

**Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет**



ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

**Методические указания и задания
к практическим занятиям
по дисциплине «Финансовая математика»
для студентов специальности 8.050104 «Финансы»
всех форм обучения**

**Севастополь
2008**



УДК 658.14

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Финансовая математика» для студентов специальности 8.050104 «Финансы» всех форм обучения / Сост. Н.А. Глухова, В.В. Ольховик. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008 – 56 с.

Целью методических указаний является обеспечение студентов учебно – методическими материалами, необходимыми для формирования знаний, навыков проведения коммерческих и финансовых, умений интерпретировать полученные результаты.

Методические указания предназначены для студентов специальности 8.050104 «Финансы» всех форм обучения.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Финансы и кредит» (протокол № 5 от 28.12.2007 г.)

Допущено учебно – методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензенты:

Гридина Н.М. канд.экон.наук, доцент кафедры экономики и маркетинга

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Тема 1. Предмет и категории финансовой математики.....	4
Практическое занятие 1. Предмет и категории финансовой математики.....	5
Тема 2. Расчеты по простым процентам	6
Практическое занятие 2. Декурсивный метод начисления простых процентов.....	6
Практическое занятие 3. Антисипативный метод начисления простых процентов	13
Тема 3. Расчеты по сложным процентам	17
Практическое занятие 4 Декурсивный метод начисления сложных процентов.....	17
Практическое занятие 5 Антисипативный метод начисления сложных процентов.....	22
Тема 4. Эквивалентность процентных ставок и платежей.....	28
Практическое занятие 6 Эквивалентность процентных ставок и платежей.....	28
Тема 5. Финансовые ренты	33
Практическое занятие 7 Нарращение аннуитетов (финансовой ренты).....	33
Практическое занятие 8 Современная стоимость финансовых рент.....	38
Практическое занятие 9. Конверсия финансовых рент и анализ переменных денежных потоков	42
Тема 6. Планирование погашения задолженности, конверсия займов, ипотечные ссуды	45
Практическое занятие 10 Конверсия займов и формирование фонда погашения	45
Практическое занятие 11 Погашение ипотечной ссуды	51
Библиографический список	57
ПРИЛОЖЕНИЕ А (справочное). Порядковые номера дней года.....	58
ПРИЛОЖЕНИЕ Б (справочное). Коэффициенты приведения 1 ден. ед. $PVIF_{n,i}$	59
ПРИЛОЖЕНИЕ В (справочное). Коэффициенты наращивания 1 ден. ед. $FVIF_{n,i}$	61
ПРИЛОЖЕНИЕ Г (справочное). Коэффициенты приведения 1 ден. ед. финансовой ренты $PVIFA_{n,i}$	63
ПРИЛОЖЕНИЕ Д (справочное). Коэффициенты наращивания 1 ден. ед. финансовой ренты $FVIFA_{n,i}$	65
ПРИЛОЖЕНИЕ Е(справочное). Коэффициенты наращивания 1 ден. ед. р-срочной ренты $PFVIFA_{n,i}$	67

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания и задания подготовлены в соответствии с программой нормативной дисциплины «Финансовая математика», которая включена в обязательный перечень курсов бакалаврского уровня подготовки студентов экономических специальностей. Настоящие методические указания и задания разработаны с целью изучения студентами на практических занятиях методов финансовых расчетов.

В результате выполнения практических заданий студенты должны:

- знать основные методы проведения финансовых расчетов на уровне предприятий, банковских учреждений, страховых организаций;
- уметь рассчитывать параметры финансовых операций;
- проводить сравнительный анализ вариантов осуществления финансовых сделок.

Издание включает теоретические аспекты, планы практических занятий, задания и вопросы для самостоятельного контроля качества знаний теоретических положений курса.

ТЕМА 1. ПРЕДМЕТ И КАТЕГОРИИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Практическое занятие 1

Предмет и категории финансовой математики

Цель занятия: закрепить знания ключевых категорий темы.

Проведение любой финансовой, коммерческой операции предполагает наличие условий ее осуществления. Данный факт требует проведения количественного финансового анализа осуществляемых операций.

Предметом финансовой математики является совокупность методов расчетов.

В финансовой математике выделяют две основные категории: проценты и процентные ставки.

Проценты в финансовых расчетах – это абсолютная сумма дохода от предоставления капитала в долг или от инвестиций производственно-финансового характера. Понятие процента связано с такой категорией как время. Концепция времени определяет капитал, вложенный в дело, приносящий процент, т.о. фактор времени определяет принцип не равноценности денежных сумм, относящихся к разным моментам времени.

Процентная ставка – это величина, характеризующая интенсивность начисления процентов и определяемая как отношение суммы процентных денег, полученных за определенный период к величине кредита или сумме инвестиций.

В финансовых расчетах процентные ставки используются в виде коэффициента. Этот показатель рассчитывается как отношение приращения исходной сум-



мы к базовой величине, в качестве которой, очевидно, можно взять либо PV, либо FV(настоящая и будущая стоимость).

Вопросы для обсуждения:

- финансовая математика как наука и учебная дисциплина
- причины, сдерживающие развитие финансовой математики в отечественной практике финансовых расчетов
- роль фактора времени в финансовых операциях
- взаимосвязь финансовой математики с другими дисциплинами (привести примеры)
- определение процентов в математике и в финансовых расчетах
- процентные ставки, их функции и классификация
- арифметическая, геометрическая прогрессия
- виды процентных ставок;

Задачи

1. Выразить следующие проценты в виде соответствующих натуральных и десятичных дробей с точностью до четвертого десятичного знака:

а) $2\frac{1}{4}\%$, б) $\frac{1}{6}\%$, в) $3\frac{1}{2}\%$

г) 4%, д) 3,2%. е) 0,8%.

2. Представить каждую из следующих дробей в виде процентов с точностью до сотой доли процентов:

а) 0,035; б) 0,04, в) $3/40$; г) $5/16$; д) $8,40/280$

3. Иванов взял в сберегательном банке ссуду 10 000 грн. Если банк начисляет 250 грн. процентов за использование этой суммы в течение шести месяцев, какой будет ставка процентов за этот период?

4. Иванов взял в долг у Петрова некоторую сумму денег без процентов и обещал вернуть в течении 11 дней следующим образом: в 1 день 110 д.е., а в последующие дни уменьшая сумму каждого предыдущего дня на 10 д.е..

Определить:

- чему равна сумма, выплаченная Ивановым в последний день;
- какую сумму Иванов занял у Петрова;

5. За сколько месяцев будет возвращена сумма, взятая без процентов, если стороны договорились, что в первый месяц должник выплатит 10 д.е., а в каждый последующий месяц сумма будет возрастать на 5 д.е. по сравнению с преды-

дущим, и в последний месяц составит 80 д.е. На какую сумму заключен договор?

6. В течение 10 месяцев на предприятие будут поступать платежи, уменьшающиеся каждый месяц в 0,5. Если последний платеж составит 7 д.е. определить
 - размер первого платежа и общую сумму платежей,
 - размер пятого платежа.
7. Определить первую и последнюю выплату из 8 существующих, если общая сумма выплат составляет 765 д.е., а каждая выплата по отношению к предыдущей увеличивается в 2 раза.
8. Банк «Кредит» на вклад, внесенный 23.07 текущего года, начислял следующие годовые проценты: 23.07 – 19%, с 24.07 по 31.07 – 18.5%, с 1.08 по 25.08 – 17%, с 26.08 по 6.09 – 16.5%, с 7.09 по 13.09 – 16%, с 14.09 по 24.09 – 15%. Определить среднюю процентную ставку за данный период.
9. Месячные уровни инфляции с февраля по июль текущего года следующие: февраль – 4%, март – 5%, апрель – 4.5%, май – 3%, июнь – 3.5%, июль – 3%. Определить среднее значение инфляции за указанный период.
10. Клиент разместил три срочных депозита в банки на срок 3, 6 и 2 месяца. Процентные ставки соответственно – 14%, 18%, 11%. Определить средневзвешенную процентную ставку.

2. РАСЧЕТЫ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТАМ

Практическое занятие 2

Декурсивный метод начисления простых процентов

Цель: Изучить теоретические основы и получить практические навыки при расчетах по простым процентам декурсивным методом.

Наращение - процесс определения будущей стоимости по известной нынешней, то есть процесс начисления процентов на основную сумму.

Наращение по простым процентам используется для выдачи краткосрочных ссуд с однократным начислением процентов.

Наращением или ростом называется процесс увеличения некоторой суммы денег за счет начисления на нее процентов.

Дисконтирование - процесс определения нынешней стоимости по известной будущей (процесс приведения, процесс обратный наращению).

Простые проценты начисляются на одну и ту же первоначальную сумму (то есть добавления начисленных за первый период процентов к первоначальной сумме не производится).

Введем обозначения:

PV (Present value), P - нынешняя, первоначальная сумма;



FV (future value), S - будущая, наращенная сумма;

i - ставка процента;

n - количество лет;

m - количество периодов начисления процентов в году (например, m=4 если проценты начисляются ежеквартально).

Проценты (процентные деньги) представляют собой абсолютные приросты:

$$I = FV - PV,$$

а поскольку база для их начисления является постоянной, то за ряд лет общий абсолютный прирост составит их сумму или произведение абсолютных приростов на количество лет ссуды:

$$I = (FV - PV) * n = \left[\frac{(FV - PV)}{PV} * PV \right] * n = i * PV * n,$$

где $i = \frac{(FV - PV)}{PV}$ по определению процентной ставки.

Следовательно, наращенная сумма вычисляется по формуле

$$FV = PV + I. \quad (2.1)$$

Сумма начисленных процентов вычисляется по формуле

$$I = PV * i * n. \quad (2.2)$$

Формула наращения простыми процентами:

$$FV = PV + PV * i * n = PV * (1 + i * n). \quad (2.3)$$

При изменении процентной ставки из периода в период наращенная сумма определяется по формуле

$$FV = PV * (1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_k i_k), \quad (2.4)$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k$ – расчетные периоды, в которых начисление процентов производится соответственно по ставкам $i_1, i_2, \dots, i_k$

Наращение	Дисконтирование
$FV = PV * (1 + i * n)$	$PV = FV / (1 + i * n) \quad (2.5)$
Если проценты по 2-летнему вкладу начисляются m раз в году (промежуточные проценты), необходимо процентную ставку разделить на m (то есть при ежеквартальном начислении по ставке 24% годовых каждый квартал будет начисляться 6 % (24% / 4) первоначальной суммы, а начислять проценты будут 8 (2*4) раз).	
$FV = PV * (1 + \frac{j}{m} * n * m)$	$PV = FV / (1 + \frac{j}{m} * n * m) \quad (2.6)$

Как видно из приведенных формул, количество периодов начисления m не влияет на результат наращенная и дисконтирования по простым процентам.

Если срок операции не целое число лет, $n=t/k$, где

t - срок операции в единицах соответствующей временной базы k ;
 $k = 12, 4, 360/365, 366$.

Для упрощения процедуры расчета точного числа дней пользуются специальными таблицами, в которых все дни в году последовательно пронумерованы. Продолжительность финансовой операции определяется вычитанием номера первого дня из номера последнего дня (**см. Приложение А**).

В зависимости от выбранной методики при расчете сроков финансовой операции могут использоваться методики, приведенные в таблице 2.1.

Таблица 2.1.- Методики расчета срока финансовой операции

Вариант начисления процентов	Порядок расчетов сроков операции	Временная база	Примечание
Точные проценты с точным числом дней	Фактическое число дней определяемое по календарю или специальной таблице	365, 366	Английская практика
Обыкновенные проценты с точным числом дней в течении операции	Фактическое число дней определяемое по календарю или специальной таблице	360	Французская практика
Обыкновенные проценты с приближенным числом дней в течении финансовой операции	Расчет числа дней операции осуществляют исходя из того, что в каждом месяце 30 дн.	360	Немецкая практика

При проведении финансовой операции день выдачи и погашения ссуды считается за 1 день.

Вопросы для обсуждения:

- сущность процентных платежей;
- наращенная сумма по простым процентам;
- исчисление обычных, коммерческих, точных процентов;
- применение простых процентов в потребительском кредите;
- изменяющаяся простая ставка процентов;
- учет инфляции в финансовых операциях;
- стоимость денег и время;
- сущность дисконтирования;
- виды дисконтирования.

Примеры решения задач

Пример 2.1.

Фирме выделен банковский кредит на срок с 3 января по 12 марта под простые проценты с процентной ставкой 12% годовых. Сумма кредита - 80 тыс. грн. Определить по трем методам коэффициент наращения и наращенную сумму.

Решение:

Коэффициент наращения рассчитывается по формуле

$$K = \frac{FV}{PV} = 1 + i * n = 1 + i * \frac{t}{k}$$

Расчет коэффициентов наращения по трем методам наращения:

$$K_1 = 1 + \frac{68}{365} * 0,12 = 1,0223 ;$$

$$K_2 = 1 + \frac{68}{360} * 0,12 = 1,0226 ;$$

$$K_3 = 1 + \frac{69}{360} * 0,12 = 1,0229 .$$

Расчет наращенных сумм:

$$FV_1 = PV * K_1 = 81,784 ;$$

$$FV_2 = PV * K_2 = 81,808 ;$$

$$FV_3 = PV * K_3 = 81,832 .$$

Ответ: $K_1=1,0223$; $K_2 = 1,0226$; $K_3=1,0229$. Очевидно, что фирме предпочтительнее расчет коэффициента наращения по первому методу. Особенно заметны финансовые различия при $k > 360$.

Пример 2.2.

Фирма взяла в коммерческом банке кредит на сумму 600 тыс. грн. сроком на 4 года. Согласно договору, за первый год процентная ставка составляла 14% и с учетом инфляции каждый последующий год повышалась на 2 пункта. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму и доход банка.

Решение:

Расчет коэффициента наращения в случае использования изменяющейся процентной ставки:

$$k_n = 1 + \sum_{m=1}^p n_m * i_m$$

$$k_n = 1 + 0,14 * 1 + 0,16 * 1 + 0,18 * 1 + 0,2 * 1 = 1,68 ;$$

$$FV = PV * (1 + i * n) = PV * k_n = 1008 \text{ (тыс.грн)} ;$$

$$D = FV - PV = 1008 - 600 = 408 \text{ (тыс.грн.)}.$$

Ответ: $k_n=1,68$; $FV=1008$ (тыс.грн.); $D=408$ (тыс.грн.)

Пример 2.3

Сумма в размере 2000 грн. положена в банк 18 февраля не високосного года и востребована 25 декабря того же года. Ставка банка составляет 15 процентов. Определить сумму начисленных процентов при французской и английской практике их начисления.

Решение:

Французская практика расчётов:

По таблицам порядковых номеров дней в году (Приложение А) можно определить точное число дней финансовой операции следующим образом:

$$T = 359 - 49 = 310 \text{ дней.}$$

Сумма начисленных процентов:

$$I = PV * t / k * i = 2000 * 310 / 360 * 0,15 = 258,33 \text{ (грн.)}.$$

Английская практика расчётов:

$$I = 2000 * 310 / 365 * 0,15 = 254,8 \text{ (грн.)}.$$

Как видно, результат финансовой операции во многом зависит от выбора способа начисления простых процентов.

В практическом смысле эффект от выбора того или иного способа зависит от значительности сумм, фигурирующих в финансовой операции.

Задачи

1. Предприятие взяло кредит 100000 грн. сроком на 2 года под 15% годовых и по истечении заемного периода должно вернуть кредит с процентами. Сколько должно заплатить предприятие? Проценты простые.
2. Молодая семья получила в банке ссуду на строительство жилья в размере 60 тыс. грн. сроком на 3 года под простую процентную ставку 21% годовых. Определите наращенную сумму кредита и сумму процентов.
3. Банк принимает вклады на срочный депозит на следующих условиях: процентная ставка при сроке 180 дней – 14%; при сроке 240 дней – 15; при сроке 270 дней – 16%. Рассчитайте доход клиента при вкладе 10 тыс. грн. на указанные сроки. Год не високосный. Методика расчета: точные проценты с точным числом дней.
4. Клиент вложил в банк на депозит 2000\$ на срок с 12 апреля по 26 июня с простой процентной ставкой 4% годовых. Рассчитайте доход клиента по трем методикам. Год не високосный.

5. Фирма внесла в коммерческий банк 28 тыс. грн. на срок с 9 ноября по 21 ноября того же года. На вклады «до востребования» банк начисляет проценты – 9% годовых. Проценты обыкновенные с приближенным числом дней в году. Определите наращенную сумму.
6. Коммерческий банк привлекает средства населения под простые проценты с процентной ставкой 17% годовых. Клиент внес 6 тыс. грн. на депозит с 12 февраля по 24 апреля. Определите величину коэффициента наращенной суммы для случая: а) точных процентов с точным числом дней; в) обыкновенных процентов с приближенным числом дней. Год не високосный.
7. Правекс – банк предлагает следующие условия для вкладов физических лиц: выплата процентов – ежемесячно, без права пополнения вклада, сумма вклада от 250 грн. проценты простые, методика расчеты точные проценты с точным числом дней. Необходимо рассчитать какой доход принесёт сумма в размере 500 грн., если срок вклада 2 года.

