

УДК 51

**М.И. Деркач,
Ю.Е. Обжерин,
А.И. Песчанский,
А.Ф. Хрусталёв**

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: vm@sevgtu.sebastopol.ua

ЗАДАЧИ ВСЕУКРАИНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ, ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ВУЗОВ 2006 г.

Приведены условия, ответы и возможные решения олимпиадных задач, которые предлагались на Всеукраинской олимпиаде по математике среди студентов втузов, экономических и сельскохозяйственных вузов в 2006 году.

Второй год подряд Всеукраинская олимпиада по математике для студентов втузов, экономических и сельскохозяйственных вузов проходила в Севастопольском национальном техническом университете.

Как и на предыдущих олимпиадах [1 – 3] все вузы были разделены на три категории в зависимости от числа академических часов, отводимых на изучение высшей математики. Категория Т – это вузы, в основном, технического профиля: индустриальные, металлургические и горнодобывающие, транспортные, приборо- и машиностроительные и т.д., – с большим объемом курса высшей математики. Категория С – это сельскохозяйственные, торгово-экономические, а также различного профиля технологические и строительные вузы. К категории М отнесены студенты, обучающиеся по специальности прикладная математика и специальностей, где курс математики приближен к факультетам кибернетики и механико-математическим факультетам университетов.

Условия, ответы и решения задач

1. Найти все действительные числа a , при которых сходится последовательность

$$\left(a_n \middle| a_1 = a, a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n + \frac{1}{n}, \forall n \in N \right). \quad (M)$$

Ответ: $a = -1$.

Решение

Из условия задачи следует, что $a_1 = a$, $a_2 = 2a_1 + 1 = 2a + 1$, $a_3 = \frac{3}{2}a_2 + \frac{1}{2} = 3a + 2$.

Методом математической индукции нетрудно доказать, что $\forall n \in N$

$$a_n = na + n - 1 \quad (1)$$

Действительно, соотношение (1) справедливо при $n = 1$. Если же предположить, что оно выполняется при произвольном натуральном n , то оно будет выполняться и для следующего натурального числа $n + 1$:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} (na + n - 1) + \frac{1}{n} = (n+1)a + n.$$

Следовательно, соотношение (1) справедливо для любого натурального n .

Перепишем формулу (1) в виде: $a_n = n(a + 1) - 1$. Если $a \neq -1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > -1, \\ -\infty & \text{при } a < -1. \end{cases}$ Если же

$a = -1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

Таким образом, данная последовательность является сходящейся лишь при $a = -1$.

2. Последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$a_n^2 < a_n - a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказать, что данная последовательность является сходящейся и найти её предел. (Т, С)

Ответ: 0.

Решение

Из условия задачи следует, что $a_n > 0$ и $a_{n+1} < a_n$, т.е. последовательность $\{a_n\}$ является убывающей и ограничена снизу, а, значит, имеет конечный предел A . Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$ в исходном неравенстве, получаем $A^2 \leq A - A$ или $A^2 \leq 0$. Отсюда $A = 0$.

3. Пусть B и C – квадратные матрицы одинакового порядка с действительными элементами и пусть $\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$, $A = B + iC$, где i – мнимая единица. Выразить определитель матрицы $\tilde{A}$ через определитель матрицы A . (М)

Ответ: $\det \tilde{A} = |\det A|^2$.

Решение

Из условия задачи следует, что $B = \frac{A + A^*}{2}$, $C = \frac{A - A^*}{2i}$, где $A^* = B - iC$.

(Все элементы матрицы A^* являются комплексно сопряженными соответствующим элементам матрицы A).

