

УДК 004.67

**В.Ю. Карлусов, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет,**ул. Университетская, 33, 99053, г. Севастополь, Украина**E-mail: :root@sevgtu.sebastopol.ua***РАСЧЁТ НЕРЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ В БАЗИСЕ ХАРТЛИ**

*Выведены в общем виде формулы для расчета нерекурсивных цифровых фильтров, основанные на преобразовании Хартли, учитывающие статистические свойства и способы обработки сигнала. Приведены характеристики полученных фильтров для случая низкочастотной фильтрации и процессов с различной степенью хаотичности.*

**Ключевые слова:** цифровые фильтры, преобразование Хартли, обработка сигналов.

В настоящее время интерес к преобразованию Хартли (Hartley R.) определяется следующими моментами [1, 4].

1. Существует симметрия прямого и обратного преобразований между областью действительного переменного и областью изображения.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \text{cas} \omega t d\omega, \\ H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{cas} \omega t dt, \end{cases} \quad (1)$$

где функция  $\text{cas}(x) := \sin(x) + \cos(x)$  — базис преобразования Хартли.

Это позволяет использовать одну и ту же вычислительную процедуру для осуществления преобразований.

2. Легко и формально реализована связь традиционно используемого изображения Фурье с изображением Хартли на основании формул:

$$\begin{cases} F(\omega) = E(\omega) - jO(\omega); \\ H(\omega) = F_R(\omega) - F_I(\omega), \end{cases} \quad (2)$$

в которых  $F_I(\omega) = \Im\{F(\omega)\} = -O(\omega)$  — мнимая составляющая преобразования Фурье, она же нечётная составляющая изображения Хартли;  $F_R(\omega) = \Re\{F(\omega)\} = -E(\omega)$  — действительная составляющая преобразования Фурье, чётная составляющая изображения Хартли.

3. И оригинал, и изображение Хартли являются действительными функциями действительного переменного, в отличие от изображения Фурье, которое, в силу комплексной сопряжённости функции и аргумента является информационно избыточным.

Нерекурсивный цифровой фильтр (НЦФ) является вычислительным устройством, реализующим алгоритм вида

$$z_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{n-k}, \quad (3)$$

где  $\{x_{n-k}\}$ ,  $\{z_n\}$  — отсчёты соответственно входного и выходного процессов;  $\{a_k\}$  — вектор коэффициентов;  $N$  — число коэффициентов. Алгоритм (3) является дискретной моделью известного в электротехнике и теории линейных систем управления интеграла свёртки или интеграла Дюамеля

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau. \quad (4)$$

В формуле (4) используется функция  $h(\tau)$ , называемая аппаратной или весовой, которая определяет способ преобразования сигнала  $x(t)$  в сигнал  $y(t)$  и характеристики преобразователя. Характеристику  $h(\tau)$ , в дальнейшем, будем называть *желаемой* и с её помощью задавать требования к обработке сигнала.

Достоинства и недостатки НЦФ в устройствах измерительной техники подробно освещены в литературе [2]. В частности, применение НЦФ обеспечивает линейность фазовой характеристики, а в случае симметричности коэффициентов НЦФ возможно сделать её практически нулевой.

В [3] изложен подход к расчёту характеристик НЦФ, основанный на минимизации среднего квадрата отклонения процессов  $z(t)$  и  $y(t)$ , описываемых выражениями (3) и (4), на основании которого получены выражения:

$$\mathbf{R}\mathbf{A}_o = \mathbf{W}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sigma_y^2 - \mathbf{A}_o^T \mathbf{W}; \quad (6)$$

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - 2\mathbf{A}^T \mathbf{W} + \mathbf{A}^T \mathbf{R} \mathbf{A}. \quad (7)$$

Выражение (5) — система линейных уравнений для определения вектора  $\mathbf{A}_o = \{a_{ok}\}$  — коэффициентов цифрового фильтра, при которых среднеквадратическое отличие процессов на выходах желаемого и цифрового фильтров минимально. Выражение (6) позволяет определить величину отклонения, а выражение (7) служит для расчёта среднеквадратического отклонения процессов (3) и (4) для НЦФ с произвольными коэффициентами  $\mathbf{A} = \{a_k\}$ .

Величина

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (8)$$

представляет собой дисперсию случайного процесса  $y(t)$  на выходе желаемого линейного фильтра, описываемого (4), где  $B(\tau)$  — автокорреляционная функция случайного процесса  $x(t)$ .

