

Высшая математика

для студентов факультета ЭиМ

Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы
обучения факультета экономики и менеджмента

2-й семестр

Севастополь
2006

УДК 517.031

Высшая математика для студентов экономических специальностей. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения / Разраб. С.Ф. Ледяев – Севастополь, 2006. – 67 с.: ил.

Настоящее пособие является методическим руководством для изучения курса высшей математики студентами - заочниками экономических специальностей во втором учебном семестре. Оно содержит материалы, необходимые для подготовки и успешной сдачи экзамена по высшей математике:

- контрольные задания для самостоятельной работы во втором семестре (десять вариантов), большинство задач снабжены ответами;
- краткий курс лекций, освещающий вопросы, вынесенные на экзамены;
- примеры выполнения контрольных заданий с достаточно подробными объяснениями.

Номер варианта контрольных заданий совпадает с последней цифрой номера студенческого билета (зачётной книжки). Вариант №10 соответствует нулю в конце номера студенческого билета.

Все контрольные задания составляют в сумме те контрольные работы, которые предусмотрены учебными планами экономических специальностей. Указания по группированию заданий в контрольные работы делает ведущий преподаватель на установочной сессии.

Пособие могут использовать и студенты очной формы обучения.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ЗА ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Неопределенный интеграл

Определенный интеграл

Функции многих переменных

Дифференциальные уравнения

Ряды

Библиографический список

5 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1 Первообразная. Неопределённый интеграл и его свойства

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если для всех $x \in [a; b]$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (5.1)$$

Определение первообразной от заданной функции называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование - действие обратное дифференцированию и практически более сложное.

Первообразная для заданной функции не является единственной. Так, $F(x) = \cos x$ - первообразная для функции $f(x) = -\sin x$, так как $(\cos x)' = -\sin x$. Но и $(\cos x + 5)' = -\sin x$. Пример показывает, что если известна одна первообразная $F(x)$, то любая другая имеет вид $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Определение 2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$$F(x) + C = \int f(x) dx. \quad (5.2)$$

Здесь $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования, dx - дифференциал переменной интегрирования.

Из определений (5.1), (5.2) и правил дифференцирования вытекают свойства неопределённого интеграла.

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x) dx \right) = d(F(x) + C) = F'(x) dx = f(x) dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:
$$\int dF(x) = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций:
$$\int (f(x) + q(x)) dx = \int f(x) dx + \int q(x) dx.$$
 Последнее равенство справедливо с точностью до произвольной постоянной. Если найти производные от левой и правой частей равенства $(\int (f(x) + q(x)) dx)' = (\int f(x) dx + \int q(x) dx)'$, то $f(x) + q(x) = f(x) + q(x)$.

5. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:
$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ где } a = \text{const}.$$

Следствие свойств 4 и 5 - неопределённый интеграл линейной комбинации конечного числа функций равен линейной комбинации интегралов этих функций ($a_1, a_2, \dots, a_k$ - постоянные числа):

$$\int (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_k f_k) dx = a_1 \int f_1 dx + a_2 \int f_2 dx + \dots + a_k \int f_k dx.$$

6. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(U) dU = F(U) + C$, где $U(x)$ - произвольная дифференцируемая функция. Это свойство есть следствие свойства инвариантности формы дифференциала функции, согласно которому $dF(U) = F'(U) dU = f(U) dU$, если $dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$.

5.2 Таблица интегралов и табличное интегрирование

Метод табличного (непосредственного) интегрирования заключается в том, что с помощью эквивалентных преобразований подынтегральной функции и на основании свойств неопределённого интеграла заданные интегралы преобразуются в табличные.

Пример 5.1 Найти неопределённый интеграл

$$\int \left(x^2 + 4 \sin x + \frac{2x-1}{x} \right) dx = \int x^2 dx + 4 \int \sin x dx + 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} - 4 \cos x + 2x - \ln|x| + C.$$

При интегрировании были использованы свойства №3, 4, 5 неопределённого интеграла и табличные интегралы №1, 2, 5.

Значения интегралов от основных элементарных функций получены на основе формул дифференцирования.

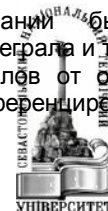


Таблица 1 – Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$
12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

74

Из свойств дифференциала вытекает, что $dx = d(x+b)$ и $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, где a и b - постоянные величины. Поэтому из свойства №6 неопределенного интеграла следуют формулы, полезные при нахождении неопределенных интегралов: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C; \quad (5.3)$$

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C; \quad (5.4)$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (5.5)$$

Пример 5.2 Найти неопределённые интегралы а) $\int \cos 4x dx$;

б) $\int (2x-5)^{36} dx$.

Решение. а) По формуле (5.3): $\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x + C$, так как

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

б) По формуле (5.5) $\int (2x-5)^{36} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-5)^{37}}{37} + C$, так как $\int x^{36} dx = \frac{x^{37}}{37} + C$.

5.3 Пример выполнения задания 1

Задание 1. Методом непосредственного интегрирования найти неопределенный интеграл:

$$\int (x - 9x^3 + \cos x + e^x - \operatorname{ctg} x + 2) dx.$$

Решение

Заданный интеграл от суммы функций записываем суммой интегралов, при этом постоянные множители выносим за знак интегралов.

$$\begin{aligned} & \int (x - 9x^3 + \cos x + e^x - \operatorname{ctg} x + 2) dx = \\ & = \int x dx - 9 \int x^3 dx + \int \cos x dx + \int e^x dx - \int \operatorname{ctg} x dx + 2 \int dx = \\ & = (\text{для каждого интеграла определяем первообразную по таблице 1}) = \\ & = \frac{x^2}{2} - 9 \cdot \frac{x^4}{4} + \sin x + e^x - \lg|\sin x| + 2x + C. \end{aligned}$$

Произвольная постоянная C проставляется после определения всех первообразных.

5.4 Интегрирование по частям

Не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы от сомножителей. Но иногда интеграл от произведения функций можно вычислить по формуле интегрирования по частям.

Пусть $U = U(x)$ и $V = V(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда дифференциал произведения $d(U \cdot V) = VdU + UdV$. Проинтегрируем обе части формулы:

$$\int d(UV) = \int VdU + \int UdV \Rightarrow UV = \int VdU + \int UdV. \text{ Окончательно, получим формулу}$$

$$\int UdV = UV - \int VdU. \quad (5.6)$$

Формула (5.6) называется формулой интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям заключается в следующем.



Подынтегральную функцию исходного интеграла рассматриваем как произведение функции U и дифференциала некоторой функции dV . За дифференциал dV мы должны выбрать выражение, для которого сможем найти первообразную.

После этого применяем формулу (5.6). Применять формулу имеет смысл в том случае, когда интеграл $\int V dU$ окажется проще исходного или подобен ему.

Для получения окончательного результата иногда требуется применить метод последовательно несколько раз.

Пример 5.3 Найти интеграл $\int x \cdot \cos x dx$.

Решение. Положим $U = x$, $dV = \cos x dx$. Тогда $dU = dx$, $V = \int \cos x dx = \sin x$. Произвольную постоянную учтем, когда получим первообразную для исходного интеграла. Применяем формулу (5.6):

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Методом интегрирования по частям вычисляются интегралы следующих типов (список интегралов можно расширить).

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $\int x^n e^{ax} dx$. | 6. $\int x^n \arcsin bxdx$ |
| 2. $\int x^n \sin bxdx$ | 7. $\int x^n \arccos bxdx$ |
| 3. $\int x^n \cos bxdx$ | 8. $\int x^n \arctg bxdx$ |
| 4. $\int e^{ax} \sin bxdx$ | 9. $\int x^n \operatorname{arccot} bxdx$ |
| 5. $\int e^{ax} \cos bxdx$ | 10. $\int x^n \ln bxdx$ |

76

Примечания:

- 1) в интегралах 1, 2, 3 за функцию U следует принимать x^n (вместо сомножителя x^n в интеграле может стоять многочлен по степеням x);
- 2) в интегралах 6 - 10 следует принять $dV = x^n dx$, за функцию U принять все, остается в подынтегральном выражении;
- 3) в интегралах 4, 5 безразлично, что принимать за U , но формула применяется дважды.

Последнее примечание рассмотрим на примере.

Пример 5.4 Найти интеграл $\int e^{2x} \sin x dx$.

Решение

Обозначим $U = e^{2x}$, $dV = \sin x dx$. Тогда $dU = 2e^{2x} dx$,

$V = \int \sin x dx = -\cos x$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin x dx &= -\cos x \cdot e^{2x} + 2 \int e^{2x} \cos x dx = \left(\begin{array}{l} U = e^{2x}, dU = 2e^{2x} dx; \\ dV = \cos x dx, V = \sin x \end{array} \right) = \\ &= -\cos x \cdot e^{2x} + 2 \left(\sin x \cdot e^{2x} - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right) = \\ &= 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \sin x dx. \end{aligned}$$

Таким образом, после двукратного применения формулы в правой части появился исходный интеграл:

$$\int e^{2x} \sin x dx = 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \sin x dx.$$

«Интеграл вернулся». Его и называют «возвратным». Получили уравнение относительно исходного интеграла. Перенесем «возвратный» интеграл в левую часть.

$5 \int e^{2x} \sin x dx = 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x$. Окончательно, прибавив произвольную постоянную, получим:

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C.$$

5.5 Интегрирование подстановкой

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$, причем первообразную нельзя подобрать непосредственно по таблице. Сделаем замену переменной по формуле $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда справедливо равенство

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (5.7)$$

77

Равенство (5.7) подразумевает, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет подставлено выражение через x .

Пример 5.5 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Решение. В последующем изложении показано, что для такого интеграла нужно применить подстановку $x = 2 \sin t$, $t = \arcsin(x/2)$. Тогда



$dx = 2 \cos t dt$, $\sqrt{(4-x^2)^3} = 8 \cos^3 t$. Интеграл с новой переменной –

$$\text{табличный: } \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} t + C = \\ = \frac{1}{4} \frac{\sin(\arcsin(x/2))}{\cos(\arcsin(x/2))} + C = \frac{1}{4} \frac{x/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}} + C = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C.$$

Иногда замену переменной целесообразнее подбирать не по формуле $x = \phi(t)$, а по формуле $t = \phi(x)$.

Пример 5.6 Найти интеграл $\int \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx$.

Решение. Обозначим $t = 1+x^3$. Тогда $dt = 3x^2 dx$. Умножим и разделим интеграл на 3, получим

$$\int \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9} (1+x^3)^{3/2} + C.$$

При подстановке $t = \phi(x)$ применяется приём подведения функции под знак дифференциала, основанный на свойстве №6. С учётом того, что дифференциал функции определяется по формуле

$$df(x) = f'(x)dx,$$

в подынтегральном выражении нужно отыскать функцию, которую принимаем за $f'(x)$ и подводим под знак дифференциала.

Пример 5.7 Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Решение. В подынтегральном выражении $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, поэтому

$$\frac{1}{x} dx = d(\ln x), \text{ выражение подводится под знак дифференциала. Затем}$$

выбираем подстановку $t = \ln x$, которая делает интеграл табличным.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = (t = \ln x) = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

78

5.6 Интегрирование простейших рациональных дробей

Всего различают 4 типа простейших рациональных дробей.

1. Простейшая дробь 1-го типа имеет вид $\frac{A}{x-a}$, где A - коэффициент, a -

действительный корень знаменателя. Интеграл от дроби 1-го типа приводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

2. Простейшая дробь 2-го типа имеет вид $\frac{A}{(x-a)^k}$, где A - коэффициент,

a - действительный корень знаменателя кратности k . Интеграл от дроби 2-го типа приводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

3. Простейшая дробь 3-го типа имеет вид $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где A, B -

коэффициенты, знаменатель дроби не имеет действительных корней, его дискриминант $D < 0$.

При интегрировании дроби вначале в числителе нужно выделить дифференциал знаменателя (если $A \neq 0$).

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \\ + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + (B - \frac{Ap}{2}) \cdot I_1$$

Интеграл $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q}$ превращается в табличный, если в знаменателе выделить полный квадрат суммы или разности и применить подстановку $x + \frac{p}{2} = U$.

$$x^2+px+q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}) = U^2 + R^2.$$

Так как дискриминант знаменателя $D = p^2 - 4q < 0$, то $R^2 = (q - \frac{p^2}{4}) > 0$.

$$\text{Таким образом, } I_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dU}{U^2+R^2} = \frac{1}{R} \operatorname{arctg} \frac{U}{R} + C = \\ = \frac{1}{R} \operatorname{arctg} \frac{x+p/2}{R} + C.$$



Пример 5.8

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-7}{x^2+4x+5} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-7-6}{x^2+4x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} - \\ &- 13 \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+5| - 13 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+5| - 13 \operatorname{arctg}(x+2) + C.\end{aligned}$$

Использованы табличные интегралы №2 и №15.

