

УДК 518.5

В.Ф. Ротко, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В КЛАССЕ СУБОПТИМАЛЬНЫХ БИНАРНЫХ ПРОГРАММ**

Предлагается экономичный алгоритм реализации булевой функции субоптимальной бинарной программой. В основу алгоритма положен метод Р-функций, предложенный А. Тейзом [1]. Экономичность алгоритма обеспечивается рационально организованными этапами селекции первичных g -областей и выбора субоптимальных бинарных программ.

Ключевые слова: Р-функция, первичная g -область, субоптимальная бинарная программа

Представление булевой функции бинарной программой [2] часто оказывается более компактным и удобным в использовании, чем традиционные аналитические описания в виде дизъюнктивных или конъюнктивных форм и даже логических формул общего вида. По этим причинам оно нашло широкое применение во многих приложениях, относящихся к автоматическому (или автоматизированному) проектированию, моделированию и верификации дискретных систем (в частности при реализации подхода, известного как Model Checking [3]).

В предлагаемой статье рассматривается один из возможных подходов к уменьшению вычислительной сложности алгоритма реализации булевой функции в классе субоптимальных бинарных программ.

Задача формулируется следующим образом: задано описание булевой функции $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ (в общем случае неполностью определенной) в виде логических формул общего вида. Требуется найти реализующую ее бинарную программу в классе субоптимальных бинарных программ.

Известны многие подходы к решению задачи построения оптимальных (при различных критериях оптимальности и ограничениях на структуру бинарной программы) или просто экономичных бинарных программ, реализующих булевы функции [1, 2, 3]. Представляет интерес также нахождение нетривиальных оценок сложности реализации булевой функции бинарной программой. Более того, исследуются сравнительные сложности квантовых и классических бинарных программ, ориентируясь на возможности организации квантовых вычислений. Все это говорит об актуальности решения задачи построения оптимальных (или субоптимальных) бинарных программ при различных критериях оптимальности (субоптимальности) и ограничениях на структуру бинарной программы.

Бинарная программа q -классификации — это сеть $N(V, A, W(V), W(A))$, представленная взвешенным по вершинам и дугам односторонне связным ациклическим ориентированным графом $G(V, A)$ с одним истоком $s \in V$ и q стоками, $f_0, f_1, \dots, f_{q-1} \in V$. Для всех вершин $v \in V - \{f_0, f_1, \dots, f_{q-1}\}$ выполняется условие $|A_v| = 2$. Для $s \in V A^{-1}v = \emptyset$, для всех $f_i, i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ выполняется $A_{f_i} = \emptyset$.

Сеть N называется безызбыточной, если $(\exists v \in V)[|\Gamma v| = 1]$. В противном случае сеть N называется избыточной.

Каждой вершине $s \in V - \{f_0, f_1, \dots, f_{q-1}\}$ приписывается $x \in X$, где $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ — множество булевых переменных. Каждой вершине f_i приписывается значение $i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Бинарная программа q -классификации реализует функцию $F(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}): X^n \rightarrow L$, где $L = \{0, 1, \dots, q-1\}$. Бинарная программа 2-классификации реализует булеву функцию $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.

Различают следующие бинарные программы q -классификации:

- 1) древовидные программы: $(\forall v \in V - \{s\})[|\Gamma^{-1}v| = 1]$;
- 2) простые программы: $(\forall <s, f_i> \text{-пути} \in V^*)$ [переменная $x \in X$ встречается не более одного раза];
- 3) сложные программы $(\exists <s, f_i> \text{-путь} \in V^*)$ $(\exists x \in X)$ [x встречается более одного раза].

Представляет интерес выделение класса бинарных программ, реализующих булевы функции ($q=2$), в которых существуют $<s, f_i>$ -пути, которые являются синтаксическими (не существует $\sigma \in f^{-1}(0)$ или $\sigma \in f^{-1}(1)$, при котором реализуется синтаксический путь).

Рассмотрим возможные критерии оптимальности (субоптимальности) бинарных программ.

Известны [1] следующие критерии оптимальности:

- 1) минимизация самого длинного пути $<s, f_i>$;
- 2) минимизация мощности $|V|$ бинарной программы;

3) минимизация мощности $|V|$ при условии минимизации самого длинного пути $\langle s, f_i \rangle$.

Критерий 3) называют критерием субоптимальности бинарной программы. Такие программы, как правило, обеспечивают «хорошее» приближение к выполнению критерия 2) при значительно более «слабых» требованиях к использованию вычислительных ресурсов (временных и емкостных).

Широкое распространение получил подход к построению бинарной программы, известной как OBDD [3]. К достоинствам этого подхода следует отнести простоту алгоритма свертки семантического дерева в OBDD. К недостаткам такого подхода следует отнести громоздкость исходного описания булевой функции (фактически исходное описание булевой функции, зависящей от n переменных,

требует задания семантического дерева с $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ вершинами и $2^{n+1} - 2$ дугами). Кроме этого,

результаты свертки семантического дерева в OBDD в большинстве случаев существенно зависят от отношения порядка на множестве переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Таких упорядочений существует $n!$.

