел их дроби равен единице: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Запись $\alpha \sim \beta$ означает, что α и β - эквивалентные бесконечно малые величины. Эквивалентные бесконечно малые величины обладают рядом свойств, которые описываются следующими теоремами.

Теорема 1. Две бесконечно малые α и β , эквивалентные порознь третьей бесконечно малой γ , эквивалентны между собой.

Теорема 2. Разность $\alpha - \beta$ двух эквивалентных бесконечно малых является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с каждой из них.

Теорема 3. Предел дроби двух бесконечно малых сохраняет своё значение при замене этих бесконечно малых их эквивалентными.

Теорема 4. Сумма бесконечно малых различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка малости.

Слагаемое, эквивалентное всей сумме бесконечно малых, называется *главной частью суммы*. Замена суммы её главной частью называется «отбрасыванием» бесконечно малых высшего порядка малости.

При вычислении пределов используют эквивалентность следующих бесконечно малых: если $\alpha(x) \rightarrow 0$, то справедлива следующая таблица соотношений.

- | | |
|---|--|
| 1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$. | 5. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$. |
| 2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$. | 6. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$. |
| 3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$. | 7. $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \cdot \log_a e$. |
| 4. $\arctg \alpha(x) \sim \alpha(x)$. | 8. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$. |

Кроме того, сумма бесконечно малых эквивалентна бесконечно малой низшего порядка малости, входящей в сумму. Так при $x \rightarrow 0$

$$x^3 + 5x^2 + 8x \sim 8x.$$

3.10 Пример выполнения задания 6

Задание 6. Найти пределы функций (в пункте а) используйте первый замечательный предел, в пункте б используйте эквивалентность бесконечно малых величин).

а) Примеры вычисления пределов с помощью первого замечательного

предела: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{4x}$.

Решение

Вычисляя числитель и знаменатель заданных пределов при $x = 0$, получаем неопределённость вида $0/0$.



$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \left(\text{если } 2x = t, \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}. \text{ Умножив числитель и знаменатель на 2,}$$

получили первый замечательный предел.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{2}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{5}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{4x} = \left(\begin{array}{l} \text{поскольку } t = \arcsin 3x, \\ \sin t = 3x, x = 1/3 \cdot \sin t, \\ x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right) =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{4/3 \cdot \sin t} = \frac{3}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{3}{4}.$$

б) Используя эквивалентность бесконечно малых величин, вычислить пределы: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-2x} - 1)}{(x^4 + 2x^3 - x)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 + 5x)}$.

Решение

При $x \rightarrow 0$ величины $3x \rightarrow 0$, $-2x \rightarrow 0$, $5x \rightarrow 0$. Алгебраическая сумма бесконечно малых $x^4 + 2x^3 - x$ эквивалентна бесконечно малой низшего порядка малости $(-x)$. В числителе и знаменателе дробей – бесконечно малые величины. Согласно теореме 3, предел дроби двух бесконечно малых сохраняет своё значение при замене этих бесконечно малых им эквивалентными. Вычисляем пределы, заменяя бесконечно малые величины им эквивалентными.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-2x} - 1)}{(x^4 + 2x^3 - x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 + 5x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

3.11 Непрерывность функции

Понятие о непрерывности функции в точке является одним из основных понятий математического анализа. Существует несколько тождественных

определений о функции, непрерывной в точке. В различных случаях целесообразно использование разных определений непрерывности.

Определение 1 (базовое). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если она определена в этой точке и её окрестности, и если существует конечный предел при $x \rightarrow a$, равный значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если: 1) функция определена в этой точке и её окрестности; 2) существуют конечные односторонние пределы при $x \rightarrow a$, равные между собой; 3) пределы равны значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a). \quad (3.5)$$

Данное определение удобно использовать при исследовании функций на непрерывность.

Функция непрерывна в интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$.

Если не выполняется одно из условий непрерывности функции в точке, то эта точка является точкой разрыва. В зависимости от того, какие значения принимают односторонние пределы в точке разрыва, различают точки разрыва 1-го и 2-го рода. Точки разрыва 1-го рода: точки устранимого разрыва ($f(a-0) = f(a+0)$); точки скачка, когда конечные односторонние пределы не равны между собой. В точках разрыва 2-го рода, односторонние пределы не существуют или равны бесконечности.

3.12 Пример выполнения задания 7

Задана функция $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$. Найти точку разрыва функции и исследовать её характер.

Решение

Заданная функция определена при всех значениях аргумента, кроме $x = 3$. Поэтому $x = 3$ – точка разрыва функции. Определяем односторонние пределы в точке разрыва.