Примечание – если знаменатель дроби 3-го типа имеет действительные корни, то дробь не считается простейшей. Однако и в этом случае можно применять рассмотренный способ интегрирования.

4. Простейшая дробь 4-го типа имеет вид $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где A, B - коэффициенты, знаменатель дроби не имеет действительных корней, его дискриминант $D < 0$. Называясь «простейшей», дробь интегрируется весьма непросто. Интегрирование таких дробей см. в пособии [1].

5.7 Разложение многочлена на множители

Определение. Многочленом (полиномом) от x называется функция вида:

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0.$$

Здесь n - целое положительное число, $A_n, \dots, A_0$ - коэффициенты, действительные или комплексные. Число n называется степенью многочлена.

Корнем (нулем) многочлена называется такое значение x , при котором он обращается в нуль.

Многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени. Множители первой степени соответствуют действительным корням многочлена. Среди действительных корней могут быть кратные (одинаковые). Множители второй степени не имеют действительных корней, их дискриминант отрицательный. Множители второй степени также могут быть кратными.

$$f(x) = A_n (x-a) \dots (x-b)^k \dots (x^2 + p_1 x + q_1) \dots (x^2 + p_2 x + q_2)^m. \quad (5.8)$$

80

В записанном выражении (5.8) a - действительный простой корень, b - действительный корень кратности k , множители $(x^2 + p_1 x + q_1)$ и $(x^2 + p_2 x + q_2)^m$ не имеют действительных корней.

5.8 Разложение рациональной дроби на сумму элементарных дробей

Рациональной дробью называют частное двух многочленов одного и того же аргумента

$$\frac{G(x)}{P(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}, \quad (5.9)$$

где $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ - действительные числа.

Рациональная дробь (5.9) называется правильной, если $n > m$. При $m \geq n$ дробь называется неправильной, в этом случае делением числителя на знаменатель можно выделить целую часть, которая будет многочленом степени $(n-m)$ и дробный остаток, который является правильной дробью. Такую процедуру называют выделением целой части.

Пример 5.9 В неправильной рациональной дроби выделить целую часть и правильный рациональный остаток:

$$\frac{G(x)}{P(x)} = \frac{x^4 + 7x^3 - 5x^2 + x - 17}{x^3 + 4x^2 - x + 1}.$$

Решение. Разделим числитель на знаменатель «уголком».

$$\begin{array}{r} x^4 + 7x^3 - 5x^2 + x - 17 \quad \Big| \quad x^3 + 4x^2 - x + 1 \\ \underline{-(x^3 + 4x^2 - x + 1)} \\ 3x^3 - 4x^2 - 17 \end{array}$$

$$\text{В результате получим: } \frac{G(x)}{P(x)} = (x+3) + \frac{-16x^2 + 3x - 20}{x^3 + 4x^2 - x + 1}.$$

Пусть дробь (5.9) - правильная. Предположим, что её знаменатель $P(x)$ можно разложить на множители

$$P(x) = a_n (x-x_1) \dots (x-x_2)^k \dots (x^2 + px + q) \dots (x^2 + bx + c)^r. \quad (5.10)$$

Здесь x_1 - простой корень многочлена $P(x)$, x_2 - корень кратности k .

Квадратные трёхчлены $x^2 + px + q$, $x^2 + bx + c$ не имеют



действительных корней. Тогда правильную дробь (5.9) можно представить суммой простейших дробей.

Зависимость типа простейшей дроби от характера корней
знаменателя

1. Каждому простому действительному корню соответствует простейшая дробь 1-го типа.
2. Каждому кратному действительному корню кратности k соответствует одна дробь 1-го типа и $(k-1)$ дробей 2-го типа, показатель степени знаменателя которых возрастает от 2-й до k -й.
3. Каждому простому многочлену второй степени с отрицательным дискриминантом соответствует простейшая дробь 3-го типа.
4. Каждому кратному многочлену второй степени с отрицательным дискриминантом соответствуют простейшие дроби 3-го и 4-го типа.

$$\frac{G(x)}{P(x)} = \left[\frac{A}{x-x_1} \right] + \dots + \left[\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-x_2)^k} \right] + \dots + \left[\frac{Cx+D}{x^2+px+q} \right] + \left[\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c} + \dots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+bx+c)^r} \right]. \quad (5.11)$$

Выражения в каждой квадратной скобке соответствуют каждому множителю в разложении (5.10).

Неизвестные коэффициенты $A_1, B_1, \dots, B_k, C, D, M_1, N_1, \dots, M_r, N_r$ определяются путём приведения правой части (5.11) к общему знаменателю.

Затем используют равенство числителей полученной и исходной дроби, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x .

Другой прием заключается в том, что переменной x в равенстве числителей задают ряд числовых значений, причем «удобными» значениями являются действительные корни знаменателя.

И в том и в другом случае образуется система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Пример 5.10 Разложить на простейшие дроби

$$\frac{x^2 - 4}{x \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)}.$$

Решение

Простому корню знаменателя $x=0$ соответствует одна простейшая дробь, корню $x=-1$ кратности 2 соответствуют две простейшие дроби. Квадратный

трёхчлен $(x^2 + x + 1)$ не имеет действительных корней, ему соответствует одна простейшая дробь, в числителе которой - линейный двучлен.

$$\frac{x^2 - 4}{x \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2 + x + 1}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю, приравнявая затем числители левой и правой частей. Получим тождество:

$$x^2 - 4 \equiv A(x+1)^2(x^2 + x + 1) + Bx(x+1)(x^2 + x + 1) + Cx(x^2 + x + 1) + x(Dx+E)(x+1)^2.$$

Подставляя в тождество различные значения x , получаем уравнения относительно неизвестных коэффициентов (в первую очередь используем значения x , равные корням знаменателя 0 и -1).

Пусть $x = 0$, тогда $-4 = A$, $A = -4$.

Пусть $x = -1$, тогда $-3 = -C$, $C = 3$. Задавая далее $x = 1, 2, -2$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3B + 2D + 2E = 18, \\ 7B + 6D + 3E = 35, \\ 3B + 2D - E = 15. \end{cases}$$

Решаем систему одним из методов (Крамера, Гаусса или матричным). Получим $B = 8, D = -4, E = 1$. Запишем окончательный вид разложения заданной дроби на простейшие:

$$\frac{x^2 - 4}{x \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = -\frac{4}{x} + \frac{8}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-4x+1}{x^2 + x + 1}.$$

Вывод

Определение интеграла от рациональной дроби производят в следующей последовательности.

1. Выясняют, правильная дробь, или неправильная. Если дробь правильная, переходят к пункту 2. Если дробь неправильная, то выделяют целую часть и правильную рациональную дробь.
2. Знаменатель правильной рациональной дроби разлагают на простейшие множители.
3. Правильную рациональную дробь представляют суммой простейших дробей 1-4 типов и определяют неизвестные коэффициенты.
4. Интеграл от исходной дроби равен сумме интегралов от целой части и простейших дробей.



5.9 Интегралы от иррациональных функций

1. Если подынтегральная функция является рациональной функцией R переменной x в дробных степенях, $\int R\left(x, x^{\frac{n}{m}}, \dots, x^{\frac{p}{q}}\right) dx$, то применяется

подстановка $x = t^r$ где r - общий знаменатель дробей $\frac{n}{m}, \dots, \frac{p}{q}$.

Знак рациональной функции показывает, что над переменной x в дробных степенях производятся только рациональные операции (сложение, вычитание, умножение, деление).

Пример 5.11

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \left(x = t^6 \right) = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1}.$$

Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь. Выделим

целую часть: $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$.

$$I = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \cdot \frac{t^2}{2} + 6t - 6 \ln|t+1| = \\ = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$$

2. Если подынтегральная функция является рациональной функцией R выражений в дробных степенях, $\int R\left(x, (ax+b)^{n/m}, \dots, (ax+b)^{p/q}\right) dx$, то применяется подстановка $(ax+b) = t^r$ где r - общий знаменатель дробей $\frac{n}{m}, \dots, \frac{p}{q}$.

5.10 Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ всегда можно преобразовать к интегралам от рациональной дроби с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда $x = 2 \arctg t$, и

$$dx = \frac{2dt}{t^2 + 1}. \quad (5.12)$$

Функции $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через новую переменную t :

$$\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}. \quad (5.13)$$

Пример 5.12 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Решение: преобразуем интеграл, используя формулы (5.12), (5.13).

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{2dt/(t^2 + 1)}{2t/(t^2 + 1) + (1 - t^2)/(t^2 + 1)} = \int \frac{2dt}{2t + 1 - t^2} = \\ = \int \frac{2dt}{(\sqrt{2})^2 - (t-1)^2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + t - 1}{\sqrt{2} - t + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка приводит к сложным рациональным дробям, когда функции $\sin x$ и $\cos x$ присутствуют в степенях выше первой. Поэтому в отдельных частных случаях применяются другие подстановки, которые быстрее приводят к цели.

Частные случаи тригонометрических выражений

1) Интеграл вида $\int R(\sin x) \cos x dx$ приводится к виду $\int R(t) dt$ подстановкой $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

2) Интеграл вида $\int R(\cos x) \sin x dx$ приводится к виду $\int R(t) dt$ подстановкой $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$.

3) Интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ приводится к виду $\int R(t) \frac{dt}{t^2 + 1}$ подстановкой

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \arctg t, \quad dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$



- 4) В интегралах вида $\int R(\sin^n x, \cos^m x) dx$, где показатели степени n, m - четные, используется подстановка, похожая на универсальную: $\operatorname{tg} x = t$.

Тогда $x = \arctgt$, $dx = \frac{dt}{t^2 + 1}$; $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2 + 1}$; $\cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1}$.

- 5) Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где n, m - целые числа, положительные или отрицательные.

а) Один из показателей степени – нечетное число, например, $n = 2p + 1$, где p - целое число. Тогда возможно следующее преобразование:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cdot (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x). \text{ Затем } \sin x = t.$$

- б) Показатели степени положительные и четные:
 $n > 0, m > 0, n = 2p, m = 2q, p, q \in \mathbb{N}$.

При вычислении интеграла применяются формулы понижения степени
 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$

- 6) Интегралы от произведения тригонометрических функций

$$\int \cos nx \cdot \cos m x dx, \int \sin nx \cdot \cos m x dx, \int \sin nx \cdot \sin m x dx$$

вычисляются с использованием формул, которые преобразуют произведение в сумму.

5.11 Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок

С помощью тригонометрических подстановок вычисляются интегралы вида $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt$, то есть содержащие под знаком квадратного корня квадратный трехчлен.

Путем выделения полного квадрата под знаком радикала и перехода при этом к новой переменной x в зависимости от знака старшего коэффициента a и от знака дискриминанта D подкоренного выражения возможны следующие случаи.

- 1) Если $a > 0, D > 0$, то интеграл преобразуется к виду

86

$$\int R\left(x, \sqrt{m^2 x^2 - n^2}\right) dx. \text{ Подстановка } x = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{\cos u}, dx = \frac{n}{m} \cdot \frac{\sin u}{\cos^2 u} du.$$

- 2) Если $a < 0, D > 0$, интеграл преобразуется к виду

$$\int R\left(x, \sqrt{n^2 - m^2 x^2}\right) dx. \text{ Подстановка } x = \frac{n}{m} \sin u, dx = \frac{n}{m} \cos u du.$$

- 3) Если $a > 0, D < 0$, интеграл преобразуется к виду

$$\int R\left(x, \sqrt{m^2 x^2 + n^2}\right) dx. \text{ Подстановка } x = \frac{n}{m} \operatorname{tgu}, dx = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du.$$

5.12 Указания к выполнению задания 2

- 1) Один из способов определения интеграла по пункту а) приведен в примере 5.2 параграфа 5.2. Другой способ – нахождение неопределенного интеграла методом подстановки рассмотрен в следующем примере.