Название вклада	Сумма вклада	1 мес	2 мес	3 мес	6 мес	9 мес	12 мес. и 3 дн.	15 мес.	18 мес.	24 мес.
Правекс стандарт плюс	От 250 грн.	-	7,8	11,6	12	13,6	14,5	14,8	15	15,3

8. Клиент внес в банк 14 тыс. грн. на срок с 14 февраля по 23 июля. На вклады «до востребования» сроком больше месяца банк начисляет 7% годовых. Определите наращенную сумму при расчете по: а) точным процентам с точным числом дней; б) банковскому методу; в) обыкновенным процентам с приближенным числом дней. Год не високосный.
9. Коммерческий банк выдал ссуду в сумме 75 000 грн. под 15,5% простых годовых. По истечении срока кредита заемщик должен вернуть 85 000 грн. Определить срок, на который выдан кредит.
10. Банком был привлечен депозит 01.03.01 в сумме 3 500 грн. под 18% простых годовых. В конце срока депозита банк обязан выплатить клиенту 3850 грн. Определить срок депозита и дату его возврата.
11. На какой срок выдан кредит в 300 тыс. грн. под процентную ставку 25% годовых, если банк получил сумму от кредитора 380 тыс. грн. Методика расчета: обыкновенных % с приближенным числом дней.

12. Определите, какую процентную ставку должна установить при кредите 2000\$ финансовая компания, чтобы при сроке кредита в 184 дня иметь прибыль не менее 120\$. Проценты обыкновенные с приближенным числом дней.
13. Клиент получил кредит сроком на 9 месяцев в 6 тыс. грн. Сумма возврата кредита – 6,3 тыс. грн. Определите процентную ставку банка.
14. Коммерческий банк выдал кредит на период с 1.03 по 1.06 в сумме 150 000 грн. под 24% годовых при временной базе 360 дней и точным числом дней финансовой операции. Определить величину процентной ставки, обеспечивающей такой же процентный доход
 - а) при временной базе 365 дней;
 - б) при использовании приближенного количества дней финансовой операции.
15. Клиент поместил в банк 3 тыс. грн. 1 февраля. Процентная ставка банка с 1 февраля по 18 февраля – 7% годовых; с 19 февраля по 7 марта – 8% годовых; с 8 марта по 23 марта – 9% годовых; с 24 марта по 19 апреля, когда был изъят вклад – 10% годовых. Определите доход клиента и эффективную процентную ставку. Методика расчета: обыкновенные проценты с приближенным числом дней.
16. Клиент внес в сбербанк 3 тыс. грн. Согласно условиям договора «до востребования», процентная ставка может быть изменена банком в одностороннем порядке. Вклад внесен 3 апреля под 14% годовых. 22 апреля процентная ставка, согласно решению Правления банка, установлена в 15% годовых, а 20 мая – 13% годовых. Вклад вместе с процентами получен 3 июня. Определите наращенную сумму, если расчет процентов производится по точным процентам с точным числом дней в году ($K=365$).
17. Вкладчик заключил с банком депозитный договор на следующих условиях: сумма депозита 3 000 грн., срок 270 дней. Процентная ставка в первом квартале составляет 15%, во втором, третьем процентная ставка возрастает на 2,5%. Определить сумму полученную вкладчиком в конце срока депозита.
18. Коммерческий банк выдал кредит в размере 300 000 грн. на 3 года под 19% годовых. Через пол года процентная ставка была увеличена на 4,5%, еще через полгода заемщик погасил 150 000 основного долга, еще через год ставка была снижена до 21%. Определить сумму начисленных процентов и наращенную сумму.

Практическое занятие 3

Антисипативный метод начисления простых процентов

Цель: Изучить теоретические основы и получить практические навыки при расчетах по простым процентам антисипативным методом.

Антисипативный метод начисления предполагает, что проценты начисляются в начале временного интервала (удержание процента) исходя из наращенной суммы долга.

$$I = (FV - PV) * n = \left[\frac{(FV - PV)}{FV} * FV \right] * n = d * FV * n,$$

где $d = \frac{(FV - PV)}{FV}$ по определению учётной ставки.

Наращение по простой учетной ставке производится по формуле

$$FV = \frac{PV}{1 - n * d}, \quad (3.1)$$

где FV – будущая стоимость или наращенная сумма;
PV – первоначальная сумма (стоимость);
n – срок операции;
d – простая учетная ставка.

Если срок операции не целое число, то $n = \frac{t}{k}$.

$$FV = \frac{PV}{1 - d * \frac{t}{k}}.$$

Дисконтирование – это расчетная операция обратная определению наращенной суммы, при которой определяется неизвестная первоначальная сумма PV, при известной наращиваемой сумме FV, при известном сроке финансовой операции и процентной ставке.

Операции дисконтирования необходимы при разработке условий финансовой сделки и при удержании процентов до наступления сроков погашения долга.

Существует 2 метода дисконтирования:

1 метод – Математическое дисконтирование:

$$PV = FV * (1 + i * n) = FV * \left(1 + i * \frac{t}{k}\right)^{-1};$$

2 метод – Банковский учет

$$FV = \frac{PV}{1 - dn} \Rightarrow PV = FV * (1 - dn) = FV * \left(1 - d * \frac{t}{k}\right).$$

Другой весьма распространенной операцией краткосрочного характера, для оценки которой используются рассмотренные формулы, является **операция по учету векселей банком**. В этом случае пользуются учетной ставкой.

Схема действий в этом случае может быть следующей: **владелец векселя на сумму FV предъявляет его банку**, который соглашается учесть его, т.е. купить, удерживая в свою пользу часть вексельной суммы, которая нередко также называется дисконтом. **В этом случае банк предлагает владельцу сумму (PV)**, исчисляемую исходя из объявленной банком учетной ставки (d).

Очевидно, что чем выше значение дисконтной ставки, тем большую сумму удерживает банк в свою пользу. Расчет предоставляемой банком суммы ведется по формуле, являющейся следствием формулы

$$PV = FV * (1 - t * d),$$

где t - относительная длина периода до погашения ссуды (отметим, что операция имеет смысл, когда число в скобках неотрицательно).

При учете векселя в банке до срока его погашения при сроке меньше года владелец векселя получит сумму, равную:

$$PV_1 = FV * \left(1 - \frac{t_1}{k} * d_1\right).$$

Наращенная сумма с учетом инфляции рассчитывается по формуле

$$FV = PV * (1 + i) * (1 + h) = PV * (1 + i) * Y_k,$$

где h – темп инфляции;

Y_k – индекс инфляции за k-периодов ($Y_k = (1 + h_1) * (1 + h_2) * \dots * (1 + h_k)$).

Вопросы для обсуждения:

- стоимость денег и время;
- сущность дисконтирования;
- виды дисконтирования;
- учет векселей;
- наращение по учетной ставке.

Пример решения задачи

Пример 3.1

Клиент оформляет вклад на срочный депозит сроком на 1 месяц в коммерческом банке. Процентная ставка банка 6 % годовых. Годовой уровень инфляции 4,8%. Определите реальную годовую процентную ставку прибыли, по которой оформлен вклад.

Решение:

Годовая процентная ставка с учетом инфляции рассчитывается по формуле:

$$r = i + h + \frac{t}{k} * i * h$$

Отсюда реальная ставка доходности составит

$$i = \frac{r - h}{1 + \frac{t}{k} * h};$$

$$i = \frac{0,06 - 0,048}{1 + 0,048 * \frac{1}{12}} = \frac{0,012}{1,004} = 0,012;$$

$$i = (0,06 - 0,048) / (1 + 1/12 * 0,048) = 0,18567.$$

Ответ: реальная ставка доходности по срочному депозиту составит 1,2% годовых.

Задачи

1. Определить величину суммы, выдаваемую заемщику, если он обязуется вернуть её через два года в размере 55000 грн. Банк определяет свой доход с использованием годовой учётной ставки 15 %.
2. Коммерческий банк выдал две ссуды 100 000 и 200 000 грн. под простой дисконт, равный 12% годовых и 13% годовых соответственно сроком на 2,5 года. Какую сумму банку необходимо выдать на руки одному и второму заемщику, какой доход получил банк?
3. Клиенту необходимо получить кредит в размере 388 000 грн. на 6 месяцев. Банк предоставляет кредит под простой дисконт 20% годовых. Определить сумму полученного кредита.

4. Предприятие намерено взять кредит в сумме 500 000 грн. Банк предоставляет кредит под:
 - а) 25 % простых годовых
 - б) простой дисконт 20 % годовых.
 На какой срок фирма может взять кредит при условии, что подлежащая возврату сумма не должна превышать 900 000 грн.
5. Размер кредита, полученного фирмой на срок 6 месяцев, равен 600 тыс. грн. Сумма возврата кредита – 680 тыс. грн. Определите простую процентную и учетную ставку кредита.
6. Предприятие для модернизации оборудования решило взять в банке кредит в 600 тыс. грн. на условиях, что проценты простые и оплачиваются при выдаче кредита. Кредит выдается под 20% годовых. Срок кредита - 9 месяцев. Кроме того, банк требует 8% от суммы кредита в залог. Какую сумму получит заемщик. Определите реальную процентную ставку для кредита.
7. Фирма получила на полгода банковский кредит в 800 тыс. грн. под 24% годовых. Проценты за кредит банк берет авансом. Рассчитайте реальную процентную ставку за кредит в случае: а) не требуется залога, б) залог за предоставление кредита составляет 6% от суммы кредита.
8. Фирма получила кредит на 3 месяца под залог недвижимости стоимостью 16 тыс. грн. Величина кредита составляет 80% от стоимости недвижимости. Процентная ставка по кредиту - 36% годовых, комиссионные по обслуживанию кредита составляют 2%. Определите сумму полученного кредита, реальную процентную ставку и доход банка. Проценты за кредит банк берет авансом.
9. Вексель номиналом 100 000 грн. выданный 1.06. на срок 3 месяца был учтен банком 20.06. по простой дисконтной ставке 20%. Определить сумму, полученную владельцем векселя.
10. Вексель номиналом 1 тыс. грн. выдан 1 сентября на 1 год. Ставка процентов по векселю составляет 18 % годовых. Какой доход получит банк в результате учета 25 декабря векселя, учетная ставка которого составляет 14%. Методика расчёта точные проценты.
11. Вексель номиналом 1 000 грн. сроком погашения через 180 дней был учтен банком за 45 дней до срока в сумме 925 грн. Определить учетную ставку банка.
12. Долговое обязательство в сумме 2 тыс. грн. должно быть погашено через 90 дней с процентами 16% простых годовых был предъявлен в коммерческий банк для учёта. Владелец обязательства учел его в банке в сумме 1,999 тыс.

грн. по учетной ставке 16%. Определите период, за который банк учел вексель.

13. Банком был выдан кредит в размере 20000 тыс.грн. на 4 года под простую ставку 35% коммерческих годовых на условиях учета годового темпа инфляции. В первом году инфляция составила 5%, во втором - 7%, в третьем - 10%, в четвертом 15%. Определить сумму погашения.
14. Депозит в сумме 55 000 грн. сроком на 6 месяцев под 7,5% простых годовых был привлечен банком на условиях учета темпа инфляции. За период цены выросли в 1,5 раза. По истечении 6 месяцев вкладчик продлил депозитный договор еще на 3 месяца на тех же условиях. Ожидаемый темп инфляции на данный период составляет: 8 % в первом месяце, 9,5% - во втором, 11,5% - в третьем. Определить доход клиента.

ТЕМА 3. РАСЧЕТЫ ПО СЛОЖНЫМ ПРОЦЕНТАМ

Практическое занятие 4

Декурсивный метод начисления сложных процентов

Цель: Изучить теоретические основы и получить практические навыки при расчетах по сложным процентам декурсивным методом.

Наращение начисление % 1 раз в году	Дисконтирование
$FV = PV \cdot (1 + i)^n$	$PV = FV / (1 + i)^n$
начисление % m раз в году (промежуточные проценты)	
$FV = PV \cdot (1 + j/m)^{n \cdot m}$	$PV = FV / (1 + j/m)^{n \cdot m}$

Для упрощения расчетов разработаны таблицы финансовых коэффициентов. Множитель $(1 + i)^n$ (или $(1 + j/m)^{n \cdot m}$) называется множителем наращивания., обозначается $FVIF_{i, n}$ (или $FVIF_{j/m, n \cdot m}$) от англ. Future Value Interest Factor. **(Приложение В)** Множитель $1/(1 + i)^n$ (или $1/(1 + j/m)^{n \cdot m}$) называется множителем дисконтирования, или дисконт-фактор. Обозначается $PVIF_{i, n}$ или $PVIF_{j/m, n \cdot m}$ от англ. Present Value Interest Factor. **(Приложение Б)**

Наращение начисление % 1 раз в году	Дисконтирование
$FV = PV * FVIF_{i, n}$	$PV = FV / FVIF_{i, n} = FV * PVIF_{i, n}$
начисление % m раз в году (промежуточные проценты)	
$FV = PV * FVIF_{j/m, n*m}$	$PV = FV / FVIF_{j/m, n*m} = FV * PVIF_{j/m, n*m}$

Таким образом, можно сделать несколько простых практических **выводов**:

- при начислении сложных процентов: 12% годовых неэквивалентно 1% в месяц;
- чем чаще идет начисление по схеме сложных процентов, тем больше итоговая накопленная сумма.

Заметим, что для простых процентов такие выводы недействительны.

Начисление процентов за **дробное число лет**. Достаточно обыденными являются финансовые контракты, заключаемые на период, отличающийся от целого числа лет. В этом случае проценты могут начисляться одним из двух методов:

а) **схема сложных процентов**:

$$FV = PV * \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{a+b};$$

б) **смешанная схема**:

$$FV = PV * \left(1 + \frac{j}{m}\right)^a * \left(1 + \frac{j}{m} * b\right);$$

где a – целое число лет операции,
 b – срок операции меньше года.

Непрерывное начисление процентов.

Все рассмотренные ранее начисляемые проценты называются **дискретными**, поскольку их начисление осуществляется за фиксированный промежуток времени (год, квартал, месяц, день, даже час). Уменьшая этот промежуток (период начисления) и увеличивая частоту начисления процентов, в пределе можно перейти к так называемым непрерывным процентам.

Формула наращения по непрерывной процентной ставке

$$FV = PV * e^{\delta n},$$

где e – основание натурального логарифма $e=2,718$;
 δ - процентная ставка при начислении непрерывных процентов или сила роста;
 $e^{\delta n}$ - множителем наращения при непрерывной капитализации процентов.

Формула наращения с переменной силой роста

$$FV = PV * e^{\int_0^n \delta_t n_t},$$

Формула наращения для случая, если сила роста изменяется дискретно

$$FV = PV * e^{\delta_1 n_1 + \delta_2 n_2 + \dots + \delta_k n_k},$$

где $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ сила роста в соответствующих интервалах $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Вопросы для обсуждения:

- начисление сложных процентов;
- понятие номинальной и эффективной ставки
- непрерывное начисление процентов;
- дисконтирование по сложным процентным ставкам;
- учет инфляции в финансовых операциях.

Примеры решения задач

Пример 4.1

Через два года фирме потребуются деньги в размере 30000 грн., какую сумму необходимо сегодня поместить в банк, начисляющий 15 % годовых, чтобы через 2 года получить требуемую сумму?

Решение:

Первоначальная сумма по известной будущей определяется по формуле

$$PV = FV / (1 + i)^n = 30000 / (1 + 0,15)^2 = 30000 / 1,3225 = 22684,4.$$

Можно решить также с помощью таблиц множителей дисконтирования (Приложение Б)

$$PV = FV \cdot PVIF_{i,n} = 30000 \cdot 0,7561 = 22683 \text{ (грн.)}$$

Или с помощью таблиц множителей наращения (Приложение В)

$$PV = FV / FVIF_{i,n} = 30000 / 1,3225 = 22684,4 \text{ (грн.)}$$

Ответ: необходимо сейчас поместить в банк 22684, 4 грн., чтобы получить через 2 года 3000 грн.

Задачи

- Клиент положил в банк 8000 грн. Какая сумма будет на счете этого клиента а) через 1 год, б) через 8 месяцев, в) через 4 года, г) через 6 лет 6 месяцев, если банк начисляет:
 - 6% сложных годовых ;
 - банк начисляет проценты по ставке $j_3 = 6\%$.
- Определите наращенную сумму вклада в 3 тыс. грн. при сроке вклада 2 года по номинальной процентной ставке 16 % годовых. Начисление процентов производится: а) один раз в год, б) по полугодиям, в) поквартально, г) ежемесячно.
- Какие условия предпочтет клиент при получении кредита:
 - процентная ставка - 20%, начисление процентов ежемесячное;
 - процентная ставка - 22%, начисление процентов ежеквартальное;
 - процентная ставка - 23%, начисление процентов по полугодиям.
- Для строительства завода банк предоставил фирме кредит в 200 тыс.\$ сроком на 10 лет из расчета 13% годовых. Проведите расчет коэффициента наращения, суммы начисленных процентов и стоимости кредита на конец каждого года.
- Банк выдал кредит в размере 75 000 грн. на 2 года и 170 дней под 25% сложных годовых. Определить, сумму к погашению и сумму начисленных процентов.
- Банк принимает вклады от населения по номинальной процентной ставке 12% годовых. Начисление процентов ежемесячное. Вклад 1200\$ был изъят через 102 дня. Определите доход клиента.