Известны булевы функции [3], для которых число вершин OBDD меняется существенным образом в зависимости от выбранного упорядочения переменных. Так, для функции

$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = \bigwedge_{i=1}^n (x_i \leftrightarrow y_i)$, описывающей n -разрядный компаратор, при упорядочении

переменных $\langle x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n \rangle$ OBDD имеет сложность (число вершин) $3n + 2$, а при

упорядочении $\langle x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_1 < y_2 < \dots < y_n \rangle$ имеет сложность $3 \cdot 2^n - 1$. Более того, имеются функции, сложность OBDD для которых растет экспоненциально от числа переменных независимо от упорядочения переменных. Одним из примеров функций подобного рода является булева функция, вычисляющая n -ый бит произведения двоичных натуральных чисел [3]. Доказано, что проверка упорядочения переменных на оптимальность является NP-полной задачей.

Представляется, что более экономичным подходом к построению субоптимальных бинарных программ является использование метода Р-функций, разработанного А.Тейзом [1]. При этом необходимо использовать экономичные алгоритмы характеристики логических формул, описывающих булевы функции [4].

Рассмотрим псевдобулеву функцию q -классификации $F(X) : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1,\dots,q-1\}$ от множества $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ булевых аргументов. Эту функцию можно описать в виде $F(X) = \bigvee_{i=0}^{q-1} g_i(x) \cdot i$, где $g_i(x)$ — булева функция, обладающая следующими свойствами:

1) $g_i(x) = 1 \leftrightarrow F(x) = i$; иначе $g_i(x) = 0$;

2) $\bigvee_{i=0}^{q-1} g_i(x) \equiv 1 \rightarrow F(x)$ — полностью определенная функция; иначе $F(x)$ — неполностью определенная функция;

3) $(\forall i, j \in \{0,1,\dots,q-1\}) [i \neq j \rightarrow g_i(x) \wedge g_j(x) = 0]$.

Пусть $F(X) : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1,\dots,q-1\}$, $H(x) : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1,\dots,q-1\}$, а $g(x) : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ — булева функция. Тогда пара функций $\langle g, H \rangle$ называется Р-функцией для F (это обозначается как $\langle g, H \rangle / F$), если и только если $Fg = Hg$.

Условие $g = 1$ определяет область, где $F = H$. Р-функция $\langle g, H \rangle$ представляет частичное описание F в области, характеризуемой $g = 1$.

Множество Р-функций $\{\langle g_i, H_i \rangle \mid \langle g_i, H_i \rangle / F, i \in I\}$ представляет полное описание F , если и только если $\bigvee_{i \in I} g_i(x) = 1$ характеризует область, где F определена. В частности, если F полностью

определенная функция, тогда $\bigvee_{i \in I} g_i(x) \equiv 1$. В последнем случае имеем для функции $F(X) = \bigvee_{i=0}^{q-1} g_i(x) \cdot i$ два полных описания $F(x) : \langle 1, F \rangle$ и $\{\langle g_i(X), i \rangle \mid i \in \{0,1,\dots,q-1\}\}$.

Для булевой функции $f(x)$ имеем следующее полное описание $f(x) : \{\langle \overline{f(x)}, 0 \rangle, \langle f(x), 1 \rangle\}$.

Так как для неполностью определенных функций $g_i(x) = 1$ определяет максимальную область, на которой может быть $F(X) = i$, то для них условие ортогональности $g_i(x) \wedge g_j(x) = 0$ при $i \neq j$ может не выполняться.

В алгебре Р-функций справедливы следующие соотношения [1]:

1) $\langle g, H \rangle / F \ \& \ g' \leq g \rightarrow \langle g', H \rangle / F$;

$$2) \langle g_0, H \rangle / F \& \langle g_1, H \rangle / F \rightarrow \langle g_0 \wedge g_1, H \rangle / F \& \langle g_0 \vee g_1, H \rangle / F.$$

Можно сделать вывод, что множество $\{g_i \mid \langle g_i, H \rangle / F\}$ замкнуто относительно операций $\wedge$ и $\vee$. Оно образует поэтому подрешетку решетки булевых функций и поэтому имеет максимальный элемент, обозначенный как $[F, H] = F \leftrightarrow H$.

Ограничимся рассмотрением метода Р-функций при построении субоптимальной бинарной программы, реализующей булеву функцию $f(X), X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (возможно не полностью определенной). Это соответствует $q=2$.

Используем следующие основополагающие определения [1].

Определение 1. Пара булевых функций $\langle g, h \rangle$ есть Р-функция для булевой функции f (обозначается $\langle g, h \rangle / f$), если и только если: $f \wedge g = h \wedge g$.

Определение 2. Р-функция порядка 0 (P^0 -функция) есть Р-функция $\langle g, 0 \rangle / f$ или $\langle g, 1 \rangle / f$.