Тогда, полагая, что B и C – квадратные матрицы порядка n , получаем

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= \begin{vmatrix} B & C \\ -C & B \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{2n}} \begin{vmatrix} A + A^* & \frac{A - A^*}{i} \\ -\frac{A - A^*}{i} & A + A^* \end{vmatrix} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{i^n} \begin{vmatrix} (A + A^*)i & A - A^* \\ (A - A^*)i & A + A^* \end{vmatrix} = \frac{1}{4^n} \begin{vmatrix} A + A^* & A - A^* \\ A - A^* & A + A^* \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{4^n} \begin{vmatrix} 2A & 2A \\ A - A^* & A + A^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{vmatrix} A & 0 \\ A - A^* & 2A^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ A & A^* \end{vmatrix} = \det A \cdot \det A^* = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2. \end{aligned}$$

4. Концы отрезка постоянной длины a перемещаются по двум скрещивающимся взаимно перпендикулярным прямым, расстояние между которыми равно l , $l < a$. Найти геометрическое место середин этого отрезка. (Т)

Ответ: окружность радиуса $\frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{2}$, расположенная в плоскости, параллельной данным

скрещивающимся прямым, на одинаковом расстоянии от каждой из них. Центр окружности совпадает с серединой общего перпендикуляра к этим прямым.

Решение

Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы одна из скрещивающихся прямых совпала с осью Ox , а другая – с прямой $z = l$, расположенной в плоскости Oyz .

Пусть один из концов данного отрезка AB длины a движется вдоль оси Ox , а другой – вдоль прямой $z = l$ в плоскости Oyz : $A(x_A, 0, 0)$, $B(0, y_B, l)$. Так как длина отрезка AB остается неизменной и равной a , то

$$x_A^2 + y_B^2 + l^2 = a^2 \quad (2)$$

Пусть $M(x, y, z)$ – середина отрезка AB . Тогда $x = \frac{x_A}{2}$, $y = \frac{y_B}{2}$, $z = \frac{l}{2}$.

Подставляя $x_A = 2x$ и $y_B = 2y$ в уравнение (2), получаем $4x^2 + 4y^2 + l^2 = a^2$. Следовательно, середина отрезка AB удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2 - l^2}{4} \\ z = \frac{l}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Справедливо и обратное утверждение: если координаты точки удовлетворяют системе уравнений (3), то эта точка является серединой отрезка AB .

Таким образом, искомое геометрическое место точек определяется системой уравнений (3) и представляет собой окружность радиуса $\frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{2}$, расположенную в плоскости, параллельной данным

скрещивающимся прямым на одинаковом расстоянии от каждой из них. Центр окружности совпадает с серединой общего перпендикуляра к этим прямым.

5. Дана треугольная пирамида $SABC$ с прямыми плоскими углами при вершине S . Найти множество точек M , для которых выполняется условие $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MS^2$. (С)

Ответ: плоскость, которая проходит через середину диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$, перпендикулярно этой диагонали.

Решение

Выберем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы вершина S пирамиды оказалась в начале координат, а точки A, B, C на осях Ox, Oy, Oz соответственно: $S(0,0,0)$, $A(x_A, 0, 0)$, $B(0, y_B, 0)$, $C(0, 0, z_C)$.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка, удовлетворяющая условию:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MS^2. \quad (4)$$

Это уравнение в координатной форме имеет вид:

$$(x - x_A)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y - y_B)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z - z_C)^2 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

или после преобразования

$$x_A(x - \frac{x_A}{2}) + y_B(y - \frac{y_B}{2}) + z_C(z - \frac{z_C}{2}) = 0, \quad (5)$$

т.е. координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению плоскости (5).

Справедливо и обратное утверждение: любая точка $M(x, y, z)$, принадлежащая плоскости (5), удовлетворяет условию (4).

Таким образом, искомым множеством является плоскость с нормальным вектором $\vec{n} = \{x_A, y_B, z_C\}$, проходящая через точку $(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2})$, т.е. плоскость, которая проходит через середину диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$, перпендикулярно этой диагонали.

6. На плоскости заданы n векторов. Известно, что модуль суммы любых трёх векторов равен модулю суммы остальных $(n - 3)$ векторов. Доказать, что если $n \neq 6$, то сумма всех векторов равна нулю. (М)

Доказательство

Пусть $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{b}$, где $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ – данные n векторов.

