

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Севастопольский государственный технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к лабораторно- практическим занятиям по дисциплине
«Моделирование»
для студентов специальности 7.091501
“Компьютерные системы и сети”

часть 1

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ
АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ

Севастополь

2007

УДК 681.33

Методические указания к проведению лабораторно – практических занятий по разделам «Марковские цепи», «Аналитические модели систем массового обслуживания» для студентов направления 0915– «Компьютерная инженерия», дисциплина «Моделирование» /Сост. Мащенко Е.Н., Кирюхин В.В.– Севастополь: СевНТУ, кафедра кибернетики и вычислительной техники, 2007.- 19 с.

Цель указаний – методическая помощь студентам в освоении методов построения моделей с использованием теории марковских цепей и теории массового обслуживания.

Содержание

	Стр
1 ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ	4
2 ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2. СМО С ОТКАЗАМИ. СМО С ОЧЕРЕДЯМИ.	9
3 ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3. СМО С МНОГОМЕРНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ . СМО С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ .	13
4 ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4. СМО С АБСОЛЮТНЫМИ И СМЕШАННЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ .	16
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	19

1. ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1.

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

Цель занятия: освоить методику построения моделей вычислительных систем с помощью аппарата дискретных и непрерывных марковских цепей; научиться строить марковские цепи по содержательному описанию задачи; научиться доказывать неприводимость цепи, находить вероятности состояний системы на некотором шаге, а также финальные вероятности.

Дискретные марковские цепи – это раздел теории случайных процессов, в котором рассматриваются методы получения и исследования вероятностных характеристик случайных процессов без последствия с конечным множеством состояний и дискретным временем.

Непрерывные марковские цепи – это раздел теории случайных процессов, в котором рассматриваются методы получения и исследования вероятностных характеристик случайных процессов без последствия с конечным множеством состояний и непрерывным временем.

На занятии рассматриваются примеры описания дискретных и непрерывных марковских цепей в виде матриц вероятностей переходов и матриц интенсивностей переходов соответственно, а также примеры построения цепи по содержательному описанию системы, построения графов переходов, нахождения финальных вероятностей.

Набор типовых задач для решения на занятии:

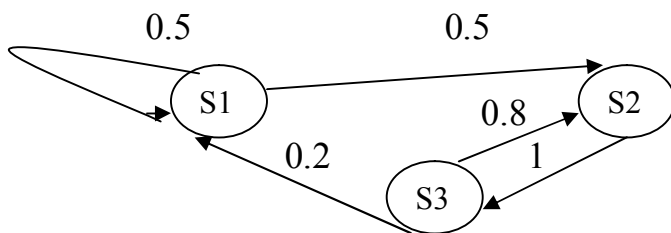
Задача 1.1. Дискретная однородная марковская цепь задана следующей матрицей переходов:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ S_2 & 0 & 0 & 1 \\ S_3 & 0,2 & 0,8 & 0 \end{array}$$

Вектор начального распределения вероятностей $p(0)=(0,0,1)$.

Требуется:

1. построить граф переходов;
2. вычислить $p(3)$ (распределение вероятностей на 3-м шаге) ;
3. доказать неприводимость цепи и вычислить финальные вероятности $p=(p_1, p_2, p_3)$.

Решение**1. Граф переходов****2. Распределение вероятностей на 3-м шаге**

$$p(i) = p(i-1) * P$$

$$p(1) = p(0) * P = (0,0,1)$$

0,5	0,5	0
0	0	1
0,2	0,8	0

$$= (0*0,5 + 0*0 + 1*0,2; 0*0,5 + 0*0 + 1*0,8; 0*0 + 0*1 + 1*0) = (0,2; 0,8; 0)$$

$$p(2) = p(1) * P = (0,2; 0,8; 0)$$

0,5	0,5	0
0	0	1
0,2	0,8	0

$$= (0,2*0,5 + 0,8*0 + 0*0,2; 0,2*0,5 + 0,8*0 + 0*0,8; 0,2*0 + 0,8*1 + 0*0) = (0,1; 0,1; 0,8)$$

$$p(3) = p(2) * P = (0,1; 0,1; 0,8)$$

0,5	0,5	0
0	0	1
0,2	0,8	0

$$= (0,1*0,5 + 0,1*0 + 0,8*0,2; 0,1*0,5 + 0,1*0 + 0,8*0,8; 0,1*0 + 0,1*1 + 0,8*0) = (0,21; 0,69; 0,1)$$

3. Финальные вероятности $p=(p_1, p_2, p_3)$.

$$S1: p_1 = 0.5*p_1 + 0.2*p_3$$

$$S2: p_2 = 0.5*p_1 + 0.8*p_3$$

$$S3: p_3 = p_2$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1 = 0.5*p_1 + 0.2*p_3 \quad 0.5*p_1 = p_1 = 0.4*p_2 \quad p_2 + p_2 + 0.4*p_2 = 1$$