Пусть $x \rightarrow 3$ слева, т.е. выполняется неравенство $x < 3$. Тогда разность $x - 3 < 0$ – отрицательная бесконечно малая величина. Выражение $\frac{1}{x-3}$ в



этом случае – бесконечно большая отрицательная величина. Левосторонний

предел:
$$\lim_{x \rightarrow 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0.$$

Пусть теперь $x \rightarrow 3$ справа, т.е. выполняется неравенство $x > 3$. Тогда разность $x - 3 > 0$ – положительная бесконечно малая величина. Выражение

$\frac{1}{x-3}$ в этом случае – бесконечно большая положительная величина.

Правосторонний предел
$$\lim_{x \rightarrow 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\infty} = \infty.$$

Так как один из односторонних пределов равен бесконечности, точка $x = 3$ – точка разрыва второго рода.

4 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

4.1 Производная. Геометрический и экономический смысл производной

Пусть x - начальное значение независимой переменной, Δx - приращение, $x + \Delta x$ - приращённое значение независимой переменной. Тогда $y = f(x)$ - начальное значение функции, $f(x + \Delta x)$ - приращённое значение функции, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ - приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx .

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращение функции к приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'. \quad (4.1)$$

Геометрический смысл производной: производная $y'(x_0)$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции, проведенной через точку $M(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ (см. рисунок 4.1).

Если функция $Q = Q(t)$ выражает объем произведённой продукции в зависимости от времени, то средняя производительность за время Δt определяется формулой

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}.$$

Производительность в момент времени t определяется как предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \Pi(t).$$

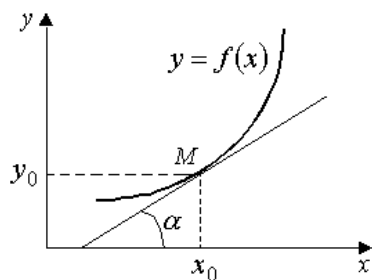


Рисунок 4.1 – Геометрический смысл производной $y'(x_0) = \tan \alpha$

По определению производной указанный предел есть производная функции Q по времени. На этом основании сформулирован экономический смысл производной [3; 4]: производная от объема продукции $Q(t)$ по времени t есть производительность в момент времени t : $\Pi(t) = Q'(t)$.

4.2 Правила дифференцирования и таблица производных основных функций

Правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций разработана на основе определения производной (4.1), приёмов и правил вычисления пределов.

Так, если $y = C$ ($C = \text{const}$), то для любого Δx приращение функции $\Delta y = 0$, следовательно

$$C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

В этом состоит первое правило дифференцирования. Укажем остальные правила.

Правила дифференцирования функций

1. Производная постоянной величины равна нулю

$$C' = 0. \quad (4.2)$$

2. Производная аргумента равна единице. Так, если x - аргумент, то

$$x' = 1. \quad (4.3)$$

3. Производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

$$(U(x) + V(x))' = U'(x) + V'(x). \quad (4.4)$$

4. Производная произведения двух функций

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'. \quad (4.5)$$

5. Постоянный множитель выносится за знак производной.

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot (f(x))'. \quad (4.6)$$

6. Производная частного двух функций.

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}. \quad (4.7)$$

7. Производная сложной функции. Пусть $y = f(z)$, $z = g(x)$. Множество всех x , при которых значения z входят в область определения функции $f(z)$ является областью определения сложной функции $y = f(g(x))$. При этом $g(x)$ называется внутренней функцией, функция f называется внешней функцией.

Если функция $g(x)$ имеет производную в точке x , а функция f имеет производную в точке $z = g(x)$, то сложная функция y имеет производную, равную произведению производной от внешней функции на производную от внутренней функции



$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (4.8)$$

Пример 4.1 Сложная функция $y = \sqrt{\sin x}$. Здесь корень - внешняя, а синус - внутренняя функции. Если обозначить $\sin x = u$, то $y' = (\sqrt{u})'_u \cdot u'_x$, поэтому

$$y' = (\sqrt{\sin x})' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x.$$

Таблица производных основных элементарных функций

$$1. (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \neq 0.$$

$$2. (e^x)' = e^x.$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

$$4. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$6. (\sin x)' = \cos x$$

$$7. (\cos x)' = -\sin x$$

$$8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Пункт 1-й таблицы производных имеет несколько важных частных случаев:

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}.$$

Пример 4.2 а) $(\cos^3 x)' =$ (пункт 1 таблицы)

$$= 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' = -3\cos^2 x \cdot \sin x.$$

$$б) (\operatorname{arctg} 2x)' = (\text{пункт 12 таблицы}) = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2x)' = \frac{2}{1+4x^2}.$$

4.3 Дифференцирование неявно заданных функций.

Логарифмическое дифференцирование.

Дифференцирование параметрически заданных функций

1) Функция независимой переменной x называется неявной, если она определяется из неразрешенного уравнения, связывающего аргумент и функцию y : $F(x, y) = 0$. Часто разрешить это уравнение невозможно или нецелесообразно. При этом можно определить производную функции, дифференцируя обе части равенства по x , помня, что y есть функция от x .