Из условия задачи следует, что для любых различных $\vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_k$ выполняется условие:

$$|\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k| = |\vec{b} - (\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k)| \text{ или } (\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k)^2 = (\vec{b} - (\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k))^2.$$

Отсюда $(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k)^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{b}(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k) + (\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k)^2$, а следовательно

$$\vec{b}(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k) = \frac{1}{2}\vec{b}^2. \quad (6)$$

Заменим в равенстве (6) любой из трех векторов $\vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_k$, например, $\vec{a}_i$ на любой из оставшихся $(n - 3)$ векторов (который обозначим символом $\vec{a}_l$):

$$\vec{b}(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_l) = \frac{1}{2}\vec{b}^2 \quad (7)$$

Из уравнений (6) из (7) следует, что $\vec{b}\vec{a}_i = \vec{b}\vec{a}_l$. Так как векторы $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_l$ выбирались произвольно, то это значит, что

$$\vec{b}\vec{a}_i = C, \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ где } C = \text{const}. \quad (8)$$

Константу C нетрудно найти из системы уравнений (7) и (8): $C = \frac{1}{6}\vec{b}^2$. Поэтому соотношение (8) можно переписать в виде: $\vec{b}\vec{a}_i = \frac{1}{6}\vec{b}^2$. Отсюда $\vec{b}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = \frac{n}{6}\vec{b}^2$ или $\vec{b}^2 = \frac{n}{6}\vec{b}^2$, то есть $(1 - \frac{n}{6})\vec{b}^2 = 0$. Если $n \neq 6$, то $\vec{b}^2 = 0$, а, значит, $\vec{b} = \vec{0}$, что и требовалось доказать.

7. Длина вектора, равного сумме данных десяти векторов, больше, чем длина суммы любых девяти из них. Доказать, что существует ось, на которую проекция каждого из данных десяти векторов положительна. (Т, С)

Доказательство

Пусть $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{10}$, где $\vec{a}_i, i = \overline{1,10}$ – данные десять векторов. Из условия следует, что $|\vec{b}| > |\vec{b} - \vec{a}_i|, i = 1, 2, \dots, 10$. Возведем обе части данного неравенства в квадрат: $\vec{b}^2 > (\vec{b} - \vec{a}_i)^2$. Отсюда $\vec{b}\vec{a}_i > \frac{1}{2}\vec{a}_i^2$ или $|\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}_i > \frac{1}{2}\vec{a}_i^2$.

Это значит, что $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}_i > 0, i = 1, 2, \dots, 10$, т.е. проекция вектора $\vec{a}_i$ на вектор $\vec{b}$ положительна.

Таким образом, если орт некоторой оси коллинеарен вектору $\vec{b}$, то проекция вектора $\vec{a}_i$ на эту ось положительна, что и требовалось доказать.

8. Пусть $P(x)$ – многочлен степени n с действительными коэффициентами, имеющий n различных действительных корней. Составим разности между каждым из корней уравнения $P(x)=0$ и каждым из корней уравнения $P'(x)=0$. Вычислить сумму величин обратных полученным разностям. (М)

Ответ: 0.

Решение

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корни многочлена $P(x)$. Тогда $P(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, где $A = \text{const}$ ($A \neq 0$). Поэтому

$$P'(x) = A(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + A(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots + A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}).$$

Так как многочлен $P(x)$ не имеет кратных корней, то многочлен $P'(x)$ имеет $(n-1)$ различных корней $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*$, которые не совпадают с корнями многочлена $P(x)$ и удовлетворяют уравнению: $A(x_i^* - x_2)(x_i^* - x_3)\dots(x_i^* - x_n) + A(x_i^* - x_1)(x_i^* - x_3)\dots(x_i^* - x_n) + \dots + A(x_i^* - x_1)(x_i^* - x_2)\dots(x_i^* - x_n) = 0$.

Поскольку $x_i^* \neq x_j, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}$, то это уравнение можно переписать в виде

$$P(x_i^*) \cdot \left(\frac{1}{x_i^* - x_1} + \frac{1}{x_i^* - x_2} + \frac{1}{x_i^* - x_3} + \dots + \frac{1}{x_i^* - x_n} \right) = 0.$$

Так как $P(x_i^*) \neq 0$, то $\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_i^* - x_j} = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$, а, следовательно, $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j - x_i^*} = 0$.