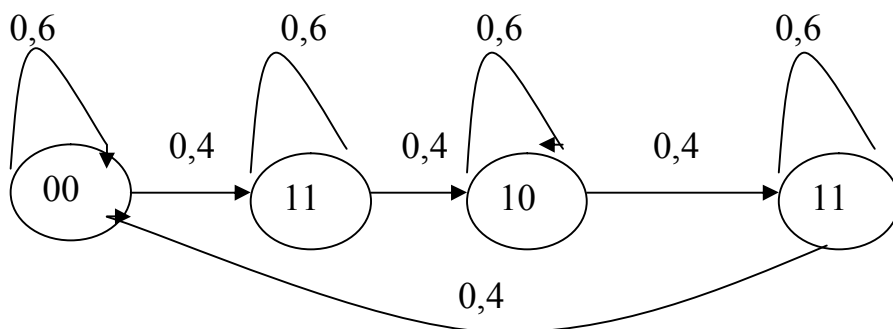
$$2.4*p_2 = 1 \quad p_2 = p_3 \quad p_1 = 0.167$$

$$= 0.417$$

Задача 1.2. Двухразрядный двоичный счетчик в нулевом такте сброшен. Вероятность поступления 1 на его вход в каждом такте одинакова и равна $0,4$. Вычислить финальные вероятности состояний.

Решение

1. Граф переходов



2. Вектор начального распределения вероятностей $p(0)=(1,0,0,0)$.

3. Матрица переходов:

	00(p0)	01(p1)	10(p2)	11(p3)
00(p0)	0,6	0,4	0	0
01(p1)	0	0,6	0,4	0
10(p2)	0	0	0,6	0,4
11(p3)	0,4	0	0	0,6

4. Финальные вероятности состояний

$$S0: p_0 = 0,6 \cdot p_0 + 0,4 \cdot p_3$$

$$S1: p_1 = 0,6 \cdot p_1 + 0,4 \cdot p_0$$

$$S2: p_2 = 0,6 \cdot p_2 + 0,4 \cdot p_1$$

$$S3: p_3 = 0,6 \cdot p_3 + 0,4 \cdot p_2$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Отбрасываем первое уравнение и решаем остальные методом последовательной подстановки:

$$0,4 \cdot p_0 = 0,4 \cdot p_1$$

$$P_0 = p_1$$

$$0,4 \cdot p_1 = 0,4 \cdot p_2$$

$$P_1 = p_2$$

$$0,4 \cdot p_2 = 0,4 \cdot p_3$$

$$P_3 = p_2$$

$$4 \cdot p_0 = 1$$

$$P_0 = 0,25$$

$$P_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 0,25$$

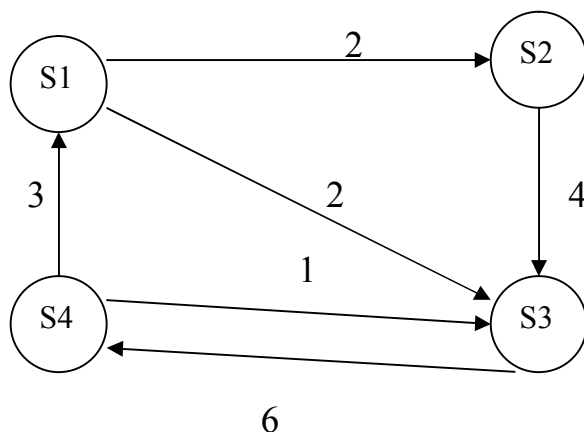
Задача 1.3. Вычислить финальные вероятности состояний следующей непрерывной марковской цепи:



	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0	2	2	0
S_2	0	0	4	0
S_3	0	0	0	6
S_4	3	0	1	0

Решение

1. Граф переходов



2. Финальные вероятности (система уравнений Колмогорова).

$$S1: (2 + 2) \cdot p_1 = 3 \cdot p_4$$

$$S2: 4 \cdot p_2 = 2 \cdot p_1$$

$$S3: 6 \cdot p_3 = 2 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + p_4$$

$$S4: (3 + 1) \cdot p_4 = 6 \cdot p_3$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Отбрасываем уравнение для p_3 как самое сложное и решаем остальные методом последовательной подстановки (выражаем все вероятности через p_1):