Пример 5.13 Найти неопределенные интегралы методом подстановки:
 $\int 3^{7x} dx, \int (4x - 1)^{19} dx.$

Решение

$\int 3^{7x} dx$. Пусть $7x = u$, тогда $x = \frac{1}{7}u, dx = \frac{1}{7}du$. Подставим новую переменную в интеграл: $\int 3^u \frac{1}{7} du = \frac{1}{7} \int 3^u du$. Вынесли постоянный множитель за знак интеграла и получили табличный интеграл (таблица 1, пункт 3, где $a = 3$). $\frac{1}{7} \int 3^u du = \frac{1}{7} \cdot \frac{3^u}{\ln 3} + C = \frac{3^{7x}}{7 \cdot \ln 3} + C.$

$\int (4x - 1)^{19} dx$. Пусть $4x - 1 = u$. Тогда $x = \frac{1}{4}u + 1, dx = \frac{1}{4}du$.

Подставим новую переменную в интеграл: $\int u^{19} \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int u^{19} du$. Вынесли постоянный множитель за знак интеграла и получили табличный интеграл (таблица 1, пункт 1, где $n = 19$).

$$\frac{1}{4} \int u^{19} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{20}}{20} + C = \frac{(4x - 1)^{20}}{80} + C.$$

Подчеркнем, что после определения первообразной относительно новой переменной обязательно нужно вернуться к старой переменной x .

- 2) При решении интегралов по пункту б) применяется частный случай метода подстановки – подведение выражения под знак дифференциала.

В подынтегральном выражении нужно отыскать функцию $\phi(x)$, производная от которой $\phi'(x)$ также присутствует в подынтегральном



выражении. Используем подстановку $t = \phi(x)$, при этом $\phi'(x)dx = dt$. Использование приема подведения выражения под знак дифференциала рассмотрено в примерах 5.6 и 5.7 параграфа 5.5.

При решении интегралов пункта б) нужно воспользоваться таблицей производных из материала 1-го семестра. Так, очевидно, что $(x^2)' = 2x$,

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ и так далее. Кроме того,

$$(1 + \sin x)' = \cos x.$$

3) В пункте в) задан интеграл от правильной рациональной дроби. Этот интеграл равен сумме интегралов от простейших дробей. Простейшие дроби нужно получить разложением заданной рациональной дроби. Теория вопроса описана в параграфах 5.6 – 5.8. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5.14 Найти неопределенный интеграл $\int \frac{2x + 26}{(x - 7)(x + 3)} dx$.

Решение. Под знаком интеграла – правильная рациональная дробь, знаменатель которой разложен на простейшие линейные множители. Каждый линейный множитель соответствует простому действительному корню знаменателя. Из параграфа 5.8: «каждому простому действительному корню соответствует простейшая дробь 1-го типа». Поэтому рациональная дробь равна сумме двух простейших дробей 1-го типа:

$$\frac{2x + 26}{(x - 7)(x + 3)} = \frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 3} = \frac{A(x + 3) + B(x - 7)}{(x - 7)(x + 3)}. \quad \text{Коэффициенты}$$

A, B - неизвестны. Чтобы их найти мы сложили две дроби, а теперь приравняем числители исходной дроби и полученной:

$$2x + 26 = A(x + 3) + B(x - 7).$$

Равенство справедливо для всех значений x . Удобно задать такие значения x , при которых выражение упрощается.

Пусть $x = -3$, тогда $2(-3) + 26 = 0 + B(-3 - 7)$, $B = -2$.

Пусть $x = 7$, тогда $2 \cdot 7 + 26 = A(7 + 3)$, $A = 4$.

Итак, $\frac{2x + 26}{(x - 7)(x + 3)} = \frac{4}{x - 7} + \frac{-2}{x + 3}$, следовательно,

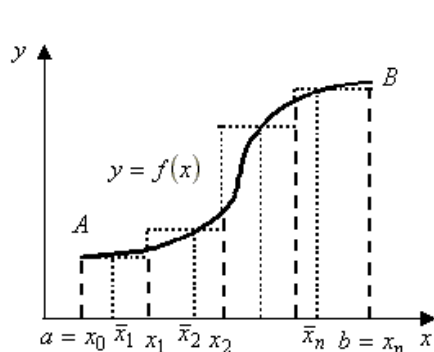
$$\int \frac{2x + 26}{(x - 7)(x + 3)} dx = 4 \int \frac{dx}{x - 7} - 2 \int \frac{dx}{x + 3} = 4 \cdot \ln|x - 7| - 2 \cdot \ln|x + 3| + C.$$

6 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1 Задача о площади криволинейной трапеции, определение определенного интеграла

- К понятию определённого интеграла приводят множество прикладных задач:
- 1) вычисление площади криволинейной трапеции;
 - 2) вычисление работы, которую совершает переменная сила при перемещении материальной точки из одного положения в другое;
 - 3) вычисление объёма произведенной продукции за определенный промежуток времени при переменной производительности труда.

Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ определена функция $y = f(x) > 0$ (рисунок 6.1). Вычислим площадь фигуры $aABb$, которая ограничена графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (фигуру $aABb$ называют *криволинейной трапецией*). Для этого отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ разбиваем на n частей, внутри каждого частичного интервала $[x_{i-1}, x_i]$ выбираем произвольную точку $\bar{x}_i$.



Если принять значение функции в каждом частичном отрезке постоянным и равным $f(\bar{x}_i)$, то криволинейная трапеция будет заменена ступенчатой фигурой, площадь которой определяется по формуле

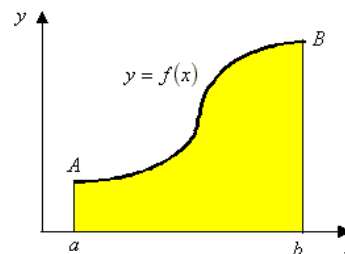
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i. \quad (6.1)$$

Рисунок 6.1 – Площадь криволинейной трапеции

Сумма (6.1) называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина частичного интервала. Площадь S_n приблизительно равна площади криволинейной трапеции $aABb$.

Определение. Если существует предел интегральных сумм S_n при условии, что $n \rightarrow \infty$ и длина каждого частичного отрезка стремится к нулю, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и от выбора точек $\bar{x}_i$, то он называется определённым интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\max \Delta x \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i. \quad (6.2)$$



При этом определённый интеграл равен *площади криволинейной трапеции $aABb$* , ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. В этом состоит *геометрический смысл* определенного интеграла (см. рисунок 6.2).

Рисунок 6.2 – Геометрический смысл определенного интеграла $S_{aABb} = \int_a^b f(x) dx$

Название элементов определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$: $\int$ – знак

определенного интеграла, где a – нижний предел, b – верхний предел интегрирования; x – переменная интегрирования; dx – дифференциал переменной интегрирования; $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

6.2 Экономический смысл определенного интеграла [4]

Рассмотрим задачу о вычислении объёма произведенной продукции за промежуток времени от $t = \alpha$ до $t = \beta$ по известной зависимости на этом интервале производительности труда от времени: $\Pi = \Pi(t)$.

Поскольку производительность труда меняется в зависимости от времени, мы не можем определить объём продукции умножением производительности на затраченное время. Поэтому для вычисления объёма поступим следующим образом. Разобьём промежуток времени от α до β на большое число n

равных интервалов времени длительностью $\Delta t = \frac{\beta - \alpha}{n}$. Если Δt

достаточно мало, то без большой ошибки можно считать производительность $\Pi(t)$ постоянной на каждом интервале и равной $\Pi(\tau_k)$, где τ_k – середина интервала с номером k . Тогда объём продукции ΔQ_k , произведенной за время $\Delta t = \Delta t_k$, можно найти умножением: $\Delta Q_k \approx \Pi(\tau_k) \cdot \Delta t_k$.



Следовательно, объём всей продукции за время от $t = \alpha$ до $t = \beta$ приближенно можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^n \Pi(\tau_k) \cdot \Delta t_k.$$

Но эта сумма является интегральной суммой для функции $\Pi(t)$ на промежутке $[\alpha; \beta]$. Поэтому её предел при $\Delta t \rightarrow 0$ для непрерывной функции $\Pi(t)$ равен определенному интегралу от функции $\Pi(t)$ в пределах от $t = \alpha$ до $t = \beta$, т.е.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Pi(\tau_k) \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} \Pi(t) dt.$$

Итак, определенный интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} \Pi(t) dt$, где $\Pi(t)$ - зависящая от времени производительность труда, равен объёму продукции, выпущенной производителем за промежуток времени от $t = \alpha$ до $t = \beta$. Это и есть одна из возможных экономических интерпретаций определенного интеграла.

6.3 Свойства определённого интеграла

Свойства определенного интеграла доказываются на основе его определения (6.2), а также могут быть объяснены с помощью геометрического смысла.

1. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.
2. Постоянный множитель выносится за знак интеграла.
3. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на

противоположный
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

4. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, что можно объяснить как следствие предыдущего свойства: $\int_a^a f(x) dx = 0$.

5. Для произвольного расположения точек a, b, c на числовой оси справедливо

равенство
$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

6. Интеграл от знакопостоянной функции есть число того же знака, что и функция: $\int_a^b f(x) dx > 0$, если $f(x) > 0$; $\int_a^b f(x) dx < 0$, если $f(x) < 0$.

7. Абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины функции: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

8. Определённый интеграл не зависит от переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

9. Оценка определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем наименьшее и наибольшее значения, равные m, M , то значение интеграла можно оценить по формуле:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

10. Если подынтегральная функция – непрерывная, то внутри отрезка интегрирования $[a; b]$ существует хотя бы одна точка C , такая, что значение функции в ней, умноженное на длину отрезка интегрирования, равно определённому интегралу (теорема о среднем).

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a).$$

6.4 Формула Ньютона – Лейбница

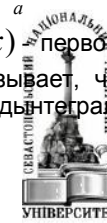
Формула Ньютона – Лейбница является основной формулой интегрального исчисления.

Важность формулы в том, что она даёт простой способ вычисления определённого интеграла, который позволяет не прибегать к вычислению предела интегральных сумм S_n .

Формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (6.3)$$

Здесь функция $F(x)$ первообразная для подынтегральной функции $f(x)$. Формула (6.3) показывает, что определённый интеграл равен приращению первообразной от подынтегральной функции на отрезке интегрирования.



Применение формулы Ньютона - Лейбница покажем на примере.

Пример 6.1 Вычислить интеграл

$$\int_1^3 (x^2 - 5x + 4) dx.$$

Решение. Для вычисления интеграла находим первообразную и вычисляем её приращение на отрезке интегрирования. Используем свойства определённого интеграла №1, №2.

$$\int_1^3 (x^2 - 5x + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_1^3 = (\text{найдена первообразная}$$

подынтегральной функции; пределы интегрирования проставлены после вертикальной черты)=

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 5 \cdot \frac{3^2}{2} + 4 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 5 \cdot \frac{1^2}{2} + 4 \right) = -\frac{10}{3} \quad (\text{вычислена разность между}$$

значениями первообразной при $x=3$ и $x=1$).

6.5 Способы вычисления определённого интеграла

Общий способ. Общее правило вычисления определённого интеграла заключается в применении формулы Ньютона – Лейбница (6.3). Для этого нужно найти первообразную и вычислить её приращение на интервале интегрирования (см. пример 6.1).

Интегрирование по частям. Формула интегрирования по частям (5.6), применяемая в неопределённом интеграле, справедлива и для определённого интеграла со всеми рекомендациями по её применению. Различие заключается в том, что для найденной первообразной в определённом интеграле нужно найти её приращение.

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид:

$$\int_a^b U dV = U \cdot V \Big|_a^b - \int_a^b V dU. \quad (6.4)$$

Пример 6.2 Вычислить интеграл:

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \left(\begin{array}{l} \ln x = U, \quad dU = \frac{dx}{x} \\ x^2 dx = dV, \quad V = \frac{x^3}{3} \end{array} \right) = \left(\frac{x^3}{3} \ln x \right) \Big|_1^e -$$

$$- \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \ln 1 - \left(\frac{x^3}{9} \right) \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

Интегрирование методом подстановки. Пусть для вычисления

определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$ применяется подстановка $x = g(t)$.

В этом случае пределы интегрирования изменяются, и их рассчитывают по формулам: $a = g(A)$, $b = g(B)$. Справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_A^B f(g(t)) \cdot g'(t) dt. \quad (6.5)$$

При использовании формулы (6.5) не нужно переходить к старой переменной интегрирования после определения первообразной, как это делается в неопределённом интеграле.

