

УДК 519.873

А.И. Песчанский, доцент, д-р техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**Ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОТЕРЯМИ И МГНОВЕННЫМ КОНТРОЛЕМ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Построена полумарковская модель однолинейной системы обслуживания $GI/G/1/0$, в которой осуществляется мгновенный контроль качества обслуживания требования. Найден явный вид функции распределения времени пребывания заявки в системе с учетом возможных ее повторных обслуживаний, среднее значение и дисперсия этого времени.

Ключевые слова: полумарковский процесс, однолинейная система обслуживания, контроль качества обслуживания, уравнения марковского восстановления.

Введение. Пик своего развития теория массового обслуживания достигла в 50–70 годы прошлого века. В это время появилось большое количество монографий и статей по различным проблемам этой тематики (например [1–3]). Наиболее заверченный вид теория массового обслуживания получила в случае простейшего потока заявок, поступающих в систему, и экспоненциально распределенного времени их обслуживания. Затем интерес к теории обслуживания несколько ослабел. Это объяснялось, в частности, тем, что задачи, допускающие простые решения, особенно в вычислительном плане, уже были решены. Однако в последнее время снова возродился интерес к теории массового обслуживания, обусловленный не только новыми проблемами, возникающими на практике, но и новыми математическими подходами к их решению. Так использование аппарата полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний позволило определить стационарные характеристики однолинейной и двухканальной систем обслуживания в случае рекуррентного входящего потока заявок и произвольно распределенного времени обслуживания заявок [4–6]. В настоящей статье с помощью этого аппарата построена полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями в предположении, что в случае некачественного обслуживания заявки осуществляется ее повторное обслуживание. Находятся функция распределения, математическое ожидание и дисперсия полного времени обслуживания заявки с учетом возможных ее повторных обслуживаний.

Постановка задачи. Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) $GI/G/1/0$ с потерями и одним обслуживающим прибором. Время обслуживания заявки — случайная величина (СВ) α с абсолютно непрерывной функцией распределения (ФР) $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$ и плотностью $f(t)$. Время между поступлениями заявок — СВ β с абсолютно непрерывной ФР $G(t) = P\{\beta \leq t\}$ и плотностью $g(t)$. Если прибор занят обслуживанием заявки, то поступающие в систему заявки теряются. Сразу же после окончания обслуживания заявки мгновенно осуществляется контроль качества обслуживания. С вероятностью p обслуживание заявки признается успешным, и прибор переходит в режим ожидания следующей заявки. С вероятностью $q = 1 - p$ обслуживание заявки признается некачественным, и прибор немедленно приступает к повторному обслуживанию заявки. Время повторного обслуживания — СВ γ с абсолютно непрерывной ФР $\Phi(t) = P\{\gamma \leq t\}$ и плотностью $\varphi(t)$. После повторного обслуживания с вероятностью p обслуживание признается успешным, а с вероятностью q заявка отправляется на повторное обслуживание. Процесс обслуживания заявки повторяется до тех пор, пока обслуживание не будет признано успешным. Предполагается, что СВ α , β и γ независимы, имеют конечные математические ожидания $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ и дисперсии $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$ соответственно.

Целью статьи является нахождение функции распределения времени обслуживания заявки, математического ожидания, и дисперсии этого времени с учетом возможных повторных обслуживаний заявки.

Построение полумарковской модели системы. Для построения модели функционирования системы используем аппарат полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [4, 5]. Опишем функционирование системы полумарковским процессом $\xi(t)$ с фазовым пространством $E = \{21, 00x, 10x, 21x, 22x, 12x\}$.

Расшифруем коды состояний:

21 — поступившая в систему заявка начала обслуживаться;

00x — мгновенное состояние; обслуживание заявки завершилось успешно, прибор перешел в режим ожидания следующей заявки, до поступления которой осталось время x ;

10х — прибор перешел в режим ожидания следующей заявки, до поступления которой осталось время x ;

21х — поступившая в систему заявка потеряна, прибор занят первичным обслуживанием заявки, до конца которого осталось время x ;

22х — поступившая в систему заявка потеряна, прибор занят повторным обслуживанием заявки, до конца которого осталось время x ;

12х — завершилось обслуживание заявки и началось ее повторное обслуживание, до поступления в систему очередной заявки осталось время x .

На рисунке 1 изображена временная диаграмма функционирования системы, а на рисунке 2 — граф переходов системы.