$$p_4 = 4/3 \cdot p_1$$

$$P_2 = 0,153$$

$$p_2 = 1/2 \cdot p_1$$

$$P_3 = 0,136$$

$$p_3 = 4/6 \cdot p_4 = 4/6 \cdot 4/3 \cdot p_1 = 4/9 \cdot p_1$$

$$P_4 = 0,406$$

$$p_1 \cdot (1 + 1/2 + 4/9 + 4/3) = 1$$

$$P_1 = 0,305$$

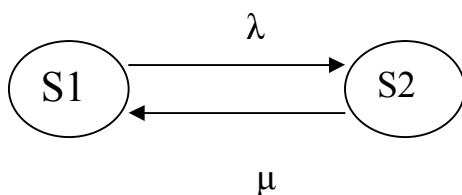
$$\text{Проверка : } p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Задача 1.4. ЭВМ отказывает с интенсивностью λ раз в час и восстанавливается с интенсивностью μ раз в час. Определить финальные вероятности пребывания ЭВМ в работоспособном и неисправном состояниях.

Решение

Пусть S_1 – состояние исправности, S_2 – состояние отказа.

1. Граф переходов



3. Финальные вероятности (система уравнений Колмогорова).

$$S1: \lambda * p1 = \mu * p2$$

$$S2: \mu * p2 = \lambda * p1$$

$$p1 + p2 = 1$$

$$p1 = \mu / (\lambda + \mu) \quad p2 = \lambda / (\lambda + \mu)$$

Домашнее задание:

- решить задачу 1.2 при вероятности поступления 1 , равной $0,3$;
- решить задачу 1.4 при $\lambda = 3$, $\mu = 6$;

Задание на лабораторную работу №1.

Задача 1.5. В понедельник ЭВМ исправна и за сутки с вероятностью $P_{\text{отк}}$ она выходит из строя, но за следующие сутки восстанавливается с вероятностью $P_{\text{восст.}}$. Определить вероятность того, что в субботу машина будет исправна, и вычислить финальные вероятности ее состояний.

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Варианты задания 1.5:

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_{\text{отк}}$	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2	0,21
$P_{\text{восст}}$	0,8	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,9	0,91

Задача 1.6. Программист разрабатывает программный модуль. Работа заключается в циклической смене трех стадий: П - программирование, О - отладка и Р - решение контрольного примера. Переходы к стадиям производятся с интенсивностью λ , μ и ν соответственно. Вычислить финальные вероятности стадий модуля. Рассчитать значения вероятностей для своего варианта.

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Варианты задания 1.6:

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4
μ	3	4	5	1	2	3	5	3	4	3	2	1
v	6	7	8	2	3	4	1	2	3	5	6	4

2. ЛАБОРАТОРНО - ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2.

СМО С ОТКАЗАМИ И ОЧЕРЕДЯМИ

Цель занятия: освоить методику построения моделей СМО с отказами и очередями с помощью аппарата теории массового обслуживания; научиться определять вероятностные, временные и др. характеристики эффективности подобных систем.

СМО с отказами - это раздел теории массового обслуживания, в котором рассматриваются методы получения и исследования характеристик эффективности систем обслуживания, в которых возможен отказ в обслуживании.

СМО с очередями - это раздел теории массового обслуживания, в котором рассматриваются методы получения и исследования характеристик эффективности систем обслуживания, в которых возможно ожидание заявкой обслуживания в очереди.

На занятии рассматриваются примеры построения математических моделей СМО с отказами и очередями по содержательному описанию системы, нахождения вероятностных, временных и др. характеристик эффективности подобных систем.

Набор типовых задач для решения на занятии:

Задача 2.1. На четырехканальную АТС поступает простейший поток вызовов с $\lambda=3\text{мин}^{-1}$. При приеме вызова разговор продолжается случайное экспоненциальное время, в среднем равное 2 мин.

Вычислить:

- 1) вероятность отказа при наборе номера;
- 2) вероятность полного простоя АТС.

Решение.

По формулам Эрланга имеем при $\rho = \lambda \cdot v = 3 \cdot 2 = 6$

$$1) P_{\text{отк}} = P_4 = \rho^4 / 4! \cdot A = 0,47$$

где $A = [1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/3! + \rho^4/4!]^{-1}$

$$2) P_{\text{прост}} = P_0 = [1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/3! + \rho^4/4!]^{-1};$$

или можно так:

$$P_{\text{прост}} = P_{\text{отк}} / (\rho^4/4!) = P_0 = 0,009.$$

Задача 2.2. Определить загрузку ρ СМО М/М/Н/0, при которой вероятность простоя равна вероятности занятости одного канала.