7. Бабушка хочет, чтобы на счете у внука через 18 лет была сумма 30 000 грн. Определить, какую сумму ей необходимо внести сейчас в банк, если на вклад начисляется 15% сложных годовых.
8. Г-н Иванов может вложить деньги в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_6 = 10\%$. Какую сумму он должен вложить, чтобы получить 20 000 грн. через 3 года 3 месяца?
9. Г-н Петров хочет вложить 30 000 грн., чтобы через 5 лет получить 40 000 грн. Под какую процентную ставку j_{12} он должен вложить свои деньги?
10. Какой должна быть минимальная процентная ставка, чтобы произошло удвоение вклада за три года при начислении процентов: а) поквартально, б) ежемесячно.
11. ПроКредит банк (ProCredit bank) предлагает населению следующие условия для срочного депозита:

Вы вкладываете	Вы получаете			
Сумма/ срок	90 дней	180 дней	367 дней	550 дней
5000 грн.	5138 грн.	5312 грн.	5696 грн.	6044 грн.

Определите ставку простых и сложных процентов при различных сроках начисления процентов.

12. Определите период времени, необходимый для удвоения капитала по простым и сложным процентам при процентной ставке 12% годовых. В последнем случае начисления процентов ежемесячные.
13. Ставка банка за пользование кредитом составляет 25%. Первые 2 года ставка процента не менялась. Каждые следующие 2 года ставка увеличивалась на 2%. Определите конечную сумму долга, если кредит в сумме 30 000 грн. был взят на 7 лет
14. По кредиту, полученному 5 лет назад фирма должна уплатить 250 000 грн. Процентная ставка по кредиту определена в 10,5% для 1-го года; для 2-го года ставка увеличивается на 1,5%; для 3-го и последующих лет ставка увеличивается на 0,75%. Определить сумму выданного кредита.

Практическое занятие 5

Антисипативный метод начисления сложных процентов.

Цель: Изучить теоретические основы и получить практические навыки при расчетах по сложным процентам антисипативным методом.

Наращение по сложной учетной ставке антисипативным методом производится по формуле

$$FV = \frac{PV}{(1-d)^n},$$

где FV – наращенная сумма;
PV – первоначальная сумма;
n – срок операции;
d – сложная учетная ставка.

Если капитализация процентов производится чаще, чем один раз в год, наращение по сложной учетной ставке производится по формуле

$$FV = \frac{PV}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m*n}},$$

где f – номинальная учетная ставка;
m – число периодов капитализации в течение года.

Операции с векселями

При учете векселя в банке до срока его погашения владелец векселя получит сумму, равную:

$$PV_1 = FV * (1-d)^{\frac{t_1}{k}},$$

где t_1 – срок до момента погашения векселя.

При переучете векселя владелец векселя получит сумму:

$$PV_2 = FV * (1-d_2)^{\frac{t_1-t_2}{k'}} = PV_1 * (1+i_{эф.сл.})^{\frac{t_1-t_2}{k'}} - 1,$$

где k' – количество дней в году согласно применяемой методике;
 $i_{эф.сл.}$ – эффективная процентная ставка сложных процентов для операции учета векселя.

Эффективная процентная ставка сложных процентов для операции учета векселя определяется по формуле

$$i_{эф.сл.} = \left(\frac{1 - \frac{t_1 * d_1}{k}}{1 - \frac{t_2 * d_1}{k}} \right) - 1.$$

Начисление процентов и инфляция

Наращенная сумма по сложным процентам с учетом инфляции рассчитывается по формуле

$$FV = \frac{PV * (1+i)^n}{(1+h)^n},$$

где h – темп инфляции.

Формула корректировки первоначальной суммы капитала на уровень инфляции

$$FV = PV * Y * (1+i)^n,$$

где i – процентная ставка, отражающая реальную доходность финансовой операции;

Y – индекс инфляции.

Формула расчета процентной ставки, скорректированной на уровень инфляции (**формула Фишера**)

$$r = i + h + ih,$$

где r – процентная ставка, скорректированная на уровень инфляции;

i – процентная ставка, отражающая реальную доходность финансовой операции;

h – темп инфляции.

Начисление процентов и налоги

Простые проценты:

Проценты после уплаты налога:

$$I = PV * i * n * (1 - r),$$

где r – ставка налога.

Наращенная сумма после уплаты налога:

$$FV = PV[1 + i * n * (1 - r)].$$

Сложные проценты:

Проценты после уплаты налога:

$$I = PV[(1 + i)^n - 1] * (1 - r).$$

Наращенная сумма после уплаты налога:

$$FV = PV * [(1 + i)^n (1 - r) + r].$$

При начислении процентов m раз в году по номинальной процентной ставке j :

$$I = PV * \left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} - 1 \right] * (1 - r);$$

$$FV = PV * \left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} (1 - r) + r \right].$$

Вопросы для обсуждения:

- начисление сложных процентов антисипативным методом;
- дисконтирование по сложным учетным ставкам;
- операции по учету векселей.

Примеры решения задач

Пример 5.1.

Получен кредит сроком на 2 года под 16% годовых. Проценты простые (сложные), и комиссионные составляют $q = 1\%$ от суммы кредита. Требуется определить эффективную процентную ставку доходности а) как ставку простых процентов, б) как ставку сложных процентов

Решение:

а) наращенная сумма кредита для кредитора:

$$FV = PV * (1 + i)^n.$$

Клиент получит сумму $FV_1 = PV \cdot (1 - q)$, и наращенная сумма кредита для клиента будет:

$$FV = PV \cdot (1 - q) \cdot (1 + n \cdot i_{эф.нPV}).$$

Отсюда:

$$i_{эф.нр.} = \frac{1 + i \cdot n}{(1 - q) \cdot n} - \frac{1}{n} = \frac{1 + 2 \cdot 0,16}{(1 - 0,01) \cdot 2} = 0,1667;$$

б) наращенная сумма кредита:

$$FV = PV \cdot (1 - q) \cdot (1 + i_{эф})^n = PV \cdot (1 + i \cdot n);$$

$$i_{эф} = \left(\frac{1 + ni}{1 - q} \right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{1 + 2 \cdot 0,16}{1 - 0,01} \right)^{1/2} - 1 = 0,172$$

в) если кредит получен под сложные проценты, то наращенная сумма кредита будет:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n = PV \cdot (1 - q) \cdot (1 + i_{эф})^n;$$

$$i_{эф} = \frac{1 + i}{(1 - q)^{1/n}} - 1 = \frac{1 + 0,16}{(1 - 0,01)^{1/2}} - 1 = 0,1658.$$

Определим срок кредита и процентную ставку для случая сложных процентов:

$$n = \frac{\lg \frac{FV}{PV}}{m \cdot \lg \left(1 + \frac{j}{m} \right)}.$$

Необходимая номинальная процентная ставка

$$j = m \left(\left(\frac{FV}{PV} \right)^{\frac{1}{mn}} - 1 \right).$$

Пример 5.2

Клиент внес в банк 1000\$ на 2 года. Процентная ставка банка - 14%. Налог на проценты - 5%. Требуется определить сумму налога и наращенную сумму в случае: а) простых процентов, б) сложных процентов, в) сложных процентов при ежемесячном начислении.

Решение:**а) простые проценты:**

Сумма налога рассчитывается по формуле

$$H = PV * i * n * r$$

$$H_1 = 1000 * 2 * 0,14 * 0,05 = 14 \$,$$

$$FV_1 = 1000 * [1 + 2 * 0,14 * (1 - 0,05)] = 1456 \$;$$

б) сложные проценты:

Сумма налога рассчитывается по формуле

$$H = PV * [(1 + i_c)^n - 1] * r,$$

$$H_2 = 1000 * [(1 + 0,14)^2 - 1] * 0,05 = 14,98 \$,$$

$$FV_2 = 1000 * [(1 + 0,14)^2 (1 - 0,05) + 0,05] = 1284,12 \$;$$

в) сложные проценты при ежемесячном начислении:

Сумма налога рассчитывается по формуле

$$H = PV * [(1 + j / m)^{mn} - 1] * r,$$

$$H_3 = 1000 * [(1 + 0,14/12)^{12*2} - 1] * 0,05 = 16,05 \$,$$

$$FV_3 = 1000 * [(1 + 0,14/12)^{12*2} (1 - 0,05) + 0,05] = 1304,9 \$.$$

Пример 5.3

Месячные уровни инфляции 3%. Какой процент за годовой кредит должна взять финансовая компания, чтобы обеспечить доходность не менее 24%? Проценты сложные и начисляются ежемесячно.

Формула расчета наращенной суммы с учетом инфляции и начислении процентов по процентной ставке j :

$$FV = PV * \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m*n} * (1 + h)^{m*n} = PV * \left(1 + \frac{j_h}{m}\right)^{m*n},$$

где j_h – номинальная процентная ставка, учитывающая уровень инфляции.

Отсюда

$$j_h = \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m * (1 + h) - 1 \right) * m;$$

$$j_h = ((1 + 0,24/12) * (1 + 0,03) - 1) * 12 = 0,6072;$$

Ответ: $J_h = 60\%$

Задачи

1. Ссуда в размере 180 000 грн. была выдана на приобретение предприятием оборудования на 3 года и 4 месяца. Контрактом предусмотрено изменение ставки процента в зависимости от темпа инфляции. Базовая процентная ставка составляет 20% сложных годовых. Во втором году инфляция составила 12,5%, в третьем – 15%, в четвертом – 15,5%. Определить сумму погашающего платежа.
2. Коммерческий банк привлек депозит в сумме 17 000 грн. на 4 месяца под 25% годовых на условии корректировки депозитной ставки процента на инфляцию. За данный период цены выросли в 1,11 раза – в течение первого, второго, третьего месяцев, в четвертом месяце – на 9%. Определить:
 - а) ставку процента, учитывающую инфляцию;
 - б) наращенную сумму, полученную клиентом по истечении срока депозита;
 - в) сумму, которую реально получил вкладчик, если бы договором не предусматривалась корректировка депозитной ставки.
3. Коммерческий банк учел вексель за 110 дней до погашения по сложной учетной ставке 12% годовых. Вексель выдан в сумме 100 000 грн. на срок 6 месяцев. Определить сумму, которую банк заплатил в данной операции.
4. В результате учета векселя в сумме 150 000 грн., выданного на срок 3 года банк выплатил клиенту сумму 80 000 грн. Учетная ставка составила 32 % сложных годовых. Определить срок наступления платежа по векселю.
5. Определить номинальный учетный процент, по которому был учтен вексель номиналом 50000 грн. и сроком погашения 90 дней, если векселедержатель получил 48000 грн. Начисление процентов ежемесячное.
6. Владелец векселя учел его в банке за 3 месяца до срока погашения и получил 16000 грн. Номинальный учетный процент банка – 0,12. Проценты сложные и начисляются ежемесячно. Определить номинальную стоимость векселя.
7. Клиент вложил в банк 100 000 грн. Какая сумма будет на счете этого клиента через 1 год, если банк начисляет проценты по ставке а) $j_{360} = 5\%$, б) $j_{\infty} = 5\%$?
8. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий непрерывные проценты по ставке $j_{\infty} = 17\%$, чтобы через 10 лет на счете было 50 000 грн.
9. Банк начислял на вложенные в него деньги проценты непрерывно по ставке в первом году- 12%, во втором - 18%, в третьем и четвертом гг. - 24%. Ка-

кая сумма будет на счете 31 декабря четвертого года, если 1 января первого года на этот счёт было положено 30000 грн.?

10. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4 = 16\%$ и собирается перейти к непрерывному начислению процентов. Какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?
11. Клиент внес на депозит 4000 грн. сроком на 3 месяца под процентную ставку 12% годовых. Сумма, получения клиентом после окончания срока – 4400 грн. Определите процентную ставку налога на доход, если проценты начисляются:
 - а) простые;
 - б) сложные.
12. Определите доход клиента и налоговые деньги по срочному депозиту в 8 тыс. грн. на 6 месяцев с номинальной процентной ставкой 48% годовых, если процентная ставка налога 20%. Начисление процентов производится:
 - а) поквартально, б) ежемесячно.
13. Три векселя номинальной стоимостью 30 тыс. грн. 50 и 80 тыс. грн. со сроками погашения 210, 240 и 270 дней объединяются в один номинальной стоимостью 180 тыс. грн. Объединение происходит по годовой ставке сложных процентов – 22 %. Найдите срок погашения объединенного процента.

ТЕМА 4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК И ПЛАТЕЖЕЙ

Практическое занятие 6. Эквивалентность процентных ставок и платежей

Цель: Научиться составлять уравнения эквивалентности для определения ставок и параметров финансовых операций.

Современная стоимость денег – понятие относительное и зависит от выбранного современного момента времени.

В зависимости от выбранного современного момента времени современная ценность определяется с помощью операции дисконтирования или наращения, или не требует никаких математических операций.

В финансовой практике возникают ситуации, которые требуют изменения порядка начисления процентов. Для безубыточности операций определяются эквивалентные процентные ставки.

Эквивалентные процентные ставки – это ставки, которые обеспечивают равноценность финансовых последствий при различных вариантах осуществления операций.



Уравнение эквивалентности заключается в приравнивании соответствующего множителя наращения или дисконтирования для различных вариантов начисления процентов.

Ставка сложных процентов, эквивалентная ставке простых процентов рассчитывается по формуле

$$(1+i_c * n) = (1+i_n)^n \Rightarrow i_c = \sqrt[n]{1+i_n * n} - 1,$$

где i_n – простая процентная ставка

i_c – сложная процентная ставка

Два варианта изменения условий:

1. Совокупность платежей заменяется одним новым платежом

Здесь возможно два варианта. При известном сроке объединённого платежа определяем сумму этого платежа. При расчётах по простым процентам уравнение эквивалентности будет следующего вида:

$$R_0 = \sum R_k (1 + \sum (n_0 - n_k)) + \sum R_t (1 + i(n_t - n_0))^{-1};$$

где R_0 – сумма объединенного платежа,

n_k, R_k – сумма платежей в соответствующие моменты времени, сроки выплат которых раньше срока R_0 ;

n_t, R_t – платежи и сроки этих платежей, если они осуществляются позже нового срока n_0 .

При расчётах по сложным процентам уравнение эквивалентности имеет вид:

$$R_0 = \sum R_k (1 + i)^{n_0 - n_k} + \sum R_t (1 + i)^{-(n_t - n_0)}.$$

Для определения срока объединенного платежа по простым процентам составляется уравнение эквивалентности;

$$FV_0 (1 + in_0)^{-1} = \sum \underbrace{R_k}_{PV_0} (1 + in_k)^{-1},$$

где PV_0 – современная стоимость всех платежей по первоначальным условиям на нулевой момент времени.

$$FV_0 (1 + in_0)^{-1} = PV_0,$$

$$n_0 = \frac{1}{i} \left(\frac{FV_0}{PV_0} - 1 \right).$$

Уравнение эквивалентности при расчётах по сложным процентам:

$$R_0 (1 + i)^{-n_0} = \sum \underbrace{R_k (1 + i)^{-n_k}}_{PV_0};$$

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{R_0}{PV_0}\right)}{\ln(1 + i)}.$$

Изменение условий контрактов может предусматривать изменение суммы и сроков платежей в любом согласованном порядке.

Для определения параметров по новым условиям необходимо выбрать современный момент времени, которым может быть любая дата поступления денежных средств по новым, либо по старым вариантам и составить уравнение эквивалентности, к которому приравнять все платежи по новым условиям, приведённым к этому моменту времени, к платежам по первоначальным условиям, приведённым к этому же моменту времени.

Уравнение эквивалентности при расчётах по сложным процентам можно записать так:

$$\sum R_k \cdot v^{tk} = \sum Q_l \cdot v^{tl} \$;$$

где

R_k – платежи по первоначальным условиям в соответствующий момент времени, t_k ;

Q_l – платежи по новым условиям в соответствующий момент времени, t_l .

Вопросы для обсуждения:

- понятие современной ценности денег;
- понятие эквивалентности процентных ставок;
- изменение условий контрактов;
- расчет параметров операций при изменении условий контрактов;
- консолидация платежей.

Задачи

1. Коммерческий банк предлагает следующие простые депозитные ставки:

- а) 15% при сроке вклада от 1 месяца;
- б) 17% при сроке вклада 3 месяца;
- в) 19% при сроке вклада 6 месяцев.

Рассчитать эквивалентную данным простым ставкам ставку сложных процентов.