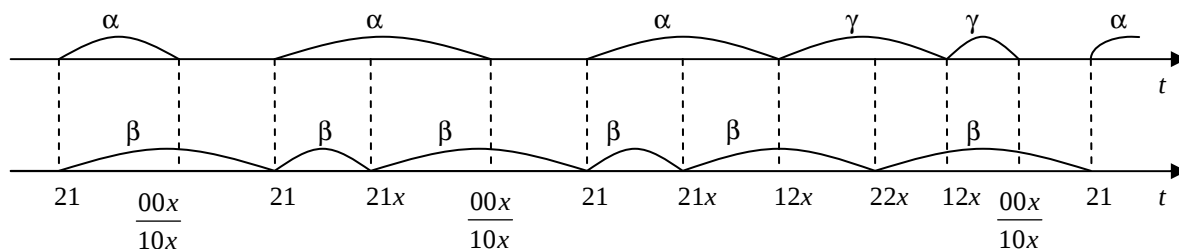


Рисунок 1 — Временная диаграмма функционирования системы

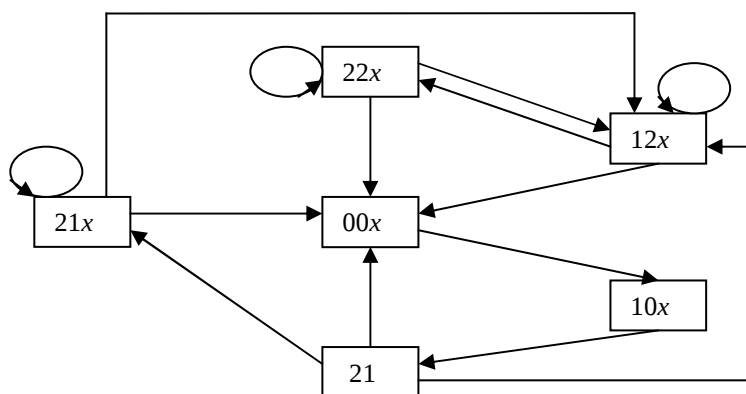


Рисунок 2 — Граф переходов системы

Времена пребывания системы в различных состояниях определяются формулами:

$$\theta_{21} = \alpha \wedge \beta; \quad \theta_{00x} = 0; \quad \theta_{10x} = x; \quad \theta_{21x} = \theta_{22x} = \beta \wedge x; \quad \theta_{12x} = \gamma \wedge x,$$

где $\wedge$ — знак минимума.

Полумарковское ядро $Q(t, x, B)$ [4] процесса марковского восстановления $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$ в дифференциальной форме имеет вид:

$$Q(t, 21, 21dy) = \int_0^t g(s) f(y+s) ds dy, \quad y > 0; \quad Q(t, 21, 00dy) = p \int_0^t f(s) g(y+s) ds dy, \quad y > 0;$$

$$Q(t, 21, 12dy) = q \int_0^t f(s) g(y+s) ds dy, \quad y > 0; \quad Q(t, 00x, 10x) = 1(t); \quad Q(t, 10x, 21) = 1_x(t);$$

$$Q(t, 21x, 21dy) = g(x-y) 1_{x-y}(t) dy, \quad 0 < y < x; \quad Q(t, 21x, 00dy) = pg(x+y) 1_x(t) dy, \quad y > 0;$$

$$Q(t, 21x, 12dy) = qg(x+y) 1_x(t) dy, \quad y > 0; \quad Q(t, 12x, 00dy) = p\phi(x-y) 1_{x-y}(t) dy, \quad 0 < y < x;$$

$$Q(t, 12x, 12dy) = q\phi(x-y) 1_{x-y}(t) dy, \quad 0 < y < x; \quad Q(t, 12x, 22dy) = \phi(x+y) 1_x(t) dy, \quad y > 0;$$

$$Q(t, 22x, 00dy) = pg(x+y) 1_x(t) dy, \quad y > 0; \quad Q(t, 22x, 12dy) = qg(x+y) 1_x(t) dy, \quad y > 0;$$

$$Q(t, 22x, 22dy) = g(x-y) 1_{x-y}(t) dy, \quad 0 < y < x.$$

Представим множество всех состояний системы в виде двух непересекающихся подмножеств: $E = E_+ \cup E_-$, $E_+ = \{21, 21x, 22x, 12x\}$, $E_- = \{00x, 10x\}$. Пребывание системы в подмножестве E_+ означает, что прибор занят обслуживанием заявки, а в подмножестве E_- — прибор свободен. Найдём распределения времен пребывания ПМП $\xi(t)$ в подмножестве состояний E_+ .