Пример 4.3 Определить производную функции, заданной неявно

$$x^2 y - xy^3 + \sin(2x - 3y) = 1.$$

Решение

$$(x^2 y)' - (xy^3)' + (\sin(2x - 3y))' = 1',$$

$$2xy + x^2 y' - y^3 - 3xy^2 y' + \cos(2x - 3y)(2 - 3y') = 0,$$

$$y'(x^2 - 3xy^2 - 3\cos(2x - 3y)) = y^3 - 2xy - 2\cos(2x - 3y),$$

$$y' = \frac{y^3 - 2xy - 2\cos(2x - 3y)}{x^2 - 3xy^2 - 3\cos(2x - 3y)}.$$

Как видим, производная выражается явно относительно аргумента x и функции y .

2) Для дифференцирования функции $y = u(x)^{v(x)}$ нельзя непосредственно применить ни одно из правил дифференцирования или пункт таблицы производных, так как и основание и показатель степени – функции независимой переменной. Функция называется показательно – степенной или сложной показательной.

Дифференцирование возможно, если вначале определить производную натурального логарифма функции. Определяем натуральный логарифм показательно – степенной функции: $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$. Теперь

$$(\ln y)' = (v(x) \cdot \ln(u(x)))', \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$y' = y(v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'), \quad y' = u(x)^{v(x)} \cdot (v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u').$$

Производная от натурального логарифма функции называется также логарифмической производной, а в экономических приложениях называется **относительной скоростью изменения функции** или **темпом изменения функции**. Темп изменения функции y обозначается T_y . Таким образом,

$$T_y = (\ln y)' = y'/y.$$

Пример 4.4 $y = (\sin x)^{x^3}$

Логарифмируем левую и правую части по основанию e :

$$\ln y = \ln(\sin x)^{x^3}, \quad \ln y = x^3 \cdot \ln(\sin x).$$

Теперь дифференцируем равенство, учитывая, что $\ln y$ - сложная функция, так как $y = y(x)$.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x^3)' \ln(\sin x) + x^3 (\ln(\sin x))', \quad \frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x},$$

$$y' = y(3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \operatorname{ctgx}), \quad y' = (\sin x)^{x^3} (3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \operatorname{ctgx})$$

3) Координаты точки на плоскости x и y могут быть заданы в зависимости от некоторой третьей переменной, например, времени t :

$$x = \varphi(t), \quad y = \phi(t). \quad (4.9)$$

Эта переменная t является параметром. Когда t изменяется, то точка на плоскости описывает некоторую линию L . Эта линия L задана в параметрическом виде. Например, уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$ в параметрическом виде задается уравнениями

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

В случае с уравнением окружности параметр t - угол между положительным направлением оси Ox и радиус - вектором движущейся по окружности точки.

Если функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, то y является функцией от x : $y = \phi(\Phi(x))$. Таким образом, уравнения (4.9) определяют y как функцию от x и говорят, что функция y задана параметрически.

Пусть $\varphi(t)$, $\phi(t)$ - дифференцируемые функции параметра t , причем $\varphi'(t) \neq 0$. Как всякие дифференцируемые функции они непрерывные. В силу этого при $\Delta t \rightarrow 0$ $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y / \Delta t}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad \text{Таким образом,}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (4.10)$$

Пример 4.5 Определить производную $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \ln \cos 2t. \end{cases}$

Решение. Используя формулу (4.10), найдём y'_x для функции, заданной параметрически. Дифференцируем по t переменные x и y :

$$x'_t = 2 \cos 2t, \quad y'_t = \frac{1}{\cos 2t} \cdot (-\sin 2t) \cdot 2 = -2 \operatorname{tg} 2t;$$

$$y'_x = \frac{-2 \operatorname{tg} 2t}{2 \cos 2t} = -\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos 2t}.$$

4.4 Эластичность функции

Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \quad (4.11)$$

Эластичность функции показывает приблизительно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Свойства эластичности функции

1. Эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций:

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v).$$

2. Эластичность частного двух функций равна разности эластичностей этих функций:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

3. Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е. $E_x(y) = x T_y$.

Эластичность функций применяется при анализе спроса и предложения. Например, эластичность спроса y относительно цены x - коэффициент,



определяемый по формуле (4.11) и показывающий приближенно, на сколько изменится спрос (объем потребления) при изменении цены на 1%.

Если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считается эластичным, если $|E_x(y)| = 1$ - нейтральным, если $|E_x(y)| < 1$ - неэластичным относительно цены.

Пример 4.6 Определить эластичность функции $y = x^2 \cdot \sin 3x$.