Определение 3. Первичная P^0 -функция для f есть P^0 -функция $\langle g, h \rangle / f$, для которой не существует P^0 -функции $\langle g', h' \rangle / f$ такой, что $g \rightarrow g'$ и $g \neq g'$.

Для полностью определенной функции f существуют две первичные P^0 -функции $P_0^0(f) = \langle \bar{f}, 0 \rangle$ и $P_1^0(f) = \langle f, 1 \rangle$. Если неполностью определенная функция f задается парой $\langle f_0, f_1 \rangle$ полностью определенных булевых функций f_0 и f_1 , описывающих $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ соответственно, то в этом случае $P_0^0(f) = \langle \bar{f}_1, 0 \rangle$ и $P_1^0(f) = \langle \bar{f}_0, 1 \rangle$.

Определение 4. Р-функция порядка $s > 0$ (P^s -функция) для f есть Р-функция $\langle g, h \rangle / f$ такая, что не существует Р-функции $\langle g', h' \rangle / f$ порядка $s-r, r > 0$, для которой $g \rightarrow g'$.

Определение 5. Первичная P^s функция для f есть P^s -функция $\langle g, h \rangle / f$, для которой не существует P^s -функции $\langle g', h' \rangle / f$ такой, что $g \rightarrow g'$ и $g \neq g'$.

Определение 6. Множество $\{\langle g_i, h_i \rangle \mid i \in I\}$ Р-функций $\langle g_i, h_i \rangle / f$ называется полным описанием f , если $\bigvee_{i \in I} g_i$ характеризует область определения функции f . Для полностью определенной функции f выполняется соотношение $\bigvee_{i \in I} g_i \equiv 1$. Для неполностью определенной булевой функции f , заданной парой $\langle f_0, f_1 \rangle$ полностью определенных функций f_0 и f_1 , выполняются соотношения $g_0 = \bar{f}_1, f_1 \rightarrow f^* \rightarrow g_1$.

Определение 7. Множество $\{\langle g_0, 0 \rangle, \langle g_1, 1 \rangle\}$ Р-функции называется начальным полным описанием f , а $\{\langle 1, f^* \rangle\}$ – конечным полным описанием f .

В работе [1] показана справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. Пусть $\langle g_j, h_j \rangle / f$ и $\langle g_k, h_k \rangle / f$ являются Р-функциями для f . Тогда композиция $T_i^0(\langle g_j, h_j \rangle, \langle g_k, h_k \rangle) = \langle \bar{x}_i \wedge g_j \vee x_i \wedge g_k, \bar{x}_i \wedge h_j \vee x_i \wedge h_k \rangle$ есть $\langle g_r, h_r \rangle / f$.

Утверждение 2. Пусть $\langle g_j, h_j \rangle / f$ и $\langle g_k, h_k \rangle / f$ являются Р-функциями для f . Тогда композиция $T_i^1(\langle g_j, h_j \rangle, \langle g_k, h_k \rangle) = \langle g_j / \bar{x}_i \wedge g_k / x_i, \bar{x}_i \wedge h_j \vee x_i \wedge h_k \rangle$ есть $\langle g_r, h_r \rangle / f$.

Утверждение 3. Пусть $g = \bar{x}_i \wedge g^0 \vee x_i \wedge g^1 \vee g^2$ и $\langle g_j, h_j \rangle / f, \langle g_k, h_k \rangle / f$ являются Р-функциями для f . Тогда композиция $T_i^2(\langle g_j, h_j \rangle, \langle g_k, h_k \rangle) = \langle g_j^0 \wedge g_k^1, \bar{x}_i \wedge h_j \vee x_i \wedge h_k \rangle$ есть $\langle g_r, h_r \rangle / f$.

Утверждение 4. Множества Р-функций для f , порожденные с помощью операторов T^0, T^1 и T^2 , содержат конечное полное множество. Кроме того, T^0 гарантирует субоптимальное решение в классе сложных программ, а T^1 и T^2 – в классе простых программ.

При построении начального полного описания функции f по конечному можно воспользоваться операцией декомпозиции в виде $\Delta_i(\langle g_j, h_j \rangle) = \{\langle \bar{x}_i \wedge g_j, h_j / \bar{x}_i \rangle, \langle x_i \wedge g_j, h_j / x_i \rangle\}$, но потребуются ввести еще операцию слияния Р-функций.

С вычислительной точки зрения использование операции композиции оказывается более предпочтительным по сравнению с операцией декомпозиции.

Решение задачи построения субоптимальной бинарной программы (или программ), реализующих заданную булеву функцию f , проводится в три основных этапа:

- 1) формирование начального полного описания f ;
- 2) формирование с помощью операций композиции над Р-функциями конечного полного описания f ;
- 3) выделение субоптимальных бинарных программ.

Анализ показывает, что при построении субоптимальных бинарных программ достаточно ограничиться представлением только g -компонент Р-функции.

