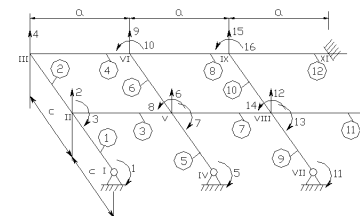


Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СУДОВЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Методические указания

к выполнению лабораторных работ № 1–3 по дисциплине
"Строительная механика и прочность корабля"
для студентов специальности 7.100201
"Корабли и океанотехника"
всех форм обучения

Севастополь
2005



УДК 629.123

Методические указания к выполнению лабораторных работ № 1–3 по дисциплине "Строительная механика и прочность корабля" / Сост. В.С.Игнатович, М.Г.Балашов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005.–44 с.

Целью методических указаний является оказание методической помощи студентам специальности 7.100201 при выполнении лабораторных работ по дисциплине "Строительная механика и прочность корабля". Посвящены исследованию напряженного состояния судовых стержневых систем методом конечных элементов (МКЭ) с применением персональных компьютеров (ПК).

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры Океанотехники и кораблестроения 25.05.2005 г., протокол № 7.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: канд.техн.наук, доцент И.И. Рыбалов

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Постнов В.А. Строительная механика корабля и теория упругости / В.А.Постной, П.П.Сулов: Т.4. – Л.: Судостроение, 1987.–268 с.
2. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций/В.А. Постнов. – Л.: Судостроение, 1977.–346 с.
3. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов/И.Ф.Образцов и др. – М.: Высш. шк., 1985.–138 с.

$$M_{11-9} = k_{41} * x_{15} + k_{42} * x_{16} =$$

$$= [37,5 * 0,5 - 30 * 0,5] * 10^2 = 375$$

Стрингер. Элементы 3,11.

$$N_{2-5} = k_{11} * x_2 + k_{13} * x_6 + k_{14} * x_8 =$$

$$= (52,2 * 2,5 - 52,2 * 2,0 - 62,4 * 0,4) * 10^2 = 114$$

$$M_{2-5} = k_{21} * x_2 + k_{23} * x_6 + k_{24} * x_8 =$$

$$= (62,4 * 2,5 - 62,4 * 2,0 - 50 * 0,4) * 10^2 = 1120$$

$$N_{5-2} = k_{31} * x_2 + k_{33} * x_6 + k_{34} * x_8 =$$

$$= [(-52,2) * 2,5 + 52,2 * 2,0 + 62,4 * 0,4] * 10^2 = -114$$

$$M_{5-2} = k_{41} * x_2 + k_{43} * x_6 + k_{44} * x_8 =$$

$$= (62,4 * 2,5 - 62,4 * 2,0 - 100 * 0,4) * 10^2 = -880$$

$$N_{8-10} = k_{11} * x_{12} + k_{12} * x_{14} =$$

$$= (52,2 * 0,9 - 62,4 * 0,5) * 10^2 = 1578$$

$$M_{8-10} = k_{21} * x_{12} + k_{22} * x_{14} =$$

$$= (62,4 * 0,9 - 100 * 0,5) * 10^2 = 616$$

$$N_{10-8} = k_{31} * x_{12} + k_{32} * x_{14} =$$

$$= [-52,2 * 0,9 - 62,4 * (-0,5)] * 10^2 = -1578$$

$$B_{10-8} = k_{41} * x_{12} + k_{42} * x_{14} =$$

$$= [62,4 * 0,9 + 50 * (-0,5)] * 10^2 = 3116$$

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель лабораторных работ.....	4
2. Теоретический раздел.....	5
3. Лабораторная работа № 1.....	13
4. Лабораторная работа № 2.....	20
5. Лабораторная работа № 3.....	30
Библиографический список.....	43

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1.1. Овладение приемами и процедурами исследования прочности методом конечных элементов, связанными с формированием матриц параметров, индексов, жесткости, обобщенных сил и напряжений, применительно к задаче расчета стержневых систем, автоматизацией формирования систем алгоритмических уравнений и ее реализации.