Решение

Эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций: $E_x(x^2 \cdot \sin 3x) = E_x(x^2) + E_x(\sin 3x)$. В свою очередь, по

формуле (4.11) $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$ определяем:

$$E_x(x^2) = \frac{x}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{x \cdot 2x}{x^2} = 2;$$

$$E_x(\sin 3x) = \frac{x}{\sin 3x} \cdot (\sin 3x)' = \frac{x \cdot 3 \cos 3x}{\sin 3x} = 3x \cdot \operatorname{ctg} 3x.$$

Таким образом, $E_x(y) = 2 + 3x \cdot \operatorname{ctg} 3x$.

4.5 Производные высших порядков

Производная функции $y'(x)$ сама является функцией, которая также может иметь производную.

Второй производной называют производную от производной и обозначают

y'' : $y'' = (y')'$. Вторую производную также можно дифференцировать:

$y''' = (y'')'$. В общем случае, производная n -го порядка определяется как производная от производной $(n-1)$ -го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

При повторном дифференцировании обычных функций вида $y = f(x)$ справедливы все правила дифференцирования и таблица производных.

Производная второго порядка y''_{xx} от функции заданной параметрически вычисляется по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}. \quad (4.12)$$

Пример 4.7 Определить вторую производную функции из примера 4.5.

Для определения второй производной первую производную y'_x дифференцируем по t :

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos 2t} \right)' = -\frac{(2/\cos^2 2t) \cdot \cos 2t - \operatorname{tg} 2t \cdot (-\sin 2t) \cdot 2}{(\cos 2t)^2},$$

$$(y'_x)'_t = -\frac{2 + 2 \sin^2 2t}{\cos^3 2t}. \text{ Разделим полученное выражение на } x'_t \text{ и}$$

$$\text{найдем } y''_{xx}: \quad y''_{xx} = -\frac{2 + 2 \sin^2 2t}{\cos^3 2t} \cdot \frac{1}{2 \cos 2t} = -\frac{1 + \sin^2 2t}{\cos^4 2t}.$$

4.6 Пример выполнения задания 8

В задании требуется найти производную для различных функций. В пунктах а), б), с), д), е) используются приведенные выше правила дифференцирования и таблица производных.

В пункте а) заданная функция представляет из себя алгебраическую сумму функций, умноженных на постоянные величины. Для определения производной используются правила дифференцирования №1, 3, 5 и таблица производных основных функций.

а) Найти производную функции

$$y = 7x^5 + 9 \cos x - 5^x + 7 \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x - 8.$$

$$y' = (7x^5 + 9 \cos x - 5^x + 7 \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x - 8)' = 7 \cdot (x^5)' + 9(\cos x)' - (5^x)' + 7(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' - 8' = 35x^4 - 9 \sin x - 5^x \cdot \ln 5 - \frac{7}{1+x^2}.$$

В пункте б) функция y - произведение двух функций, для определения производной используется правило дифференцирования №4.

$$\text{б) } y = e^x \cdot \operatorname{tg}(x).$$

$$y' = (e^x)' \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot (\operatorname{tg} x)' = e^x \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

В пункте в) функция y - частное двух функций. Для определения производной используется правило №6.

$$\text{в) } y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x + 7}{\sin x}$$



$$y' = \frac{(x^3 + 4x^2 - 5x + 7)' \cdot \sin x - (x^3 + 4x^2 - 5x + 7) \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2 + 8x - 5) \cdot \sin x - (x^3 + 4x^2 - 5x + 7) \cdot \cos x}{(\sin x)^2}.$$

В пункте г) задана сложная функция, производная определяется по правилу №7.

г) $y = \sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)}$. Внешней функцией является корень квадратный (частный случай степенной функции), внутренняя функция – арксинус, которая является внешней для внутренней функции – квадратного трёхчлена.

$$y' = (\sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)})' \cdot (\arcsin(3x^2 - 7x + 1))' \cdot (3x^2 - 7x + 1)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (3x^2 - 7x + 1)^2}} \cdot (6x - 7).$$

В пункте д) задана сложно - показательная функция. Для нахождения её производной применяется предварительное логарифмирование функции.

$$д) y = (\sin x)^{x^3}$$

Логарифмируем левую и правую части по основанию е:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{x^3}, \quad \ln y = x^3 \cdot \ln(\sin x).$$

Теперь дифференцируем, учитывая, что $\ln y$ - сложная функция, т.к.

$$y = y(x).$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x^3)' \cdot \ln(\sin x) + x^3 \cdot (\ln(\sin x))',$$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x},$$

$$y' = y(3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \operatorname{ctgx}),$$

$$y' = (\sin x)^{x^3} \cdot (3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \operatorname{ctgx}).$$

4.7 Дифференциал функции, его свойства и применение

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. По определению производной

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\alpha \rightarrow 0$. Умножим последнее равенство на Δx :

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \quad (4.13)$$

В правой части равенства (4.13) слагаемое $y' \cdot \Delta x$ - бесконечно малая низшего порядка малости по сравнению со слагаемым $\alpha \cdot \Delta x$, оно считается главной частью приращения функции Δy и называется дифференциалом функции, что обозначается так:

$$dy = y' \cdot dx. \quad (4.14)$$

Из формулы (4.14) следует, что производную можно обозначить как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Свойства дифференциала