Самым сложным этапом при построении субоптимальных бинарных программ является этап 2), при котором требуется построить сеть, описывающую многоуровневую структуру порождения первичных g -компонент на каждом уровне, завершающуюся уровнем с g -компонентой $g = 1$. При построении такой структуры требуется использовать экономичные алгоритмы проверки g -компонент на отношение импликации и равенства. Предлагается использовать для этой цели подход классификации логических формул на общезначимые, противоречивые и нейтральные методом И/ИЛИ-сверток [4]. При нахождении иерархической структуры первичных g -компонент предлагается не генерировать заведомо бесперспективные композиции.

Условимся сеть, описывающую многоуровневую структуру порождения первичных g -компонент, представлять в виде двух таблиц 1 и 2. Таблица 1 описывает собственно сеть N . Каждая строка этой таблицы указывает вариант композиции $v = T_x(v_0, v_1)$ в пространстве v, x, v_0, v_1 . Таблица 2 описывает функции, соответствующие вершинам (узлам) сети N . Каждая строка этой таблицы указывает функции, соответствующие узлу v сети N в пространстве $v, gv, gv/\bar{x}_1, gv/x_1, \dots, gv/\bar{x}_n, gv/x_n$.

Здесь gv – функция, описывающая g -компоненту для узла v , а также пары функций $gv/\bar{x}_i, gv/x_i$ где f/x – функция, полученная из функции f при условии $x = 1$. Полагается, что булевские константы **false** и **true** представляются значениями 0 и 1 соответственно.

Предлагается следующая стратегия формирования композиций, позволяющая не формировать g -компоненты, которые заведомо не будут первичными. Пусть $V_{0..l-1}$ – множество узлов сети, представляющих первичные g -компоненты, входящие в объединение слоев из $0..l-1$. Тогда при формировании слоя l первичных g -компонент достаточно ограничиться рассмотрением операций композиции $T_x^1(v_0, v_1)$, где $v_0 \in \sup(V_{0..l-1}^{\bar{x}})$, $v_1 \in \sup(V_{0..l-1}^x)$, $v_0 \neq v_1$ при заданном отношении импликации между функциями $gv/\bar{x}$ и gv/x соответственно. Кроме того, из этого множества следует исключить все операции композиции, использованные при формировании $V_{0..l-1}$.

Полученная g -компонента g' при такой композиции, должна быть затем проверена на отношение импликации с g -компонентами gv для $v \in V_{0..l-1}$. Если существует такая gv , что $g' \rightarrow gv$, то g' не является первичной g^l -компонентой и должна быть отброшена. В противном случае g' должна быть проверена на первичность ее как g^l -компоненты, а также на эквивалентность ее с уже полученными g^l -компонентами. Каждой первичной g^l -компоненте в общем случае может соответствовать некоторое множество альтернативных композиций при рассмотрении всех $x \in X$. Справедливы также следующие соотношения: $\sup(V_{0..l}^{\bar{x}}) = \sup(\sup(V_{0..l-1}^{\bar{x}}) \cup V_l^{\bar{x}})$, $\sup(V_{0..l}^x) = \sup(\sup(V_{0..l-1}^x) \cup V_l^x)$.

При реализации алгоритма построения субоптимальных бинарных программ использованы экономичные алгоритмы тернарной классификации булевых формул (противоречивая, нейтральная, общезначимая) [4] и преобразования между нормальными формами (КНФ, ДНФ) [5].

Из сетевого описания, представленного таблицей 1, необходимо выделить субоптимальные бинарные программы. Эта таблица представляет условие реализации бинарных программ в виде следующей формы булевой функции

$$\Phi(0..v_l) = v_l \wedge \bigwedge_{i=2}^{v_e} [v_i \rightarrow \bigvee_j (v_{0ij} \wedge v_{1ij})].$$

Эта форма может быть легко преобразована в конъюнкцию ДНФ или даже в КНФ, к которой можно применить известные методы экономичного нахождения термов эквивалентной сокращенной ДНФ. Субоптимальным решением искомых бинарных программ соответствуют термы сокращенной ДНФ, содержащие минимальное число вхождений переменных без инверсии.

Очевидно, что узлы $v_e, 0, 1$ войдут в любое искомое решение. Поэтому можно ограничиться рассмотрением условия реализации в виде $\hat{\Phi}_{\text{КНФ}}(2..v_{l-1})$. Это условие можно интерпретировать как описание «запретной» области $\neg \hat{\Phi}_{\text{ДНФ}}(2..v_{l-1})$, а искомые решения рассматривать как ортогональные двоичные векторы в пространстве $(2..v_{l-1})$ с минимальным числом единиц.

Рассмотрим пример булевой функции $f(a,b,c,d)$, зависящей от множества $X = \{a,b,c,d\}$ булевых переменных. Множества $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ описываются функциями $g_0^0(X) = (\bar{a}(\bar{c} \vee \bar{b}d))$ и $g_1^0(X) = (a \vee c(b \vee \bar{d}))$, сопоставленными узлам 0 и 1 соответственно. Здесь принято аналитическое описание булевой функции в скобочной нелинейной форме записи без явного упоминания операции конъюнкции. Решение будем искать в классе простых бинарных программ с использованием оператора композиции T_i^1 .