Матрица системы линейных уравнений:

$$\mathbf{R} = [r_{n,k}] = [\{B(n-k)T_0\}], \quad n = 0, \overline{N-1}, \quad k = 0, \overline{N-1}. \quad (9)$$

Вектор свободных членов системы линейных уравнений:

$$\mathbf{W} = [w_n] = [\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau - nT_0) h(\tau) d\tau], \quad n = 0, \overline{N-1}. \quad (10)$$

Вычислим величины (8) и (10) в области изображения Хартли, используя выражение (1) и теорему Хинчина – Винера, модифицированные под базис преобразования  $\text{cas}$  в виде

$$\begin{cases} B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \text{cas } \omega \tau d\omega; \\ S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \text{cas } \omega \tau d\tau. \end{cases}$$

После ряда несложных, хотя и несколько громоздких преобразований, придём к следующим выражениям:

$$\sigma_y^2 = \pi \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) [\tilde{h}_x^2(\omega) + \tilde{h}_x^2(-\omega)] d\omega; \quad (11)$$

$$w_n = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) [\tilde{h}_x(-\omega) \sin(\omega n T_0) + \tilde{h}_x(\omega) \cos(\omega n T_0)] d\omega. \quad (12)$$

В последних выражениях  $\tilde{h}_x(\omega)$  есть изображение Хартли весовой функции  $h(\tau)$ . Выражение (5) совместно с (11) и (12), при заданных параметрах обрабатываемого сигнала  $S_X(\omega)$  и  $B(\tau)$ , а также желаемой характеристики  $h(\tau)$ , позволяют рассчитать коэффициенты. Для расчёта ошибки и сравнения цифровых фильтров между собой по критерию минимума среднеквадратической ошибки, используются (6) и (7). Задавая  $S_X(\omega)$  или  $B(\tau)$  и  $h(\tau)$ , можно получить окончательные выражения для расчётов.

В качестве линейной системы, осуществляющей желаемое преобразование сигнала, выберем некаузальный фильтр нижних частот, обладающий прямоугольной амплитудной и линейной фазовой частотными характеристиками. Его описание в области изображения Хартли имеет вид:

$$\tilde{h}_x(\omega) = \begin{cases} C(\cos \omega \tau_\phi + \sin \omega \tau_\phi), & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c, \end{cases}$$

где  $C$  — коэффициент усиления в полосе пропускания,  $\omega_c$  — граничная частота, называемая частотой среза.

В качестве моделей случайных процессов выберем процессы [5], описываемые так называемыми колоколообразной корреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{\pi}{4} \left( \frac{\tau}{\tau_x} \right)^2}, \quad (13)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия процесса;  $\tau_x$  — его характерный временной масштаб, и экспоненциальной корреляционной функцией:

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_x}}. \quad (14)$$

Выбор процесса (13) объясняется тем, что данный процесс является мало изменяющимся, гладким, дифференцируемым бесчисленное множество раз, а процесс (14) является, напротив, хаотичным. При  $\tau_x$ , стремящимся к нулю, он вырождается в белый шум.

Аналитические преобразования в случае модели (13) дают следующие выражения для расчётов:

$$\sigma_y^2 = \sigma^2 C^2 \operatorname{erf} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \right\}; \quad (15)$$

$$w_n = \sigma^2 C \begin{cases} \frac{2\gamma}{\pi D} \int_0^D e^{-\frac{1}{\pi} \left( \frac{\gamma}{D} x \right)^2} \cos x dx, & D \neq 0, \\ \operatorname{erf} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \right\}, & D = 0. \end{cases} \quad (16)$$

В формуле (16) введены следующие безразмерные обозначения, связывающие параметры модели случайного процесса с характеристиками обрабатывающего устройства:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \omega_c \tau_\phi, \\ \beta &= \omega_c T_0, \\ \gamma &= \omega_c \tau_x, \\ D &= |\alpha - (n - m)\beta| \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

где  $T_0$  — шаг временной дискретизации обрабатываемого процесса; параметр  $m$  — характеризует число тактов запаздывания выходного сигнала НЦФ по отношению к обрабатываемому процессу. Использование параметра  $m$  позволяет строить симметричные импульсные характеристики (коэффициенты) НЦФ при нечётных значениях числа коэффициентов  $N$ .

Для модели (14) расчётные выражения выглядят следующим образом:

$$\sigma_y^2 = \frac{2\sigma^2 C^2}{\pi} \arctan \gamma; \quad (18)$$

$$w_n = \frac{2\sigma^2 C}{\pi} \begin{cases} \frac{\gamma}{D} \int_0^D \frac{\cos x}{1 + \left( \frac{\gamma}{D} x \right)^2} dx, & D \neq 0, \\ \operatorname{erf} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \right\}, & D = 0. \end{cases} \quad (19)$$

В полученных выражениях (18) и (19) использованы ранее введённые обозначения (17).

Используя полученные выражения, были выполнены расчёты и исследованы свойства синтезированных фильтров. Полученные результаты были прогнозируемы и не вошли в противоречие с уже известными [3, 4]. Характеристики НЦФ изображены на рисунках 1 и 2, на которых графическими символами обозначена принадлежность цифровых фильтров к обработке разных классов случайных процессов.