1.2. Определение с использованием ПК моментов и напряжений при заданных значениях нагрузок и проведение анализа напряженного состояния.

$$\begin{aligned}
 M_{8-7} &= k_{42} * x_{11} + k_{43} * x_{12} + k_{44} * x_{13} = \\
 &= [-15 * 1 + 11,3 * 0,9 + 30(-1,2)] * 10^2 = -4083 \\
 N_{8-9} &= k_{11} * x_{12} + k_{12} * x_{13} + k_{13} * x_{14} = \\
 &= [-5,6 * 0,9 + 11,3(-1,2) - 5,6 * 0,5] * 10^2 = -2140 \\
 M_{8-9} &= k_{21} * x_{12} + k_{22} * x_{13} + k_{23} * x_{15} = \\
 &= [-11,3 * 0,9 + 30(-1,2) - 11,3 * 0,5] * 10^2 = -5182 \\
 N_{9-8} &= k_{31} * x_{12} + k_{32} * x_{13} + k_{33} * x_{15} = \\
 &= [5,6 * 0,9 - 11,3(-1,2) + 5,6 * 0,5] * 10^2 = 2140 \\
 M_{9-8} &= k_{41} * x_{12} + k_{42} * x_{13} + k_{43} * x_{15} = \\
 &= [-11,3 * 0,9 + 15(-1,2) - 11,3 * 0,5] * 10^2 = -3382
 \end{aligned}$$

Киль. Элементы 4,12.

$$\begin{aligned}
 N_{3-6} &= k_{11} * x_4 + k_{13} * x_9 + k_{14} * x_{10} = \\
 &= [31,3 * 2,7 - 31,3 * 1,9 + 37,5(-0,6)] * 10^2 = 254 \\
 M_{3-6} &= k_{21} * x_4 + k_{23} * x_9 + k_{24} * x_{10} = \\
 &= [37,5 * 2,7 - 37,5 * 1,9 + 30(-0,6)] * 10^2 = 1200 \\
 N_{6-3} &= k_{31} * x_4 + k_{33} * x_9 + k_{34} * x_{10} = \\
 &= [-31,3 * 2,7 + 31,3 * 1,9 - 37,5(-0,6)] * 10^2 = -254 \\
 M_{6-3} &= k_{41} * x_4 + k_{43} * x_9 + k_{44} * x_{10} = \\
 &= [37,5 * 2,7 - 37,5 * 1,9 + 60(-0,6)] * 10^2 = -600 \\
 N_{9-11} &= k_{11} * x_{15} + k_{12} * x_{16} = \\
 &= [31,3 * 0,5 - 37,5(+0,5)] * 10^2 = -310 \\
 M_{9-11} &= k_{21} * x_{15} + k_{22} * x_{16} = \\
 &= [37,5 * 0,5 - 60 * 0,5] * 10^2 = -1125 \\
 N_{11-9} &= k_{31} * x_{15} + k_{32} * x_{16} = \\
 &= [-31,2 * 0,5 + 37,5 * 0,5] * 10^2 = 310
 \end{aligned}$$



Средний флор. Элементы 1,2.

$$\begin{aligned}
 N_{12} &= k_{12} * x_1 + k_{13} * x_2 + k_{14} * x_3 = \\
 &= (5,7 * 0,9 - 2,8 * 2,5 + 5,7 * 0,3) * 10^2 = -160 \\
 M_{12} &= k_{22} * x_1 + k_{23} * x_2 + k_{24} * x_3 = \\
 &= (15 * 0,9 - 5,7 * 2,5 + 7,5 * 0,3) * 10^2 = 150 \\
 N_{21} &= k_{32} * x_1 + k_{33} * x_2 + k_{34} * x_3 = \\
 &= (-5,7 * 0,9 + 2,8 * 2,5 - 5,7 * 0,3) * 10^2 = 160 \\
 M_{21} &= k_{42} * x_1 + k_{43} * x_2 + k_{44} * x_3 = \\
 &= (7,5 * 0,9 - 5,7 * 2,5 + 15 * 0,3) * 10^2 = -300 \\
 N_{23} &= k_{11} * x_2 + k_{12} * x_3 + k_{13} * x_4 = \\
 &= (2,8 * 2,5 + 5,7 * 0,3 - 2,8 * 2,7) * 10^2 = 115 \\
 M_{23} &= k_{21} * x_2 + k_{22} * x_3 + k_{23} * x_4 = \\
 &= (5,7 * 2,5 + 15 * 0,3 - 5,7 * 2,7) * 10^2 = 336 \\
 N_{32} &= k_{31} * x_2 + k_{32} * x_3 + k_{33} * x_4 = \\
 &= (-2,8 * 2,5 - 5,7 * 0,3 + 2,8 * 2,7) * 10^2 = -115 \\
 M_{32} &= k_{41} * x_2 + k_{42} * x_3 + k_{43} * x_4 = \\
 &= (5,7 * 2,5 + 7,5 * 0,3 - 5,7 * 2,7) * 10^2 = -111
 \end{aligned}$$