При использовании оператора композиции T_a^1 имеем $\sup(V_0^{\bar{a}}) = \{0, 1\}$, $\sup(V_0^a) = \{1\}$ и необходимо найти только композицию $T_a^1(0, 1)$, которая представляется узлом $v=2$ с g_2^1 -компонентой $(\bar{c} \vee \bar{b}d)$.

При использовании оператора композиции T_b^1 имеем $\sup(V_0^{\bar{b}}) = \{0, 1\}$, $\sup(V_0^b) = \{0, 1\}$ и необходимо найти только композиции $T_b^1(0, 1)$ и $T_b^1(1, 0)$. Композиция $T_b^1(0, 1)$ представляется узлом $v=3$ с g_3^1 -компонентой $(\bar{a}cd)$. Композиция $T_b^1(1, 0)$ должна быть отброшена, так как соответствующая ей g -компонента представляется константой 0.

При использовании оператора композиции T_c^1 имеем $\sup(V_0^{\bar{c}}) = \{0, 1\}$, $\sup(V_0^c) = \{0, 1\}$ и необходимо найти только композиции $T_c^1(0, 1)$ и $T_c^1(1, 0)$. Композиция $T_c^1(0, 1)$ представляется узлом $v=4$ с g_4^1 -компонентой $\bar{a}(b \vee \bar{d})$, а композиция $T_c^1(1, 0)$ должна быть отброшена, так как соответствующая ей g -компонента представляется константой 0.

При использовании оператора композиции T_d^1 имеем $\sup(V_0^{\bar{d}}) = \{0, 1\}$, $\sup(V_0^d) = \{0, 1\}$ и необходимо найти только композиции $T_d^1(0, 1)$ и $T_d^1(1, 0)$. Композиция $T_d^1(0, 1)$ должна быть отброшена, так как соответствующая ей g -компонента представляется константой 0. Композиция $T_d^1(1, 0)$ представляется узлом $v=5$ с g_5^1 -компонентой $\bar{a}\bar{b}c$. Узлы 2-5 представляют все первичные g^1 -компоненты.

Перейдем теперь к генерации первичных g^2 -компонент. При использовании оператора T_a^1 имеем $\sup(V_{0..1}^{\bar{a}}) = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, $\sup(V_{0..1}^a) = \{1\}$, причем композиции $T_a^1(1, 0)$ и $T_a^1(2, 1)$ не должны рассматриваться, так как они были использованы при генерации первичных g^1 -компонент. Композиции $T_a^1(3, 1)$, $T_a^1(4, 1)$ и $T_a^1(5, 1)$ приводят к генерации g^2 -компонент $g_6^2 = cd$, $g_7^2 = b \vee \bar{d}$, $g_8^2 = \bar{b}c$, которые являются лишь кандидатами в первичные g^2 -компоненты.

При использовании оператора композиции T_b^1 имеем $\sup(V_{0..1}^{\bar{b}}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\sup(V_{0..1}^b) = \{1, 2, 4\}$, причем композиции $T_b^1(1, 1)$, $T_b^1(2, 2)$, $T_b^1(4, 4)$ должны быть отброшены как нерезультативные.

Оставшиеся композиции должны быть проверены на первичность генерируемых g^2 -компонент. Сгенерированные ранее кандидаты в первичные g^2 -компоненты могут оказаться не первичными и должны быть удалены.

Окончательный результат сетевого описания порождения первичных g -компонент представляются таблицами 1 и 2.

Таблица 1 — TN16: Описание структуры порождающей сети

v	c/x	v0	v1
0	0	0	0
1	1	1	1
2	a	0	1
3	b	0	1
4	c	0	1
5	d	1	0
6	b	2	1
7	b	0	4
7	b	2	4
8	b	5	1
8	b	5	4
8	d	1	3

v	c/x	v0	v1
8	d	4	3
9	c	2	1
10	d	1	2
11	d	4	0
11	d	4	2
12	a	7	1
12	a	7	6
12	a	7	9
12	b	2	9
13	a	11	1
13	a	11	9
13	a	11	10

v	c/x	v0	v1
13	d	9	2
14	b	11	4
14	b	11	9
14	c	0	8
14	c	2	8
14	c	7	8
14	c	11	8
14	d	4	7
14	d	9	7
15	b	10	1
15	b	10	9
15	d	1	6

v	c/x	v0	v1
15	d	9	6
16	a	14	1
16	a	14	9
16	a	14	15
16	b	13	9
16	c	2	15
16	c	12	15
16	c	13	15
16	d	9	12