Пример 6.3 Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

Решение

Обозначим $t = 4 + x^2$, тогда $dt = 2x dx$. Пересчитаем пределы интеграла на новую переменную: при $x = 0 \Leftrightarrow t = 4$, при $x = 2 \Leftrightarrow t = 8$. Запишем интеграл с новой переменной, предварительно умножив и разделив на 2:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x dx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{t}}{1/2} \Big|_4^8 = \sqrt{8} - \sqrt{4} = 2\sqrt{2} - 2.$$

6.6 Указания к выполнению задания 3

Интегралы в задании 3 вычисляются с применением формулы (6.4) интегрированием по частям в определенном интеграле.

1. Интегралы 3.4 и 3.9 вычисляются подобно тому, как в примере 6.2.
2. В интегралах 3.1, 3.2, 3.3, 3.7, 3.8, 3.10 новой переменной U нужно обозначить соответственно $(x+1)$, x , $(x+4)$, $(x-3)$, $(x+1)$, x . Оставшийся сомножитель в подынтегральном выражении обозначается как dV .



Пример 6.4 $\int_0^{\pi/2} (x-6) \cos x dx$

Решение. Обозначим $U = x - 6$, тогда $dU = d(x - 6) = dx$.
 $dV = \cos x dx$, $V = \int \cos x dx = \sin x$. Подставим полученные выражения в формулу (6.4):

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (x-6) \cos x dx &= (x-6) \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \\ &= (x-6) \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} - 6 \right) \sin \frac{\pi}{2} - (0-6) \sin 0 + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \\ &= \frac{\pi}{2} - 6 - 1 = \frac{\pi}{2} - 7. \end{aligned}$$

Вспомним, что $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Кроме того, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$.

Натуральный логарифм имеет значения: $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

3. Для вычисления интегралов 3.5 и 3.6 формула интегрирования по частям применяется два раза. Первообразная вычисляется, как в примере 5.4, а затем учитываются пределы интегрирования.

Пример 6.5 $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \left(\begin{array}{l} U = e^x, dU = e^x dx, \\ dV = \cos x dx, V = \sin x \end{array} \right) =$

$$= e^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = \left(\begin{array}{l} U = e^x, dU = e^x dx, \\ dV = \sin x dx, V = -\cos x \end{array} \right) =$$

$$= e^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \left(-e^x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \right).$$

Таким образом, в левой и правой частях равенства стоят одинаковые интегралы:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \left(-e^x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \right).$$

Перенесем интеграл из правой части в левую:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx &= e^x (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} = e^{\pi/2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - \\ &- e^0 (\sin 0 + \cos 0) = e^{\pi/2} - 1. \\ \text{Окончательно, } \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} e^{\pi/2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6.7 Несобственные интегралы

Понятие несобственного интеграла является обобщением понятия определенного интеграла от непрерывной функции на конечном отрезке.

6.7.1 Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях аргумента $a \leq x < \infty$. Для такого бесконечного интервала понятие интегральной суммы не определено.

Если существует конечный предел от интеграла с переменным верхним пределом

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

то он называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале $[a, \infty)$ и обозначается интегралом, в верхнем пределе которого стоит знак бесконечности:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (6.6)$$

В этом случае несобственный интеграл *существует (сходится)*. Если не существует конечного предела (6.6), то несобственный интеграл *не существует (расходится)*.

Аналогично определяются несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним пределами:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx; \quad (6.7)$$



$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (6.8)$$

Формулы (6.6), (6.7), (6.8) кроме определения несобственного интеграла показывают способ его вычисления.

6.7.2 Интегралы от разрывных функций

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leq x < c$, а при $x = c$ либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об интеграле

$$\int_a^c f(x) dx$$

как о пределе интегральных сумм, так как функция $f(x)$ не является непрерывной на интервале $[a; c]$.

Если существует конечный предел интеграла от разрывной при $x=c$ функции, то он называется несобственным сходящимся интегралом:

$$\lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (6.9)$$

В противном случае интеграл называется расходящимся.

Если функция имеет разрыв при $x=a$, то по определению

$$\lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (6.10)$$

Если функция имеет разрыв при $x=c$, где точка c лежит внутри интервала интегрирования $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c-0} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c+0} \int_t^b f(x) dx. \quad (6.11)$$

Пример 6.6 Вычислить несобственные интегралы и установить их

сходимость: а) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение

а) Интеграл с бесконечным верхним пределом вычисляем по формуле (6.6):

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x^2} d(-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-x^2} \right]_0^b = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-b^2} - e^0] = \frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится.

б) Несобственный интеграл имеет разрыв в нижнем пределе интегрирования функции, интеграл вычисляем по формуле (6.10):

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \rightarrow 0+0} \int_c^4 x^{-1/2} dx = \lim_{c \rightarrow 0+0} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_c^4 = \lim_{c \rightarrow 0+0} \left[2 \cdot 4^{1/2} - 2 \cdot c^{1/2} \right] = 4.$$

Интеграл сходится.

6.8 О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

По сути вопроса можно сказать следующее:

во-первых, всякая непрерывная на отрезке функция имеет на нем первообразную [1];

во-вторых, не всякая первообразная может быть выражена комбинацией конечного числа элементарных функций.

Такие первообразные выражены интегралами $\int e^{x^2} dx$, $\int \sin(x^2) dx$,

$\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ и многими другими.

Применение формулы Ньютона – Лейбница в случае «не берущихся» интегралов затруднительно.

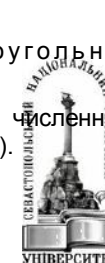
6.9 Численные методы интегрирования

Если подынтегральная функция определенного интеграла не имеет первообразной в элементарных функциях, слишком сложная, или задана табличным способом, определенный интеграл можно вычислить приближенно методами численного интегрирования.

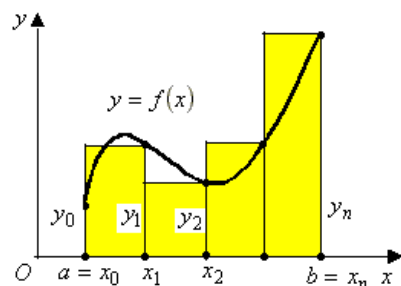
Формулы численного интегрирования дают приближенные значения определенного интеграла, если известны значения подынтегральной функции в некоторых точках (узлах) интервала интегрирования. Формулы могут быть объяснены с точки зрения геометрического смысла определенного интеграла.

Метод прямоугольников. Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Величина интеграла численно равна площади криволинейной трапеции (см. §6.1, рисунки 6.1, 6.2).



Отрезок интегрирования $[a; b]$ разобьём точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n равных частичных отрезков, длина каждого из которых равна $h = \frac{b-a}{n}$. Величина h называется шагом интегрирования.



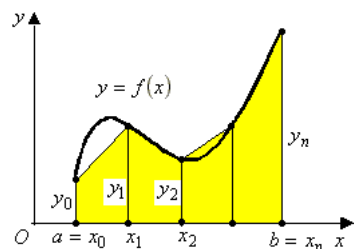
Значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках разбиения обозначим $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$. Заменяем криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, состоящей из прямоугольников с одинаковыми основаниями h .

Рисунок 6.3 – Метод прямоугольников

Пусть за высоту каждого i -го прямоугольника принято значение y_i , восстановленное из правого конца его основания, как показано на рисунке 6.3. Тогда площадь ступенчатой фигуры, приближенно равной определенному интегралу, вычисляется по **формуле прямоугольников**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_1 h + y_2 h + \dots + y_n h = h \sum_{i=1}^n y_i. \quad (6.12)$$

Метод трапеций.



Площадь криволинейной трапеции можно вычислить приближенно другим способом. Соединим точки графика функции $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ отрезками прямых (рисунок 6.4). При этом каждая частичная криволинейная трапеция заменяется обычной трапецией. Используя формулу вычисления площади трапеции, вычислим приближенно интеграл.

Рисунок 6.4 – Метод трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h.$$

Перегруппируем слагаемые в правой части, получим **формулу трапеций**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \cdot h. \quad (6.13)$$

7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1 Функции нескольких переменных. Область определения, граница. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность. Применение в экономических задачах

Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y , из некоторой области их изменения D , по закону f ставится в соответствие определённое значение величины U , то говорят, что U есть *функция двух переменных x и y , определённая в области D* . Функция двух переменных обозначается так: $U = f(x, y)$.

Функция может иметь не только две, но и три и более независимых переменных, например, $U = f(x, y, z, t)$.

Всё новое, что возникает в дифференциальном исчислении при переходе от функции одной переменной к функции нескольких переменных, свойственно уже функции двух переменных. Поэтому рассматриваем функцию двух переменных с кратким обобщением на функции нескольких переменных.

Совокупность пар (x, y) значений x и y , при которых определяется функция $U = f(x, y)$, называется *областью существования* или *областью определения* этой функции. При этом пара (x, y) определяет точку $M(x, y)$ в области существования. Следовательно, область определения – часть плоскости xOy . *Окрестностью* точки $M(x, y)$ является открытый круг малого радиуса с центром в этой точке.

Функцию двух переменных можно рассматривать, как функцию точки M : $U = f(M)$. Если задана функция 3-х переменных, $U = f(x, y, z)$, то одно значение трех переменных (x, y, z) определяет точку $M(x, y, z)$ в пространстве. Функцию 3-х переменных, $U = f(x, y, z)$, можно снова рассматривать как функцию точки, но уже в трехмерном пространстве $U = f(M)$.

Область определения обладает свойствами связности и открытости.

Свойство связности заключается в том, что две точки, принадлежащие области можно соединить непрерывной линией, полностью лежащей в области.

Свойство открытости заключается в том, что любая точка области входит в неё вместе со своей окрестностью.

Границей области называется точка или множество точек, не принадлежащих области, но в окрестности которых имеются точки, принадлежащие области. Например, если область D задана неравенством

$x^2 + y^2 < 1$ (открытый круг радиусом 1), то граница области – окружность $x^2 + y^2 = 1$. Если граница присоединена к области, то область называется замкнутой.

В области D существует множество точек, в которых функция $U = f(x, y)$, принимает одинаковые значения. Пусть $U = C = \text{Const}$. Тогда уравнение $f(x, y) = C$ определяет линию в плоскости xOy , во всех точках которой $U = C$. Такая линия называется *линией уровня*. Если задана функция трёх переменных $U = f(x, y, z)$, то уравнение $f(x, y, z) = C$ определяет поверхность в пространстве, во всех точках которой $U = C$. Такая поверхность называется *поверхностью уровня*.

Пример 7.1 Пусть $U = x^2 + y^2$. Значениям функции $U = 4$, $U = 9$ соответствуют линии уровня $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$. Запишем уравнения в виде $x^2 + y^2 = 2^2$ и $x^2 + y^2 = 3^2$. Это уравнения окружностей с центром в начале координат и радиусом 2 и 3 соответственно.

Понятие предела и непрерывности функции нескольких переменных логически связано с такими же понятиями для функции одной переменной (см. материал 1-го семестра).

Функцию нескольких переменных будем рассматривать, как функцию точки $U = f(M)$, что позволит сформулировать определение, пригодное для функций с различным числом независимых переменных.

Определение 1. Число A называется пределом функции $U = f(M)$ при $M \rightarrow M_0$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек M , для которых выполняется неравенство $|M - M_0| < r$, имеет место неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут: $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$.

Определение 2. Функция $U = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 , если она определена в этой точке и в её окрестности, и если существует предел $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$, равный значению функции в этой точке,

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$



Особенностью определений 1 и 2 заключается в том, что при $M \rightarrow M_0$ движение точки M может происходить по любой траектории в окрестности точки M_0 , т.е. на плоскости в случае двух независимых переменных, в пространстве в случае трёх независимых переменных.

Функции многих переменных широко используются в экономических задачах [6]. Например, производственная функция нескольких переменных описывает зависимость объема выпускаемой продукции от затрачиваемых или используемых ресурсов, т.е. в записи $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выпуск y единиц продукции определяется объемами $x_1, x_2, \dots, x_n$ затрачиваемых ресурсов.

Пусть производственная функция двух переменных $Q = f(K, L)$ описывает зависимость выпуска продукции Q от вложенного капитала K и затраченного труда L . Линия уровня производственной функции называется *кривой безразличия* производства и имеет вид $f(K, L) = \text{const}$.

7.2 Частные приращения и частные производные. Теорема о равенстве частных смешанных производных

Если независимой переменной x функции $U = f(x, y)$ дать приращение Δx не изменяя при этом вторую переменную y , то функция U получит *частное приращение по x* : $\Delta_x U = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Аналогично определяется *частное приращение функции U по переменной y* :

$$\Delta_y U = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Частной производной по x функции $U = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения функции по переменной x , к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю.