Крайний флор. Элементы 9,10.

$$\begin{aligned}
 N_{7-8} &= k_{12} * x_{11} + k_{13} * x_{12} + k_{14} * x_{13} = \\
 &= [11,3(+1) + 5,6 * 0,9 + 11,3(-1,2)] * 10^2 = 278 \\
 M_{7-8} &= k_{22} * x_{11} + k_{23} * x_{12} + k_{24} * x_{13} = \\
 &= [(30 * 1) + 11,3 * 0,9 + 15(-1,2)] * 10^2 = 2217 \\
 N_{8-7} &= k_{32} * x_{11} + k_{33} * x_{12} + k_{34} * x_{13} = \\
 &= [11,3 * 1 - 5,6 * 0,9 - 11,3(-1,2)] * 10^2 = -278
 \end{aligned}$$

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Широкое использование в инженерных расчетах ПК повлекло за собой бурное развитие численных методов, среди которых МКЭ является наиболее перспективным.

Метод основан на четких физических представлениях, удобен для программирования, позволяет автоматизировать трудоемкие операции формирования и решения систем линейных алгебраических уравнений высоких порядков.

Идея метода состоит в представлении конструкции в виде совокупности отдельных конечных элементов, взаимодействующих между собой в узловых точках. В этих точках прикладываются усилия взаимодействия, заменяющие действие внутренних напряжений, приложенных вдоль реальных границ стыковки смежных элементов.

При такой идеализации получается статистически неопределимая упругая система с конечным числом степеней свободы.

Раскрытие неопределимости производится по методу перемещений [3]. За неизвестные принимаются узловые перемещения

$$\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_i\} \quad (1)$$

– матрица-столбец узловых перемещений, рассматриваемых как обобщенные координаты.

Соответствующие им обобщенные силы (узловые усилия) можно представить в аналогичной матричной форме в виде матрицы-столбца

$$\{R\} = \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_i\}. \quad (2)$$

Рассматривая усилия, возникающие в узлах элемента, в качестве внешних сил, вызывающих напряжения и деформации элемента, на основании принципа возможных перемещений, можно получить зависимость

$$\{R\} = [K] \cdot \{q\}, \quad (3)$$

где $[K]$ – прямоугольная матрица жесткости элемента.

Наличие матриц жесткости для отдельных элементов позволяет представить конструкцию как систему с конечным числом степеней свободы – некоторую дискретную модель. Задача состоит в определе-



нии для этой модели ее матрицы жесткости (в общей системе), устанавливающей связь между узловыми перемещениями дискретной модели и внешней нагрузкой и в установлении уравнений равновесия МКЭ в общей системе координат.

Для каждого i -го элемента справедлива зависимость

$$\{R\}_i = [K]_i \cdot \{q_i\}. \quad (4)$$

Объединяя эти уравнения для всех элементов конструкции в одно матричное уравнение, можно получить

$$\{R\} = [K_D] \cdot \{q\}, \quad (5)$$

где $\{R\} = \{\{R\}_1, \{R\}_2, \dots, \{R\}_m\};$
 $[R] = [[K]_1, [K]_2, \dots, [K]_m];$
 $\{q\} = \{\{q\}_1, \{q\}_2, \dots, \{q\}_m\}.$

Однако это матричное уравнение содержит узловые перемещения (в местной системе), которые в силу условий неразрывности не зависят от принадлежности узловой точки к тому или иному конечному элементу.

Введем вектор узловых внешних сил

$$\{P\}^{(s)} = \{P_1^{(s)}, P_2^{(s)}, \dots, P_i^{(s)}, \dots, P_t^{(s)}\} \quad (6)$$

и соответствующий вектор перемещений S -узла

$$\{q\}^{(s)} = \{q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, \dots, q_i^{(s)}, \dots, q_t^{(s)}\}, \quad (7)$$

где t – число неизвестных узловых перемещений в S -ом узле.