Таблиця 2 — TF16: Описание функций порождающей сети

v	gv	$gv/\bar{a}$	gv/a	$gv/\bar{b}$
0	$(\bar{a}(\bar{c} \vee \bar{b}d))$	$(\bar{c} \vee \bar{b}d)$	(0)	$(\bar{a}(\bar{c} \vee d))$
1	$(a \vee c(b \vee \bar{d}))$	$(c(b \vee \bar{d}))$	(1)	$(a \vee c\bar{d})$
2	$(\bar{c} \vee \bar{b}d)$	$(\bar{c} \vee \bar{b}d)$	$(\bar{c} \vee \bar{b}d)$	$(\bar{c} \vee d)$
3	$(\bar{a}cd)$	(cd)	(0)	$(\bar{a}cd)$
4	$(\bar{a}(b \vee \bar{d}))$	$(b \vee \bar{d})$	(0)	$(\bar{a}\bar{d})$
5	$(\bar{a}\bar{b}c)$	$(\bar{b}c)$	(0)	$(\bar{a}c)$
6	$(a\bar{c} \vee ad \vee cd)$	(cd)	$(\bar{c} \vee d)$	$(a\bar{c} \vee ad \vee cd)$
7	$(\bar{a}(\bar{c} \vee d))$	$(\bar{c} \vee d)$	(0)	$(\bar{a}(\bar{c} \vee d))$
8	$(\bar{a}c)$	(c)	(0)	$(\bar{a}c)$
9	$(a \vee b \vee \bar{d})$	$(b \vee \bar{d})$	(1)	$(a \vee \bar{d})$
10	$(a\bar{b} \vee a\bar{c} \vee \bar{b}c)$	$(\bar{b}c)$	$(\bar{b} \vee \bar{c})$	$(a \vee c)$
11	$(\bar{a}(\bar{b} \vee \bar{c}))$	$(\bar{b} \vee \bar{c})$	(0)	$(\bar{a})$
12	$(\bar{c} \vee d)$	$(\bar{c} \vee d)$	$(\bar{c} \vee d)$	$(\bar{c} \vee d)$
13	$(\bar{b} \vee \bar{c})$	$(\bar{b} \vee \bar{c})$	$(\bar{b} \vee \bar{c})$	(1)
14	$(\bar{a})$	(1)	(0)	$(\bar{a})$
15	$(a \vee c)$	(c)	(1)	$(a \vee c)$
16	(1)			

v	gv/b	$gv/\bar{c}$	gv/c	$gv/\bar{d}$	gv/d
0	$(\bar{a}\bar{c})$	$(\bar{a})$	$(\bar{a}\bar{b}d)$	$(\bar{a}\bar{c})$	$(\bar{a}(\bar{c} \vee b))$
1	$(a \vee c)$	(a)	$(a \vee b \vee \bar{d})$	$(a \vee c)$	$(a \vee cb)$
2	$(\bar{c})$	(1)	$(\bar{b}d)$	$(\bar{c})$	$(\bar{b} \vee \bar{c})$
3	$(\bar{a}cd)$	(0)	$(\bar{a}d)$	(0)	$(\bar{a}c)$
4	$(\bar{a})$	$(\bar{a}(b \vee \bar{d}))$	$(\bar{a}(b \vee \bar{d}))$	$(\bar{a})$	$(\bar{a}b)$
5	(0)	(0)	$(\bar{a}\bar{b})$	$(\bar{a}\bar{b}c)$	$(\bar{a}\bar{b}c)$
6	$(a\bar{c} \vee ad \vee cd)$	(a)	(d)	$(a\bar{c})$	$(a \vee c)$
7	$(\bar{a}(\bar{c} \vee d))$	$(\bar{a})$	$(\bar{a}d)$	$(\bar{a}\bar{c})$	$(\bar{a})$
8	$(\bar{a}c)$	(0)	$(\bar{a})$	$(\bar{a}c)$	$(\bar{a}c)$
9	(1)	$(a \vee b \vee \bar{d})$	$(a \vee b \vee \bar{d})$	(1)	$(a \vee b)$
10	$(a\bar{c})$	(a)	$(\bar{b})$	$(a\bar{b} \vee a\bar{c} \vee \bar{b}c)$	$(a\bar{b} \vee a\bar{c} \vee \bar{b}c)$
11	$(\bar{a}\bar{c})$	$(\bar{a})$	$(\bar{a}\bar{b})$	$(\bar{a}(\bar{b} \vee \bar{c}))$	$(\bar{a}(\bar{b} \vee \bar{c}))$
12	$(\bar{c} \vee d)$	(1)	(d)	$(\bar{c})$	(1)
13	$(\bar{c})$	(1)	$(\bar{b})$	$(\bar{b} \vee \bar{c})$	$(\bar{b} \vee \bar{c})$
14	$(\bar{a})$	$(\bar{a})$	$(\bar{a})$	$(\bar{a})$	$(\bar{a})$
15	$(a \vee c)$	(a)	(1)	$(a \vee c)$	$(a \vee c)$
16	(1)				