Решение.

$$P_{\text{прост}} = P_0 = [1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/3! + \dots + \rho^N/N!]^{-1};$$

$$P_1 = \rho^1/1! * [1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/3! + \dots + \rho^N/N!]^{-1};$$

$$P_{\text{прост}} = P_1 \rightarrow \rho = 1$$

Задача 2.3. Два сотрудника ГАИ фиксируют простейший поток с интенсивностью $\lambda = 10 \text{ час}^{-1}$ поток нарушений на транзитной магистрали. Сотрудник фиксирует нарушение и наказывает водителя в среднем за 12 минут. Определить:

- 1) Количество K безнаказанных водителей за смену $T = 8$ часов;
- 2) Время простоя $T_{\text{прост}}$ сотрудников за смену в человеко – часах.

Решение.

Определим следующие состояния СМО:

S_0 – простой сотрудников ГАИ;

S_1 – работает один сотрудник;

S_2 – работают оба сотрудника (появившийся нарушитель получает «отказ в обслуживании» и проезжает безнаказанно).

$$1) \rho = \lambda * \nu = 10 * 12/60 = 2$$

$$P_{\text{отк}} = P_2 = \rho^2/2! * [1 + \rho + \rho^2/2]^{-1} = 0,4 ;$$

$$K = T * \lambda * P_{\text{отк}} = 8 * 10 * 0,4 = 32 \text{ безнаказанных водителей};$$

$$2) T_{\text{прост}} = 2T * P_0 + T * P_1 = T * (2P_0 + P_1) = T * (2 * 1 + \rho) * [1 + \rho + \rho^2/2]^{-1} =$$

$$= 8 * (2 + 2) / (1 + 2 + 2) = 6,4 \text{ чел/час.}$$

Задача 2.4. Оценить среднее время ожидания клиентом международной телефонной станции (МТС) разговора в направлении Н, если число заказов в час равно 18, средняя длительность разговора – 5 минут, число линий в направлении Н равно 2.

Решение

Загрузка МТС в направлении Н равна $\rho = \lambda * v = 18 \text{ час}^{-1} * 1/12 \text{ час} = 1.5$, что меньше числа линий, 2, так что стационарный режим существует.

Искомое время W равно, по формуле Литтла,

$$W = L / \lambda, \quad \text{где } L - \text{средняя длина очереди.}$$

Ее можно оценить по формуле для $M/M/N/\infty$ при $N = 2$:

$$L = (R^N * \rho * P_0) / (N! * (1 - \rho)^2),$$

$$\text{Где } P_0 = \left[\sum_{i=0}^N R^i / i! + R^{N+1} / (N! (N - R)) \right]^{-1}$$

Подставляя сюда $N = 2$, $R = 1.5$, получим $\rho = R/N = 0.75$

$$P_0 = [1 + 1.5 + 1.5^2 / 2 + 1.5^3 / (2 * (2 - 1.5))]^{-1} = 1/7;$$

$$L = (1.5^3 * 0.75) / (2 * (1 - 0.75)^2) * 1/7 = 1.93;$$

$$\text{так что } W = 1.93 / 18 = 0.107 \text{ (час)} = 6.43 \text{ мин.}$$

Задача 2.5. Два сотрудника ГАИ дежурят на автомагистрали, по которой следует простейший поток машин с интенсивностью 100 час^{-1} . Правила нарушает каждый 10-й водитель. Один сотрудник фиксирует нарушения и ставит автомобили в очередь, другой оформляет нарушения за случайное время в среднем 4 минуты. Определить:

- 1) Среднее время задержки нарушителя у поста ГАИ;
- 2) Среднюю длину цепочки машин у поста.

Решение.

Имеем СМО $M/M/1/\infty$ с $\lambda = 100 * 0.1 = 10 \text{ час}^{-1}$, $v = 4 \text{ мин} = 0.067 \text{ час}$, так что $\rho = \lambda * v = 0.67 < 1$ и стационарный режим существует.

- 1) $u = v / (1 - \rho) = 4 / (1 - 0.67) = 12 \text{ мин} = 1/5 \text{ часа}$
- 2) По формуле Литтла $m = \lambda * u = 10 * 1/5 = 2 \text{ машины}$

Домашнее задание:

- 1) Определить загрузку ρ СМО М/М/Н/0, при которой вероятность отказа равна вероятности занятости одного канала.
- 2) В условиях задачи 2.3 при какой интенсивности потока нарушений % безнаказанных водителей не превысит 10%?
- 3) В условиях задачи 2.4 число заказов возросло до 23 в час, т.е. примерно на 30%. Во сколько раз при этом увеличилось время ожидания разговора?

Задание на лабораторную работу №2.