После преобразований получаем матричное уравнение равновесия МКЭ в общей системе координат, свободной в пространстве,

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{K}\} \cdot \{\bar{q}\}, \quad (8)$$

Решение системы уравнений

$$\begin{aligned} X_1 &= 0,0009 \\ X_2 &= 0,0025 \\ X_3 &= 0,0003 \\ X_4 &= 0,0027 \\ X_5 &= 0,0008 \\ X_6 &= 0,0020 \\ X_7 &= 0,0002 \\ X_8 &= -0,0004 \\ X_9 &= 0,0019 \\ X_{10} &= -0,0006 \\ X_{11} &= 0,0010 \\ X_{12} &= 0,0009 \\ X_{13} &= -0,0012 \\ X_{14} &= -0,0005 \\ X_{15} &= 0,0005 \\ X_{16} &= -0,0005 \end{aligned}$$

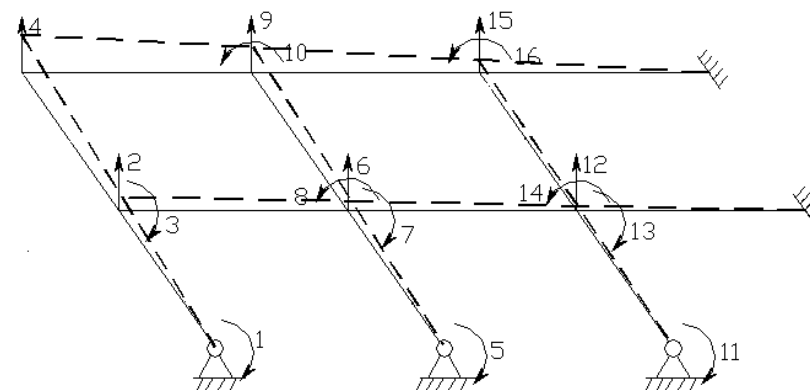


Рисунок 11 – Расчётные узловые перемещения

Используя МИ и МЖ конечных элементов, определяем суммарные изгибающие моменты, кН·м, и перерезывающие силы, кН, в среднем и крайнем флорах, в среднем и крайнем сечениях киля и стрингера.

Система алгебраических уравнений для определения перемещений узлов имеет вид

$$\begin{bmatrix} 144 & 432 & 0 & 216 & 288 & 864 & 0 & 0 & 432 & 0 & 288 & 864 & 0 & 0 & 432 & 0 \\ 15 & -5,7 & 7,5 & & & & & & & & & & & & & \\ -5,7 & 57,8 & -2,8 & & & & & & & & & & & & & \\ 7,5 & & 30 & -5,7 & 34,1 & & & & & & & & & & & \\ & -2,8 & -5,7 & 34,1 & & & & & & & & & & & & \\ & -32,5 & 0 & 0 & -11,3 & 115,6 & 15 & 60 & & & & & & & & \\ & & 62,4 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & -31,3 & 37,5 & & & & & & & & & & & \\ & & & & & -52,2 & -11,3 & 15 & & & & & & & & \\ & & & & & & 30 & -11,3 & 115,6 & 15 & & & & & & \\ & & & & & & & -52,2 & -11,3 & 15 & & & & & & \\ & & & & & & & & 62,4 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & -31,3 & 37,5 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & -31,3 & 37,5 & & & \\ & & & & & & & & & & & & -37,5 & 30 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & -120 & 120 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \end{bmatrix}$$

где $\{\bar{P}\}$ – вектор внешних узловых сил для всей конструкции в общей системе координат.

$\{\bar{q}\}$ – вектор узловых перемещений всей конструкции;

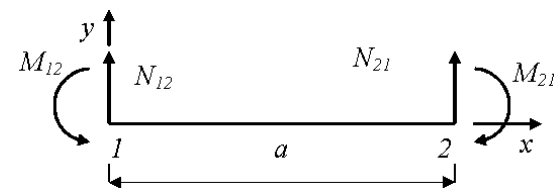
$\{\bar{K}\}$ – общая матрица жесткости всей конструкции в общей системе координат.

Если система стержневая, то конечным элементом является отрезок стержня, а матрица жесткости $[K]_L = [4 \times 4]$.

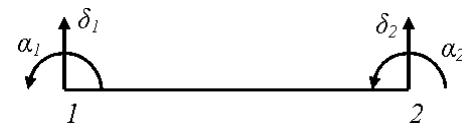
Элементы матрицы жесткости находятся как коэффициенты при перемещениях в формулах, связывающих их с усилиями.

Рассматривая элемент 1-2 под действием вертикальных усилий N_{12} и N_{21} и моментов M_{12} и M_{21} , приложенных к концам (усилия считаются положительными, если они направлены в сторону положительных y , а моменты – если они действуют против часовой стрелки), и используя условие равновесия – в любой точке элемента можно получить четыре уравнения, связывающие усилия с перемещениями.