Из сетевого описания, представленного таблицей 1, теперь необходимо выделить субоптимальные бинарные программы. Эта таблица представляет условие реализации бинарных программ в виде следующей формы булевой функции

$$\begin{aligned}\Phi(0...16) = & (16 \rightarrow 1 \wedge 14 \vee 9 \wedge 14 \vee 14 \wedge 15 \vee 9 \wedge 13 \vee 2 \wedge 15 \vee 12 \wedge 15 \vee 13 \wedge 15 \vee 9 \wedge 12) \wedge \\ & (15 \rightarrow 1 \wedge 10 \vee 9 \wedge 10 \vee 1 \wedge 6 \vee 6 \wedge 9) \wedge (14 \rightarrow 4 \wedge 11 \vee 9 \wedge 11 \vee 0 \wedge 8 \vee 2 \wedge 8 \vee 7 \wedge 8 \vee 8 \wedge 11 \vee 4 \wedge 7 \vee 7 \wedge 9) \wedge \\ & (13 \rightarrow 1 \wedge 11 \vee 9 \wedge 11 \vee 10 \wedge 11 \vee 2 \wedge 9) \wedge (12 \rightarrow 1 \wedge 7 \vee 6 \wedge 7 \vee 7 \wedge 9 \vee 2 \wedge 9) \wedge (11 \rightarrow 0 \wedge 4 \vee 2 \wedge 4) \wedge \\ & ((10 \rightarrow 1 \wedge 2) \wedge (9 \rightarrow 1 \wedge 2) \wedge (8 \rightarrow 1 \wedge 5 \vee 4 \wedge 5 \vee 1 \wedge 3 \vee 3 \wedge 4) \wedge (7 \rightarrow 0 \wedge 4 \vee 2 \wedge 4) \wedge (6 \rightarrow 1 \wedge 2) \wedge \\ & (5 \rightarrow 0 \wedge 1) \wedge (4 \rightarrow 0 \wedge 1) \wedge (3 \rightarrow 0 \wedge 1) \wedge (2 \rightarrow 0 \wedge 1).\end{aligned}$$

Ета форма может быть легко преобразована в конъюнкцию ДНФ или даже в КНФ, к которой можно применить известные методы экономичного нахождения термов эквивалентной сокращенной ДНФ [5], представляющих допустимые решения для бинарных программ. Из этих решений теперь остается отобрать субоптимальные.

Конъюнктивная нормальная форма $\Phi_{\text{КНФ}}(0...16)$ для нашего примера имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{КНФ}}(0...16) = & 16 \wedge (2 \vee 12 \vee 13 \vee 14 \vee \overline{16}) \wedge (1 \vee 9 \vee 15 \vee \overline{16}) \wedge (9 \vee 14 \vee 15 \vee \overline{16}) \wedge \\ & (12 \vee 13 \vee 14 \vee 15 \vee \overline{16}) \wedge (1 \vee 9 \vee \overline{15}) \wedge (6 \vee 10 \vee \overline{15}) \wedge (0 \vee 2 \vee 7 \vee 11 \vee \overline{14}) \wedge \\ & (4 \vee 8 \vee 9 \vee \overline{14}) \wedge (7 \vee 8 \vee 11 \vee \overline{14}) \wedge (1 \vee 9 \vee 10 \vee \overline{13}) \wedge (2 \vee 11 \vee \overline{13}) \wedge \\ & (9 \vee 11 \vee \overline{13}) \wedge (1 \vee 6 \vee 9 \vee \overline{12}) \wedge (2 \vee 7 \vee \overline{12}) \wedge (7 \vee 9 \vee \overline{12}) \wedge (4 \vee \overline{11}) \wedge \\ & (0 \vee 2 \vee \overline{11}) \wedge (1 \vee \overline{10}) \wedge (2 \vee \overline{10}) \wedge (1 \vee \overline{9}) \wedge (2 \vee \overline{9}) \wedge (1 \vee 4 \vee \overline{8}) \wedge (1 \vee 5 \vee \overline{8}) \wedge \\ & (3 \vee 5 \vee \overline{8}) \wedge (4 \vee \overline{7}) \wedge (0 \vee 2 \vee \overline{7}) \wedge (1 \vee \overline{6}) \wedge (2 \vee \overline{6}) \wedge (0 \vee \overline{5}) \wedge (1 \vee \overline{5}) \wedge (0 \vee \overline{4}) \wedge \\ & (1 \vee \overline{4}) \wedge (0 \vee \overline{3}) \wedge (1 \vee \overline{3}) \wedge (0 \vee \overline{2}) \wedge (1 \vee \overline{2}).\end{aligned}$$

Очевидно, что узлы 16, 0, 1 войдут в любое искомое решение. Поэтому можно ограничиться рассмотрением условия реализации $\Phi_{\text{КНФ}}(2...15)$, которое в матричной форме имеет следующий вид.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\hat{\Phi}_{\text{КНФ}}(2...15) =$	1										1	1	1	
								1					1	1
					1				1		1	1	1	1
			1				1	1					0	0
						1	1			1			0	
	1									1		0		
								1		1		0		
											0			
			1											
	1								0					
	1							0						
		1												
			1											
				1										
	1				0									

Инверсия значений этой матрицы представляет функцию $\neg \hat{\Phi}_{\text{ДНФ}}(2...15)$. Тогда поиск субоптимальных решений может быть сведен к поиску двоичных векторов в пространстве $(2...15)$ переменных, которые ортогональны элементам из $\neg \hat{\Phi}_{\text{ДНФ}}(2...15)$ и содержат минимальное число единичных компонент. Эти векторы можно трактовать как описание подмножеств из множества $\{2...15\}$. Для рассматриваемого примера имеем следующее семейство множеств, характеризующих субоптимальные бинарные программы: $\{\{14, 11, 4\}, \{14, 8, 5\}, \{13, 9, 2\}, \{15, 6, 2\}, \{12, 9, 2\}, \{14, 8, 3\}, \{14, 7, 4\}, \{15, 10, 2\}\}$.