2. Банк учитывает вексель за 60 дней до срока его оплаты по простой учётной ставке $d_n = 6\%$. Какую сложную учётную ставку должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?
3. Банк учитывает вексель по учётной ставке $f_3 = 8\%$ и желает перейти к сложной учётной ставке d_c . Какой величины должна быть ставка d_c , чтобы доход банка не изменился?
4. Определить ставку сложных процентов i_c , эквивалентную ставке а) $j_2 = 10\%$, б) $j_6 = 10\%$, в) $j_{12} = 10\%$, г) $j_\infty = 10\%$.
5. «Приорбанк» предлагал населению денежный вклад, доход по которому за первые 2 месяца 7% годовых, за следующие 2 месяца – 8, за 5 месяцев – 9, за 6 месяцев – 10% годовых. Определите эффективную процентную ставку при замещении денег на 6 месяцев под указанные простые и сложные проценты. В последнем случае начисление процентов ежемесячное.
6. Реклама одного коммерческого банка предлагает 18% годовых при ежемесячном начислении процентов. Другой коммерческий банк предлагает 20% годовых при поквартальном начислении процентов. Срок хранения вклада – 12 месяцев. Какому банку отдать предпочтение?
7. Сопоставьте условия четырех банков: а) проценты простые и процентная ставка 14%; б) номинальная процентная ставка – 16% годовых, начисление процентов происходит по полугодиям; в) номинальная процентная ставка – 15%, начисление процентов поквартальное; г) номинальная процентная ставка – 15,5%, начисление процентов ежемесячное.
8. Клиент разместил вклад в 10 тыс. грн. на депозит сроком 8 месяцев. Начисление процентов ежемесячное под номинальную процентную ставку 16% годовых. Определите наращенную сумму и эффективную процентную ставку.
9. Предприятие получило кредит на 3 года под номинальную процентную ставку 14% годовых. Комиссионные составляют 5% от суммы кредита. Определите эффективную. Процентную ставку при начислении процентов: а) один раз в год, б) поквартально, в) ежемесячно.

$$\text{Указание: } j_{\text{эф}} = (m(1 + j/m)/(1 - q)^{1/mn}) - m$$

10. Определите номинальную эффективную ставку простых и сложных процентов для депозита сроком на 4 месяца, если номинальная процентная ставка

банка 18%, процентная ставка налога 15%. Банк производит начисление процентов ежемесячно.

Указание: $[(1 + j/m)^{mn} - 1](1 - r) = (1 + j_{эф}/m)^{mn} - 1$
Нужно выразить $j_{эф}$.

11. Какова современная ценность 10000 грн., если а) эта сумма будет получена через 3 года 6 месяцев, б) эта сумма была получена 2 года 9 месяцев тому назад, в) эта сумма получена в настоящий момент времени?
Стоимость денег - 8% (то есть на деньги, находящиеся в обороте, начисляются 8% годовых (сложных)).
12. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4 = 6\%$. Какова современная ценность суммы денег в 25 000 грн., которая а) была вложена в этот банк 5 лет 4 месяца тому назад, б) будет вложена в банк через 1 год 8 месяцев?
13. Г-н Сидоров положил в банк, выплачивающий проценты по годовой ставке $i = 5\%$ (сложных) сумму 12000 грн. Через 1 год 6 месяцев он снял со счёта 4500 грн., а ещё через 2 года положил на свой счёт 2 000 грн. После этого, через 3 года 6 месяцев он закрыл счёт. Какую сумму он получил?
14. Г-н Иванов положил 3 года назад 5 000 грн. в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_2 = 8\%$. Год назад он положил ещё 2 000 грн., а через 3 года 6 месяцев после этого снял со счёта 3 500 грн. Ещё через 6 месяцев он желает положить на свой счёт такую сумму, чтобы ещё через год на счете было 10 000 грн. Какую сумму он должен положить на свой счёт в последний раз?
15. Г-н Фёдоров положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счёт такую же сумму, а ещё через 1 год 6 месяцев - снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счету было 25 000 грн. Какую сумму вносил в банк г-н Фёдоров каждый раз, если банк начисляет на вложенные деньги проценты по годовой ставке $i = 5\%$ (сложных)?
16. Фермер взял в банке кредит на сумму 5 тыс. грн. под 8% годовых (сложных). Через год он вернул банку 3 тыс. грн., а ещё через год взял кредит в сумме 2 тыс. грн. Через 2 года после этого фермер вернул полученные кредиты полностью. Какую сумму он при этом выплатил банку?
17. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4 = 10\%$, чтобы иметь возможность снять со счёта 20 000 грн. через 1 год 6 месяцев и ещё 30 000 грн. через 1 год 6 месяцев после этого?
18. Строительный комбинат продаёт коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Господин Иванов приоб-

рёл коттедж. Он выплатил 20 тыс. грн. через 3 месяца после покупки, 30 тыс. грн. - ещё через 6 месяцев, 10 тыс. грн. - в конце первого года с момента покупки и погасил весь долг через 1.5 года с момента покупки. Какую сумму составил последний платёж?

19. Г-н Сидоров тоже приобрёл коттедж у строительного комбината из упражнения 18, обязавшись выплатить долг в течение трёх лет равными платежами по полугодиям (первая уплата - через полгода от момента покупки). Чему равна каждая уплата?
20. Г-н Иванов должен уплатить г-ну Смирнову 20000 грн. 1 января настоящего года. Деньги даны под 15% годовых (сложных). Какую сумму должен уплатить г-н Иванов, если он вернёт долг а) 1 июля предыдущего года, б) 1 июля следующего года, в) 1 января настоящего года?
21. Покупатель обязался уплатить фермеру за купленное у него зерно 3,5 тыс. грн. через 2 месяца после покупки, 3 тыс. грн. - ещё через 2 месяца и 5,2 тыс. грн. - ещё через 3 месяца. Стороны договорились объединить эти платежи в один и выплатить его через 5 месяцев после покупки. Чему равен этот платёж, если на деньги начисляется 8% годовых?
22. Покупатель из предыдущего упражнения желает выплатить весь долг одним платежом, равным 12 тыс. грн. В какой срок, считая с момента покупки, он должен это сделать?
23. Покупатель из упражнения 21 желает выплатить долг двумя равными платежами через 3 и через 6 месяцев после покупки. Какова должна быть величина каждой из этих уплат?
24. Г-н А должен уплатить г-ну Б три раза по 25000 грн. через каждые полтора года от настоящего момента. Г-н А предложил заплатить 30000 грн. через 2 года, а остальное - ещё через 2 года. Какую сумму он должен уплатить в последний раз, если деньги стоят 9% годовых (сложных)?

ТЕМА 5. ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

Практическое занятие 7 Нарастание аннуитетов (финансовой ренты)

Цель: Изучить теоретические основы и получить практические навыки по расчетам параметров финансовых рент с использованием наращенной суммы

Наращенная сумма ренты - это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока аннуитета.

$$FV = \sum_{t=0}^n A * (1+i)^t \quad \text{или} \quad FV = \sum_{t=1}^{n*m} A * \left(1 + \frac{j}{m}\right)^t.$$

Для упрощения расчетов разработаны специальные формулы с использованием **коэффициентов наращивания финансовых рент (Приложение Д)**

Множитель наращивания обозначается **FVIFA_{i, n}** или **FVIFA_{j/m, n*m}** от англ. **Future Value Interest Factor of Annuity**.

$$FVIFA_{i,n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad FVIFA_{j/m, n*m} = \frac{(1 + j/m)^{n*m} - 1}{j/m}.$$

Расчет наращенной суммы **p - срочной ренты** производится по формуле:

$$FV = \frac{A}{PV} \frac{((1+i)^{np} - 1)}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{A}{PV} \frac{(1+i)^n - 1}{PV \left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right]} = \frac{A}{p} \frac{FVIFA_{r,i}}{PFVIFA_{\frac{1}{p};i}};$$

где **PFVIFA_{1/p,1}** – коэффициент наращивания p-срочной ренты

Расчёт наращенной суммы финансовой ренты с периодом больше года проводится с помощью формулы:

$$FV = A_r * \frac{[(1+i)^n - 1]/i}{[(1+i)^r - 1]/i} = A_r * \frac{FVIFA_{n,i}}{FVIFA_{r,i}}.$$

Ренты с начислением процентов **m** раз в год (по ставке **j/m**)

Расчет наращенной суммы годовой финансовой ренты:

$$FV = A * \frac{\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m*n} - 1 \right] / \frac{j}{m}}{\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \right] / \frac{j}{m}} = A * \frac{FVIFA_{m*n, \frac{j}{m}}}{FVIFA_{m, \frac{j}{m}}}.$$

Расчет наращенной суммы p - срочной ренты:

$$FV = \frac{A}{p} * \frac{\left(\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mn} - 1 \right) / \frac{j_m}{m}}{\left(\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right) / \frac{j_m}{m}} = \frac{A}{p} * \frac{FVIVA_{mn, \frac{j}{m}}}{PFVIVA_{\frac{m}{p}, \frac{j}{m}}}.$$

Частный случай p-срочной ренты при **p=m**:

$$FV = \frac{A}{m} \frac{FVIFA_{mn, \frac{j}{m}}}{FVIFA_{1, \frac{j}{m}}}.$$

Расчет наращенной суммы финансовой ренты с периодом больше года:

$$FV = A_r \frac{\left(\left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^{mn} - 1 \right) / \frac{j_m}{m}}{\left(\left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^{mr} - 1 \right) / \frac{j_m}{m}} = A_r \frac{FVIFA_{m * n; \frac{j}{m}}}{FVIFA_{m * r; \frac{j}{m}}}.$$

Ренты с непрерывным начислением процентов.

Расчет наращенной суммы **годовой финансовой ренты** производится по формуле:

$$FV = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{A((e^\delta)^n - 1)}{e^\delta - 1} = A \frac{e^{\delta n} - 1}{e^\delta}.$$

Расчет наращенной суммы **p - срочной ренты** производится по формуле:

$$FV = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{A \left(e^{\frac{\delta}{p}} \right)^{np} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1} = \frac{A}{p} \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}.$$

Расчет наращенной суммы финансовой ренты **с периодом больше года** проводится с использованием формулы:

$$FV = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{A_r \left((e^{\delta \cdot r})^{\frac{n}{r}} - 1 \right)}{e^{\delta \cdot n} - 1} = A_r \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}.$$

Примеры решения задач

Пример 7.1

На счет в банке в течении пяти лет в конце каждого года вносятся суммы в размере 500 грн., на которые будут начисляться проценты по ставке 12 % годовых. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Решение:

Сумма всех взносов с начисленными процентами будет равна:

$$FV = A * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 500 * \frac{(1+0,12)^5 - 1}{0,12} = 500 * 6,3528 = 3176,42(\text{грн}).$$

Можно определить наращенную сумму постоянной ренты, воспользовавшись финансовыми таблицами (**приложение Г**), содержащими коэффициенты наращенной ренты

$$FV = A * FVIFA_{i,n} = 500 * 6,3528 = 3176,42 \text{ (грн.)}$$

Сумма взносов в течении 5 лет составит:

$$R = n * A = 2500 \text{ (грн.)}$$

Следовательно, сумма начисленных процентов будет равна:

$$I = FV - R = 3176,42 - 2500 = 676,42 \text{ (грн.)}$$

Ответ: 676,42 (грн.)

Пример 7.2

Рассмотрим предыдущую задачу, изменив условия: проценты начисляются поквартально, ставка процентов 40 % годовых.

Решение:

$$FV = A * \frac{\left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m*n} - 1 \right] / \frac{j}{m}}{\left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1 \right] / \frac{j}{m}} = A * \frac{FVIFA_{m*n, \frac{j}{m}}}{FVIFA_{m, \frac{j}{m}}}$$

Можно определить наращенную сумму постоянной ренты, воспользовавшись финансовыми таблицами (**приложение Г**), содержащими коэффициенты наращенной ренты:

$$FV = 500 * \frac{FVIFA_{20, 10\%}}{FVIFA_{4, 10\%}} = 500 * \frac{57,275}{4,64} = 6170,5 \text{ (грн.)}$$

Или с помощью формулы наращенной годовой ренты с начислением процентов m – раз в год:

$$FV = 500 * \frac{\left[\left(1 + \frac{0,4}{4} \right)^{4*5} - 1 \right] / \frac{0,4}{4}}{\left[\left(1 + \frac{0,4}{4} \right)^4 - 1 \right] / \frac{0,4}{4}} = 500 * \frac{5,72}{0,46} = 6170,5 \text{ (грн.)}$$

Ответ: $FV = 6170,5$ грн.

Пример 7.3

Изменив условия примера 7.1: проценты начисляются 3 раза в год по ставке 15 % годовых и платежи по ренте осуществляются 3 раза в год.

Решение:

$$FV = 500 * \frac{FVIFA_{5*3; \frac{15}{3}}}{FVIFA_{1; \frac{15}{3}}} = 500 * 21,579 = 10790 \text{ (грн.)}$$

Задачи

1. Г-н Петров вкладывает 25000 грн. в конце каждого года в банк, выплачивающий проценты по ставке 5% сложных годовых. Какая сумма будет на счете г-на Петрова а) через 3 года, б) через 10 лет?
2. Г-н Сидоров хочет накопить за 6 лет 40 000 грн., делая а) ежегодные, б) ежеквартальные, в) ежемесячные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $i = 10\%$ годовых (сложных). Какую сумму должен вкладывать г-н Сидоров?
3. Предприятие создаёт фонд для постройки нового здания, вкладывая в него каждые 4 года 15 тыс. грн. Деньги кладутся в банк, выплачивающий проценты по ставке а) $i = 15\%$ сложных годовых, б) $j_4 = 16\%$ годовых. Какая сумма будет в фонде через 16 лет?
4. Банк выплачивает на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4 = 16\%$. Клиент вкладывает в этот банк ежегодно 80000 грн., делая равные вклады а) в конце каждого квартала, б) ежемесячно. Какая сумма будет на счету этого клиента через 5 лет?
5. Банк на вложенные в него деньги начисляет непрерывные проценты по ставке (силе роста) $\delta = 8\%$. Клиент вкладывает в этот банк в конце каждого года 50 000 грн. Какая сумма будет на его счете через 7 лет 6 месяцев?
6. Наращенная стоимость срочной ренты с ежемесячными взносами в начале каждого месяца по 8 тыс. грн. и ежемесячным начислением процентов равна 469,872 тыс. грн. Номинальная годовая процентная ставка- 30%. Определите срок ренты.
7. Пенсионер вкладывает в начале каждого месяца в банк по 50 грн. под 12% годовых. Определите, через какое время он накопит сумму, достаточную для покупки холодильника стоимостью 3000 грн. Проценты начисляются ежемесячно.
8. Владелец дома планирует произвести через 15 лет капитальный ремонт, на который ему потребуется 120 тыс. грн. Он может ежегодно вкладывать для этой цели в банк 6000 грн. Под какие проценты он должен вложить эти деньги, чтобы накопить необходимую сумму?
9. В конце каждого месяца семья вкладывает в банк 100 грн. под номинальную ставку процентов 18%. Начисление процентов ежемесячное. Какой срок необходим для того, чтобы сумма сбережения стала достаточной для покупки легкового автомобиля стоимостью 25800 грн.?

Практическое занятие 8 Современная стоимость финансовых рент.

Цель: Изучить теоретические основы и получить практические навыки по расчетам параметров финансовых рент с использованием наращенной суммы

Текущая стоимость ренты - сумма всех членов ренты, дисконтированных на текущий момент времени.

$$FV = \sum_{t=0}^n \frac{A}{(1+i)^t} \quad \text{или} \quad FV = \sum_{t=1}^{n*m} \frac{A}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^t}.$$

Множитель дисконтирования обозначается **PVIFA**_{i, n} или **PVIFA**_{j/m, n*m} от англ. **Present Value Interest Factor of Annuity**.

$$PV = A * PVIFA_{i, n} \quad \text{или} \quad PV = A * PVIFA_{j/m, n*m};$$

$$PVIFA_{i, n} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i * (1+i)^n} \quad \text{или}$$

$$PVIFA_{j/m, n*m} = \frac{1 - (1+j/m)^{-n*m}}{j/m} = \frac{1}{j/m} - \frac{1}{j/m * (1+j/m)^{n*m}}.$$

Расчет **современной суммы годовой финансовой ренты** производится по формуле

$$PV = A * PVIFA_{i, n},$$

где $PVIFA_{i, n} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i * (1+i)^n}.$

Расчет **современной суммы р - срочной ренты** производится по формуле

$$PV = A \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p \left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right]} = A \frac{PVIFA_{n; i}}{FVIFA_{\frac{1}{p}; i}}.$$

Расчет **современной суммы финансовой ренты** с периодом больше года:

$$PV = A_r \frac{\left[1 - (1+i)^{-n}\right] / i}{\left[(1+i)^r - 1\right] / i} = A_r \frac{PVIFA_{n;i}}{FVIFA_{r;i}}.$$

Ренты с начислением процентов m раз в год.

Расчет современной суммы **годовой финансовой ренты** производится по формуле

$$PV = A \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{-nm}\right] / \frac{j_m}{m}}{\left[\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1\right] / \frac{j_m}{m}} = A \frac{PVIFA_{nm; \frac{j}{m}}}{FVIFA_{m; \frac{j}{m}}}.$$

Расчет современной суммы **p - срочной ренты** производится по формуле

$$PV = \frac{A}{p} \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{-nm}\right] / \frac{j_m}{m}}{\left[\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right] / \frac{j_m}{m}} = \frac{A}{p} \frac{PVIFA_{nm; \frac{j}{m}}}{PFVIFA_{\frac{m}{p}; \frac{j}{m}}}.$$

Частный случай **p -срочной ренты** при $p=m$:

$$PV = R \frac{PVIFA_{nm; \frac{j}{m}}}{m}.$$

Расчет современной суммы финансовой ренты **с периодом больше года**:

$$PV = A_r \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{-nm}\right] / \frac{j_m}{m}}{\left[\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m*r} - 1\right] / \frac{j_m}{m}} = A_r \frac{PVIFA_{n*m; \frac{j}{m}}}{FVIFA_{m*r; \frac{j}{m}}}.$$

Рента с непрерывным начислением процентов.