1. Дифференциал аргумента равен его приращению.
2. Дифференциал функции эквивалентен приращению функции при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $dy \sim \Delta y$.
3. Дифференциал функции вычисляется по формуле (4.14), где $dx = \Delta x$.
4. Свойство инвариантности формы дифференциала заключается в том, что дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной:

$$\text{если } y = f(z), \quad z = g(x), \quad \text{то } dy = f'(z)dz.$$

5. Так как задача нахождения дифференциала равносильна нахождению производной, то правила дифференцирования функций сохраняют свою силу и для дифференциала, а именно:

$$а) d(C) = 0; \quad б) d(U + V) = dU + dV;$$

$$в) d(U \cdot V) = dU \cdot V + U \cdot dV;$$

$$г) d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}.$$

Дифференциал функции находит применение в приближённых вычислениях, основанных на формуле

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0). \quad (4.15)$$

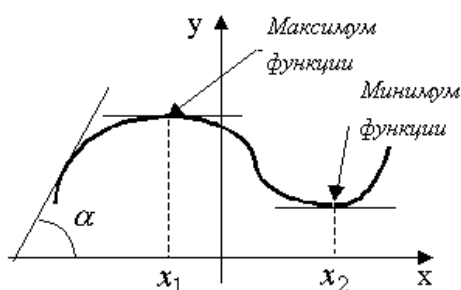
Формула следует из эквивалентности $\Delta y \sim dy$.

Если известно значение функции при $x = x_0$, то, используя (4.15) легко найти значение функции при $x = x_0 + \Delta x$.



4.8 Применение 1-й и 2-й производной для исследования функций

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ на рисунке 4.2. Исследование



функции включает в себя помимо других вопросов определение интервалов возрастания и убывания функций, а также поиск точек максимума и минимума (точек экстремума). Геометрический смысл производной позволяет определить эти особенности функции.

Рисунок 4.2 – График функции $y = f(x)$

1. Функция является возрастающей на тех интервалах, где её производная положительна. На рисунке 4.2 это интервалы $(-\infty, x_1)$, (x_2, ∞) . На указанных интервалах угол наклона касательной к графику функции острый, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = y' > 0$.
2. Функция убывает на интервалах, где её производная отрицательна, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = y' < 0$. На рисунке 4.2 интервал убывания функции (x_1, x_2) .

Необходимым условием существования экстремума функции является равенство нулю её производной или отсутствие производной в некоторых точках, которые называются *критическими*. Чтобы в этих точках существовал экстремум функции должно выполняться достаточное условие экстремума: если при переходе через критическую точку знак производной меняется с «плюса» на «минус», то в данной точке имеется максимум функции; если производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в такой критической точке функция имеет минимум. Для существования экстремума, кроме того, функция должна быть непрерывной в критической точке.

На рисунке 4.2 в точке x_1 функция имеет максимум, в точке x_2 — минимум. Касательная к графику функции в этих точках параллельна оси аргумента.

Если стоит задача определения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, то её нужно решать в следующей последовательности:

- 1) определить критические точки;
- 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка;
- 3) выбрать из найденных значений функции наибольшее и наименьшее.

Вторая производная y'' применяется для определения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции.

Принцип определения таких интервалов показан на рисунке 4.3. Точка, лежащая на границе между выпуклостью и вогнутостью, называется точкой перегиба

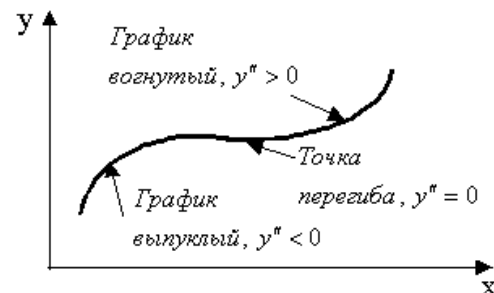


Рисунок 4.3 - Выпуклость и вогнутость графика функции

4.9 Пример выполнения задания 9

Найти наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Найдём производную, а затем критические точки.

$$y' = 3x^2 - 12x + 9, \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Корни уравнения $x=1$, $x=3$ являются критическими точками для данной функции, они входят в заданный отрезок. Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(1) = 9, \quad f(3) = 5, \quad f(0) = 5, \quad f(4) = 9.$$

Сравнивая полученные значения, делаем вывод, что наибольшее на отрезке значение функция принимает в точках $x=1$, $x=4$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ЗА ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Задание 1. Вычислить произведение трёх матриц $A \cdot B \cdot C$.