Задача 2.6. Радиолокационная станция имеет N каналов наведения истребителей на цель. Время наведения распределено по экспоненциальному закону со средним t минут. Поток целей простейший, в среднем R бомбардировщиков в M минут. Определить:

- 1) Вероятность пропуска цели системой наведения;
- 2) Вероятность поражения цели, если надежность попадания истребительных ракет - $P_{\text{поп}}$

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Варианты задания 2.6:

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3	4	5
T	2	1.5	1	1	1.5	2	1.5	1	2	2	1	1.5
R	3	4	5	3	5	4	3	4	5	3	4	5
M	2	2	2	1	1.5	2	2	1.5	2	2.5	2	2
$P_{\text{поп}}$	0.99	0.98	0.97	0.97	0.98	0.99	0.98	0.97	0.99	0.97	0.99	0.98

Задача 2.7. Студенческий ВЦ располагает N ПЭВМ, каждая из которых занимается студентом на случайное время, равное в среднем v часа. Поток подходов к ПЭВМ – простейший, интенсивностью λ подходов в час. Вычислить среднее время пребывания студента в ВЦ.

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Варианты задания 2.7:

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3	4	5
λ	5	6	8	4	5	7	6	4	6	3	7	5
v	0.5	0.6	0.5	0.6	0.7	0.6	0.4	0.8	0.7	0.8	0.5	0.8

3. ЛАБОРАТОРНО- ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3.

СМО С МНОГОМЕРНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ . СМО С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ .

Цель занятия: освоить методику построения моделей СМО с многомерным входящим потоком и СМО с относительными приоритетами с помощью аппарата теории массового обслуживания; научиться определять вероятностные, временные и др. характеристики эффективности подобных систем.

СМО с многомерным входящим потоком - это раздел теории массового обслуживания, в котором рассматриваются методы получения и исследования характеристик эффективности систем обслуживания, в которых многомерный входящий поток заявок образуется с помощью суперпозиции нескольких входящих потоков.

СМО с относительными приоритетами - это раздел теории массового обслуживания, в котором рассматриваются методы получения и исследования характеристик эффективности систем обслуживания, в которых возможно преимущество (приоритет) в обслуживании заявки, причем процесс обслуживания ранее пришедшей заявки более низкого приоритета не прерывается.

На занятии рассматриваются примеры построения математических моделей СМО с многомерным входящим потоком и СМО с относительными приоритетами по содержательному описанию системы, нахождения вероятностных, временных и др. характеристик эффективности подобных систем.

Набор типовых задач для решения на занятии:

Задача 3.1. По информационному каналу с пропускной способностью 2400 бит/с передаются сообщения 3-х типов: 1) управляющие пакеты постоянной длины 6 байт с интенсивностью 2.5 с^{-1} ; 2) диалоговые сообщения экспоненциальной длины со средним 60 байт; 3) телеграммы равномерно-случайной длины в диапазоне 600...1800 бит. Интенсивность диалога равна 2 с^{-1} , а телеграмм – вчетверо меньше.

Вычислить среднюю задержку в канале сообщений всех трех типов.

Решение.

Имеем СМО M/G/1 с тремя потоками: 1) управляющие пакеты; 2) диалоговые сообщения; 3) телеграммы.

Прежде всего необходимо проверить, существует ли стационарный режим, т. е. выполняется ли условие $R < 1$, где $R = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$, и $\rho_i = \lambda_i * v_i$. У нас $\lambda_1 = 2.5 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_2 = 2 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_3 = \lambda_2/4 = 0.5 \text{ с}^{-1}$. Вычислим v_i , $i = 1, 2, 3$.

$$v_1 = (6 * 8 \text{ бит}) / 2400 \text{ бит/с} = 48 \text{ с} / 2400 = 0,02 \text{ с}.$$

$$v_2 = (60 * 8 \text{ бит}) / 2400 \text{ бит/с} = 480 \text{ с} / 2400 = 0,2 \text{ с.}$$

$$v_3 = ((600 + 1800) / 2) / 2400 = 0,5 \text{ с.}$$

$$\text{Тогда } R = \lambda_1 * v_1 + \lambda_2 * v_2 + \lambda_3 * v_3 = 2,5 * 0,02 + 2 * 0,2 + 0,5 * 0,5 = 0,7$$

$R < 1$, стационарный режим существует.

Искомые задержки равны $u_i = w + v_i$, $i = 1, 2, 3$,

где w - среднее время ожидания передачи (одинаково для всех типов сообщений). Определим w по формуле

$$W = \frac{1}{2(1-R)} \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i^{(2)}, \quad (1)$$

где $v_i^{(2)}$ – второй начальный момент времени передачи сообщения i -го типа.