Расчет **современной суммы годовой финансовой ренты** производится по формуле

$$PV = A \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1}.$$

Расчет **современной суммы р - срочной ренты** производится по формуле

$$PV = FV * e^{-\delta n} = \frac{A}{p} * \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1} \cdot e^{-\delta n} = \frac{A}{p} * \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}.$$

Расчет современной суммы **финансовой ренты с периодом больше года**:

$$PV = FV e^{-\delta \cdot n} = A_r \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{e^{\delta \cdot r} - 1} \cdot e^{-\delta \cdot n} = A_r \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{e^{\delta \cdot r} - 1}.$$

Расчет современной стоимости **р – срочной ренты с начислением процентов в конце года** по ставке сложных процентов, равной

$$PV_{\infty} = \frac{A}{p \left[(1 + i)^{\frac{1}{p} - 1} \right]}.$$

Примеры решения задач

Пример 8.1

На счет в банке в течении пяти лет в конце каждого года вносятся суммы в размере 500 грн., на которые будут начисляться проценты по ставке 12 % годовых. Определить современную стоимость финансовой ренты.

Решение:

Воспользуемся таблицей приложения Г, рассчитаем текущую стоимость финансовой ренты:

$$PV = A * PVIFA_{i, n} = 500 * 3,3521 = 1676,05 \text{ (грн)}.$$

Ответ: PV=1676, 05 грн.

Пример 8.2

Создается страховой фонд фирмы общей суммой 100 тыс. грн. Фонд должен быть создан в течение четырех лет. Ежегодные платежи осуществляются в начале каждого года. Проценты начисляются один раз в конце года по процентной ставке 20% годовых. Определите размер платежа и текущую стоимость ренты.

Решение:

$$A = \frac{FV}{FVIFA_{n;i} * (1+i)},$$

$$PV = A * PVIFA_{n;i} * (1+i),$$

$$A = 100 / (PVIFA_{4;0,2} * (1+0,2)) = 15,524 \text{ тыс.грн.},$$

$$PV = 15,524 * PVIFA_{4;0,2} * (1+0,2) = 48,225 \text{ тыс.грн.}$$

Ответ: 15,524 тыс.грн., 48,225 тыс.грн.

Задачи

1. Фермер взял в банке 500000 грн. под 15% годовых на 5 лет. Для погашения долга он образовал страховой фонд, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги $j_{12} = 10\%$ годовых. Найдите ежегодную срочную уплату по долгу.
2. Текущая стоимость, обычной ренты с взносами размером 6,558 тыс. грн. в конце каждого месяца и начислением 40% годовых один раз в год равна 200 тыс. грн. Определите срок ренты и наращенную сумму.
3. Владелец магазина получил в банке ссуду 2 тыс. грн. сроком на 3 года. Банк за ссуженные деньги взимает 12% в год. Одновременно владелец магазина создал страховой фонд для погашения ссуды, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги проценты по ставке $j_4 = 8\%$. Какова ежегодная срочная уплата по долгу?
4. Г-н Иванов покупает нефтеносный участок, который будет приносить в течение 20 лет доход 5 тыс. грн. ежегодно, после чего запасы нефти истощатся. Указанный господин желает получать 12% ежегодного дохода на вложенную сумму. Одновременно он образует страховой фонд, чтобы к моменту истощения запасов нефти на участке накопить сумму, которую он заплатил за этот участок. На деньги, вложенные в фонд, он получает 8% в год. Какую сумму г-н Иванов должен заплатить за участок?
5. Какую сумму надо вложить в банк, выплачивающий 5% годовых, чтобы иметь возможность снимать а) в конце каждого года, б) в конце каждого полуго-

дия, в) в конце каждого месяца 50000 грн., исчерпав весь вклад к концу десятого года?

6. Перед выходом на пенсию г-н Фёдоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 50 000 грн. а) ежеквартально, в) каждые три года, б) неограниченно долго. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий 5% годовых?
7. Г-н Петров собирается положить в банк на счёт своего сына 180000 грн., чтобы тот в течение 5 лет учёбы в университете мог снимать в конце каждого года со счёта 40 000 грн., исчерпав весь вклад к концу учёбы. Какой процент для этого должен платить банк?
8. Организация получила кредит стоимостью 600 тыс. грн. на 1 год. Годовая процентная ставка за пользование кредитом 36 процентов. Платежи по кредиту происходят ежемесячно в начале месяца равными суммами. Определите величину месячного платежа.

Практическое занятие 9. Конверсия финансовых рент и анализ переменных денежных потоков

Цель: Изучить принцип расчета параметров конверсионных рент для использования в практических расчетах.

Расчет **единовременного платежа при выкупе ренты** производится по формуле

$$R = A * PVIFA_{n,i} * n * V^t,$$

где A – размер единовременного платежа;

R – элемент ренты;

$PVIFA_{n,i}$ – множитель приведения;

n – срок реализации ренты;

i – процентная ставка, используемая по согласованию сторон для расчета конверсионных параметров;

V – множитель наращивания $V = (1+i)$;

t – временной период, соответствующий периоду отсрочки выплаты единовременного платежа.

При заданном сроке ренты определить размер регулярного платежа позволяет формула

$$A = PV / PVIFA_{i,n}.$$

При заданном размере платежа определить срок ренты возможно по следующей формуле

$$PVIFA_{i,n} = PV/A.$$

Современная величина консолидированной ренты определяется с использованием формулы

$$PV = \sum_{q=1}^k PVq,$$

где PV – современная ценность консолидированных рент;

PVq – современная ценность q -ренты из совокупности объединенных рент;

k – количество объединенных рент.

Размер элемента **консолидированной ренты** при заданном сроке реализации консолидированной ренты определяется по формуле

$$A = \frac{PV}{PVIFA_{i,n}} = \frac{\sum_{q=1}^n PV_q}{PVIFA_{i,n}} = \frac{\sum_{q=1}^n A_q * PVIFA_{nq,iq}}{PVIFA_{i,n}},$$

где A_q – элемент q -й объединяемой ренты;

$PVIFA_{nq,iq}$ – множитель приведения q -ренты;

i_q – % ставка, используемая для приведения q -й ренты;

n – срок реализации консолидированной ренты;

i – % ставка, используемая для конверсионного преобразования.

Элемент ренты в случае отсрочки, если **сроки ренты** остаются неизменными ($n_0=n_1$) рассчитывается по формуле

$$A_0 * PVIFA_{n,i} = A_1 * PVIFA_{n,i} * V^t;$$

$$A_1 = A_0 V^t = A_0 (1+i)^{-t}.$$

где A_0 – платеж первоначальной ренты;

A_1 – платеж отсроченной ренты;

t – период отсрочки ренты;

V – элемент дисконтного множителя $(1+i)^{-1}$.

Элемент ренты в случае отсрочки, если сроки ренты изменяются ($n_0 \neq n_1$) рассчитывается по формуле

$$A_1 = A_0 * (PVIFA_{n_0,i} / PVIFA_{n_1,i}) * V^t,$$

где n_0 – срок первоначальной ренты;

n_1 – срок отсроченной ренты.

Период отсроченной ренты, если размеры платежей ренты остаются неизменными ($A_0 = A_1$) вычисляется по формуле

$$n_1 = \frac{-\ln[1 - (1 - (1+i)^{-n_0})] * (1+i)^t}{\ln(1+i)}.$$

В случае замены годовой ренты с параметрами R_0, n_0 на p -срочную ренту с параметрами R_1, n_1, p , расчет элемента новой ренты производят по формуле

$$A_1 = A_0 * PVIFA_{n,i} / PVIFA_{n,i} * k_{PV,i},$$

Современная и наращенная ценность финансовой ренты с постоянным абсолютным изменением элемента рассчитывается по формуле

$$PV = (A + \frac{a}{i}) * PVIFA_{n,i} - \frac{na}{i} v^n;$$

$$FV = (A + \frac{a}{i}) * FVIFA_{n,i} - \frac{na}{i},$$

где PV – современная ценность переменной финансовой ренты;
 FV – наращенная сумма переменной финансовой ренты;
 R – начальное значение ряда, характеризующее поток;
 a – ежегодный абсолютный прирост выплат или поступлений.

Задачи

1. Гражданин в течение 5 лет ежеквартально должен был выплачивать 500 грн., погашая взятую ссуду. В связи с отъездом за границу через 2 года, он попросил перечислить величину ежеквартальной выплаты, чтобы успеть рассчитаться. Ставка процентов в банке – 8% годовых.
2. Заменить аннуитет по 10 тыс.грн. в год на эквивалентный аннуитет, выплачиваемый: а) поквартально; б) ежемесячно; в) через каждые полгода, если процентная ставка составляет 6% годовых.
3. По контракту приходится выплачивать 200 грн. в конце каждых 2-х месяцев в течение 3-х лет. Найти эквивалентную наличную сумму такого контракта, если деньги стоят $J_{12} = 36\%$.
4. Дом, оцененный за 120 тыс. грн. продаётся за 20 тыс. грн. наличными с последовательными одинаковыми годовыми платежами в течение последующих 10 лет. Какими должны быть платежи при норме процентов: а) $J_1 = 4,5\%$; б) $J_4 = 8\%$.

5. Три ренты постнумерандо – годовые, заменяются одной, отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договорённости заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: платежи соответственно 100 грн., 120 грн., 300 грн.; сроки этих рент 6, 11, 8 лет. Ставка сложных процентов годовых 20%. Определить размер платежа заменяющей ренты.
6. Требуется объединить три финансовые ренты в одну с квартальными платежами и квартальным начислением процентов. Срок объединённой ренты – 2 года. Номинальная процентная ставка – 30%. Платежи объединённой ренты откладываются на пол года. Условия объединения рент приведены в таблице 1, где t и p – число периодов начисления процентов и платежей в году; j – номинальные процентные ставки рент; t – продолжительность периода, на который откладываются денежные платежи; R – разовые рентные платежи.

Таблица 1

№ ренты	Срок ренты, n лет	t	p	A , лет	R , тыс.грн	j , %
I	1	4	4	0	18	36
II	2	6	6	0	24	24
III	2,5	12	2	1	36	28

ТЕМА 6. ПЛАНИРОВАНИЕ ПОГАШЕНИЯ ЗАДОЛЖЕННОСТИ, КОНВЕРСИЯ ЗАЙМОВ, ИПОТЕЧНЫЕ ССУДЫ

Практическое занятие 10

Конверсия займов и формирование фонда погашения

Цель: Научиться составлять планы погашения по различным вариантам договора, а также рассчитывать параметры конверсионных займов.

Последовательность определения параметров конверсионного займа:

1. Определяется **величина срочной уплаты** по первоначальным условиям кредита по формуле

$$A = \frac{D}{PVIFA_{n,i}} = \frac{D * i}{1 - (1 + i)^{-n}} = D * \frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1},$$

где A - размер срочной годовой уплаты до момента конверсии;

D - сумма предоставленного кредита в начале кредитной операции;

n - срок погашения задолженности по первоначальным условиям кредитного договора;

i - процентная ставка по первоначальным условиям кредитного договора.

2. **Определяется остаток долга на момент конверсии**, расчет производится по формуле

$$D_{n-k} = Y * \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} * i},$$

где k - число оплаченных расчетных периодов до момента изменения условий кредита.

3. **Определяется величина срочной уплаты** по новым условиям кредитного договора по формуле:

$$Y_1 = D_{n-k} * \frac{i_1 * (1+i_1)^{n-k+n_1}}{(1+i_1)^{n-k+n_1} - 1},$$

где Y_1 - размер срочной уплаты по новым условиям кредитного договора;

i_1 - процентная ставка по новым условиям кредитного договора;

n_1 - срок, на который продлевается период погашения задолженность по новым условиям кредитного договора.

Варианты создания погасительного фонда

1. **проценты выплачиваются регулярно в конце каждого расчетного периода.** Срочная уплата, включающая проценты и расходы по формированию фонда определяется

$$Y = D * g + R = D * g + D / S_{n,i},$$

где D – размер предоставленного кредита;

g – ставка процента по кредиту;

R – взносы в фонд для погашения основного долга;

i – ставка процента по депозиту.

2. **проценты присоединяются к сумме основного долга.** Погашение кредита и начисление процентов производится в конце операции единовременной уплатой.

$$A = Y = \frac{D * (1+g)^n}{FVIFA_{n,i}}.$$

Расчет размера абсолютного грант-элемента:

$$W = D - G,$$

где W – абсолютный грант-элемент;

D – сумма займа;

G – современная величина платежей, поступающих в счет погашения займа, рассчитанная по реальной ставке кредитного рынка.

Расчет относительного грант - элемента:

$$w = \frac{W}{D} = 1 - \frac{G}{D},$$

где w – относительный грант - элемент.

При условии, что долг и проценты выплачиваются в виде постоянных срочных уплат формулы для определения абсолютного и относительного грант - элементов выглядят следующим образом:

$$W = D - Ya_{n,i} = D * \left(1 - \frac{PVIFA_{n,i}}{PVIFA_{n,g}} \right);$$

$$w = 1 - \frac{PVIFA_{n,i}}{PVIFA_{n,g}},$$

где $PVIFA_{n,i}$, $PVIFA_{n,g}$ – коэффициенты приведения постоянных годовых рент постнумерандо, определенные для процентных ставок i и g , $i > g$.

Примеры решения задачи

Пример 10.1

Согласно кредитному соглашению, требуется оплатить кредит в сумме 900 тыс. грн. и начисленные на него проценты (10%) равными платежами в конце каждого года. Сумма ежегодного платежа - 200 тыс. грн.

Решение:

Срок такого кредитного соглашения определим по формуле обычной ренты:

$$PV = A * PVIFA_{n,i} = A/i - A/i(1+i)^n;$$

$$n = \frac{\lg\left(1 - \frac{PV * i}{A}\right)}{\lg(1+i)}.$$

В нашем случае $PV = 900$ тыс.грн., $i=0,1$; $A = 200$ тыс. грн.

$$n = \frac{\lg\left(1 - \frac{900 * 0.1}{200}\right)}{\lg(1 + 0.1)} = 6.2725.$$

План погашения кредита приведен в таблице 10.1.

Таблица 10.1 – План погашения кредита

Год	Остаток кредита (D)	Годовые взносы		
		Срочные платежи (Y)	Проценты (I)	На погашение кредита (R)
1	900	200	90	110
2	790	200	79	121
3	669	200	66,9	133,1
4	535,9	200	53,59	146,41
5	389,49	200	38,95	161,05
6	228,44	200	22,84	177,16
7	51,28	56,41	5,13	51,28

Ответ: общая сумма по погашению кредита без процентов: $PV = 900$ тыс. грн.; с процентами: $FV = 1256,41$ тыс. грн.

Пример 10.2

Для покупки автомобиля банк выделил денежную ссуду 25000 грн на 5 лет под 16 % годовых. Одноразовая комиссия составляет 1 %; первый взнос – 20% от цены автомобиля. Согласно условиям сделки, оплата ссуды и процентов происходит равными суммами. Составить план погашения задолженности, если уплаты осуществлялись в конце каждого года.

Решение:

Первый взнос $= 25000 * 20\% = 5000$ грн.

Сумма кредита $= 20000$ грн.

Банковская комиссия $20000 * 1\% = 200$ грн

Ежегодный взнос определяется по формуле

$$A = \frac{D}{PVIFA_{n,i}} = \frac{D * i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{20000 * 0,16}{1 - (1 + 0,16)^{-5}} = 6108,19 \text{ грн.}$$

План погашения кредита приведен в таблице 10.2.

Таблица 10.2 – План погашения кредита

Год	Долг	Взнос	Гаш.%%	Гаш.долга
1	20000	6108,19	3200	2908,19
2	17091,81	6108,19	2734,69	3373,5
3	13718,31	6108,19	2194,93	3913,26
4	9805,049	6108,19	1568,80	4539,382
5	5265,667	6108,19	842,50	5265,683

Задачи

1. Господин Иванов для покупки автомобиля берёт ссуду на 4 года в размере 17750 грн. под процентную ставку 15 %. Одноразовая комиссия банка составила 1 % от суммы кредита. Иванов в размере 15 % от цены автомобиля. Составить план погашения задолженности, если ссуду необходимо уплатить равными ежегодными срочными платежами.
2. Кредит на недвижимость в сумме 100000 \$, который необходимо погасить за 7 лет. За пользование кредитом ставка составляет 12 % годовых, первый взнос – 20 % от цены квартиры, одноразовая комиссия банка – 1 %. Составить план погашения, если сумма в счет погашения долга осуществляется равными ежегодными частями.
3. Выдан кредит на автомобиль в сумме 400 тыс. грн. под 13,5 % годовых на 3 года с погашением основного долга платежами, возрастающими ежегодно на 10 тыс. грн. Составить план погашения, если одноразовая банковская комиссия составляет 1 % от суммы кредита.
4. Долг в размере 100 000 грн. решено погасить по специальному графику за четыре года – размеры расходов по погашению долга по годам – 40000 грн., 20000 грн., 30000 грн. Остаток выплачивается в конце четвертого года. Ставка процентов по долгу установлена на уровне 10%. Составить план погашения.
5. Фермер приобрёл трактор в кредит за 120 000 грн. За кредит он должен платить 5% годовых и выплатить весь долг за 4 года. Найти размер ежегодной срочной уплаты и составить план погашения долга.
6. Господин Иванов купил в кредит автомобиль, который стоит 80 000 грн. Он обязался вернуть долг в течение года, делая равные ежемесячные срочные уплаты. Найти величину срочной уплаты и составить план погашения долга,

если на долг магазин начисляет проценты по ставке а) $i = 10\%$ годовых, б) $j_4 = 5\%$ годовых.