9. Найти все многочлены $P(x)$, для которых справедливо тождество

$$(x-2006)P(x) = xP(x-1) \quad (\text{Т, С}).$$

Ответ: $P(x) = Ax(x-1)(x-2)\dots(x-2005)$, где $A = \text{const}$.

Решение

Подставляя в данное уравнение последовательно $x = 0; 1; 2; \dots; 2005$ нетрудно убедиться, что числа $0; 1; 2; \dots; 2005$ являются корнями данного многочлена, а поэтому

$$P(x) = Q(x)x(x-1)(x-2)\dots(x-2005), \quad (9)$$

где $Q(x)$ – некоторый многочлен.

Покажем, что $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, т.е. $Q(x) = A$, где $A = \text{const}$.

Подставляя (9) в исходное уравнение, получаем, что $Q(x)$ удовлетворяет тождеству $Q(x) = Q(x-1)$.

Очевидно, что многочлен нулевой степени $Q(x) = A$ удовлетворяет этому тождеству.

Предположим, что $Q(x)$ – многочлен степени $k \geq 1$, т.е. $Q(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$, где $a_0 \neq 0$.

Тогда $Q(x-1) = a_0(x-1)^k + a_1(x-1)^{k-1} + \dots + a_k$. Так как многочлены $Q(x)$ и $Q(x-1)$ тождественно равны, то равны и коэффициенты при соответствующих степенях x .

Приравнявая коэффициенты при x^{k-1} , получаем $a_1 = -a_0k + a_1$. Отсюда $a_0 = 0$. Пришли к противоречию. Следовательно, $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, т.е. $Q(x) = A$. Значит,

$$P(x) = Ax(x-1)(x-2)\dots(x-2005).$$

10. Вычислить определитель $\Delta = |a_{ij}|$, где $a_{ij} = |i - j|$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$. (М, Т, С)

Ответ: $(-1)^{n-1}(n-1) \cdot 2^{n-2}$.

Решение

Выполним последовательно следующие преобразования:

- 1) вычтем из каждого столбца, начиная с последнего, предыдущий столбец;
- 2) прибавим к каждой строке, начиная с последней, первую строку;
- 3) разложим определитель по элементам последней строки;
- 4) вычислим определитель треугольной матрицы.

В результате последовательно получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & n-5 & n-4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

11. Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[0; a]$ причём $f(0) = 0$. Доказать, что для любого $b \in (0; +\infty)$ на отрезке $[0; a]$ найдётся x^* такое, что $bf(x^*) = (a - x^*)f'(x^*)$. (М)

Доказательство

Рассмотрим функцию $g(x) = (a - x)^b f(x)$. Очевидно, что $g(0) = g(a) = 0$.

Кроме того, функция $g(x)$ дифференцируема внутри рассматриваемого промежутка, причем

$$g'(x) = -b(a - x)^{b-1} f(x) + (a - x)^b f'(x) \quad \forall x \in (0; a).$$

Следовательно, согласно теореме Ролля $\exists x^* \in (0; a)$ такое, что $g'(x^*) = 0$, то есть $-b(a - x^*)^{b-1} f(x^*) + (a - x^*)^b f'(x^*) = 0$ или $bf(x^*) = (a - x^*)f'(x^*)$, что и требовалось доказать.

Замечание. В категориях Т и С были предложены частные случаи данной задачи: в категории Т параметр b – произвольное натуральное число, а в категории С параметр b равен 1.

12. Найти все функции $f: [0; 1] \rightarrow R$, удовлетворяющие равенству $3f(2uv) + 4f(u^2 - v^2) = 2uv$ при $u^2 + v^2 = 1$ и $u \geq v \geq 0$. (М, Т, С)

Ответ: $f(x) = \frac{4}{7}\sqrt{1-x^2} - \frac{3}{7}x$.