Частная производная обозначается одним из символов:

$$U'_x, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Таким образом,

$$U'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \quad (7.1)$$

Аналогично, частная производная по y

$$U'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y U}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (7.2)$$

Из определений (7.1) и (7.2) следует, что частная производная по одной переменной вычисляется при условии, что другие независимые переменные являются постоянными величинами. Все правила дифференцирования функции одной переменной сохраняются.

Частные производные U'_x, U'_y функции двух переменных в общем случае также являются функциями двух переменных, которые можно дифференцировать по каждой независимой переменной. При этом получим четыре производных *второго порядка*:

$$U''_{xx} = (U'_x)'_x, \quad U''_{xy} = (U'_x)'_y, \quad U''_{yx} = (U'_y)'_x, \quad U''_{yy} = (U'_y)'_y.$$

Частные производные U''_{xy}, U''_{yx} называют *смешанными*.

Пример 7.2 Определить частные производные первого и второго порядков от функции $z = x^2 y + \sin(2x - 3y)$.

Решение

$$z'_x = 2xy + 2 \cos(2x - 3y), \quad z'_y = x^2 - 3 \cos(2x - 3y);$$

$$z''_{xx} = (2xy + 2 \cos(2x - 3y))'_x = 2y - 4 \sin(2x - 3y);$$

$$z''_{yy} = (x^2 - 3 \cos(2x - 3y))'_y = -9 \sin(2x - 3y);$$

$$z''_{xy} = (2xy + 2 \cos(2x - 3y))'_y = 2x + 6 \sin(2x - 3y);$$

$$z''_{yx} = (x^2 - 3 \cos(2x - 3y))'_x = 2x + 6 \sin(2x - 3y).$$

Равенство в примере двух частных смешанных производных $z''_{xy} = z''_{yx}$ не является случайным. На этот счёт существует *теорема о равенстве частных смешанных производных*:

Теорема. Если функция $U = f(x, y)$ и её частные производные первого и второго порядка определены и непрерывны в некоторой области D , то $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Частные производные обозначаются также символами $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$,

что позволяет указать по какой независимой переменной определяется частная производная.



7.3 Полное приращение и полный дифференциал

Если в функции $U = f(x, y)$ обе независимые переменные получают приращение, то функция получает *полное приращение*

$$\Delta U = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (7.3)$$

Главная часть полного приращения функции называется *полным дифференциалом функции*, обозначается dU и вычисляется по формуле

$$dU = U'_x \cdot \Delta x + U'_y \cdot \Delta y. \quad (7.4)$$

Полный дифференциал отличается от полного приращения на бесконечно малую высшего порядка малости. При малых значениях $\Delta x, \Delta y$ имеет место приближённое равенство $dU \approx \Delta U$, которое используется при приближённом вычислении функции в приращённой точке:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + U'_x \cdot \Delta x + U'_y \cdot \Delta y. \quad (7.5)$$

Для функции трёх переменных $U = f(x, y, z)$ полный дифференциал вычисляется по формуле

$$dU = U'_x \cdot \Delta x + U'_y \cdot \Delta y + U'_z \cdot \Delta z. \quad (7.6)$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называют дифференциалами независимых переменных и обозначают $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Тогда выражение полного дифференциала примет вид

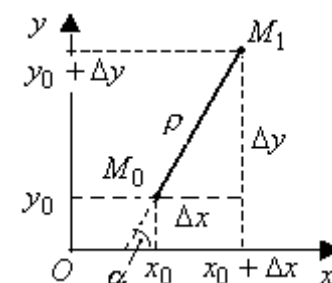
$$dU = U'_x \cdot dx + U'_y \cdot dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy. \quad (7.7)$$

7.4 Производная по направлению

Частные производные U'_x, U'_y от функции $U = f(x, y)$ определяют скорость изменения функции в направлении осей Ox, Oy . Если требуется знать скорость изменения функции в заданной точке $M(x_0, y_0)$ в направлении, образующем угол α с осью Ox , то эта задача решается нахождением *производной по направлению*.

Определение. Производной $f'_\alpha(x_0, y_0)$ функции $U = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении α называется предел отношения приращения ΔU функции, возникшего при перемещении точки M из

положения M_0 вдоль луча, составляющего угол α с положительным направлением оси Ox , к величине ρ такого перемещения, когда ρ стремится к нулю.



$$f'_\alpha(x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\rho}. \quad (7.8)$$

Из рисунка 7.1 следует, что $\Delta x = \rho \cos \alpha$, $\Delta y = \rho \sin \alpha$. Используя эквивалентность полного приращения функции и полного дифференциала, из определения производной по направлению получим:

Рисунок 7.1 – К определению производной по направлению

$$f'_\alpha(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin \alpha. \quad (7.9)$$

Пример 7.3 Вычислить в точке $M(1;2)$ производную от функции

$U = xy^2 + 1$ в направлении, составляющем угол $\frac{\pi}{6}$ с осью Ox .

Решение. $U'_\alpha(M) = (y^2)_M \cdot \cos \frac{\pi}{6} + (2xy)_M \cdot \sin \frac{\pi}{6} =$
 $= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 + 2\sqrt{3}.$

7.5 Градиент и его свойства

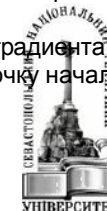
Наибольший интерес представляет вопрос о направлении быстрого возрастания функции U в точке M . Вопрос просто решается с помощью вектора - градиента функции U .

Градиентом функции $U = f(x, y)$ в данной точке $M(x, y)$ называется вектор, расположенный в плоскости xOy с началом в точке $M(x, y)$

$$\text{grad} U(x, y) = f'_x(x, y) \cdot \vec{i} + f'_y(x, y) \cdot \vec{j}. \quad (7.10)$$

Основное свойство градиента: направление градиента функции в точке является направлением быстрого возрастания функции, его модуль равен наибольшей скорости возрастания U в заданной точке.

Другое свойство градиента, он перпендикулярен касательной линии уровня, проходящей через точку начала градиента.



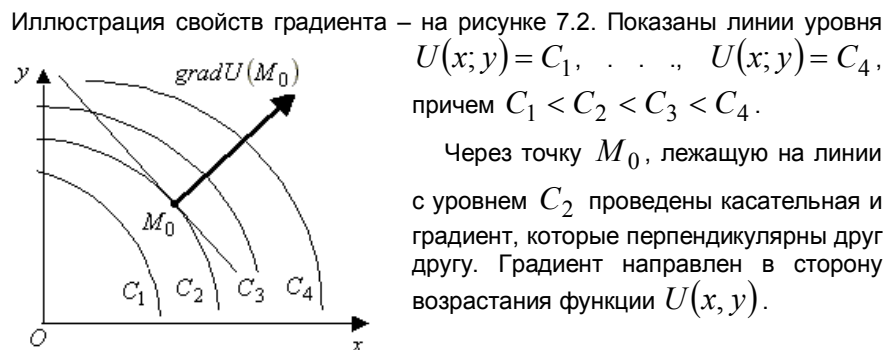


Рисунок 7.2 – Свойства градиента

7.6 Экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума

Точка M_0 называется *точкой максимума* функции $U(M)$, если значение функции в этой точке больше, чем её значение в любой другой точке некоторой (хотя бы малой) окрестности точки M_0 . Аналогично (с заменой «больше» на «меньше») определяется *точка минимума* функции.

Точки минимума и максимума объединяются под общим названием *точки экстремума*.

Для функции двух переменных точка M имеет две координаты $(x; y)$, для функции трёх переменных – три координаты $(x; y; z)$. При этом окрестностью точки $M(x, y, z)$ является открытый шар с центром в этой точке.

Поиск критических точек, т.е. точек в которых может быть экстремум функции $U = f(x, y)$, производится при помощи *необходимого условия экстремума*:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

Решение системы (7.12) определяет координаты критических точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$

Однако необходимого условия мало для существования точек экстремума. Нужно провести исследование критических точек с использованием *достаточных условий экстремума*.

Для функции двух переменных $U = f(x, y)$ введём обозначения для вторых частных производных в критической точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Достаточные условия приводим в таблице 2.

Таблица 2 – Достаточные условия экстремума функции двух переменных

№	Соотношения между A, B, C	Величина A	Вывод о наличии экстремума
1	$AC - B^2 > 0$	$A < 0, (C < 0)$	Максимум в критической точке
2	$AC - B^2 > 0$	$A > 0, (C > 0)$	Минимум в критической точке
3	$AC - B^2 < 0$	A – любое	Нет экстремума
4	$AC - B^2 = 0$	A – любое	Требуется дополнительное исследование

7.7 Пример выполнения задания 4

Задание 4. Дана функция $U = 5x^3 - 4y^2 + 7xy + 3x - 8y + 6$ и точка $A(-2, 3)$. Найти градиент функции $gradU$ в заданной точке A.

Решение

Используем формулу градиента

$$gradU = U'_x(x, y)\vec{i} + U'_y(x, y)\vec{j}.$$

Определяем частные производные и вычисляем их при $x = -2, y = 3$.

$$U'_x = 5 \cdot 3x^2 + 7y + 3 = \begin{pmatrix} x = -2 \\ y = 3 \end{pmatrix} = 15 \cdot 4 + 21 + 3 = 84,$$

$$U'_y = -4 \cdot 2y + 7x - 8 = \begin{pmatrix} x = -2 \\ y = 3 \end{pmatrix} = -24 + 7 \cdot (-2) - 8 = -46.$$

При вычислении частной производной по одной из переменных вторая переменная считается постоянной величиной!

Значения частных производных подставляем в формулу градиента:

$$gradU = 84\vec{i} - 46\vec{j}.$$

Ответ: $84\vec{i} - 46\vec{j}$.

8 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8.1 Основные определения о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную x , неизвестную функцию y и производные неизвестной функции $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Общий вид дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (8.1)$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. Например, $y'' + 4y' - 5y = x$ - это уравнение второго порядка; $y''' = \cos x$ - уравнение третьего порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество. Например, если $y = \varphi(x)$ - решение уравнения (8.1), то

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Если решение дифференциального уравнения содержит произвольные постоянные, оно называется *общим решением*. *Частное решение* дифференциального уравнения не содержит произвольных постоянных.

Методы исследования решений дифференциальных уравнений применяются при исследовании моделей реальных систем, зависящих от времени. Например, *математическая модель выравнивания цен в зависимости от спроса и предложения, является дифференциальным уравнением* второго порядка [6].

8.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка содержит первую производную y' , общий вид уравнения: $F(x, y, y') = 0$.

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть задано в одной из двух форм записи. Если уравнение разрешено относительно первой производной, то оно имеет вид:

$$y' = f(x, y). \quad (8.2)$$

Другая форма записи уравнения первого порядка:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (8.3)$$

В зависимости от вида функций $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ различают типы дифференциальных уравнений первого порядка.

Решение уравнения 1-го порядка отыскивается путем интегрирования, поэтому оно содержит произвольную постоянную C и называется в этом случае

общим решением. Вид общего решения $y = \varphi(x, C)$. Если произвольной постоянной C задать конкретное числовое значение, то решение, полученное из общего, называется *частным решением*.

Определение частного решения из общего с использованием начальных условий называется *задачей Коши* для данного уравнения (см. ниже).

Существует несколько типов уравнений первого порядка, решение которых можно определить интегрированием. Для этого вначале нужно выявить тип уравнения, а затем применить соответствующий данному типу метод решения.

8.3 Уравнения с разделяющимися переменными

Если в уравнениях (8.2), (8.3) каждую из функций $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной x или y , то такие уравнения называют уравнениями с *разделяющимися переменными*. Уравнения могут быть записаны в формах:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (8.4)$$

$$M(x) \cdot N(y) \cdot dx + R(x) \cdot G(y) \cdot dy = 0. \quad (8.5)$$

Умножая уравнения (8.4), (8.5) на подходящее выражение, можно добиться разделения переменных (знаками $=$, $+$, $-$) и решения его путём интегрирования.

Пример 8.1 Решить уравнение $yy' = \sin x$.

Решение

Уравнение приводится к виду (8.4) делением обеих частей на y , поэтому это уравнение с разделяющимися переменными. Записав производную через отношение дифференциалов, разделим переменные: $y \frac{dy}{dx} = \sin x$,

$y dy = \sin x dx$. Из равенства дифференциалов следует равенство первообразных с точностью до произвольной постоянной. Интегрируем левую и правую части равенства.

$$\int y dy = \int \sin x dx, \quad \frac{y^2}{2} = C - \cos x.$$

Последнее выражение – общее решение уравнения в неявной форме.