Эти моменты равны:

- для постоянной «случайной» величины

$$v_1^{(2)} = v_1^2 = 0,02^2 = 0,004 \text{ (с}^2\text{)}$$

- для экспоненциальной случайной величины

$$v_2^{(2)} = 2 v_2^2 = 2 * 0,2^2 = 0,08 \text{ (с}^2\text{)}$$

- для равномерной случайной величины

$$v_3^{(2)} = \int_{t_1}^{t_2} t^2 / (t_2 - t_1) dt = t^3 / 3(t_2 - t_1) \Big|_{t_1}^{t_2} = (t_2^3 - t_1^3) / 3(t_2 - t_1),$$

где t_1 и t_2 – границы времени передачи

$$t_1 = 600/2400 = 0,25 \text{ с}; \quad t_2 = 1800/2400 = 0,75 \text{ с};$$

так что

$$v_3^{(2)} = (0,75^3 - 0,25^3) / 3(0,75 - 0,25) = 0,271 \text{ (с}^2\text{)}$$

Подставляя вычисленные данные в (1), получим:

$$W = \frac{1}{2(1-0,7)} (2,5 * 0,0004 + 2 * 0,08 + 0,5 * 0,271) = 0,5 \text{ с}$$

так что

$$u_1 = w + v_1 = 0,5 + 0,02 = 0,52 \text{ с}$$

$$u_2 = w + v_2 = 0,5 + 0,2 = 0,7 \text{ с}$$

$$u_3 = w + v_3 = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ с}$$

Задача 3.2. Решить задачу 3.1 при условии, что управляющим пакетам, диалоговым сообщениям и телеграммам назначены 1-й, 2-й и 3-й относительные приоритеты соответственно. Сравнить результаты решения задач 3.1 и 3.2.

Решение.

Назначение приоритетов не влияет на загрузку R и остаточное время T_0 . Следовательно, в СМО стационарный режим сохраняется. Времена ожидания w_k , $k = 1, 2, 3$ вычисляем по формуле

$$w_k = T_0 / ((1 - R_{k-1})(1 - R_k)),$$

$$\text{где } T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i^{(2)} = \frac{1}{2} (2.5 * 0.0004 + 2 * 0.08 + 0.5 * 0.271) \approx 0.15 \text{ с}$$

$$R_1 = \lambda_1 * v_1 = 2.5 * 0.02 = 0.05$$

$$R_2 = \lambda_1 * v_1 + \lambda_2 * v_2 = 0.5 * 0.02 + 2 * 0.2 = 0.45$$

$$R = \lambda_1 * v_1 + \lambda_2 * v_2 + \lambda_3 * v_3 = 0.5 * 0.02 + 2 * 0.2 + 0.5 * 0.5 = 0.7$$

$$W_1 = T_0 / (1 - R_1) = 0.15 / (1 - 0.05) = 0.158 \text{ с}$$

$$W_2 = T_0 / ((1 - R_1)(1 - R_2)) = 0.15 / ((1 - 0.05)(1 - 0.45)) \approx 0.29 \text{ с}$$

$$W_3 = T_0 / ((1 - R_2)(1 - R_3)) = 0.15 / ((1 - 0.45)(1 - 0.7)) \approx 0.9 \text{ с}$$

Так что

$$u_1 = w_1 + v_1 = 0.158 + 0.02 = 0.178 \text{ с}$$

$$u_2 = w_2 + v_2 = 0.29 + 0.2 = 0.49 \text{ с}$$

$$u_3 = w_3 + v_3 = 0.9 + 0.5 = 1.4 \text{ с}$$

Сравнивая с 3.1, видим, что время u_1 уменьшилось примерно в 3 раза, но u_3 увеличилось более чем в 2.5 раза.

Домашнее задание: решить задачи 3.1, 3.2 для случая, если длина сообщений всех типов распределена по экспоненциальному закону с теми же средними значениями. Результаты решения сравнить.

Задача 3.3. Загрузка СМО тремя идентичными по параметрам потоками равна 0.9. Вычислить, во сколько раз времена ожидания для потоков 2-го и 3-го приоритетов больше времени для 1-го потока в режиме обслуживания с относительными приоритетами.

Решение.

Пусть ρ – загрузка СМО каким-либо из 3-х потоков : $\rho = R/3 = 0.3$. Тогда

$$W_1 = T_0 / (1 - \rho)$$

$$W_2 = T_0 / ((1 - \rho)(1 - 2\rho))$$

$$W_3 = T_0 / ((1 - 2\rho)(1 - 3\rho))$$

$$W_2 / W_1 = (T_0 / ((1 - \rho)(1 - 2\rho))) / ((1 - \rho) / T_0) = 1 / (1 - 2\rho) = 1 / (1 - 2 * 0.3) = 2.5$$

$$W_3 / W_1 = (T_0 / ((1 - 2\rho)(1 - 3\rho))) / ((1 - \rho) / T_0) = (1 - \rho) / ((1 - 2\rho)(1 - 3\rho)) = 0.7 / (0.4 * 0.1) = 17.5$$

Задание на лабораторную работу №3.