Пусть $\tau_{21}, \tau_{21x}, \tau_{22x}, \tau_{12x}$ — времена пребывания $\xi(t)$ в E_+ с начальным состоянием 21, 21x, 22x, 12x соответственно, а $\Phi_{21}(t), \Phi_{21x}(t), \Phi_{22x}(t), \Phi_{12x}(t)$ — их функции распределения.

Запишем систему уравнений марковского восстановления [4] для функций $\bar{\Phi}_{21}(t) = 1 - \Phi_{21}(t)$, $\bar{\Phi}_{21x}(t) = 1 - \Phi_{21x}(t)$, $\bar{\Phi}_{22x}(t) = 1 - \Phi_{22x}(t)$, $\bar{\Phi}_{12x}(t) = 1 - \Phi_{12x}(t)$ с учетом того, что $\bar{\Phi}_{21x}(t) = \bar{\Phi}_{22x}(t) = 1$ при $0 \leq t < x$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}_{21}(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t g(s)ds \int_0^{t-s} f(y+s) \bar{\Phi}_{21y}(t-s)dy + q \int_0^t f(s)ds \int_0^{t-s} g(y+s) \bar{\Phi}_{12y}(t-s)dy, \quad t \geq 0; \\ \bar{\Phi}_{21x}(t) = \int_0^x g(x-y) \bar{\Phi}_{21y}(t-x+y)dy + q \int_0^x g(x+y) \bar{\Phi}_{12y}(t-x)dy, \quad t \geq x; \\ \bar{\Phi}_{22x}(t) = \int_0^x g(x-y) \bar{\Phi}_{22y}(t-x+y)dy + q \int_0^x g(x+y) \bar{\Phi}_{12y}(t-x)dy, \quad t \geq x; \\ \bar{\Phi}_{12x}(t) = \bar{\Phi}(t) + q \int_{x-t}^x \varphi(x-y) \bar{\Phi}_{12y}(t-x+y)dy, \quad 0 \leq t < x; \\ \bar{\Phi}_{12x}(t) = \bar{\Phi}(t) + q \int_0^x \varphi(x-y) \bar{\Phi}_{12y}(t-x+y)dy + \int_0^{t-x} \varphi(x+y) \bar{\Phi}_{22y}(t-x)dy, \quad t \geq x. \end{array} \right. \quad (1)$$

Из системы (1) следует, что функции $\bar{\Phi}_{21x}(t)$ и $\bar{\Phi}_{22x}(t)$ совпадают и при $t \geq x$. Четвертое уравнение этой системы решается методом последовательных приближений и его решение может быть представлено в виде

$$\bar{\Phi}_{12x}(t) = \bar{\Phi}(t) + \int_0^t h_\varphi^{(q)}(t-s) \bar{\Phi}(s)ds, \quad 0 \leq t < x, \quad (2)$$

где $h_\varphi^{(q)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \varphi^{*(n)}(t)$ — плотность функции восстановления $H_\varphi^{(q)}(t)$ обрывающегося процесса восстановления, порожденного случайной величиной с плотностью несобственного распределения $q\varphi(t)$.

Выражение в правой части формулы (2) преобразуется к виду

$$\bar{\Phi}_{12x}(t) = 1 - \frac{p}{q} H_\varphi^{(q)}(t), \quad 0 \leq t < x. \quad (3)$$

Отметим, что $q - p H_\varphi^{(q)}(t)$ — вероятность того, что на промежутке $[0, t]$ не произойдет качественного обслуживания заявки [7, с. 424]. С учетом формулы (3) система уравнений марковского восстановления принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}_{21}(t) = \int_0^t g(s)ds \int_0^{t-s} f(y+s) \bar{\Phi}_{21y}(t-s)dy + q \int_0^t f(s)ds \int_0^{t-s} g(y+s) \bar{\Phi}_{12y}(t-s)dy + \\ \quad + \bar{F}(t) + \bar{G}(t) \int_0^t [q - p H_\varphi^{(q)}(t-s)] f(s)ds, \quad t \geq 0; \\ \bar{\Phi}_{22x}(t) = \int_0^x g(x-y) \bar{\Phi}_{22y}(t-x+y)dy + q \int_0^{t-x} g(x+y) \bar{\Phi}_{12y}(t-x)dy + \\ \quad + \bar{G}(t) [q - p H_\varphi^{(q)}(t-x)], \quad t \geq x; \\ \bar{\Phi}_{12x}(t) = \bar{\Phi}(t) + q \int_0^x \varphi(x-y) \bar{\Phi}_{12y}(t-x+y)dy + \int_0^{t-x} \varphi(x+y) \bar{\Phi}_{22y}(t-x)dy, \quad t \geq x. \end{array} \right. \quad (4)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением этой системы являются функции:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{22x}(t) &= \bar{\Phi}_{21x}(t) = q - p H_{\Phi}^{(q)}(t-x), \quad t \geq x; \quad \bar{\Phi}_{12x}(t) = 1 - \frac{p}{q} H_{\Phi}^{(q)}(t), \quad t \geq 0; \\ \bar{\Phi}_{21}(t) &= \bar{F}(t) + \int_0^t f(s) [q - p H_{\Phi}^{(q)}(t-s)] ds, \quad t \geq 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Например, проверим, что функции (5) являются решениями третьего уравнения системы (4). Подставляя (5) в правую часть этого уравнения, получаем