Решение

Из условия задачи следует, что $0 \leq 2uv \leq 1$, $0 \leq u^2 - v^2 \leq 1$. Пусть $2uv = x$. Тогда, так как $u^2 + v^2 = 1$, то $(u^2 - v^2)^2 = (u^2)^2 + (v^2)^2 - 2u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 - 4u^2v^2 = 1 - x^2$ и, следовательно, $u^2 - v^2 = \sqrt{1 - x^2}$.

Поэтому исходное уравнение принимает вид:

$$3f(x) + 4f(\sqrt{1 - x^2}) = x. \quad (10)$$

Заменим в данном уравнении x на $\sqrt{1 - x^2}$:

$$3f(\sqrt{1 - x^2}) + 4f(x) = \sqrt{1 - x^2}. \quad (11)$$

Из системы уравнений (10), (11) определяем функцию $f(x)$: $f(x) = \frac{4}{7}\sqrt{1-x^2} - \frac{3}{7}x$. Нетрудно проверить, что данная функция удовлетворяет всем условиям задачи.

13. Доказать, что несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$, где $a > 0$, сходится и найти его значение.

(М, Т)

Ответ: $\frac{\pi \ln a}{2a}$.

Решение

Сходимость данного несобственного интеграла равносильна сходимости интегралов

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx \text{ и } I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx.$$

Пусть $0 < \lambda < 1$. Тогда $\frac{\ln x}{x^2 + a^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \cdot \ln x}{x^2 + a^2} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Если же $1 < \lambda < 2$, то $\frac{\ln x}{x^2 + a^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda}{x^2 + a^2} \cdot \frac{\ln x}{x^{2-\lambda}} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Поэтому согласно признаку Коши интегралы I_1 и I_2 сходятся, а, значит, сходится и исходный несобственный интеграл. Найдём его значение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} &= \left| x = at \right| = \int_0^{\infty} \frac{(\ln t + \ln a)adt}{a^2(t^2 + 1)} = \frac{1}{a} \left(\int_0^{\infty} \frac{\ln t dt}{t^2 + 1} + \int_0^{\infty} \frac{\ln a dt}{t^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{a} \left(\int_0^1 \frac{\ln t dt}{t^2 + 1} + \int_1^{\infty} \frac{\ln t dt}{t^2 + 1} + \ln a \cdot \arctgt \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{\pi \ln a}{2a}, \end{aligned}$$

так как $\int_1^{\infty} \frac{\ln t dt}{t^2 + 1} = \left| t = \frac{1}{s} \right| = - \int_0^1 \frac{\ln s ds}{s^2 + 1}.$

Замечание. В категории С был предложен частный случай данной задачи: параметр a полагался равным 1.

14. Решить дифференциальное уравнение $y' = x + \frac{x^3}{y}$. (М, Т)

Ответ: $(y - x^2)^2(2y + x^2) = C$, где C – произвольная постоянная.

Решение

Пусть $y = x^2 u$, где $u = u(x)$ – новая искомая функция (так как $y \neq 0$, то $x \neq 0$ и $u \neq 0$).

Относительно функции $u(x)$ данное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$2xu + x^2 u' = x + \frac{x^3}{x^2 u} \text{ или } 2u + x \frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{u}.$$

Очевидно, что $u = 1$ и $u = -\frac{1}{2}$ являются решениями этого уравнения, поэтому функции $y = x^2$ и $y = -\frac{x^2}{2}$ являются решениями исходного уравнения.

Пусть $u \neq 1$ и $u \neq -\frac{1}{2}$. Тогда $u + 1 - 2u^2 \neq 0$ и рассматриваемое дифференциальное уравнение приводится к виду: $\frac{udu}{u + 1 - 2u^2} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем: $\int \frac{udu}{u + 1 - 2u^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln \left| \frac{1}{C} \right|$; где C – произвольная постоянная, не равная 0.

Отсюда $x^6(u - 1)^2(2u + 1) = C$.

Переходя к старой переменной $y = y(x)$, получаем общий интеграл исходного дифференциального уравнения в виде $(y - x^2)^2(2y + x^2) = C$, где C – произвольная постоянная.