$$1.1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.3 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.4 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.5 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -9 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.6 \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.7 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.8 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.9 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.10 \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответы. 1.1 $\begin{pmatrix} -7 \\ -35 \\ 132 \end{pmatrix}$. 1.2 $\begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ -11 \end{pmatrix}$. 1.3 $\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -20 \end{pmatrix}$. 1.4 $\begin{pmatrix} 18 \\ -30 \\ -10 \end{pmatrix}$. 1.5 $\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.6 $\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$. 1.7 $\begin{pmatrix} -17 \\ -13 \\ 84 \end{pmatrix}$. 1.8 $\begin{pmatrix} 11 \\ 54 \\ 35 \end{pmatrix}$. 1.9 $\begin{pmatrix} 62 \\ -32 \\ -29 \end{pmatrix}$. 1.10 $\begin{pmatrix} 123 \\ 67 \\ -22 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Дана система линейных алгебраических уравнений. Решить её одним из способов (с помощью обратной матрицы, правила Крамера или методом Гаусса).

$$2.1 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 19. \end{cases}$$

$$2.2 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17. \end{cases}$$

$$2.3 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 21, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 23. \end{cases}$$

$$2.4 \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 19, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

$$2.5 \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 54, \\ 3x_1 + x_2 = 10. \end{cases}$$

$$2.6 \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 31, \\ 7x_1 + 3x_2 = 23, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

$$2.7 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 9, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 42, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 41. \end{cases}$$

$$2.8 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 28. \end{cases}$$



$$2.9 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 24, \\ x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases} \quad 2.10 \begin{cases} x_1 + x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 26, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 = 34. \end{cases}$$

Ответы. 2.1 {2; 3; 5}. 2.2 {3; 2; 4}. 2.3 {1; 5; 2}. 2.4 {2; 4; 3}. 2.5 {3; 1; 6}.

2.6 {2; 3; 7}. 2.7 {5; 2; 6}. 2.8 {7; 1; 3}. 2.9 {8; 1; 5}. 2.10 {4; 6; 2}.

Задание 3. Задан вектор объемов различных товаров $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и вектор их цен в гривнах $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Определить суммарную стоимость товаров.

$$3.1 \bar{x} = (2; 3; 7; 11; 9), \quad \bar{y} = (4,5; 2; 5,7; 7; 25)$$

$$3.2 \bar{x} = (8; 6; 7; 15; 23), \quad \bar{y} = (2,4; 5; 3; 1,5; 5,2)$$

$$3.3 \bar{x} = (21; 32; 1; 13; 8), \quad \bar{y} = (4; 2,5; 54; 7,25; 2,5)$$

$$3.4 \bar{x} = (11; 22; 13; 1; 7), \quad \bar{y} = (4,2; 2; 5,4; 6; 2,5)$$

$$3.5 \bar{x} = (10; 20; 16; 12; 71), \quad \bar{y} = (4,3; 2; 5,4; 6,4; 0,5)$$

$$3.6 \bar{x} = (30; 40; 10; 1; 7), \quad \bar{y} = (0,35; 2,1; 5,4; 64; 1,5)$$

$$3.7 \bar{x} = (3; 4; 80; 12; 72), \quad \bar{y} = (35; 21; 0,15; 6; 0,5)$$

$$3.8 \bar{x} = (35; 4; 8; 12; 7), \quad \bar{y} = (3,5; 26; 15; 6,5; 5)$$

$$3.9 \bar{x} = (5; 10; 4; 62; 9), \quad \bar{y} = (35; 2,6; 15; 0,25; 7)$$

$$3.10 \bar{x} = (50; 12; 40; 2; 6), \quad \bar{y} = (3,5; 26; 1,5; 25; 7)$$

Ответы. 3.1 356,9. 3.2 212,3. 3.3 332,25. 3.4 183,9. 3.5 281,7.

3.6 223. 3.7 309. 3.8 459,5. 3.9 339,5. 3.10 639.

Задание 4. Даны две точки на плоскости: $M(x_1; y_1)$, $P(x_2; y_2)$.

Требуется:

- 1) определить общее уравнение прямой линии MP ;
- 2) найти расстояние от начала координат до прямой MP ;
- 3) построить прямую MP на плоскости, а также построить вектор нормали к прямой MP с началом в точке $O(0; 0)$.

$$4.1 M(-5; 8), \quad P(2; -4). \quad 4.2 M(-3; 3), \quad P(8; 2).$$

$$4.3 M(-2; 4), \quad P(7; -3). \quad 4.4 M(-2; -6), \quad P(4; 3)$$

$$4.5 M(-5; 5), \quad P(9; 0). \quad 4.6 M(-4; 0), \quad P(8; 5).$$

$$4.7 M(7; -3), \quad P(-3; 6). \quad 4.8 M(4; 6), \quad P(-1; -6).$$

$$4.9 M(-5; 7), \quad P(8; 2). \quad 4.10 M(8; 9), \quad P(0; 3).$$

Задание 5. Найти пределы числовых последовательностей (в пункте б используйте второй замечательный предел).