Символом “круг” обозначены характеристики НЦФ, синтезированного для обработки белого шума. Импульсная характеристика такого фильтра дискретно совпадает со значениями функции  $\sin x/x$ .

Символом “квадрат” обозначены характеристики НЦФ, синтезированного для обработки процесса с колоколообразной корреляционной функцией, описываемой выражением (13), полученные на основании использования (15) – (17) совместно с (5) и (6).

Символом “ромб” обозначены характеристики НЦФ, синтезированного для обработки процесса с экспоненциальной корреляционной функцией вида (14), с использованием расчётных выражений (17) – (19).

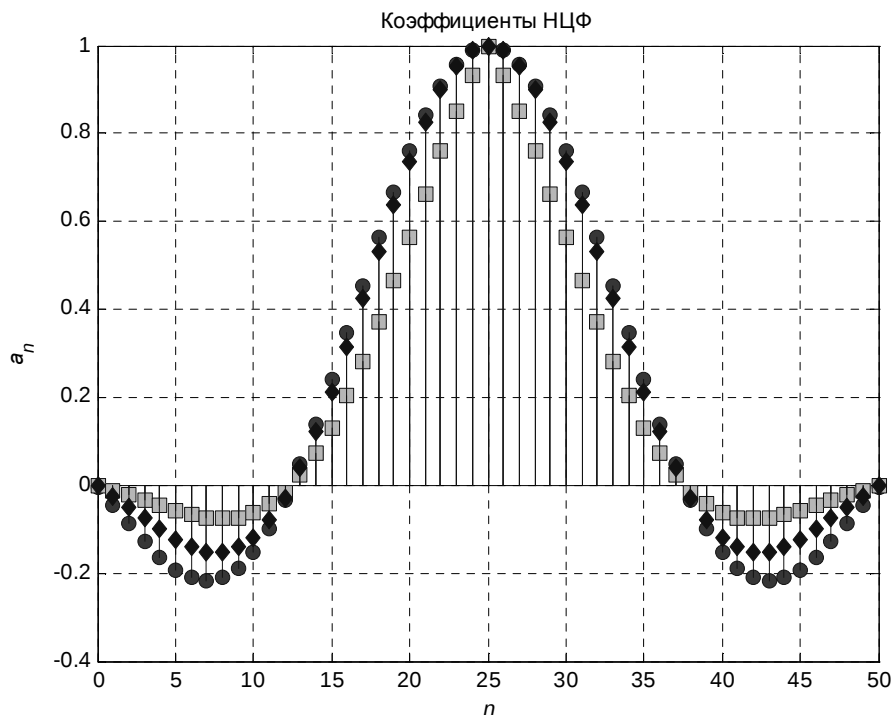


Рисунок 1 — Дискретные импульсные характеристики цифровых фильтров

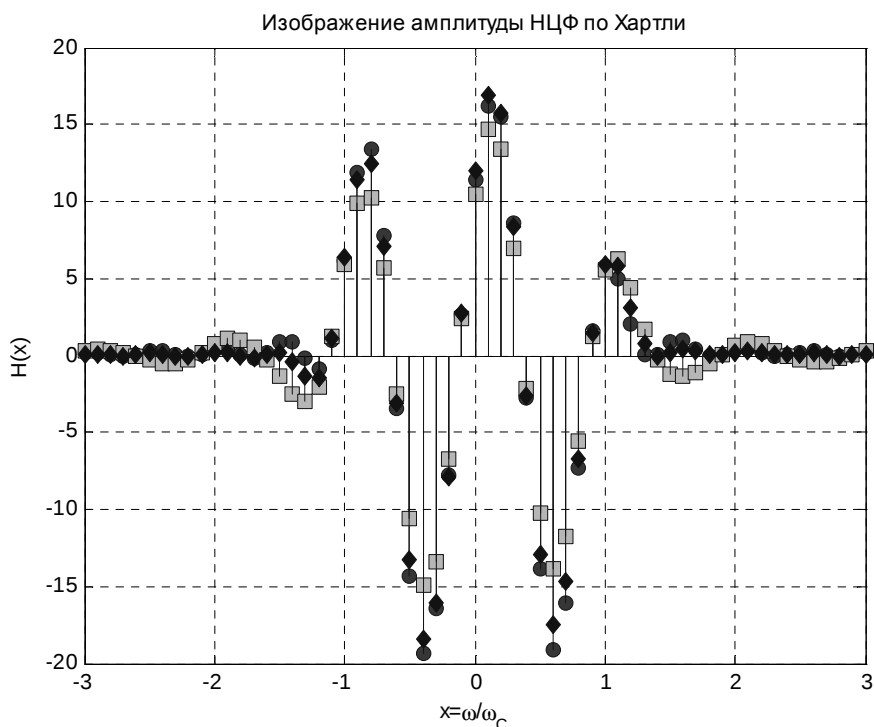


Рисунок 2 — Амплитудные характеристики НЦФ в области изображения Хартли

Представленные результаты были получены при следующих значениях параметров. Коэффициент усиления  $C$  в полосе пропускания ФНЧ положен равным единице. Так же принята равной единице дисперсия случайного процесса  $\sigma^2$  в моделях (13) и (14). Параметр  $\alpha$  полагается нулевым, предполагая отсутствие сдвига фаз в полосе пропускания.