7. Кредит, равный 8000 грн., под 35% должен погашаться равными срочными платежами в течение 4-х лет. Составить план погашения задолженности, если срочные уплаты осуществляются :

а) в конце каждого года;
б) в конце каждого полугодия, при этом проценты начисляются 2 раза в год.

8. Кредит в 100000 грн. необходимо погасить за 4 года равными срочными платежами. Проценты на долг начисляются по ставке 20% в год.

Составить план погашения задолженности для следующих вариантов:

а) уплаты в конце каждого года;
б) уплаты в конце каждого квартала, при этом проценты начисляются 4 раза в год;
в) уплаты в конце каждого месяца, при этом проценты начисляются 12 раз в год.

9. Долг в сумме 10000 грн. необходимо погасить последовательно равными суммами за 5 лет платежами постнумерандо. Составить план погашения задолженности, если за заем выплачиваются проценты по ставке 10% годовых.

10. Расходы по займу уменьшаются каждые год на 15%, общий срок погашения – 5 лет, первоначальная сумма долга – 15000 грн., ставка процента по долгу – 8%. Составить план погашения.

11. Иванов занимает 10 000 грн. при 6% годовых, проценты будет выплачивать в конце каждого года и создаст погасительный фонд для возмещения основной суммы через 10 лет. Какие необходимы годовые платежи, если фонд начисляет 4% годовых. Какую сумму будет содержать фонд в конце шестого года?

12. Найти относительный и абсолютный грант - элементы для беспроцентного займа, выданного на 5 лет в сумме 1000 грн., если рыночная ставка такого кредита 20%.

13. Кредит в размере 100 тыс. грн. выдан на 5 лет под номинальную ставку в 10% годовых с начислением процентов и погашением по полугодиям. Через 2 года от начала кредитования достигнуто соглашение о пролонгировании кредита на 2 года с переходом к годовому начислению процентов и ежегодному погашению долга с начислением процентов по ставке 12 годовых. Составить план погашения задолженности .

14. В фонд погашения долга средства поступают в виде ежегодной ренты постнумерандо в течение 5 лет (срок погашения долга). Платежи каждый год увеличиваются на 500 000 грн. Размер долга на момент его погашения равен 10 млн.д.е., на взносы начисляются проценты по ставке 10% годовых. По условиям займа кредитору выплачивается 9,5%. Разработать план создания фонда.

Практическое занятие 11 Погашение ипотечной ссуды

Цель: изучить теоретические основы и получить практические навыки по расчетам ипотечной ссуды

Стандартная ипотека

Регулярный платеж по ипотечному кредиту для ренты постнумерандо

$$R = Y = \frac{D}{a_{n,i}} = D \frac{j/m(1+j/m)^{mn}}{(1+j/m)^{mn} - 1},$$

где R – месячная сумма взносов;

D – сумма ссуды;

$a_{n,i}$ – коэффициент приведения постоянной ренты;

N – общее число платежей, $N = 12n$ (n – срок погашения в годах);

i – месячная ставка процента.

Регулярный платеж по ипотечному кредиту для ренты пренумерандо:

$$R = \frac{D}{a_{n,i}} * (1+i).$$

Платеж, идущий на погашение ссуды рассчитывается по формуле

$$d_t = d_{t-1} * (1+i) = d_1 * (1+i)^{t-1},$$

где d_t – сумма погашения долга;

t – порядковый номер месяца;

i – месячная ставка процента.

Остаток долга на начало месяца:

$$D_{t-1} = D_t - d_t; \quad t = 1, \dots, 12n.$$

Последовательные суммы погашения долга представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом d_1 и знаменателем $(1+i)$, причем:

$$d_1 = R - D \cdot i.$$

Сумму членов этой прогрессии от начала погашения до t включительно найдем следующим образом:

$$W_t = d_1 \cdot FV_{t,i},$$

где $FV_{t,i}$ – коэффициент наращивания постоянной ренты постнумерандо. Остаток долга на начало месяца находим как разность:

$$D_{t+1} = D_1 - W_t$$

или

$$D_t = D \frac{(1 + j/m)^{mn} - (1 + j/m)^{t-1}}{(1 + j/m)^{mn} - 1}.$$

Стандартная ипотека с неполным погашением задолженности и выплатой в конце срока остатка долга

Уравнение, балансирующее условия ипотеки, имеет вид:

$$D = Ra_{n;i} + Bv^n,$$

где B – остаток долга, который выплачивается в конце срока ипотечной ссуды;

v^n – множитель дисконтирования $v^n = 1/(1+i)^n$.

Отсюда величина балансирующей выплаты в конце срока и срочной уплаты рассчитывается по формулам

$$B = (D - Ra_{N;i})(1+i)^N; \quad R = \frac{D_1 - Bv^N}{a_{N;i}}.$$

Нестандартные ипотеки. Ипотека с ростом платежей.

Особенность данной ипотеки заключается в следующем: первый взнос минимален, затем на некотором начальном интервале времени (пять-десять лет) они увеличиваются с постоянным темпом, далее они постоянны (см. рис.11.1).

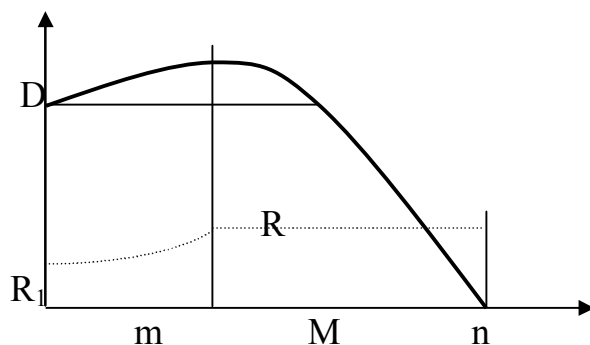


Рисунок 11.1 – Схема погашения ипотеки с ростом платежей

Условные обозначения:

- m – период роста срочных уплат;
- M – период постоянных срочных уплат;
- R – срочные уплаты;
- D – сумма долга (величина ссуды)
- n – срок ссуды.

Величина срочных уплат в первом периоде m рассчитывается следующим образом:

$$R_t = R_1 g^{t-1},$$

где R_1 – расходы в первом месяце;
 g – ежемесячный темп роста расходов.

Величина срочных уплат во втором периоде (расходы должника равны постоянной величине)

$$R = R_1 g^{m-1}.$$

Современная стоимость платежей первого периода:

$$A_1 = R_1 v \frac{(gv)^m - 1}{gv - 1}.$$

Современная стоимость платежей второго периода:

$$A_2 = Ra_{M:i} v^m = R_1 g^{m-1} a_{M:i} v^m.$$

Приравняем современную стоимость всего потока платежей к сумме задолженности, после чего, выполнив ряд преобразований, находим величину первой срочной уплаты:

$$R_1 = \frac{D}{v \left(\frac{(g v)^m - 1}{g v - 1} + (g v)^{m-1} a_{M;i} \right)}.$$

Ссуда с периодическим увеличением взносов

Совокупность выплаченных срочных уплат до момента k (при условии, что выплаты представляют собой ежегодную ренту с начислением процентов раз в год, ежегодную ренту с начислением процентов m – раз в год, p – срочную ренту с начислением процентов m – раз в год, причем $m = p$) определяется по формуле

$$Q = \sum_{t=1}^{k-1} R_t a_{m;i} v^{(t-1)m},$$

где Q – современная стоимость взносов от первого до $k - 1$ периода включительно;

R_t – срочная уплата в момент времени t ;

m – интервалы времени, через которые происходит увеличение взносов;

k – период, до которого происходила оплата взносов по ссуде.

Современная стоимость непокрытой взносами задолженности

$$W = D - Q,$$

где W – современная стоимость непокрытой взносами задолженности;
 D – сумма долга.

Размер взносов в последнем периоде определяется как:

$$R_k = \frac{W}{a_{m;i} v^{(k-1)m}}.$$

Ссуда с залоговым счетом

Суммы списания с залогового счета определяются с использованием формулы

$$V_t = V_{t-1} q = V_1 q^{t-1},$$

где V_t – сумма, списываемая с залогового счета;

q — годовой темп изменения сумм, списываемых с залогового счета.

Современная стоимость суммы списаний с залогового счета:

$$Z = V_1 \frac{(qv)^m - 1}{q - (1+r)},$$

где Z – сумма залогового счета;

r – месячная ставка процента, начисляемого на средства залогового счета;

V – дисконтный множитель по ставке r .

Отсюда **сумма первого списания с залогового счета** определяется как:

$$V_1 = Z \frac{q - (1+r)}{(qv)^m - 1}.$$

В итоге **сумма срочной уплаты** рассчитывается по формуле

$$R_t = R - V_t; \quad t=1, \dots, m,$$

где R – величина срочной уплаты.

Погашение потребительского кредита

Расходы по обслуживанию долга определяются как

$$R = \frac{FV}{nm},$$

где FV – наращенная сумма долга, см. формулу;

n – срок кредита в годах;

m – количество выплат в году (обычно $m = 12$).

Метод суммы чисел или **метод 78**. Размер уплаты рассчитывается следующим образом:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{PV * i}{m} + \frac{PV}{n * m},$$

где PV – сумма основного долга без процентов (цена товара);

R_1 и R_2 – проценты и размер погашения основного долга соответственно.

Величина платежа на погашение процентов для годового срока кредита:

$$R_1 = \frac{t}{78} PV * i; \quad R_2 = R - R_1 = \frac{PV * (1+i)}{12} - \frac{t}{78} PV * i; \quad t = 12, 11, \dots, 1,$$

где t – последовательные номера месяцев в обратном порядке;

P – первоначальная сумма долга;
 i – процентная ставка по кредиту.

Для кредита со сроком N месяцев сумма номеров месяцев, которые в обратном порядке представляют собой числа $t=n, N-1, \dots, 1$ находится по формуле

$$Q = \sum_{t=1}^N t = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Доли от общей суммы начисленных процентов находятся как t/Q . Отсюда величина платежа на погашение процентов и основного долга находится как:

$$R_1 = \frac{t}{Q} PV * i * n; \quad R_2 = R - \frac{t}{Q} PV * i * n.$$

Задачи

1. Ипотечный кредит в размере 150000 грн. выдан на 10 лет под 12% . Погашение долга и начисление процентов ежеквартально. Составить план погашения ссуды.
2. Ипотечный кредит в размере 400000 грн. выдан на 10 лет с двумя равными периодами погашения. В первом периоде предполагается ежегодный прирост срочных уплат 10%. Во втором периоде уплаты постоянные, погашение производится ежемесячно. Процент начинается по ставке 12% в год. Рассчитать размеры срочных уплат:
 - а) для первых пяти месяцев первого периода
 - б) первых двух месяцев второго периода
 - в) составить план погашения для первых пяти месяцев
3. Ипотечный кредит выдан в размере 120000 грн. на 6 лет под 12% с ежемесячным погашением. Погашение производится в первом и втором году срочными уплатами в сумме 1000 грн., в третьем и пятом году в 2000 грн., в конце шестого года делается единовременный взнос 20000 грн. Необходимо определить сумму срочных уплат в шестом году для погашения предоставленной ссуды.
4. На покупку дачного домика взят потребительский кредит 20000 \$ на 3 года под 15% простых годовых. Его нужно погашать равными ежеквартальными выплатами. Определить размер этой выплаты.
5. Магазин продает телевизоры в рассрочку на 1 год. Сразу к цене телевизора 400\$ добавляют 10% и всю эту сумму надо погасить в течение года, причем стоимость телевизора гасится равномерно, а надбавка – по правилу 78. Найти ежемесячные выплаты.
6. Потребительский кредит в сумме 15000 грн. выдан на три года при разовом начислении процентов по ставке 10% годовых. Погашение задолженности помесечное. Составить план погашения кредита. Долг погашается по правилу 78.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башарин Г.П. Начала финансовой математики /Г.П. Башарин,- М.: ИНФРА-М, 1997. - 160 с.
2. Бухвалов А.В. Самоучитель по финансовым расчетам / А.В. Бухвалов., А.В. Идельсон. - М.: Мир, Прогресс-сервис, 1997. - 176 с.
3. Количественные методы финансового анализа:[пер.с.англ.] / Под ред. С.Дж.Брауна и М.П.Крицмена. - М.: ИНФРА-М, 1996. - 336 с.
4. Финансовая математика: теория и практика финансово-банковских расчетов: [Пер. с серб.] / Е. Кочович. Предисл. Е.М.Четыркина. - М.: Финансы и статистика, 1994. - 268 с.
5. Лапішко М.Л. Основи фінансово-статистичного аналізу економічних процесів /М.Л. Лапішко, - Львів.: Світ, 1995. - 328 с.
6. Мелкумов Я.С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям /Я.С. Мелкумов,- М.: ИНФРА-М, 1996. - 336 с.
7. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов /Е.М. Четыркин. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: "Дело Лтд", 1995. - 320 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А (справочное)

Таблица А.1 - порядковые номера дней года

Дни	Месяц года											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

ПРИЛОЖЕНИЕ Б (справочное)

Таблица Б.1 – коэффициенты приведения 1 ден. ед.

PVIF n, i

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394
16	0,8528	0,7284	0,6232	0,5339	0,4581	0,3936	0,3387	0,2919	0,2519	0,2176
17	0,8444	0,7142	0,6050	0,5134	0,4363	0,3714	0,3166	0,2703	0,2311	0,1978
18	0,8360	0,7002	0,5874	0,4936	0,4155	0,3503	0,2959	0,2502	0,2120	0,1799
19	0,8277	0,6864	0,5703	0,4746	0,3957	0,3305	0,2765	0,2317	0,1945	0,1635
20	0,8195	0,6730	0,5537	0,4564	0,3769	0,3118	0,2584	0,2145	0,1784	0,1486
21	0,8114	0,6598	0,5375	0,4388	0,3589	0,2942	0,2415	0,1987	0,1637	0,1351
22	0,8034	0,6468	0,5219	0,4220	0,3418	0,2775	0,2257	0,1839	0,1502	0,1228
23	0,7954	0,6342	0,5067	0,4057	0,3256	0,2618	0,2109	0,1703	0,1378	0,1117
24	0,7876	0,6217	0,4919	0,3901	0,3101	0,2470	0,1971	0,1577	0,1264	0,1015
25	0,7798	0,6095	0,4776	0,3751	0,2953	0,2330	0,1842	0,1460	0,1160	0,0923
26	0,7720	0,5976	0,4637	0,3607	0,2812	0,2198	0,1722	0,1352	0,1064	0,0839
27	0,7644	0,5859	0,4502	0,3468	0,2678	0,2074	0,1609	0,1252	0,0976	0,0763
28	0,7568	0,5744	0,4371	0,3335	0,2551	0,1956	0,1504	0,1159	0,0895	0,0693
29	0,7493	0,5631	0,4243	0,3207	0,2429	0,1846	0,1406	0,1073	0,0822	0,0630
30	0,7419	0,5521	0,4120	0,3083	0,2314	0,1741	0,1314	0,0994	0,0754	0,0573
35	0,7059	0,5000	0,3554	0,2534	0,1813	0,1301	0,0937	0,0676	0,0490	0,0356
40	0,6717	0,4529	0,3066	0,2083	0,1420	0,0972	0,0668	0,0460	0,0318	0,0221
45	0,6391	0,4102	0,2644	0,1712	0,1113	0,0727	0,0476	0,0313	0,0207	0,0137
50	0,6080	0,3715	0,2281	0,1407	0,0872	0,0543	0,0339	0,0213	0,0134	0,0085
55	0,5785	0,3365	0,1968	0,1157	0,0683	0,0406	0,0242	0,0145	0,0087	0,0053