$$\begin{aligned}& \bar{\Phi}(t) + \int_0^x \Phi(x-y) [q - p H_{\Phi}^{(q)}(t-x+y)] dy + \int_0^{t-x} \Phi(x+y) [q - p H_{\Phi}^{(q)}(t-x-y)] dy = \\ &= \bar{\Phi}(t) + q\Phi(t) - p \int_0^t H_{\Phi}^{(q)}(t-s) \Phi(s) ds = \bar{\Phi}(t) + q\Phi(t) - \frac{p}{q} [H_{\Phi}^{(q)}(t) - q\Phi(t)] = 1 - \frac{p}{q} H_{\Phi}^{(q)}(t).\end{aligned}$$

Таким образом, функция распределения времени полного обслуживания заявки определяется формулой

$$\Phi_{21}(t) = pF(t) + p \int_0^t h_{\Phi}^{(q)}(t-s) F(s) ds. \quad (6)$$

Заметим, что длительность времени полного обслуживания заявки не зависит от характера входящего в систему потока заявок.

Найдем вид функции распределения времени полного обслуживания заявки (6) для некоторых частных законов распределения СВ α и γ . Пусть длительности времен первичного и повторного обслуживаний заявок имеют показательные распределения с параметрами λ и ν соответственно. Тогда $h_{\Phi}^{(q)}(t) = q\nu e^{-\nu t}$ и функция распределения времени полного обслуживания заявки, вычисленная с помощью формулы (6), имеет вид

$$\Phi_{21}(t) = 1 - \frac{p(\nu - \lambda)}{p\nu - \lambda} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda q}{p\nu - \lambda} e^{-p\nu t}.$$

Если длительность времени повторного обслуживания заявки имеет распределение Эрланга m -го порядка с плотностью $\varphi(t) = \nu \frac{(\nu t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\nu t}$, тогда $h_{\Phi}^{(q)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z_k + \nu}{m} e^{z_k t}$ и

$$\Phi_{21}(t) = p(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{p}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (z_k + \nu) \left[\frac{\lambda e^{z_k t}}{z_k(z_k + \lambda)} + \frac{e^{-\lambda t}}{z_k + \lambda} - \frac{1}{z_k} \right],$$

где $z_k = \nu \left(\sqrt[m]{q} \exp(i \frac{2\pi}{m}) - 1 \right)$.

Нахождение среднего времени полного обслуживания заявки. Математическое ожидание $M\tau_{21}$ времени полного обслуживания заявки с учетом возможных повторных обслуживаний найдем по формуле $M\tau_{21} = \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_{21}(t) dt$. Прежде чем ею воспользоваться, учтем, что $\int_0^{\infty} h_{\Phi}^{(q)}(t) dt = \frac{q}{p}$ и

$\int_0^{\infty} t h_{\Phi}^{(q)}(t) dt = \frac{q}{p^2} M\gamma$. Заметим, что функцию $\bar{\Phi}_{21}(t)$ можно преобразовать к виду

$$\bar{\Phi}_{21}(t) = p\bar{F}(t) + p \int_t^{\infty} h_{\Phi}^{(q)}(s) ds + p \int_0^t h_{\Phi}^{(q)}(t-s) \bar{F}(s) ds.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
M\tau_{21} &= \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_{21}(t) dt = pM\alpha + p \int_0^{\infty} t h_{\Phi}^{(q)}(t) dt + \frac{q}{p^2} M\gamma + p \int_0^{\infty} h_{\Phi}^{(q)}(t) dt M\alpha = \\
&= pM\alpha + p \frac{q}{p^2} M\gamma + p \frac{q}{p} M\alpha = M\alpha + \frac{q}{p} M\gamma.
\end{aligned}$$