Учитывая обязательные элементы 16, 1, 0, получим семейство множеств узлов искомых субоптимальных бинарных программ: $\{\{16, 14, 11, 4, 1, 0\}, \{16, 14, 8, 5, 1, 0\}, \{16, 13, 9, 2, 1, 0\}, \{16, 15, 6, 2, 1, 0\}, \{16, 12, 9, 2, 1, 0\}, \{16, 14, 8, 3, 1, 0\}, \{16, 14, 7, 4, 1, 0\}, \{16, 15, 10, 2, 1, 0\}\}$. По таблице 1 находим полные описания искомых субоптимальных бинарных программ, табличные описания которых приведены на рисунке 1.

v	c/x	v0	v1	v	c/x	v0	v1	v	c/x	v0	v1	v	c/x	v0	v1
16	a	14	1	16	a	14	1	16	b	13	9	16	c	2	15
14	b	11	4	14	c	0	8	13	d	9	2	15	d	1	6
11	d	4	0	8	b	5	1	9	c	2	1	6	b	2	1
4	c	0	1	5	d	1	0	2	a	0	1	2	a	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a)				b)				c)				d)			
v	c/x	v0	v1	v	c/x	v0	v1	v	c/x	v0	v1	v	c/x	v0	v1
16	d	9	12	16	a	14	1	16	a	14	1	16	c	2	15
12	b	2	9	14	c	0	8	14	d	4	7	15	b	10	1
9	c	2	1	8	d	1	3	7	b	0	4	10	d	1	2
2	a	0	1	3	b	0	1	4	c	0	1	2	a	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e)				f)				g)				h)			

Рисунок 1 — Табличное описание субоптимальных бинарных программ

Из рисунка 1 видно, что структура а) подобна структуре г) ($a \sim g$) и, аналогично, ($b \sim f$), ($c \sim e$), ($d \sim h$).

Предложенный алгоритм реализации булевой функции в классе простых бинарных программ представляется перспективным. Для выяснения потенциальных возможностей этого алгоритма требуется проведение дальнейших исследований. Обобщение этого алгоритма на класс сложных бинарных программ потребует дальнейшего его совершенствования с целью ослабления требований к используемым вычислительным ресурсам.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Thayse A. P-functions: new tool for the analysis and synthesis of binary programs / A. Thayse // IEEE Trans. on Computers. — 1981. — Vol. C-30. — № 2. — P. 126–134.
2. Akers S.B. Binary decision diagrams / S.B. Akers // IEEE Trans. on Computers. — 1978. — Vol. C-27. — № 6. — P. 509–516.
3. Кларк Э.М. мл. Верификация моделей программ: Model Checking / Э.М. Кларк, О. Грамберг, Д. Пелед. — М.: МЦНМО, 2002. — 416 с.
4. Ротко В.Ф. Определение значения истинности замкнутой логической формулы в исчислении высказываний / В.Ф. Ротко // Вестник СевГТУ. Сер. Информатика, электроника, связь: сб. науч. тр. — Севастополь, 2006. — Вып. 74. — С. 75–80.
5. Ротко В.Ф. Экономичные преобразования форм представления булевых функций / В.Ф. Ротко // Информационные технологии и информационная безопасность в науке, технике и образовании «ИНФОТЕХ-2007»: матер. междунар. науч.-практ. конф., Севастополь 21–23 сент. 2007 г. — Севастополь, 2007. — Ч. 1. — С. 50–53.

Поступила в редакцию 30.04.2010 г.

Ротко В.Ф. Реалізація булевої функції в класі субоптимальних бінарних програм

Пропонується економічний алгоритм реалізації булевої функції субоптимальною бінарною програмою. У основу алгоритму покладений метод Р-функцій, запропонований А. Тейзом [1]. Економічність алгоритму забезпечується раціонально організованими етапами селекції первинних g-меж і вибору субоптимальних бінарних програм.

Ключові слова: Р-функція, первинна g-межа, субоптимальна бінарна програма.

Rotko V. F. Realization of a boolean function in the class of suboptimal binary programs

An economical algorithm for realization of the Boolean function by suboptimal binary program is proposed. An algorithm is based on the method of P-functions, which was proposed by A. Thayse [1]. Economic efficiency of the algorithm is assured by means of rationally organized stages of selecting primary g-regions and extracting suboptimal binary programs.

Keywords: P-function, prime g-region, suboptimal binary program.