Примечание – общее решение уравнения, полученное в неявном виде, называют ещё общим интегралом уравнения.

8.4 Однородные уравнения

Функция двух переменных $f(x, y)$ называется *однородной k -го измерения* относительно своих аргументов, если для любого $t \neq 0$ выполняется тождество



$$f(tx, ty) \equiv t^k \cdot f(x, y). \quad (8.6)$$

В частности, при $k = 0$ функция $f(x, y)$ называется однородной нулевого измерения.

Дифференциальное уравнение (8.2) называется однородным, если функция $f(x, y)$ - однородная нулевого измерения (для неё выполняется тождество $f(x, y) \equiv f(tx, ty)$). Уравнение (8.3) называется однородным, если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ - однородные одинакового измерения.

Решение однородного уравнения определяется в виде $y = ux$, где u - новая неизвестная функция. При подстановке в уравнения (8.2) и (8.3) выражений $y = ux$, $y' = u'x + u$, $dy = xdu + udx$, эти уравнения преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной u .

Пример 8.2 Решить уравнение $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$;

Решение

Уравнение вида (8.2). Проверим выполнение тождества (8.6):

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}; \quad f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{tx \cdot ty} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2 \cdot x \cdot y} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Следовательно, $f(x, y) = f(tx, ty)$, функция $f(x, y)$ - однородная нулевого измерения. Данное уравнение – однородное. Пусть $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$\text{Тогда } u'x + u = \frac{x^2 + u^2 x^2}{xux}, \quad u'x + u = \frac{1 + u^2}{u}, \quad u'x = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dx} x = \frac{1}{u}.$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными, которое затем решаем:

$$u du = \frac{dx}{x}, \quad \int u du = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln C, \quad u^2 = 2 \ln|x| + \ln C^2.$$

$$\text{Переходим к переменной } y: \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2 \ln|x| + \ln C^2, \quad y^2 = 2x^2 \ln|x| + C^2 x^2, \quad y = \pm \sqrt{2x^2 \ln|x| + C^2 x^2}.$$

Последнее выражение – общее решение уравнения.

8.5 Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Линейные уравнения имеют вид:

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (8.7)$$

Они отличаются от других тем, что y и y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь.

Уравнения Бернулли имеют вид

$$y' + p(x)y = f(x) \cdot y^n, \quad (8.8)$$

где $n \neq 0, n \neq 1$.

Левые части уравнений (8.7) и (8.8) одинаковой структуры, правая часть (8.8) содержит множителем n -ю степень неизвестной y . Эти уравнения можно решать одним методом, при котором решение определяется в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ - функции, подлежащие определению. Одну из двух новых неизвестных можно выбирать произвольно. Решение линейного уравнения рассмотрим на примере.

Пример 8.3 Решить уравнение $xy' + y = \sin x$.

Решение

Разделив уравнение на x , получим уравнение вида (8.7), поэтому оно линейное. Пусть $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$. Подставим в уравнение

$xu'v + xuv' + uv = \sin x$. Сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части (можно группировать первое и третье слагаемые) $xu'v + u(xv' + v) = \sin x$. Выберем неизвестную v так, чтобы она была решением уравнения $xv' + v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его относительно неизвестной v :

$$v' = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}.$$

При определении v примем $C = 0$. Подставим значение v в уравнение: $u' = \sin x$,

$$du = \sin x dx, \quad u = \int \sin x dx + C, \quad u = C - \cos x.$$

$$\text{Окончательно, } y = uv = \frac{C - \cos x}{x}.$$

8.6 Задача Коши для уравнения 1-го порядка

Задачей Коши для уравнения 1-го порядка называется задача определения частного решения уравнения $F(x, y, y') = 0$ при заданном начальном условии $y(x_0) = y_0$.

Пример 8.4 Решить задачу Коши $xy' + y = xy^2 \ln x$, $y|_{x=e} = -\frac{1}{e}$.

Решение. Разделив уравнение на x , получим $y' + \frac{1}{x}y = y^2 \ln x$.

Это уравнение вида (8.8), где $n=2$, т.е. уравнение Бернулли. Ищем решение в виде $y = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим в уравнение



$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = u^2v^2 \ln x$. Группируем второе и третье слагаемые в

левой части $u'v + u(v' + \frac{1}{x}v) = u^2v^2 \ln x$. Выбираем v так, чтобы

выражение в скобках равнялось нулю $v' + \frac{1}{x}v = 0$. Откуда $v = \frac{1}{x}$ (см.

пример 8.3). Подставим в уравнение

$$u' \cdot \frac{1}{x} = u^2 \cdot \frac{1}{x^2} \ln x, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x} dx, \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx + C$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \quad u = -\frac{1}{0,5 \ln^2 x + C}.$$

Общее решение $y = uv = -\frac{1}{x(0,5 \ln^2 x + C)}$.

8.7 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

8.7.1 Основные определения

Дифференциальное уравнение n -го порядка, вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (8.9)$$

называется линейным. Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ - функции независимой переменной x , или постоянные числа. Функция независимой переменной $f(x)$ называется правой частью уравнения (8.9).

Если правая часть $f(x) \neq 0$, то уравнение (8.9) называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением, сокращенно ЛНДУ. Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0 \quad (8.10)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением, сокращенно ЛОДУ.

Если в уравнениях (8.9) и (8.10) левые части совпадают, то уравнение (8.10) называется ЛОДУ, соответствующим ЛНДУ (8.9).

Для линейного уравнения n -го порядка (однородного или неоднородного) задача Коши формулируется следующим образом: определить частное

решение уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

8.7.2 Свойства решений ЛОДУ

Свойства решений ЛОДУ сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. Если y_1 и y_2 - решения однородного уравнения (8.10), то сумма $y_1 + y_2$ также решение этого уравнения.

Теорема 2. Если $y_1(x)$ - решение уравнения (8.10), $C = const$, то $C \cdot y_1(x)$ также решение этого уравнения.

8.7.3 Линейно независимые функции

Система функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, определенных в интервале $(a; b)$, называется линейно независимой в этом интервале, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных для всех значений $x \in (a; b)$.

С другой стороны, функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что для всех значений x в интервале $(a; b)$ выполняется тождественно соотношение $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n \equiv 0$.

(Если не существуют не равные нулю постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такие, что выполняется последнее тождество, то функции линейно независимы).

8.8 Структура общего решения линейного однородного уравнения

Любая система n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения n -го порядка называется *фундаментальной системой*.

Для всякого линейного однородного дифференциального уравнения существует фундаментальная система решений.

Теорема. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений однородного линейного уравнения (8.10), то общее решение уравнения определяется формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n. \quad (8.11)$$



Примечание – теорема справедлива для произвольных ЛОДУ, как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Пример 8.5 Уравнение $y'' - y = 0$ имеет два частных решения

$y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$, что легко проверить подстановкой. Такие решения линейно независимы. Они образуют фундаментальную систему заданного дифференциального уравнения. Согласно теореме, общее решение уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

8.9 ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение

Если ЛОДУ имеет переменные коэффициенты, фундаментальную систему решений найти чрезвычайно сложно. Но если коэффициенты уравнения все постоянные числа, имеется единый метод определения фундаментальной системы, независимый от порядка дифференциального уравнения.

В экономических и технических приложениях чаще всего используются линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейное однородное уравнение второго порядка имеет вид:

$$y'' + by' + cy = 0. \quad (8.12)$$

Чтобы найти частные решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, нужно составить для него характеристическое уравнение и решить его.

Характеристическое уравнение составляется по следующему правилу: сохраняя коэффициенты b, c ЛОДУ, нужно заменить функцию y единицей, а её производные – соответствующими степенями k .

Для уравнения (8.12) характеристическое уравнение является квадратным алгебраическим уравнением вида

$$k^2 + bk + c = 0.$$

Напомним, что решение квадратного уравнения

$$ak^2 + bk + c = 0$$

определяется по формулам:

$$k_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad k_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad (8.13)$$

где дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных различных корня.

Если $D = 0$, то уравнение имеет два одинаковых корня.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней, но корни уравнения, все таки, есть.

Предположим, дискриминант квадратного уравнения $D = -16$. Тогда корень квадратный из -16 можно записать в виде:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot \sqrt{-1}.$$

Обозначим $\sqrt{-1} = i$ и назовем i мнимой единицей. Подставим значение корня из дискриминанта в формулы (8.13). Корни k_1 и k_2 будут содержать мнимую единицу i . Числа, содержащие мнимую единицу, называются комплексными.

Таким образом, если $D < 0$, то квадратное уравнение имеет два комплексных корня вида $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$.

При этом α - действительная часть комплексного числа, β - мнимая часть комплексного числа. Комплексные корни квадратного уравнения отличаются друг от друга знаком мнимой части. Такие комплексные числа называются сопряженными.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения общее решение ЛОДУ второго порядка можно определить с помощью следующей таблицы 3 общих решений ЛОДУ второго порядка.

Таблица 3 - Общее решение ЛОДУ второго порядка

Корни характеристического уравнения	Общее решение ЛОДУ
1 $k_1 \neq k_2$ корни действительные	$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2 $k_1 = k_2$ корни действительные	$\bar{y} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$
3 $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ корни комплексные	$\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
4 $k_{1,2} = \pm \beta i$ корни мнимые	$\bar{y} = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

8.10 Пример выполнения задания 5

Задание 5. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

В задании требуется найти частное решение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами (ЛОДУ), удовлетворяющее указанным начальным условиям, то есть решить задачу Коши.

Задача решается в следующей последовательности.



1. Для заданного уравнения записывается характеристическое уравнение, и определяются его корни.
2. По таблице 3 общих решений ЛОДУ в зависимости от найденных корней записывается общее решение.
3. Определяется производная от общего решения.
4. Подставляя в решение и его производную начальные условия, находим значения произвольных постоянных C_1, C_2 .
5. Записывается частное решение с найденными значениями произвольных постоянных C_1, C_2 .

Ход выполнения задания 5 иллюстрируется в следующих примерах. В примере 8.6 выполнены два первых пункта задания; в примере 8.7 выполнены все пункты задания 5.

Пример 8.6 Найти общие решения уравнений:

а) $y'' - 2y' + 10y = 0$, б) $y'' + 16y = 0$, в) $y'' + y' - 6y = 0$.

Решение

а) Записываем характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 10 = 0$.

Вычисляем дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36$. Находим корень квадратный из дискриминанта: $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6 \cdot i$. По формулам (8.13) вычисляем корни.

$k_1 = \frac{2 - i6}{2} = 1 - 3i$, $k_2 = \frac{2 + i6}{2} = 1 + 3i$. Корни уравнения комплексные и сопряжённые. Согласно пункту 3 таблицы 3 общее решение уравнения

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

б) Записываем характеристическое уравнение: $k^2 + 16 = 0$. В неполном квадратном уравнении дискриминант вычислять не надо; $k^2 = -16$, отсюда $k_1 = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$, $k_2 = -\sqrt{-16} = -4i$. Действительные части корней равны нулю. Согласно пункту 4 таблицы 3 общее решение ЛОДУ имеет вид:

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

в) Составляем характеристическое уравнение $k^2 + k - 6 = 0$. Корни характеристического уравнения $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, что соответствует пункту 1 таблицы 3 общих решений ЛОДУ. Общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$.

Пример 8.7 Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 - 2k + 1 = 0$ действительные, кратные $k_1 = k_2 = 1$. Согласно пункту 2 таблицы 3 общее

решение $y = e^x (C_1 + C_2 x)$. Производная общего решения имеет вид:

$y' = e^x (C_1 + C_2 + C_2 x)$. Согласно начальным условиям, при $x=0$ функция $y=1$, её производная равна -1 . Подставим в общее решение и его производную значения, заданные начальными условиями, получим систему уравнений

относительно неизвестных C_1, C_2 :

$$\begin{cases} e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) = 1, \\ e^0 (C_1 + C_2 + C_2 \cdot 0) = -1, \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + C_2 = -1, \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Запишем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = e^x (1 - 2x).$$

8.11 Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

Как указано в §8.7, уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (8.14)$$

называется линейным неоднородным дифференциальным, сокращенно ЛНДУ. Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0, \quad (8.15)$$

Общее решение неоднородного линейного уравнения есть сумма общего решения $\bar{y}$ однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному, и частного решения неоднородного уравнения Y . С учетом формулы (8.11) общее решение ЛНДУ имеет вид:

$$y = \bar{y} + Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + Y. \quad (8.16)$$

Формула (8.16) определяет структуру общего решения ЛНДУ.