(При $C = 0$ получаем решения данного уравнения $y = x^2$ и $y = -\frac{x^2}{2}$).

15. Решить дифференциальное уравнение $y' = \left(\frac{3x + y^3 - 1}{y} \right)^2$. (С)

Ответ: $y^3 + 3x - 1 = \operatorname{tg}(3x + C)$, где C – произвольная постоянная.

Решение

Представим данное уравнение в виде:

$$y^2 dy = (3x + y^3 - 1)^2 dx \quad \text{или} \quad \frac{1}{3} d(y^3 - 1) = (3x + y^3 - 1)^2 dx.$$

Пусть $y^3 - 1 = z$, где $z = z(x)$ – новая искомая функция. Тогда уравнение принимает вид $\frac{1}{3} dz = (3x + z)^2 dx$.

Сделаем ещё одну замену переменной: $3x + z = t$. ($z = t - 3x$, $dz = dt - 3dx$).

Относительно новой неизвестной функции $t = t(x)$ дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{1}{3} (dt - 3dx) = t^2 dx, \quad -dx + \frac{1}{3} dt = t^2 dx, \quad (1 + t^2) dx = \frac{1}{3} dt.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$3dx = \frac{dt}{1 + t^2}; \quad \int 3dx + C = \int \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Отсюда $\operatorname{arctg} t = 3x + C$ или, так как $t = 3x + z = y^3 + 3x - 1$, то $\operatorname{arctg}(y^3 + 3x - 1) = 3x + C$.

Окончательно получаем общий интеграл данного дифференциального уравнения в виде $y^3 + 3x - 1 = \operatorname{tg}(3x + C)$, где C – произвольная постоянная.

16. Тонкий однородный стержень длиной $2a$ наудачу положили на круглый стол радиусом $r > a$ так, что он остался лежать на столе. Какова вероятность того, что оба конца стержня не выступают за край стола? (М)

Ответ: $\frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{r} - \frac{2a}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - a^2}$.

Решение

Пусть $x = OS$ – расстояние от центра O стола до хорды LK , расположенной вдоль той же прямой, что и тонкий однородный стержень AB длиной $2a$; $y = MS$ – расстояние от середины стержня M до середины хорды S (рисунок 1). Поскольку стержень остался лежать на столе, то $MS \leq SK$ или $y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$, т.е. $x^2 + y^2 \leq r^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

Таким образом, пространству элементарных событий $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ соответствует на плоскости прямоугольных декартовых координат Oxy четверть круга с центром в начале координат и радиусом r (рисунок 2). Площадь этой области $S_\Omega = \frac{\pi r^2}{4}$.

Концы стержня не выступают за край стола тогда и только тогда, когда $MK \geq a$ (расстояние от середины стержня до ближайшего конца хорды не меньше половины длины стержня) или в координатной форме: $x^2 + (y + a)^2 \leq r^2$, где $x \geq 0, y \geq 0$. На плоскости Oxy событию $A = \{\text{концы стержня не выступают за край стола}\}$ соответствует половина сегмента круга с центром в точке $(0; -a)$ и радиусом r , который отсекает от него хорда, находящаяся на расстоянии a от центра круга (рисунок 2). Площадь этой области S_A равна разности площади сектора с центральным углом $\arccos \frac{a}{r}$ и радиусом r и площади прямоугольного треугольника с катетами a и $\sqrt{r^2 - a^2}$:

$$S_A = \frac{r^2}{2} \arccos \frac{a}{r} - \frac{a}{2} \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Согласно геометрическому определению вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{r} - \frac{2a}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - a^2}$$

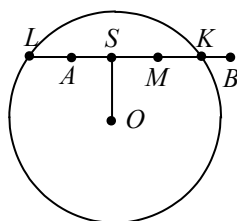


Рисунок 1

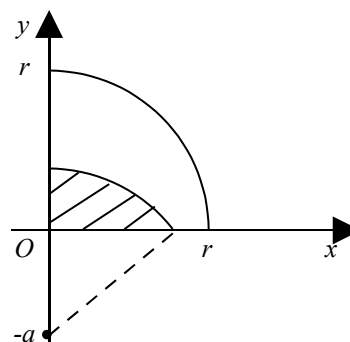


Рисунок 2

17. При изготовлении из листового металла закрытого бака объемом $0,25 \text{ м}^3$, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, производится сварка швов, проходящих по рёбрам обоих оснований и одному боковому ребру, а по остальным рёбрам осуществляется изгиб листового металла. Стоимость одного метра сварного шва – 13 ден. ед., а стоимость 1 м^2 листового металла – 26 ден. ед. Определите размеры бака так, чтобы его стоимость была наименьшей (Т, С).