Задача 3.4. Таможенный контроль на въезде в зону проверяет простейший поток из легковых машин, грузовых машин и автобусов, поступающих с интенсивностями λ_1 , λ_2 , λ_3 час⁻¹ за случайное время, равномерно распределенное от a_1 до b_1 секунд для легковых и грузовых машин и от a_2 до b_2 минут для автобусов. Вычислить среднее время задержки транспорта каждого типа у таможни.

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

Варианты задания 3.4:

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ_1	60	50	55	60	50	55	60	50	55	60	50	55
λ_2	12	10	15	10	15	25	12	16	15	10	10	15
λ_3	6	5	6	6	10	5	5	6	5	6	5	6
a_1	6	10	15	10	8	12	10	10	6	8	10	6
b_1	30	30	25	30	30	24	30	30	20	20	20	25
a_2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2
b_2	5	6	7	6	5	6	7	6	9	8	9	6

Задача 3.5. Решить задачу 3.4 при условии, что автобусам назначен относительный приоритет перед легковыми и грузовыми машинами. Сравнить результаты решения задач 3.4 и 3.5.

Решить задачу с использованием среды Mathcad.

4. ЛАБОРАТОРНО - ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4.

СМО С АБСОЛЮТНЫМИ И СМЕШАННЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ .

Цель занятия: освоить методику построения моделей СМО с абсолютными и смешанными приоритетами с помощью аппарата теории массового обслуживания; научиться определять вероятностные, временные и др. характеристики эффективности подобных систем.

СМО с абсолютными и смешанными приоритетами - это раздел теории массового обслуживания, в котором рассматриваются методы получения и исследования характеристик эффективности систем обслуживания, в которых возможно преимущество (приоритет) в обслуживании заявки, причем процесс обслуживания ранее пришедшей заявки более низкого приоритета прерывается для абсолютного приоритета, либо используется смешанная дисциплина обслуживания.

На занятии рассматриваются примеры построения математических моделей СМО с абсолютными и смешанными приоритетами по содержательному описанию системы, нахождения временных характеристик эффективности подобных систем.

Набор типовых задач для решения на занятии:

Задача 4.1. Каждый из 300 кассиров запрашивает центральный компьютер системы резервирования и продажи билетов в среднем 1 раз в 5 минут. Компьютер обслуживает запросы за случайное время, распределенное по экспоненциальному закону со средним 0.8 с, если он исправен. Однако из-за отказов в среднем 1 раз в час он «зависает» на 3 минуты.

Определить среднее время ответа компьютера кассиру.

Решение.

Имеем СМО с двумя потоками. Первый поток – абсолютного приоритета (отказы) интенсивностью $\lambda_1 = 1 \text{ ч}^{-1} = 1/60 \text{ мин}^{-1}$ и средним временем обслуживания $v_1 = 3 \text{ мин}$. Второй поток - интенсивностью $\lambda_2 = 300/(5*60) = 1 \text{ с}^{-1}$ и с $v_2 = 0.8 \text{ с}$. Необходимо найти u_2 в СМО с абсолютными приоритетами.

$$u_2 = w_2 + v_2,$$

$$W_2 = \frac{v_2 * R_1}{(1-R_1)} + \frac{1}{(1-R_1)(1-R)} \cdot \sum_{i=1}^2 \lambda_i v_i^2, \quad (1)$$

где $R_1 = \lambda_1 * v_1 = 3/60 = 0.05$; $R = R_1 + \rho_2 = 0.05 + 1*0.8 = 0.85$

Подставляя в (1), имеем:

$$W_2 = \frac{0.8 * 0.05}{(1-0.05)} + \frac{(1/3600)*(180)^2 + 1*0.64}{(1-0.05)(1-0.85)} \approx 67.7 \text{ с}$$

$$u_2 = 67.7 + 0.8 = 68.5 \text{ с}$$

Задача 4.2. Вычислительная система обслуживает простейший, интенсивностью 1 мин^{-1} , поток запросов пользователя, запрашивая на решение в среднем 36 секунд. Эта работа может быть прервана запросами от оператора вычислительной системы, следующими в среднем через 10 минут, и обрабатываемыми за 6 секунд. В свою очередь, эти задачи могут прерываться сигналами от схем контроля вычислительной системы, поступающими с интенсивностью $0,6 \text{ час}^{-1}$, а неисправность устраняется в среднем за 10 минут. Определить среднее время ответа вычислительной системы оператору и пользователю.

Решение.