8.12 Неоднородные линейные уравнения со специальной правой частью

Если найдена фундаментальная система решений ЛОДУ, то для любой правой части $f(x)$ ЛНДУ частное решение Y можно определить интегрированием.



Если неоднородное линейное уравнение имеет правую часть $f(x)$ определенного вида, рассматриваемого ниже, то частное решение Y можно определить, не прибегая к методу интегрирования. Рассматриваются два вида правой части, которые называются *специальными*.

1) Правая часть вида

$$f(x) = e^{\alpha x} P(x), \quad (8.17)$$

где $P(x)$ – многочлен степени m .

Частное решение нужно искать в виде

$$Y = e^{\alpha x} [A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0] \cdot x^r, \quad (8.18)$$

где неизвестные заранее коэффициенты $A_m, \dots, A_0$ определяются *методом неопределенных коэффициентов*, показатель r равен количеству корней характеристического уравнения, равных коэффициенту в показателе экспоненты.

2) Правая часть вида

$$f(x) = e^{\alpha x} [P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x], \quad (8.19)$$

где $P(x), Q(x)$ – многочлены по степеням x .

Частное решение нужно искать в виде

$$Y = e^{\alpha x} [A(x) \cos \beta x + B(x) \sin \beta x] \cdot x^r. \quad (8.20)$$

При этом многочлены $A(x)$ и $B(x)$ должны быть одинаковой степени, большей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Показатель r равен количеству пар комплексных сопряженных корней характеристического уравнения, у которых действительная часть совпадает с коэффициентом в показателе экспоненты α , а мнимая – с коэффициентом β .

Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ в формулах (8.17) и (8.19) могут не содержать некоторых степеней x . Частное решение (8.18) и (8.20) должно содержать многочлены той же степени со всеми коэффициентами.

Наличие в правой части (8.17) многочлена без экспоненты говорит о том, что показатель у экспоненты равен нулю, и для определения числа r в формуле (8.18) проверяют наличие нулевых корней характеристического уравнения.

Правая часть (8.19) может содержать только одну из функций $\sin \beta x$ или $\cos \beta x$, но частное решение (8.20) должно записываться с обеими этими функциями.

Если правая часть ЛНДУ является суммой нескольких функций

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)$, причем каждая из слагаемых $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) имеет вид формул (8.17), (8.19), то частное решение уравнения

(8.15) – сумма частных решений $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$, причём каждое слагаемое Y_i определяется одним из перечисленных выше методов.

Коэффициенты многочленов $A(x)$ и $B(x)$ определяются методом неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов основан на том, что любое решение дифференциального уравнения превращает его в тождество. Если решение Y подставить в данное ЛНДУ, уравнение превратится в тождество, в котором при одинаковых функциях левой и правой части должны стоять одинаковые коэффициенты. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x или других функциях, получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов в многочленах $A(x)$ и $B(x)$ из формул (8.18), (8.20).

Пример 8.8 Найти общее решение ЛНДУ: $y'' + y' - 6y = e^x(x-1)$.

Решение

Вначале определяется общее решение соответствующего ЛОДУ (см.

пример 8.6в): $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$. Далее находим частное решение ЛНДУ. Коэффициент в показателе экспоненты в правой части не равен корню

характеристического уравнения, следовательно, $Y = e^x(Ax + B)$. Для нахождения неизвестных A, B применяем метод неопределенных коэффициентов.

Подставим Y в заданное уравнение. Для этого нужно найти Y', Y'' .

$$Y' = e^x(Ax + B) + e^x A = e^x(Ax + A + B),$$

$$Y'' = e^x(Ax + A + B) + e^x A = e^x(Ax + 2A + B).$$

Подставляя Y, Y', Y'' в уравнение, получаем

$$e^x(Ax + 2A + B) + e^x(Ax + A + B) - 6e^x(Ax + B) \equiv e^x(x-1).$$

Разделим тождество на e^x , а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$-4Ax + 3A - 4B \equiv x - 1, \quad \begin{cases} -4A = 1, \\ 3A - 4B = -1, \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{16}.$$

Следовательно, искомое общее решение записывается как

$$y = \bar{y} + Y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + e^x \left(\frac{1}{16} - \frac{x}{4} \right).$$



9 РЯДЫ

9.1 Ряды. Основные определения

Пусть $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$ бесконечная числовая последовательность.

Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \quad (9.1)$$

Индекс, стоящий у каждого члена ряда, указывает его порядковый номер в ряде. Выражение для U_n , зависящее от номера n и являющееся функцией номера, называется *общим членом ряда*.

Пример 9.1 Написать первые шесть членов ряда, общий член которого

задан формулой $U_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.

Решение: подставляя значение n , равные 1, 2, 3, 4, 5, 6, получаем ряд

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Сумма n первых членов ряда называется его n -ой *частичной суммой*, что обозначается

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (9.2)$$

Если в ряде отбросить первые m членов, получится ряд

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} U_k = U_{m+1} + U_{m+2} + U_{m+3} + \dots \quad (9.3)$$

называемый *остатком ряда* (9.1) *после m -го члена*.

Если существует конечный предел частичной суммы при $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (9.4)$$

то его называют *суммой ряда*, а ряд (9.1) называется *сходящимся*. Если предел (9.4) частичной суммы не существует или бесконечен, ряд называется *расходящимся*.

Основная задача теории числовых рядов – поиск ответа на вопрос, сходится данный числовой ряд, или расходится. В некоторых случаях ответ на данный вопрос можно найти, вычисляя предел (9.4).

Пример 9.2 Определить сходимость ряда: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n$;

Решение. а) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ является суммой

бесконечной геометрической прогрессии, у которой первый член $b_1 = 1/2$, знаменатель $q = 1/2$ (выполняется условие $|q| < 1$). По формуле, изученной

в средней школе, $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^n + \dots = \frac{b_1}{1-q}$, получим

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1. \text{ Числовой ряд сходится.}$$

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ состоит из членов арифметической

прогрессии, в которой $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = n$. Формула для суммы первых n

членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Для заданного ряда

$$S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{1}{2}(n+n^2). \text{ Вычислим предел (8.4): } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(n+n^2) = \infty.$$

Ряд расходится.

В тех случаях, когда невозможно определить формулу частичной суммы ряда, используются *признаки сходимости числовых рядов*.

9.2 Свойства сходящихся числовых рядов

Свойства сходящихся рядов формулируются теоремами.

Теорема 1. Если все члены ряда (9.1) умножить на одно и то же число $k \neq 0$, то ряд

$$kU_1 + kU_2 + kU_3 + \dots + kU_n + \dots \quad (9.5)$$

будет сходиться, если ряд (9.1) сходится, и будет расходиться, если ряд (9.1) расходится.

Теорема 2. Если сходятся ряды $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ и $V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots$, то будет сходиться и ряд, полученный от почленного сложения и вычитания членов этих рядов, т.е. будет сходиться ряд $(U_1 \pm V_1) + (U_2 \pm V_2) + \dots + (U_n \pm V_n) + \dots$

Теорема 3. Если в ряде (9.1) приписать или отбросить конечное число членов, то полученный от этих действий новый ряд будет сходиться, если сходится первоначальный ряд (9.1), и будет расходиться, если ряд (9.1) расходится.



Теорема 4. Если ряд (9.1) сходится, то сумма r_m его остатка (9.3) после m -го члена стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

9.3 Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ сходится, то его общий член U_n стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0. \quad (9.6)$$

Отметим, что этот признак не является достаточным, т.е. из стремления к нулю общего члена еще не следует, что ряд сходится.

Но если общий член *не стремится к нулю* при $n \rightarrow \infty$, то можно утверждать, что *ряд расходится*.

Пример 9.3 Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$

Решение: предел общего члена $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, т.е. общий член не стремится к нулю. Необходимый признак сходимости ряда не выполнен и поэтому данный ряд является расходящимся.

Пример 9.4 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение: необходимый признак сходимости ряда в данном случае выполняется, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, но ввиду того, что признак не является достаточным, нельзя утверждать сходимость такого ряда.

На самом деле этот ряд расходится. В литературе его называют *гармоническим*.

9.4 Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Пусть все члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$$

положительные. Для рядов с положительными членами справедливы указанные ниже достаточные признаки сходимости.

Признак Даламбера. Пусть для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \text{ существует предел отношения}$$

$$n+1\text{-го члена к } n\text{-му, т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q.$$

Если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то расходится. В случае $q = 1$ признак не даёт ответа о сходимости ряда.

Радикальный признак Коши. Пусть для ряда с положительными членами существует предел корня n -ой степени из n -го члена ряда, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = q.$$

Если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то расходится. В случае $q = 1$ признак не даёт ответа о сходимости ряда.

Интегральный признак Коши. Пусть $f(x)$ – неотрицательная, невозрастающая функция при $x > 0$, такая, что $U_1 = f(1)$, $U_2 = f(2)$,

$$U_3 = f(3), \dots \text{ Тогда ряд } \sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$$

сходится, если существует несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$. Ряд расходится, если несобственный интеграл не существует (расходится).

Замечание - нижним пределом интегрирования может быть любое другое положительное число из области существования функции $f(x)$; чтобы получить функцию $f(x)$, нужно в общем члене ряда вместо n положить x .

9.5 Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

Ряд, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным*.

Достаточный признак сходимости. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (9.9)$$

сходится, если сходится ряд (9.10), составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда



$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = |b_1| + |b_2| + |b_3| + \dots + |b_n| + \dots \quad (9.10)$$

Если сходится ряд (9.10), то ряд (9.9) называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (9.9) сходится, а ряд (9.10), составленный из модулей его членов, расходится, то ряд (9.9) называется *условно сходящимся*.

Отметим, что ряд (9.10) является рядом с положительными членами и для исследования его сходимости можно применять любые перечисленные признаки (Даламбера, Коши и т.д.).

Пример 9.12 Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^6} - \frac{1}{3^7} + \dots$$

Решение

Предложен знакопеременный ряд; составим ряд из абсолютных величин его

$$\text{членов: } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^7} + \dots$$

Этот ряд сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1/3$. Следовательно, данный ряд также сходится и, кроме того, он является абсолютно сходящимся рядом.

Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница

Ряд, у которого любые два соседних члена ряда имеют разные знаки, называется *знакопередающимся*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n = U_1 - U_3 + U_3 - U_4 + \dots \quad (9.11)$$

При этом $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ положительны (или все отрицательны).

Теорема Лейбница. Знакопередающийся ряд сходится, если выполнены два условия:

- 1) члены ряда убывают по абсолютной величине;
- 2) общий член ряда стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

При замене суммы сходящегося ряда суммой его первых членов ошибка не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов, т.е.

$$|R_n| \leq U_{n+1}.$$

Пример 9.13 Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Решение

Применим теорему Лейбница. Оба требования теоремы выполнены:

- 1) члены ряда убывают по абсолютной величине

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots;$$

2) предел общего члена $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; следовательно, ряд сходится.

Примечание – теорема Лейбница гарантирует условную сходимость ряда. Чтобы исследовать ряд на абсолютную сходимость, можно применить достаточный признак сходимости.

9.6 Функциональные ряды

Ряд, члены которого являются некоторыми функциями от переменной $x \in [a, b]$, называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \dots + U_n(x) + \dots \quad (9.12)$$

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд (9.12) становится числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) = U_1(x_0) + U_2(x_0) + U_3(x_0) + \dots + U_n(x_0) + \dots \quad (9.13)$$

Если ряд (9.13) сходится, то значение переменной $x = x_0$ называется *точкой сходимости* ряда (9.12). Совокупность всех таких точек x называется *областью сходимости* ряда.

Суммой ряда (9.12) называется функция $S(x)$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n U_i(x).$$

Остатком ряда (9.12) называется следующая функция

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x).$$

9.7 Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости

Степенной ряд – частный случай функционального ряда. Он имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots, \quad (9.15)$$

где C_n – коэффициенты ряда. При $a = 0$ ряд принимает вид



$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots \quad (9.16)$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд (9.16) сходится при некотором значении $x = x_0$, то он сходится и при том *абсолютно*, при всех значениях x , для которых $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он расходится при всех значениях x , для которых $|x| > |x_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что области сходимости и расходимости степенного ряда (9.16) расположены симметрично относительно точки $x = 0$, согласно схеме рисунка 9.1. Все точки на оси Ox относятся или к области сходимости, или к области расходимости степенного ряда, поэтому обобщением схемы рисунка 9.1 является схема рисунка 9.2.