Ответ: 0,5 м, 0,5 м, 1 м.

Решение

Пусть $x(\text{м})$ и $y(\text{м})$ – соответственно длины оснований бака. Тогда его высота будет $\frac{0,25}{xy} (\text{м})$.

Если стоимость бака обозначить через $S(x, y)$ ден. ед., то

$$S(x, y) = 26(2xy + \frac{2 \cdot 0,25}{y} + \frac{2 \cdot 0,25}{x}) + 13(4x + 4y + \frac{0,25}{xy}) \text{ или}$$

$$S(x, y) = 13 \left(4xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + 4x + 4y + \frac{1}{4xy} \right), \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Вычислим частные производные первого порядка этой функции по переменным x и y :

$$S'_x = 13 \left(4y - \frac{1}{x^2} + 4 - \frac{0,25}{x^2 y} \right); \quad S'_y = 13 \left(4x - \frac{1}{y^2} + 4 - \frac{0,25}{y^2 x} \right).$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} S'_x = 0 \\ S'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 y^2 - y - 4x^2 y - \frac{1}{4} = 0 \\ 4x^2 y^2 - x + 4xy^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(1 + 4xy) = 0 \\ 4x^2 y^2 - x + 4xy^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 4x^4 - x + 4x^3 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}.$$

Второе уравнение системы преобразуем к виду:

$$x^4 - \frac{1}{16} + x^3 - \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) + x \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x^2 + \frac{1}{4} + x \right) = 0.$$

Так как $x > 0$, то $x = 0,5$ и, следовательно, система имеет решение: $x = 0,5; y = 0,5$.

Легко проверить, что при этих значениях выполняется достаточное условие минимума и так как точка минимума одна, то в ней дифференцируемая функция $S(x, y)$ принимает наименьшее значение в области $x > 0, y > 0$.

Данную задачу можно решить также на основе неравенства Коши. Действительно,

$$4xy + \frac{1}{4xy} \geq 2, \quad \frac{1}{x} + 4x = 2\left(\frac{1}{2x} + 2x\right) \geq 4, \quad \frac{1}{y} + 4y = 2\left(\frac{1}{2y} + 2y\right) \geq 4.$$

Следовательно, $S(x, y) \geq 130$, причём равенство достигается лишь при $x = y = 0,5$.

Отметим, что каждая задача, приведённая выше, была решена, по крайней мере, одним из участников олимпиады. Призёрам олимпиады удалось правильно решить от шести до восьми из десяти предложенных задач.

Библиографический список

1. Булдыгин В.В. Задачи Всеукраинской олимпиады по математике для студентов вузов и сельскохозяйственных вузов / В.В. Булдыгин, А.С. Шкабара // Математика сегодня. — Киев, 1997. — Вып. 11. — С. 117 – 157.
2. Булдыгин В.В. Задачи Всеукраинских студенческих олимпиад, проводившихся в НТУУ (КПИ) в 1997 – 2000 гг. / В.В. Булдыгин, В.А. Кушнеревич, А.С. Шкабара // Математика сегодня. — Киев, 2001. — Вып. 12. — С. 185 – 255.
3. Деркач М.И. Задачи Всеукраинской олимпиады по математике для студентов вузов и сельскохозяйственных вузов 2005 г. / М.И. Деркач, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский, А.Ф. Хрусталёв // Вестник СевГТУ: сб. науч. тр. — Севастополь, 2005. — Вып. 70. — С. 198 – 218.

Поступила в редакцию 20.07.2006 г.