Продолжение таблицы Б.1

	12%	14%	15%	16%	18%	20%	24%	28%	32%	36%
1	0,8929	0,8772	0,8696	0,8621	0,8475	0,8333	0,8065	0,7813	0,7576	0,7353
2	0,7972	0,7695	0,7561	0,7432	0,7182	0,6944	0,6504	0,6104	0,5739	0,5407
3	0,7118	0,6750	0,6575	0,6407	0,6086	0,5787	0,5245	0,4768	0,4348	0,3975
4	0,6355	0,5921	0,5718	0,5523	0,5158	0,4823	0,4230	0,3725	0,3294	0,2923
5	0,5674	0,5194	0,4972	0,4761	0,4371	0,4019	0,3411	0,2910	0,2495	0,2149
6	0,5066	0,4556	0,4323	0,4104	0,3704	0,3349	0,2751	0,2274	0,1890	0,1580
7	0,4523	0,3996	0,3759	0,3538	0,3139	0,2791	0,2218	0,1776	0,1432	0,1162
8	0,4039	0,3506	0,3269	0,3050	0,2660	0,2326	0,1789	0,1388	0,1085	0,0854
9	0,3606	0,3075	0,2843	0,2630	0,2255	0,1938	0,1443	0,1084	0,0822	0,0628
10	0,3220	0,2697	0,2472	0,2267	0,1911	0,1615	0,1164	0,0847	0,0623	0,0462
11	0,2875	0,2366	0,2149	0,1954	0,1619	0,1346	0,0938	0,0662	0,0472	0,0340
12	0,2567	0,2076	0,1869	0,1685	0,1372	0,1122	0,0757	0,0517	0,0357	0,0250
13	0,2292	0,1821	0,1625	0,1452	0,1163	0,0935	0,0610	0,0404	0,0271	0,0184
14	0,2046	0,1597	0,1413	0,1252	0,0985	0,0779	0,0492	0,0316	0,0205	0,0135
15	0,1827	0,1401	0,1229	0,1079	0,0835	0,0649	0,0397	0,0247	0,0155	0,0099
16	0,1631	0,1229	0,1069	0,0930	0,0708	0,0541	0,0320	0,0193	0,0118	0,0073
17	0,1456	0,1078	0,0929	0,0802	0,0600	0,0451	0,0258	0,0150	0,0089	0,0054
18	0,1300	0,0946	0,0808	0,0691	0,0508	0,0376	0,0208	0,0118	0,0068	0,0039
19	0,1161	0,0829	0,0703	0,0596	0,0431	0,0313	0,0168	0,0092	0,0051	0,0029
20	0,1037	0,0728	0,0611	0,0514	0,0365	0,0261	0,0135	0,0072	0,0039	0,0021
21	0,0926	0,0638	0,0531	0,0443	0,0309	0,0217	0,0109	0,0056	0,0029	0,0016
22	0,0826	0,0560	0,0462	0,0382	0,0262	0,0181	0,0088	0,0044	0,0022	0,0012
23	0,0738	0,0491	0,0402	0,0329	0,0222	0,0151	0,0071	0,0034	0,0017	0,0008
24	0,0659	0,0431	0,0349	0,0284	0,0188	0,0126	0,0057	0,0027	0,0013	0,0006
25	0,0588	0,0378	0,0304	0,0245	0,0160	0,0105	0,0046	0,0021	0,0010	0,0005
26	0,0525	0,0331	0,0264	0,0211	0,0135	0,0087	0,0037	0,0016	0,0007	0,0003
27	0,0469	0,0291	0,0230	0,0182	0,0115	0,0073	0,0030	0,0013	0,0006	0,0002
28	0,0419	0,0255	0,0200	0,0157	0,0097	0,0061	0,0024	0,0010	0,0004	0,0002
29	0,0374	0,0224	0,0174	0,0135	0,0082	0,0051	0,0020	0,0008	0,0003	0,0001
30	0,0334	0,0196	0,0151	0,0116	0,0070	0,0042	0,0016	0,0006	0,0002	0,0001
35	0,0189	0,0102	0,0075	0,0055	0,0030	0,0017	0,0005	0,0002	0,0001	*
40	0,0107	0,0053	0,0037	0,0026	0,0013	0,0007	0,0002	0,0001	*	*
45	0,0061	0,0027	0,0019	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	*	*	*
50	0,0035	0,0014	0,0009	0,0006	0,0003	0,0001	*	*	*	*
55	0,0020	0,0007	0,0005	0,0003	0,0001	*	*	*	*	*

ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

Таблица В. 1 – Коэффициенты наращения 1 ден. ед. **FVIF n, i**

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000	1,1200
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100	1,2544
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310	1,4049
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641	1,5735
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105	1,7623
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716	1,9738
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487	2,2107
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436	2,4760
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579	2,7731
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937	3,1058
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531	3,4785
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384	3,8960
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523	4,3635
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975	4,8871
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772	5,4736
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259	3,9703	4,5950	6,1304
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000	4,3276	5,0545	6,8660
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960	4,7171	5,5599	7,6900
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157	5,1417	6,1159	8,6128
20	1,2202	1,4859	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610	5,6044	6,7275	9,6463
21	1,2324	1,5157	1,8603	2,2788	2,7860	3,3996	4,1406	5,0338	6,1088	7,4002	10,8038
22	1,2447	1,5460	1,9161	2,3699	2,9253	3,6035	4,4304	5,4365	6,6586	8,1403	12,1003
23	1,2572	1,5769	1,9736	2,4647	3,0715	3,8197	4,7405	5,8715	7,2579	8,9543	13,5523
24	1,2697	1,6084	2,0328	2,5633	3,2251	4,0489	5,0724	6,3412	7,9111	9,8497	15,1786
25	1,2824	1,6406	2,0938	2,6658	3,3864	4,2919	5,4274	6,8485	8,6231	10,8347	17,0001
26	1,2953	1,6734	2,1566	2,7725	3,5557	4,5494	5,8074	7,3964	9,3992	11,9182	19,0401
27	1,3082	1,7069	2,2213	2,8834	3,7335	4,8223	6,2139	7,9881	10,2451	13,1100	21,3249
28	1,3213	1,7410	2,2879	2,9987	3,9201	5,1117	6,6488	8,6271	11,1671	14,4210	23,8839
29	1,3345	1,7758	2,3566	3,1187	4,1161	5,4184	7,1143	9,3173	12,1722	15,8631	26,7499
30	1,3478	1,8114	2,4273	3,2434	4,3219	5,7435	7,6123	10,0627	13,2677	17,4494	29,9599
35	1,4166	1,9999	2,8139	3,9461	5,5160	7,6861	10,6766	14,7853	20,4140	28,1024	52,7996
40	1,4889	2,2080	3,2620	4,8010	7,0400	10,2857	14,9745	21,7245	31,4094	45,2593	93,0510
45	1,5648	2,4379	3,7816	5,8412	8,9850	13,7646	21,0025	31,9204	48,3273	72,8905	163,9876
50	1,6446	2,6916	4,3839	7,1067	11,4674	18,4202	29,4570	46,9016	74,3575	117,3909	289,0022
55	1,7285	2,9717	5,0821	8,6464	14,6356	24,6503	41,3150	68,9139	114,4083	189,0591	509,3206

Продолжение таблицы В. 1

	14%	15%	16%	18%	20%	24%	28%	32%
1	1,1400	1,1500	1,1600	1,1800	1,2000	1,2400	1,2800	1,3200
2	1,2996	1,3225	1,3456	1,3924	1,4400	1,5376	1,6384	1,7424
3	1,4815	1,5209	1,5609	1,6430	1,7280	1,9066	2,0972	2,3000
4	1,6890	1,7490	1,8106	1,9388	2,0736	2,3642	2,6844	3,0360
5	1,9254	2,0114	2,1003	2,2878	2,4883	2,9316	3,4360	4,0075
6	2,1950	2,3131	2,4364	2,6996	2,9860	3,6352	4,3980	5,2899
7	2,5023	2,6600	2,8262	3,1855	3,5832	4,5077	5,6295	6,9826
8	2,8526	3,0590	3,2784	3,7589	4,2998	5,5895	7,2058	9,2170
9	3,2519	3,5179	3,8030	4,4355	5,1598	6,9310	9,2234	12,1665
10	3,7072	4,0456	4,4114	5,2338	6,1917	8,5944	11,8059	16,0598
11	4,2262	4,6524	5,1173	6,1759	7,4301	10,6571	15,1116	21,1989
12	4,8179	5,3503	5,9360	7,2876	8,9161	13,2148	19,3428	27,9825
13	5,4924	6,1528	6,8858	8,5994	10,6993	16,3863	24,7588	36,9370
14	6,2613	7,0757	7,9875	10,1472	12,8392	20,3191	31,6913	48,7568
15	7,1379	8,1371	9,2655	11,9737	15,4070	25,1956	40,5648	64,3590
16	8,1372	9,3576	10,7480	14,1290	18,4884	31,2426	51,9230	84,9538
17	9,2765	10,7613	12,4677	16,6722	22,1861	38,7408	66,4614	112,1390
18	10,5752	12,3755	14,4625	19,6733	26,6233	48,0386	85,0706	148,0235
19	12,0557	14,2318	16,7765	23,2144	31,9480	59,5679	108,8904	195,3911
20	13,7435	16,3665	19,4608	27,3930	38,3376	73,8641	139,3797	257,9162
21	15,6676	18,8215	22,5745	32,3238	46,0051	91,5915	178,4060	340,4494
22	17,8610	21,6447	26,1864	38,1421	55,2061	113,5735	228,3596	449,3932
23	20,3616	24,8915	30,3762	45,0076	66,2474	140,8312	292,3003	593,1990
24	23,2122	28,6252	35,2364	53,1090	79,4968	174,6306	374,1444	783,0227
25	26,4619	32,9190	40,8742	62,6686	95,3962	216,5420	478,9049	1033,5900
26	30,1666	37,8568	47,4141	73,9490	114,4755	268,5121	612,9982	1364,3387
27	34,3899	43,5353	55,0004	87,2598	137,3706	332,9550	784,6377	1800,9271
28	39,2045	50,0656	63,8004	102,9666	164,8447	412,8642	1004,3363	2377,2238
29	44,6931	57,5755	74,0085	121,5005	197,8136	511,9516	1285,5504	3137,9354
30	50,9502	66,2118	85,8499	143,3706	237,3763	634,8199	1645,5046	4142,0748
35	98,1002	133,1755	180,3141	327,9973	590,6682	1861,0540	5653,9106	16599,2166
40	188,8835	267,8635	378,7212	750,3783	1469,7716	5455,9126	19426,6889	66520,7670
45	363,6791	538,7693	795,4438	1716,6839	3657,2620	15994,6902	66749,5949	266579,5953
50	700,2330	1083,6574	1670,7038	3927,3569	9100,4382	46890,4346	*	*
55	1348,2388	2179,6222	3509,0488	8984,8411	22644,8023	*	*	*

ПРИЛОЖЕНИЕ Г (справочное)

Таблица Г.1 – коэффициенты приведения 1 ден. ед. финансовой ренты
PVIFA n, i

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174
2	1,9704	1,9416	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080	1,7833	1,7591
3	2,9410	2,8839	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243	2,5771	2,5313
4	3,9020	3,8077	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872	3,3121	3,2397
5	4,8534	4,7135	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002	3,9927	3,8897
6	5,7955	5,6014	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665	4,6229	4,4859
7	6,7282	6,4720	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893	5,2064	5,0330
8	7,6517	7,3255	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713	5,7466	5,5348
9	8,5660	8,1622	7,7861	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152	6,2469	5,9952
10	9,4713	8,9826	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236	6,7101	6,4177
11	10,3676	9,7868	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987	7,1390	6,8052
12	11,2551	10,5753	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427	7,5361	7,1607
13	12,1337	11,3484	10,6350	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577	7,9038	7,4869
14	13,0037	12,1062	11,2961	10,5631	9,8986	9,2950	8,7455	8,2442	7,7862
15	13,8651	12,8493	11,9379	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079	8,5595	8,0607
16	14,7179	13,5777	12,5611	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466	8,8514	8,3126
17	15,5623	14,2919	13,1661	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632	9,1216	8,5436
18	16,3983	14,9920	13,7535	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591	9,3719	8,7556
19	17,2260	15,6785	14,3238	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356	9,6036	8,9501
20	18,0456	16,3514	14,8775	13,5903	12,4622	11,4699	10,5940	9,8181	9,1285
21	18,8570	17,0112	15,4150	14,0292	12,8212	11,7641	10,8355	10,0168	9,2922
22	19,6604	17,6580	15,9369	14,4511	13,1630	12,0416	11,0612	10,2007	9,4424
23	20,4558	18,2922	16,4436	14,8568	13,4886	12,3034	11,2722	10,3711	9,5802
24	21,2434	18,9139	16,9355	15,2470	13,7986	12,5504	11,4693	10,5288	9,7066
25	22,0232	19,5235	17,4131	15,6221	14,0939	12,7834	11,6536	10,6748	9,8226
26	22,7952	20,1210	17,8768	15,9828	14,3752	13,0032	11,8258	10,8100	9,9290
27	23,5596	20,7069	18,3270	16,3296	14,6430	13,2105	11,9867	10,9352	10,0266
28	24,3164	21,2813	18,7641	16,6631	14,8981	13,4062	12,1371	11,0511	10,1161
29	25,0658	21,8444	19,1885	16,9837	15,1411	13,5907	12,2777	11,1584	10,1983
30	25,8077	22,3965	19,6004	17,2920	15,3725	13,7648	12,4090	11,2578	10,2737
35	29,4086	24,9986	21,4872	18,6646	16,3742	14,4982	12,9477	11,6546	10,5668
40	32,8347	27,3555	23,1148	19,7928	17,1591	15,0463	13,3317	11,9246	10,7574
45	36,0945	29,4902	24,5187	20,7200	17,7741	15,4558	13,6055	12,1084	10,8812
50	39,1961	31,4236	25,7298	21,4822	18,2559	15,7619	13,8007	12,2335	10,9617
55	42,1472	33,1748	26,7744	22,1086	18,6335	15,9905	13,9399	12,3186	11,0140

Продолжение таблицы Г.1

	10%	12%	14%	15%	16%	18%	20%	24%	28%	32%
1	0,9091	0,8929	0,8772	0,8696	0,8621	0,8475	0,8333	0,8065	0,7813	0,7576
2	1,7355	1,6901	1,6467	1,6257	1,6052	1,5656	1,5278	1,4568	1,3916	1,3315
3	2,4869	2,4018	2,3216	2,2832	2,2459	2,1743	2,1065	1,9813	1,8684	1,7663
4	3,1699	3,0373	2,9137	2,8550	2,7982	2,6901	2,5887	2,4043	2,2410	2,0957
5	3,7908	3,6048	3,4331	3,3522	3,2743	3,1272	2,9906	2,7454	2,5320	2,3452
6	4,3553	4,1114	3,8887	3,7845	3,6847	3,4976	3,3255	3,0205	2,7594	2,5342
7	4,8684	4,5638	4,2883	4,1604	4,0386	3,8115	3,6046	3,2423	2,9370	2,6775
8	5,3349	4,9676	4,6389	4,4873	4,3436	4,0776	3,8372	3,4212	3,0758	2,7860
9	5,7590	5,3282	4,9464	4,7716	4,6065	4,3030	4,0310	3,5655	3,1842	2,8681
10	6,1446	5,6502	5,2161	5,0188	4,8332	4,4941	4,1925	3,6819	3,2689	2,9304
11	6,4951	5,9377	5,4527	5,2337	5,0286	4,6560	4,3271	3,7757	3,3351	2,9776
12	6,8137	6,1944	5,6603	5,4206	5,1971	4,7932	4,4392	3,8514	3,3868	3,0133
13	7,1034	6,4235	5,8424	5,5831	5,3423	4,9095	4,5327	3,9124	3,4272	3,0404
14	7,3667	6,6282	6,0021	5,7245	5,4675	5,0081	4,6106	3,9616	3,4587	3,0609
15	7,6061	6,8109	6,1422	5,8474	5,5755	5,0916	4,6755	4,0013	3,4834	3,0764
16	7,8237	6,9740	6,2651	5,9542	5,6685	5,1624	4,7296	4,0333	3,5026	3,0882
17	8,0216	7,1196	6,3729	6,0472	5,7487	5,2223	4,7746	4,0591	3,5177	3,0971
18	8,2014	7,2497	6,4674	6,1280	5,8178	5,2732	4,8122	4,0799	3,5294	3,1039
19	8,3649	7,3658	6,5504	6,1982	5,8775	5,3162	4,8435	4,0967	3,5386	3,1090
20	8,5136	7,4694	6,6231	6,2593	5,9288	5,3527	4,8696	4,1103	3,5458	3,1129
21	8,6487	7,5620	6,6870	6,3125	5,9731	5,3837	4,8913	4,1212	3,5514	3,1158
22	8,7715	7,6446	6,7429	6,3587	6,0113	5,4099	4,9094	4,1300	3,5558	3,1180
23	8,8832	7,7184	6,7921	6,3988	6,0442	5,4321	4,9245	4,1371	3,5592	3,1197
24	8,9847	7,7843	6,8351	6,4338	6,0726	5,4509	4,9371	4,1428	3,5619	3,1210
25	9,0770	7,8431	6,8729	6,4641	6,0971	5,4669	4,9476	4,1474	3,5640	3,1220
26	9,1609	7,8957	6,9061	6,4906	6,1182	5,4804	4,9563	4,1511	3,5656	3,1227
27	9,2372	7,9426	6,9352	6,5135	6,1364	5,4919	4,9636	4,1542	3,5669	3,1233
28	9,3066	7,9844	6,9607	6,5335	6,1520	5,5016	4,9697	4,1566	3,5679	3,1237
29	9,3696	8,0218	6,9830	6,5509	6,1656	5,5098	4,9747	4,1585	3,5687	3,1240
30	9,4269	8,0552	7,0027	6,5660	6,1772	5,5168	4,9789	4,1601	3,5693	3,1242
35	9,6442	8,1755	7,0700	6,6166	6,2153	5,5386	4,9915	4,1644	3,5708	3,1248
40	9,7791	8,2438	7,1050	6,6418	6,2335	5,5482	4,9966	4,1659	3,5712	3,1250
45	9,8628	8,2825	7,1232	6,6543	6,2421	5,5523	4,9986	4,1664	3,5714	3,1250
50	9,9148	8,3045	7,1327	6,6605	6,2463	5,5541	4,9995	4,1666	3,5714	3,1250
55	9,9471	8,3170	7,1376	6,6636	6,2482	5,5549	4,9998	4,1666	3,5714	3,1250