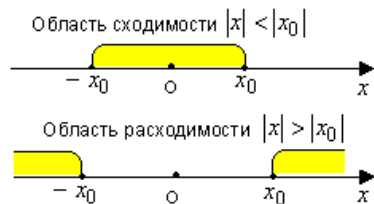


Рисунок 9.2 – Интервал сходимости

На рисунке 9.2 граничные точки между областью сходимости и расходимости обозначены $-R$, R .

Радиусом сходимости ряда (9.16) называется число R такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится. В этом случае говорят об интервале сходимости ряда $-R < x < R$; на концах интервала при $x = \pm R$ сходимость ряда необходимо исследовать отдельно.

Формула для радиуса сходимости степенного ряда (9.16):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}. \quad (9.17)$$

Примечание – формула (9.17) применяются, если показатель степени x пробегает все натуральные значения 1, 2, 3, 4, ...

9.8 Свойства сходящихся степенных рядов

Степенные ряды обладают следующими свойствами.

1. Сумма степенного ряда при всех значениях x из интервала сходимости ряда является непрерывной функцией.

2. Степенной ряд в его интервале сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз и при этом интервал сходимости продифференцированных рядов останется прежним; так

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}.$$

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему внутри интервала сходимости; ряд, полученный интегрированием от x_0 до x имеет тот же интервал сходимости, что и прежний:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} \cdot x^{n+1}.$$

4. Степенные ряды внутри своих интервалов сходимости можно почленно складывать, умножать на общий множитель, умножать друг на друга по правилу умножения многочленов.

9.9 Пример выполнения задания 6

Задание 6. Исследовать на сходимость ряд, используя признак

Даламбера: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$.

Решение

По признаку Даламбера нужно определить предел отношения $n+1$ -го члена к n -му, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$.

Если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то расходится. В случае $q = 1$ признак не даёт ответа о сходимости ряда.

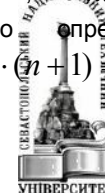
а) Выражение для n -го члена U_n стоит под знаком суммы. В нашем

случае $U_n = \frac{2^n}{n!}$. Чтобы получить выражение для $n+1$ -го члена нужно

вместо n подставить $n+1$. В нашем случае $U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Общий член ряда содержит выражение $n!$, которое читается « n – факториал». Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Так, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

При этом по определению факториала $0! = 1$. Тогда $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$.



Подставляем значения $U_n = \frac{2^n}{n!}$ и $U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ под знак предела:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$, следовательно, ряд сходится.

б) Второй ряд исследуем аналогично. $U_n = \frac{(n+1)!}{3^n}$, $U_{n+1} = \frac{(n+2)!}{3^{n+1}}$.

Подставляем значения $U_n = \frac{(n+1)!}{3^n}$, $U_{n+1} = \frac{(n+2)!}{3^{n+1}}$ под знак предела:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{3^{n+1}} : \frac{(n+1)!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+2) \cdot 3^n}{3 \cdot 3^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3} = \infty$, следовательно, ряд расходится.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ЗА ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Задание 1. Методом непосредственного интегрирования найти неопределенные интегралы.

$$1.1 \int \left(x - 4x^2 + \frac{1}{x} - \cos x \right) dx. \quad 1.6 \int \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sin x} - \cos x \right) dx.$$

$$1.2 \int \left(2x^3 - x^2 + \frac{5}{\cos x} - 8 \right) dx. \quad 1.7 \int \left(x + x^2 + \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right) dx.$$

$$1.3 \int \left(e^x + x^2 + \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{tg} x \right) dx. \quad 1.8 \int \left(2^x + 3x^2 + 4 - \cos x \right) dx.$$

$$1.4 \int \left(x + 9x^2 + \frac{1}{\sin^2 x} - 2 \right) dx. \quad 1.9 \int \left(x^2 - 4x + \frac{1}{\cos^2 x} + 7 \right) dx.$$

$$1.5 \int \left(e^x + 7x^2 + 3 + \operatorname{tg} x \right) dx. \quad 1.10 \int \left(e^x + x^2 + \frac{1}{1-x^2} - \operatorname{tg} x \right) dx.$$

Задание 2. Найти неопределенные интегралы: в пунктах а) и б) – методом подстановки; в пункте в) – разложением рациональной дроби на сумму простейших дробей.

$$2.1 \text{ а) } \int \frac{dx}{\sin^2 4x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{5x+5}{(x-1)(x+4)} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } -\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 4x + C; \text{ б) } \frac{2}{3} (\ln x)^{3/2} + C; \text{ в) } 2 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x+4| + C.$$

$$2.2 \text{ а) } \int e^{3x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\ln^2 x}{x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x-5}{(x+2)(x-1)} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } \frac{1}{3} e^{3x} + C; \text{ б) } \frac{\ln^3 x}{3} + C; \text{ в) } 3 \cdot \ln|x+2| - \ln|x-1| + C.$$

$$2.3 \text{ а) } \int 2^{5x} dx; \quad \text{б) } \int 2x \cdot \sin(x^2) dx; \quad \text{в) } \int \frac{6x-20}{x(x-5)} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } \frac{2^{5x}}{5 \ln 2} + C; \text{ б) } -\cos(x^2) + C; \text{ в) } 4 \cdot \ln|x| + 2 \cdot \ln|x-5| + C$$

$$2.4 \text{ а) } \int \frac{dx}{\cos^2 5x}; \quad \text{б) } \int 2x \cdot \cos(x^2) dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x+9}{(x-6)(x+1)} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C; \text{ б) } \sin(x^2) + C; \text{ в) } 3 \cdot \ln|x-6| - \ln|x+1| + C.$$

$$2.5 \text{ а) } \int \frac{dx}{9+4x^2}; \quad \text{б) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{5x-5}{(x-2)(x+3)} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} x + C; \text{ б) } \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C; \text{ в) } \ln|x-2| + 4 \cdot \ln|x+3| + C.$$

$$2.6 \text{ а) } \int \sin 9x dx; \quad \text{б) } \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{3x-26}{(x+3)(x-4)} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } -\frac{1}{9} \cos 9x + C; \text{ б) } \frac{\arcsin^2 x}{2} + C; \text{ в) } 5 \cdot \ln|x+3| - 2 \cdot \ln|x-4| + C.$$

$$2.7 \text{ а) } \int (3x+5)^9 dx; \quad \text{б) } \int 2x \cdot e^{x^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{9x-12}{(x-6)x} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } \frac{1}{30} (3x+5)^{10} + C; \text{ б) } e^{x^2} + C; \text{ в) } 7 \cdot \ln|x-6| + 2 \cdot \ln|x| + C.$$

$$2.8 \text{ а) } \int (2x-3)^{29} dx; \quad \text{б) } \int \sin^2 x \cdot \cos x dx; \quad \text{в) } \int \frac{x-28}{(x+2)(x-3)} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } \frac{1}{60} (2x-3)^{30} + C; \text{ б) } \frac{\sin^3 x}{3} + C; \text{ в) } 6 \cdot \ln|x+2| - 5 \cdot \ln|x-3| + C$$

$$2.9 \text{ а) } \int (x+1)^{13} dx; \quad \text{б) } \int \cos^3 x \cdot \sin x dx; \quad \text{в) } \int \frac{3x-6}{(x-5)(x+4)} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } \frac{1}{14} (x+1)^{14} + C; \text{ б) } -\frac{\cos^4 x}{4} + C; \text{ в) } \ln|x-5| + 2 \cdot \ln|x+4| + C.$$

$$2.10 \text{ а) } \int \sqrt{x+1} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{5x+6}{(x+2)x} dx.$$

$$\text{Ответы: а) } \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} + C; \text{ б) } \ln(1+\sin x) + C; \text{ в) } 2 \cdot \ln|x+2| + 3 \cdot \ln|x| + C.$$



Задание 3. Вычислить определенный интеграл.

$$3.1 \int_0^2 (x+1)e^x dx.$$

$$3.2 \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

$$3.3 \int_0^{\pi/2} (x+4) \cos x dx.$$

$$3.4 \int_1^e x^3 \ln x dx.$$

$$3.5 \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

$$3.6 \int_0^{\pi} e^x \cos x dx.$$

$$3.7 \int_0^1 (x-3)e^x dx.$$

$$3.8 \int_0^{\pi/2} (x+1) \sin x dx.$$

$$3.9 \int_1^e x \cdot \ln x dx.$$

$$3.10 \int_0^{\pi} x \cos x dx.$$

Ответы. 3.1 $2e^2$. 3.2 π . 3.3 $\frac{\pi}{2} + 3$. 3.4 $\frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}$. 3.5 $\frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}$.

3.6 $-\frac{1}{2}e^{\pi} - \frac{1}{2}$. 3.7 $4 - 3e$. 3.8 2 . 3.9 $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$. 3.10 -2 .

Задание 4. Дана функция $U = f(x, y)$ и точка $A(x_0, y_0)$. Найти градиент функции $\text{grad}U$ в заданной точке А.

4.1 $U = x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x - 7y + 2$; $A(1; 5)$.

4.2 $U = 2x^3 - y^2 + 3xy + 8x + 9y - 1$; $A(1; 3)$.

4.3 $U = 3x^2 - 2y^2 - 2x^2y - 4x + 8y + 7$; $A(1; -4)$.

4.4 $U = 4x^2 + y^3 - 2xy^2 + 5x - 3y + 9$; $A(-1; 3)$.

4.5 $U = 5x^4 + 2y^2 - xy^2 + 4x - y + 2$; $A(2; 3)$.

4.6 $U = x^3 + y^2 - 6xy + 5x - 2y + 8$; $A(1; 2)$.

4.7 $U = x^4 + y^3 - 2x^2y + 6x - y + 3$; $A(3; 5)$.

4.8 $U = 7x^2 + y^3 + xy + 8x - 3y + 4$; $A(1; -1)$.

4.9 $U = 6x^3 - y^3 - xy + 5x - 2y + 5$; $A(0; 6)$.

4.10 $U = 4x^2 - y^2 + 7xy - 3x + 7y - 2$; $A(4; 0)$.

Ответы. 4.1 $-4\vec{i} + 21\vec{j}$. 4.2 $23\vec{i} + 6\vec{j}$. 4.3 $18\vec{i} + 22\vec{j}$.

4.4 $-21\vec{i} + 36\vec{j}$. 4.5 $155\vec{i} - \vec{j}$. 4.6 $-4\vec{i} - 4\vec{j}$. 4.7 $54\vec{i} + 56\vec{j}$.

4.8 $21\vec{i} + \vec{j}$. 4.9 $-\vec{i} - 110\vec{j}$. 4.10 $29\vec{i} + 35\vec{j}$.

Задание 5. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

5.1 $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

5.2 $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$;

5.3 $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;

5.4 $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

5.5 $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$;

5.6 $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$;

5.7 $9y'' + y = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$;

5.8 $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

5.9 $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$;

5.10 $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

ОТВЕТЫ 5.1 $y = e^x$. 5.2 $y = e^{2x}(-7x + 3)$. 5.3 $y = e^{2x} - e^{-x}$.

5.4 $y = xe^{5x}$. 5.5 $y = -\frac{1}{3}e^x \cos 3x$. 5.6 $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$.

5.7 $y = 2 \sin \frac{x}{3}$. 5.8 $y = \frac{1}{3}(5 - 2e^{-3x})$.

5.9 $y = -3e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x)$. 5.10 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.



Задание 6. Исследовать на сходимость ряд, используя признак Даламбера.

$$6.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$6.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

$$6.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{n!}$$

$$6.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

$$6.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n!}$$

$$6.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$$

$$6.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

$$6.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$6.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$$

$$6.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие для студентов вузов.-12-е изд. - М.: Наука, 1985. – Т.1.-456 с.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии./Я.С. Бугров. - М.: Наука, 1988, - 222 с.
3. Методические указания и контрольные задания по дисциплине «Математика для экономистов» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения/ Разраб. А.И. Песчанский, Л.Н. Григорюк.- Ч. 1.- Севастополь, СевГТУ, 2000, - 83 с.
4. Методические указания по изучению дисциплины «Математика для экономистов» для студентов экономических специальностей всех форм обучения/ Разраб. А.Ф. Хрусталева. – Севастополь, СевГТУ, 1997, - 24 с.
5. Ледаев С.Ф., Рудов Ю.М. Основы высшей математики: Учеб. пособие. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002.- 278 с.:ил.
6. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие.-М.: Финансы и статистика, 2000.-656 с.: ил.