$$5.1 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 2n^2 + 3n}{n^3 - 5n^2 + 3n - 1}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 4}{2n + 5} \right)^{n+1}$$

$$5.2 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 6}{5n^2 + 4n - 9}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 4}{3n - 5} \right)^{n-1}$$

$$5.3 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n^2 + 3n - 6}{2n^3 - 5n^2 + 4n - 1}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n + 4}{5n - 5} \right)^{n+1}$$

$$5.4 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 6}{n^2 + 4n - 7}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n - 3}{4n + 6} \right)^{2n}$$

$$5.5 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n^2 + 3n + 2}{6n^3 + 5n^2 + n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 1}{n + 2} \right)^{n-1}$$

$$5.6 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 3n + 5}{8n^2 - 4n + 9}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 7}{n + 8} \right)^n$$

$$5.7 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - n^2 + 3n - 6}{3n^3 + 2n^2 + 4n + 7}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 1}{n + 2} \right)^{n^2}$$

$$5.8 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 6}{7n^2 - n + 4}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 4}{n + 3} \right)^{-n}$$

$$5.9 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 2n^2 - n + 2}{n^3 - n^2 + n - 1}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 5}{3n - 2} \right)^{-n}$$

$$5.10 \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 - 3n - 1}{3n^2 + 6n - 2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 5}{n - 2} \right)^{n^2}$$

Ответы. 5.1 а) 5; б) $e^{-4,5}$. 5.2 а) $\frac{1}{5}$; б) e^3 . 5.3 а) $\frac{1}{2}$; б) $e^{9/5}$.

5.4 а) 2; б) $e^{-4,5}$. 5.5 а) $\frac{1}{2}$; б) e^{-3} . 5.6 а) $\frac{7}{8}$; б) e^{-15} . 5.7 а) $\frac{5}{3}$; б) 0. 5.8 а)

$\frac{2}{7}$; б) e^7 . 5.9 а) 7; б) $e^{7/3}$. 5.10 а) 3; б) ∞ .



Задание 6. Найти пределы функций (в пункте а используйте первый замечательный предел, в пункте б используйте эквивалентность бесконечно малых величин).

$$6.1 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{2^{3x} - 1}.$$

$$6.2 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x^2 + 3x}.$$

$$6.3 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+3x)}{\sin 5x}.$$

$$6.4 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arcsin x}.$$

$$6.5 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 8x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\log_5(1+4x)}.$$

$$6.6 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{e^x - 1}.$$

$$6.7 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 9x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x^2 + 3x}.$$

$$6.8 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{5^{2x} - 1}.$$

$$6.9 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_7(1-4x)}{\arctg x}.$$

$$6.10 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\log_3(1+x)}.$$

Ответы. 6.1 а) $\frac{5}{7}$; б) $\frac{2}{3 \cdot \ln 2}$. 6.2 а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{3}$. 6.3 а) 5; б) $\frac{3 \cdot \log_2 e}{5}$.

6.4 а) $\frac{2}{5}$; б) 3. 6.5 а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{7}{4 \cdot \log_5 e}$. 6.6 а) $\frac{1}{2}$; б) 5. 6.7 а) $\frac{4}{9}$; б) -1.

6.8 а) 1; б) $\frac{1}{\log_5 e}$. 6.9 а) 2; б) $-4 \cdot \log_7 e$. 6.10 а) 3; б) $\frac{4}{\log_3 e}$.

Задание 7. Задана функция $f(x)$. Найти точку разрыва функции и исследовать её характер.

$$7.1 \quad f(x) = 3^{\frac{1}{x+2}}.$$

$$7.2 \quad f(x) = 5^{\frac{1}{x-2}}.$$

$$7.3 \quad f(x) = 4^{\frac{1}{x+3}}.$$

$$7.4 \quad f(x) = 6^{\frac{1}{x-4}}.$$

$$7.5 \quad f(x) = 7^{\frac{1}{x-5}}.$$

$$7.6 \quad f(x) = 3^{\frac{1}{x+5}}.$$

$$7.7 \quad f(x) = 8^{\frac{1}{x+4}}.$$

$$7.8 \quad f(x) = 8^{\frac{1}{x+7}}.$$

$$7.9 \quad f(x) = 9^{\frac{1}{x-8}}.$$

$$7.10 \quad f(x) = 10^{\frac{1}{x+9}}.$$

Задание 8. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

8.1 а) $y = 2x^2 - 3 \sin x + 2^x - \operatorname{tg} x + 12$; б) $y = e^x \cdot \arcsin x$;

в) $y = \frac{x+1}{\ln x}$; д) $y = \sqrt{\arctg(x^3 + 4x)}$; е) $y = (\sin 2x)^x$.

8.2 а) $y = 3x^2 - 4 \sin x + 4^x - \operatorname{ctg} x + 15$; б) $y = e^x \cdot \arccos x$;

в) $y = \frac{x+6}{\log_2 x}$; д) $y = \sqrt{\operatorname{arctg}(x^4 + 3x^2)}$; е) $y = (\cos 2x)^x$.