Имеем СМО с 3-мя потоками и абсолютными приоритетами. Приоритет 1 – это сигналы от схем контроля,

$\lambda_1 = 0,6 \text{ час}^{-1} = 0,01 \text{ мин}^{-1}$, $v_1 = 10 \text{ мин}$, так что $R_1 = \lambda_1 v_1 = 0,1$

Приоритет 2 – запросы оператора, $\lambda_2 = 0,1 \text{ мин}^{-1}$, $v_2 = 0,1 \text{ мин}$, так что $R_1 = 0,1 + \lambda_2 v_2 = 0,11$

Приоритет 3 – запросы пользователей, $\lambda_3 = 1 \text{ мин}^{-1}$, $v_3 = 36 \text{ сек} = 0,6 \text{ мин}$, так что $R_3 = 0,11 + \lambda_3 v_3 = 0,71$.

Искомые величины:

$$u_2 = w_2 + v_2, \quad u_3 = w_3 + v_3,$$

$$W_2 = \frac{v_2 * R_1}{(1-R_1)} + \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2}{(1-R_1)(1-R_2)} = \frac{0,1 * 0,1}{1-0,1} + \frac{0,01 * 100 + 0,1 * 0,01}{(1-0,11)(1-0,1)} = \frac{0,01}{0,9} +$$

$$+ \frac{1+0,001}{0,89 * 0,9} = 1,26 \text{ мин}$$

Так что $u_2 = 1,36 \text{ мин}$

$$W_3 = \frac{v_3 * R_2}{(1-R_2)} + \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2}{(1-R_3)(1-R_2)} = \frac{0,11 * 0,6}{1-0,11} + \frac{0,01 * 100 + 0,1 * 0,01 + 1 * 0,36}{(1-0,71)(1-0,11)} =$$

$$= \frac{0,066}{0,89} + \frac{1+0,001+0,36}{0,29 * 0,89} = 5,38 \text{ (мин)}$$

и $u_3 = 0,6 + 5,38 \approx 6 \text{ минут}$

Задача 4.3. Отправка телеграммы-молнии имеет абсолютный приоритет перед срочными и обычными телеграммами, а срочной – относительный приоритет перед обычными. Определить времена ожидания отправки телеграмм всех видов, если поток обычных телеграмм следует с интенсивностью $1/3 \text{ мин}^{-1}$, срочных – $1/10 \text{ мин}^{-1}$ и молний – 1 час^{-1} , а оператор отправляет телеграмму в среднем за 2 минуты.

Решение.

У нас $\lambda_1 = 1/60 \text{ мин}^{-1}$, $\lambda_2 = 1/10 \text{ мин}^{-1}$, $\lambda_3 = 1/3 \text{ мин}^{-1}$, $v_1 = v_2 = v_3 = 2 \text{ мин}$, так что $R_1 = \lambda_1 * v_1 = 0,033$;

$$R_1 = 0,033 + 1/10 * 2 = 0,233;$$

$$R_3 = 0,233 + 1/3 * 2 = 0,9.$$

$$W_1 = \frac{v_1 * R_1}{(1-R_1)} = \frac{0,033 * 2}{1-0,033} = 0,07 \text{ (мин)}$$

$$W_2 = \frac{v_2 * R_1}{(1-R_1)} + \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2}{(1-R_1)(1-R_2)} = \frac{2*0,033}{1-0,033} + \frac{4*(1/60+1/10+1/3)}{(1-0,33)(1-0,233)} = 2,5 \text{ (мин)}$$

$$W_3 = \frac{v_3 * R_2}{(1-R_2)} + \frac{v_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}{(1-R_2)(1-R_3)} = 23,5 \text{ (мин)}$$

Задача 4.4. Загрузка СМО заявками первого типа втрое больше загрузки заявками второго. После введения приоритета время ожидания заявок первого типа уменьшилось в 2 раза. Во сколько раз увеличилось время ожидания для заявок 2 типа?

Решение.

Используя закон сохранения времени ожидания для СМО без потерь, имеем:
До введения приоритета: $3\rho_w + \rho_w = \text{const}$

после введения приоритета: $3/2\rho_w + x\rho_w = \text{const}$

Откуда:

$$3(\rho_w) + (\rho_w) = 3/2(\rho_w) + x(\rho_w),$$

или $3+1 = 3/2 + x \rightarrow x=5/2=2,5$.

Домашнее задание.

- 1) Решить задачи 4.1 и 4.2 в предположении абсолютной надежности вычислительной системы и сравнить результаты решения.
- 2) После введения приоритетов время ожидания для заявки 1-го типа сократилось на час. На сколько часов при этом увеличилось время ожидания заявок 2-го типа, если загрузка СМО заявками 1-го типа втрое больше загрузки 2-го?

Библиография

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. - М.: Радио и связь, 1983.
2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: Высшая школа, 2001.
3. Майоров С.А. Основы теории вычислительных систем – М.: Высшая школа, 1978.- 408 с.