ПРИЛОЖЕНИЕ Д (справочное)

Таблица Д.1 – коэффициенты наращивания 1 ден. ед. финансовой ренты
 $FVIFA_{n,i}$

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,0100	2,0200	2,0300	2,0400	2,0500	2,0600	2,0700	2,0800	2,0900	2,1000
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836	3,2149	3,2464	3,2781	3,3100
4	4,0604	4,1216	4,1836	4,2465	4,3101	4,3746	4,4399	4,5061	4,5731	4,6410
5	5,1010	5,2040	5,3091	5,4163	5,5256	5,6371	5,7507	5,8666	5,9847	6,1051
6	6,1520	6,3081	6,4684	6,6330	6,8019	6,9753	7,1533	7,3359	7,5233	7,7156
7	7,2135	7,4343	7,6625	7,8983	8,1420	8,3938	8,6540	8,9228	9,2004	9,4872
8	8,2857	8,5830	8,8923	9,2142	9,5491	9,8975	10,2598	10,6366	11,0285	11,4359
9	9,3685	9,7546	10,1591	10,5828	11,0266	11,4913	11,9780	12,4876	13,0210	13,5795
10	10,4622	10,9497	11,4639	12,0061	12,5779	13,1808	13,8164	14,4866	15,1929	15,9374
11	11,5668	12,1687	12,8078	13,4864	14,2068	14,9716	15,7836	16,6455	17,5603	18,5312
12	12,6825	13,4121	14,1920	15,0258	15,9171	16,8699	17,8885	18,9771	20,1407	21,3843
13	13,8093	14,6803	15,6178	16,6268	17,7130	18,8821	20,1406	21,4953	22,9534	24,5227
14	14,9474	15,9739	17,0863	18,2919	19,5986	21,0151	22,5505	24,2149	26,0192	27,9750
15	16,0969	17,2934	18,5989	20,0236	21,5786	23,2760	25,1290	27,1521	29,3609	31,7725
16	17,2579	18,6393	20,1569	21,8245	23,6575	25,6725	27,8881	30,3243	33,0034	35,9497
17	18,4304	20,0121	21,7616	23,6975	25,8404	28,2129	30,8402	33,7502	36,9737	40,5447
18	19,6147	21,4123	23,4144	25,6454	28,1324	30,9057	33,9990	37,4502	41,3013	45,5992
19	20,8109	22,8406	25,1169	27,6712	30,5390	33,7600	37,3790	41,4463	46,0185	51,1591
20	22,0190	24,2974	26,8704	29,7781	33,0660	36,7856	40,9955	45,7620	51,1601	57,2750
21	23,2392	25,7833	28,6765	31,9692	35,7193	39,9927	44,8652	50,4229	56,7645	64,0025
22	24,4716	27,2990	30,5368	34,2480	38,5052	43,3923	49,0057	55,4568	62,8733	71,4027
23	25,7163	28,8450	32,4529	36,6179	41,4305	46,9958	53,4361	60,8933	69,5319	79,5430
24	26,9735	30,4219	34,4265	39,0826	44,5020	50,8156	58,1767	66,7648	76,7898	88,4973
25	28,2432	32,0303	36,4593	41,6459	47,7271	54,8645	63,2490	73,1059	84,7009	98,3471
26	29,5256	33,6709	38,5530	44,3117	51,1135	59,1564	68,6765	79,9544	93,3240	109,1818
27	30,8209	35,3443	40,7096	47,0842	54,6691	63,7058	74,4838	87,3508	102,7231	121,0999
28	32,1291	37,0512	42,9309	49,9676	58,4026	68,5281	80,6977	95,3388	112,9682	134,2099
29	33,4504	38,7922	45,2189	52,9663	62,3227	73,6398	87,3465	103,9659	124,1354	148,6309
30	34,7849	40,5681	47,5754	56,0849	66,4388	79,0582	94,4608	113,2832	136,3075	164,4940
35	41,6603	49,9945	60,4621	73,6522	90,3203	111,4348	138,2369	172,3168	215,7108	271,0244
40	48,8864	60,4020	75,4013	95,0255	120,7998	154,7620	199,6351	259,0565	337,8824	442,5926
45	56,4811	71,8927	92,7199	121,0294	159,7002	212,7435	285,7493	386,5056	525,8587	718,9048
50	64,4632	84,5794	112,7969	152,6671	209,3480	290,3359	406,5289	573,7702	815,0836	1163,9085
55	72,8525	98,5865	136,0716	191,1592	272,7126	394,1720	575,9286	848,9232	1260,0918	1880,5914

Продолжение таблицы Д.1

	12%	14%	15%	16%	18%	20%	24%	28%
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,1200	2,1400	2,1500	2,1600	2,1800	2,2000	2,2400	2,2800
3	3,3744	3,4396	3,4725	3,5056	3,5724	3,6400	3,7776	3,9184
4	4,7793	4,9211	4,9934	5,0665	5,2154	5,3680	5,6842	6,0156
5	6,3528	6,6101	6,7424	6,8771	7,1542	7,4416	8,0484	8,6999
6	8,1152	8,5355	8,7537	8,9775	9,4420	9,9299	10,9801	12,1359
7	10,0890	10,7305	11,0668	11,4139	12,1415	12,9159	14,6153	16,5339
8	12,2997	13,2328	13,7268	14,2401	15,3270	16,4991	19,1229	22,1634
9	14,7757	16,0853	16,7858	17,5185	19,0859	20,7989	24,7125	29,3692
10	17,5487	19,3373	20,3037	21,3215	23,5213	25,9587	31,6434	38,5926
11	20,6546	23,0445	24,3493	25,7329	28,7551	32,1504	40,2379	50,3985
12	24,1331	27,2707	29,0017	30,8502	34,9311	39,5805	50,8950	65,5100
13	28,0291	32,0887	34,3519	36,7862	42,2187	48,4966	64,1097	84,8529
14	32,3926	37,5811	40,5047	43,6720	50,8180	59,1959	80,4961	109,6117
15	37,2797	43,8424	47,5804	51,6595	60,9653	72,0351	100,8151	141,3029
16	42,7533	50,9804	55,7175	60,9250	72,9390	87,4421	126,0108	181,8677
17	48,8837	59,1176	65,0751	71,6730	87,0680	105,9306	157,2534	233,7907
18	55,7497	68,3941	75,8364	84,1407	103,7403	128,1167	195,9942	300,2521
19	63,4397	78,9692	88,2118	98,6032	123,4135	154,7400	244,0328	385,3227
20	72,0524	91,0249	102,4436	115,3797	146,6280	186,6880	303,6006	494,2131
21	81,6987	104,7684	118,8101	134,8405	174,0210	225,0256	377,4648	633,5927
22	92,5026	120,4360	137,6316	157,4150	206,3448	271,0307	469,0563	811,9987
23	104,6029	138,2970	159,2764	183,6014	244,4868	326,2369	582,6298	1040,3583
24	118,1552	158,6586	184,1678	213,9776	289,4945	392,4842	723,4610	1332,6586
25	133,3339	181,8708	212,7930	249,2140	342,6035	471,9811	898,0916	1706,8031
26	150,3339	208,3327	245,7120	290,0883	405,2721	567,3773	1114,6336	2185,7079
27	169,3740	238,4993	283,5688	337,5024	479,2211	681,8528	1383,1457	2798,7061
28	190,6989	272,8892	327,1041	392,5028	566,4809	819,2233	1716,1007	3583,3438
29	214,5828	312,0937	377,1697	456,3032	669,4475	984,0680	2128,9648	4587,6801
30	241,3327	356,7868	434,7451	530,3117	790,9480	1181,8816	2640,9164	5873,2306
35	431,6635	693,5727	881,1702	1120,7130	1816,6516	2948,3411	7750,2251	20188,9665
40	767,0914	1342,0251	1779,0903	2360,7572	4163,2130	7343,8578	22728,8026	69377,4604
45	1358,2300	2590,5648	3585,1285	4965,2739	9531,5771	18281,3099	66640,3758	238387,8388
50	2400,0182	4994,5213	7217,7163	10435,6488	21813,0937	45497,1908	*	*
55	4236,0050	9623,1343	14524,1479	21925,3050	*	*	*	*

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

(справочное)

Таблица Е.1 – коэффициенты наращения 1 ден. ед. р-срочной ренты
PFVIFA n, i

	5,0%	6,0%	7,0%	8,0%	9%	10%	11%	12%	13,0%
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	0,49390	0,49272	0,49154	0,49038	0,48923	0,48809	0,48696	0,48584	0,48473
3	0,32793	0,32688	0,32584	0,32482	0,32381	0,32280	0,32181	0,32082	0,31985
4	0,24544	0,24456	0,24369	0,24283	0,24198	0,24114	0,24030	0,23948	0,23866
5	0,19612	0,19537	0,19462	0,19389	0,19317	0,19245	0,19174	0,19104	0,19034
6	0,16330	0,16265	0,16200	0,16137	0,16074	0,16012	0,15950	0,15890	0,15830
7	0,13989	0,13931	0,13875	0,13819	0,13764	0,13709	0,13655	0,13601	0,13548
8	0,12235	0,12184	0,12133	0,12083	0,12034	0,11985	0,11937	0,11889	0,11842
9	0,10872	0,10826	0,10780	0,10735	0,10690	0,10646	0,10603	0,10560	0,10517
10	0,09782	0,09740	0,09698	0,09657	0,09617	0,09577	0,09537	0,09498	0,09459
11	0,08891	0,08852	0,08814	0,08776	0,08739	0,08702	0,08666	0,08630	0,08594
12	0,08148	0,08113	0,08077	0,08043	0,08008	0,07974	0,07941	0,07907	0,07874
13	0,07520	0,07487	0,07454	0,07422	0,07390	0,07358	0,07327	0,07296	0,07266
14	0,06982	0,06951	0,06921	0,06890	0,06861	0,06831	0,06802	0,06773	0,06745
15	0,06516	0,06487	0,06458	0,06430	0,06402	0,06374	0,06347	0,06320	0,06293
16	0,06108	0,06081	0,06054	0,06027	0,06001	0,05975	0,05949	0,05923	0,05898
17	0,05748	0,05722	0,05697	0,05672	0,05647	0,05622	0,05598	0,05574	0,05550
18	0,05428	0,05404	0,05380	0,05356	0,05332	0,05309	0,05286	0,05263	0,05241
19	0,05142	0,05119	0,05096	0,05073	0,05051	0,05029	0,05007	0,04985	0,04964
20	0,04885	0,04863	0,04841	0,04819	0,04798	0,04777	0,04756	0,04735	0,04715
21	0,04652	0,04631	0,04610	0,04589	0,04569	0,04549	0,04529	0,04509	0,04490
22	0,04440	0,04420	0,04400	0,04380	0,04361	0,04342	0,04323	0,04304	0,04285
23	0,04247	0,04228	0,04209	0,04190	0,04171	0,04153	0,04134	0,04116	0,04098
24	0,04247	0,04228	0,04209	0,04190	0,04171	0,04153	0,04134	0,04116	0,04098
25	0,03907	0,03889	0,03871	0,03854	0,03837	0,03820	0,03803	0,03786	0,03770
26	0,03757	0,03739	0,03722	0,03706	0,03689	0,03673	0,03656	0,03640	0,03624
27	0,03617	0,03601	0,03584	0,03568	0,03552	0,03536	0,03521	0,03505	0,03490
28	0,03488	0,03472	0,03456	0,03440	0,03425	0,03410	0,03395	0,03380	0,03365
29	0,03368	0,03352	0,03337	0,03322	0,03307	0,03292	0,03277	0,03263	0,03249
30	0,03255	0,03240	0,03225	0,03211	0,03196	0,03182	0,03168	0,03154	0,03140
31	0,03150	0,03136	0,03121	0,03107	0,03093	0,03079	0,03066	0,03052	0,03039
32	0,03052	0,03038	0,03024	0,03010	0,02996	0,02983	0,02970	0,02957	0,02944
33	0,02959	0,02945	0,02932	0,02919	0,02905	0,02892	0,02879	0,02867	0,02854
34	0,02872	0,02859	0,02846	0,02833	0,02820	0,02807	0,02795	0,02782	0,02770
35	0,02790	0,02777	0,02764	0,02752	0,02739	0,02727	0,02715	0,02703	0,02691
36	0,02712	0,02700	0,02687	0,02675	0,02663	0,02651	0,02639	0,02627	0,02616

Продолжение таблицы Е.1

	13,0%	14,0%	15,0%	16,0%	17%	18%	19%	20%	24,0%
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	0,48473	0,48363	0,48254	0,48146	0,48038	0,47932	0,47827	0,47723	0,47314
3	0,31985	0,31889	0,31793	0,31698	0,31605	0,31512	0,31420	0,31329	0,30974
4	0,23866	0,23785	0,23705	0,23626	0,23548	0,23470	0,23394	0,23318	0,23021
5	0,19034	0,18966	0,18898	0,18831	0,18764	0,18698	0,18633	0,18569	0,18317
6	0,15830	0,15770	0,15711	0,15653	0,15596	0,15539	0,15482	0,15427	0,15209
7	0,13548	0,13496	0,13444	0,13393	0,13343	0,13293	0,13243	0,13194	0,13003
8	0,11842	0,11795	0,11749	0,11704	0,11658	0,11614	0,11570	0,11526	0,11356
9	0,10517	0,10475	0,10434	0,10392	0,10352	0,10311	0,10272	0,10232	0,10079
10	0,09459	0,09421	0,09383	0,09345	0,09308	0,09272	0,09236	0,09200	0,09060
11	0,08594	0,08559	0,08524	0,08490	0,08456	0,08423	0,08389	0,08356	0,08228
12	0,07874	0,07842	0,07810	0,07778	0,07747	0,07716	0,07685	0,07655	0,07536
13	0,07266	0,07236	0,07206	0,07176	0,07147	0,07118	0,07090	0,07062	0,06952
14	0,06745	0,06716	0,06689	0,06661	0,06634	0,06607	0,06580	0,06554	0,06452
15	0,06293	0,06267	0,06241	0,06215	0,06189	0,06164	0,06139	0,06114	0,06018
16	0,05898	0,05873	0,05849	0,05825	0,05801	0,05777	0,05753	0,05730	0,05640
17	0,05550	0,05527	0,05503	0,05481	0,05458	0,05435	0,05413	0,05391	0,05306
18	0,05241	0,05219	0,05197	0,05175	0,05153	0,05132	0,05111	0,05090	0,05009
19	0,04964	0,04943	0,04922	0,04901	0,04881	0,04861	0,04841	0,04821	0,04744
20	0,04715	0,04695	0,04675	0,04655	0,04636	0,04617	0,04598	0,04579	0,04506
21	0,04490	0,04471	0,04452	0,04433	0,04414	0,04396	0,04378	0,04360	0,04290
22	0,04285	0,04267	0,04249	0,04231	0,04213	0,04195	0,04178	0,04161	0,04094
23	0,04098	0,04081	0,04063	0,04046	0,04029	0,04012	0,03996	0,03979	0,03915
24	0,04098	0,04081	0,04063	0,04046	0,04029	0,04012	0,03996	0,03979	0,03915
25	0,03770	0,03753	0,03737	0,03722	0,03706	0,03690	0,03675	0,03660	0,03601
26	0,03624	0,03609	0,03593	0,03578	0,03563	0,03548	0,03533	0,03519	0,03462
27	0,03490	0,03475	0,03460	0,03445	0,03431	0,03416	0,03402	0,03388	0,03333
28	0,03365	0,03350	0,03336	0,03322	0,03308	0,03294	0,03280	0,03266	0,03213
29	0,03249	0,03235	0,03221	0,03207	0,03193	0,03180	0,03167	0,03153	0,03102
30	0,03140	0,03127	0,03113	0,03100	0,03087	0,03074	0,03061	0,03048	0,02998
31	0,03039	0,03025	0,03012	0,03000	0,02987	0,02974	0,02962	0,02949	0,02901
32	0,02944	0,02931	0,02918	0,02906	0,02893	0,02881	0,02869	0,02857	0,02810
33	0,02854	0,02842	0,02829	0,02817	0,02805	0,02793	0,02782	0,02770	0,02725
34	0,02770	0,02758	0,02746	0,02734	0,02723	0,02711	0,02700	0,02688	0,02645
35	0,02691	0,02679	0,02667	0,02656	0,02645	0,02633	0,02622	0,02611	0,02569
36	0,02616	0,02605	0,02593	0,02582	0,02571	0,02560	0,02549	0,02539	0,02497

Заказ № _____ от «_____» _____ 2008 г. Тираж _____ экз.