8.3 а) $y = 5x^2 - \sin x + 5^x - \operatorname{ctg} x + 6$; б) $y = e^x \cdot \arctg x$;

в) $y = \frac{2x+3}{\log_3 x}$; д) $y = \sqrt{\arccos(x^3 + 4x)}$; е) $y = (\sin 3x)^{2x}$.

8.4 а) $y = 5x^2 - 2 \cos x + 7^x - \ln x + 2$; б) $y = e^x \cdot \sin x$;

в) $y = \frac{x+1}{\operatorname{tg} x}$; д) $y = \sqrt{\arctg(2x^3 + 3x^2)}$; е) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

8.5 а) $y = 2x^3 - 3 \operatorname{tg} x + 5^x - \cos x + 10$; б) $y = e^x \cdot x^2$;

в) $y = \frac{3x+1}{\sin x}$; д) $y = \sqrt{\arccos(x^3 + 4x)}$; е) $y = x^{3x^2}$.



$$8.6 \text{ a) } y = x^4 - 5 \sin x + 8^x - \operatorname{ctgx} + 13; \quad \text{b) } y = e^x \cdot \log_5 x;$$

$$\text{c) } y = \frac{x^2 + 1}{\cos x}; \quad \text{d) } y = \sqrt{\operatorname{tg}(x^3 + x)}; \quad \text{e) } y = (\sin 5x)^x.$$

$$8.7 \text{ a) } y = 2x^5 - 3\sqrt{x} + 2^x - 7\operatorname{tg}x + 32; \quad \text{b) } y = e^x \cdot \arccos x;$$

$$\text{c) } y = \frac{\cos x}{x-3}; \quad \text{d) } y = \sqrt{\ln(4x^2 + x)}; \quad \text{e) } y = x^{\sin x}.$$

$$8.8 \text{ a) } y = 9x^2 - 3 \sin x + 7^x - 3\operatorname{ctgx} + 9; \quad \text{b) } y = e^x \cdot \operatorname{arctgx};$$

$$\text{c) } y = \frac{\sin x}{x^3 - 2}; \quad \text{d) } y = \sqrt{\arcsin(2x^3 - 5x)}; \quad \text{e) } y = (\cos 3x)^x.$$

$$8.9 \text{ a) } y = \frac{1}{x} - 5 \sin x + 3^x + 2\operatorname{tg}x - 7; \quad \text{b) } y = e^x \cdot x^3;$$

$$\text{c) } y = \frac{\cos x}{2x-3}; \quad \text{d) } y = \sqrt{\operatorname{arctg}(2x^3 - 7x)}; \quad \text{e) } y = x^{\cos 2x}.$$

$$8.10 \text{ a) } y = x^2 + 3 \cos x - 5^x + \operatorname{tg}x + 4; \quad \text{b) } y = e^x \cdot \operatorname{arctgx};$$

$$\text{c) } y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}; \quad \text{d) } y = \sqrt{\log_5(7x^3 - 3x)}; \quad \text{e) } y = (\cos x)^{5x}.$$

Задание 9. Найти наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

$$9.1 \text{ } f(x) = x^3 - 12x + 7, \quad [0; 3]; \quad 9.6 \text{ } f(x) = x^4 + 4x, \quad [-2; 2];$$

$$9.2 \text{ } f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \quad [0; 2]; \quad 9.7 \text{ } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x, \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$9.3 \text{ } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x, \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \quad 9.8 \text{ } f(x) = 81x - x^4, \quad [-1; 4];$$

$$9.4 \text{ } f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad [-3; 1]; \quad 9.9 \text{ } f(x) = 3 - 2x^2, \quad [-1; 3];$$

$$9.5 \text{ } f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad \left[\frac{1}{2}; 2\right]; \quad 9.10 \text{ } f(x) = x - \sin x, \quad [-\pi; \pi].$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие для студентов вузов.-12-е изд. - М.: Наука, 1985. – Т.1.-456 с.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии./Я.С. Бугров. - М.: Наука, 1988, - 222 с.
3. Методические указания и контрольные задания по дисциплине «Математика для экономистов» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения/ Разраб. А.И. Песчанский, Л.Н. Григорюк.- Ч. 1.- Севастополь, СевГТУ, 2000, - 83 с.
4. Методические указания по изучению дисциплины «Математика для экономистов» для студентов экономических специальностей всех форм обучения/ Разраб. А.Ф. Хрусталева. – Севастополь, СевГТУ, 1997, - 24 с.
5. Ледяев С.Ф., Рудов Ю.М. Основы высшей математики: Учеб. пособие. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002.- 278 с.:ил.
6. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие.-М.: Финансы и статистика, 2000.-656 с.: ил.