Таким образом, среднее время полного обслуживания заявки определяется формулой

$$M\tau_{21} = M\alpha + \frac{q}{p} M\gamma.$$

Нахождение дисперсии времени полного обслуживания заявки. Дисперсия $D\tau_{21}$ времени полного обслуживания заявки определяется через функцию распределения и математическое ожидание этого времени выражением

$$D\tau_{21} = 2 \int_0^{\infty} t \bar{\Phi}_{21}(t) dt - [M\tau_{21}]^2.$$

В дальнейших преобразованиях интеграла в правой части последнего равенства учтем соотношения:

$$\int_0^{\infty} t \bar{F}(t) dt = \frac{D\alpha + [M\alpha]^2}{2}; \quad \int_0^{\infty} t^2 h_{\Phi}^{(q)}(t) dt = \frac{q}{p^2} D\gamma + \frac{q(1+q)}{p^3} [M\gamma]^2.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t \bar{\Phi}_{21}(t) dt &= p \int_0^{\infty} t \bar{F}(t) dt + \frac{p}{2} \int_0^{\infty} t^2 h_{\Phi}^{(q)}(t) dt + p \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} t h_{\Phi}^{(q)}(t) dt + p \int_0^{\infty} t \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} h_{\Phi}^{(q)}(t) dt \\
&= p \frac{D\alpha + [M\alpha]^2}{2} + \frac{q}{2p} D\gamma + \frac{q(1+q)}{2p^2} [M\gamma]^2 + \frac{q}{p} M\alpha M\gamma + q \frac{D\alpha + [M\alpha]^2}{2} = \\
&= \frac{D\alpha + [M\alpha]^2}{2} + \frac{q}{2p} D\gamma + \frac{q(1+q)}{2p^2} [M\gamma]^2 + \frac{q}{p} M\alpha M\gamma.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
D\tau_{21} &= D\alpha + [M\alpha]^2 + \frac{q}{p} D\gamma + \frac{q(1+q)}{p^2} [M\gamma]^2 + \frac{2q}{p} M\alpha M\gamma - \left[M\alpha + \frac{q}{p} M\gamma \right]^2 = \\
&= D\alpha + \frac{q}{p} D\gamma + \frac{q}{p^2} [M\gamma]^2.
\end{aligned}$$

Заключение. В статье построена полумарковская модель функционирования однолинейной системы обслуживания с потерями, входящим рекуррентным потоком заявок, произвольным распределением времени обслуживания и мгновенным контролем качества обслуживания заявок. В случае некачественного обслуживания заявка отправляется на повторное обслуживание. Решение в явном виде системы уравнений марковского восстановления для переходных вероятностей полумарковского процесса позволило найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию времени полного обслуживания заявки с учетом возможных ее повторных обслуживаний.

Предполагаемое направление дальнейших исследований — перенесение полученных результатов на двухканальные системы обслуживания.

Бibliографический список использованной литературы

1. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания / Дж. Риордан. — М.: Связь, 1966. — 184 с.
2. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
3. Бочаров П.П. Теория массового обслуживания: учебник / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. — М.: Изд-во РУДН, 1995. — 529 с.
4. Корольюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Корольюк, А.Ф. Турбин. — Киев: Наук. думка, 1982. — 236 с.

5. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И. Новиков, А.Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.
6. Обжерин Ю.Е. Об однолинейной системе обслуживания с потерями и абсолютным приоритетом / Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 10. — С. 107–115.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т.2 / В. Феллер. — М.: Мир, 1984. — 738 с.

Поступила в редакцию 02.02.2011 г.

Песчанський О.І. Напівмарківська модель однолінійної системи обслуговування з втратами та миттєвим контролем якості обслуговування

Побудована напівмарківська модель однолінійної системи обслуговування з втратами, в якій здійснюється миттєвий контроль якості обслуговування вимоги. Знайдено явний вигляд функції розподілу часу перебування заявки в системі з урахуванням можливих її повторних обслуговувань, середнє значення та дисперсія цього часу.

Ключові слова: напівмарківський процес, однолінійна система обслуговування, контроль якості обслуговування, рівняння марківського відновлення.

Peschanskiy O.I. Semi-Markov model of a single-server system with losses and instant service quality control

The Semi-Markov model of a single-server system with losses and instant request service quality control execution is developed. An explicit form of distribution function of request dwelling time in the system is defined with regard to the possibility of its re-servicing. Mean duration of the dwelling time is defined as well.

Keywords: semi-markov process, single-server queue system, service quality control, Markov renewal equations.