Параметр  $\gamma$  принят равным  $\pi$ , а значение  $\beta=0,25$ . Таким образом, в пределах области концентрации корреляционной функции укладывается порядка 12–13 отсчётов случайного процесса. Следовательно, “длина области” по обе стороны от максимума импульсной характеристики фильтра не превышает 26 отсчётов, поэтому можно обойтись фильтром с числом коэффициентов, равным 51 и запаздыванием в 25 отсчётов.

Из приведённых на рисунке 1 зависимостей видно, что, по сравнению с функцией отсчётов, характеристики НЦФ, учитывающие свойства обрабатываемого процесса, претерпевают деформацию.

1. Для хаотического процесса (14) характерны большие значения коэффициентов, усиливающие влияние в сумме (3) отсчётов случайного процесса в пределах интервала корреляции.

2. Для гладких процессов, изменяющихся медленно, отсчёты которых отличаются незначительно, и часть из которых может, с точки зрения адаптивного сжатия, оказаться избыточными, напротив, в пределах интервала корреляции, коэффициенты меньше, нежели для функции отсчётов.

Характеристики НЦФ в области изображения Хартли, показанные на рисунке 2, являются несимметричными, в отличие от характеристик в области изображения Фурье.

1. Поведение характеристик определяется базисом преобразования  $\cos$ , хотя внешний вид выглядит непривычно и нетрадиционно.

2. Отказ от использования экспоненциальной функции с комплексным показателем, в силу периодичности указанной формы представления в области комплексного переменного, позволил получить непериодические зависимости в области изображения.

Дальнейшее развитие исследований будет направлено на построение цифровых фильтров с адаптивной дискретизацией, при линейной интерполяции их характеристик. Для этого случая применяются ступенчатые импульсные характеристики известных фильтров [2]. Использование линейной аппроксимации приводит, при выполнении расчётов в базисе Фурье, с погрешностью, отнесённой к узлам, к возникновению комплексных коэффициентов фильтра. Применение, в этом случае, базиса Хартли обеспечит удобство аналитических преобразований и позволит получить действительные коэффициенты цифрового фильтра.

#### **Бібліографічний список використовуваної літератури**

1. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли / Р. Брейсуэлл. — М.: Мир, 1990. — 175 с.
2. Гутников В.С. Фильтрация измерительных сигналов / В.С. Гутников. — Л.: Энергоатомиздат, Ленинградское отделение, 1990. — 192 с.
3. Доценко С.В. Синтез алгоритмов цифровой фильтрации с учетом статистических свойств обрабатываемого процесса / С.В. Доценко, В.Ю. Карлусов. // Автометрия. — 1990. — № 2. — С. 81–85.
4. Коханов А.Б. Ортогональная многотоновая модуляция с использованием преобразования Хартли / А.Б. Коханов, В.В. Захаров. // Радиоэлектроника. Изв. высш. учеб. заведений. — 2004. — № 11. — С. 38–44.
5. Купер Дж. Вероятностные методы анализа сигналов и систем / Дж. Купер, К. МакГилем. — М.: Мир, 1989. — 376 с.

*Поступила в редакцию 21.10.2010 г.*

#### **Карлусов В. Ю. Розрахунок нерекурсивних цифрових фільтрів в базисі Хартлі**

Виведені в загальному вигляді формули для розрахунку нерекурсивних цифрових фільтрів, які засновані на перетворенні Хартлі, статистичні, що враховують властивості і способи обробки сигналу. Приведені характеристики одержаних фільтрів для випадку низькочастотної фільтрації і процесів з різним ступенем хаотичності.

**Ключові слова:** цифрові фільтри, перетворення Хартлі, обробка сигналу.

#### **Karlusov V. Yu. The calculation of non-recursion digital filters in the Hartley base**

Formulas for calculation of non-recursion digital filters are developed in a generalized form based on the Hartley transformation taking into account statistical properties and methods of the signal processing. Descriptions of the obtained filters for the case of low frequency filtration and processes with a varying degree of chaotic state are provided.

**Keywords:** digital filters, the Hartley transformation, the signal processing.