а)



б)



в)

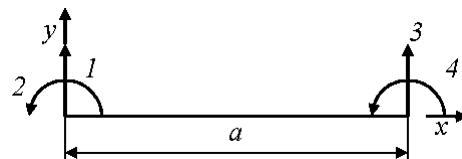


Рисунок 1 – Стержневой конечный элемент, учитывающий изгиб с четырьмя узловыми перемещениями: δ_1, δ_2 – линейными, α_1, α_2 –

Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= K_{11} \cdot \delta_i + K_{12} \cdot \alpha_i + K_{13} \cdot \delta_j + K_{14} \cdot \alpha_j; \\ M_{ij} &= K_{21} \cdot \delta_i + K_{22} \cdot \alpha_i + K_{23} \cdot \delta_j + K_{24} \cdot \alpha_j; \\ N_{ji} &= K_{31} \cdot \delta_i + K_{32} \cdot \alpha_i + K_{33} \cdot \delta_j + K_{34} \cdot \alpha_j; \\ N_{ji} &= K_{41} \cdot \delta_i + K_{42} \cdot \alpha_i + K_{43} \cdot \delta_j + K_{44} \cdot \alpha_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты при перемещениях этой системы образуют матрицу жесткости элемента

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Из системы (9) можно определить, что при $\delta_i = 1$ первое слагаемое представляет перерезывающую силу в i -ом узле при единичном смещении i -го конца стержня. То есть $K_{11} = N_{ij}^{\delta i}$, а второе – N_{ij} силу при единичном угле поворота узла i , то есть $K_{12} = N_{ij}^{\delta i}$ и т.д. Представляя упругую линию призматической балки степенным многочленом третьей степени

$$y = C_0 + C_1 \cdot X + C_2 \cdot X^2 + C_3 \cdot X^3 \quad (11)$$

и задаваясь единичными линейными и узловыми перемещениями узлов, выразим коэффициенты матрицы через жесткостные параметры балки, после чего матрица жесткости конечного элемента будет иметь вид

Таблица 15 – Общая грузовая матрица

№ перемещения	Элементы грузовой матрицы	При нагрузке 0,5 на средний флор (Эл. 1 и 2)
1	288	144
2	432+432=864	216+216=432
3	-288+288=0	0
4	432+0=432	216
5	288	288
6	0+432+432+0=864	864
7	-288+288=0	0
8	0+0=0	0
9	0+432+0=432	432
10	0+0=0	0
11	288	288
12	0+432+432+0=864	864
13	-288+288=0	0
14	0+0=0	0
15	0+432+0=432	432
16	0+0=0	0

Система алгебраических уравнений для определения перемещений узлов имеет вид

$$\{P\} = \left\{ \frac{qc}{2}, \frac{qc^2}{12}, \frac{qc}{2}, -\frac{ql^2}{12} \right\}$$

Таблица 14 – Матрица грузовых членов для всех элементов перекрытия

№ эле- эле- ментов	$\{R\}_i$	1	2	3	4
1	$\{R\}_1$	216	144	216	-144
2	$\{R\}_2$	216	144	216	-144
3	$\{R\}_3$	0	0	0	0
4	$\{R\}_4$	0	0	0	0
5	$\{R\}_5$	432	288	432	-288
6	$\{R\}_6$	432	288	432	-288
7	$\{R\}_7$	0	0	0	0
8	$\{R\}_8$	0	0	0	0
9	$\{R\}_9$	432	288	432	-288
10	$\{R\}_{10}$	432	288	432	-288
11	$\{R\}_{11}$	0	0	0	0
12	$\{R\}_{12}$	0	0	0	0

Используя МИ и матрицу грузовых членов, формируем общую грузовую матрицу – столбец перекрытия (таблица 15). Каждый элемент грузовой матрицы представляется как сумма грузовых членов, соответствующих одноимённым перемещениям элементов перекрытия в МИ, установленным при их сквозной (общей) нумерации.

С учетом изложенного получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных перемещений $X_1, \dots, X_{16}$. Решение системы уравнений выполняем по программе, основанной на методе Жордана. Графическое представление результатов и направленность полученных узловых перемещений даны на рисунке 11.

$$[K] = \frac{E \cdot J}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l & -12 & 6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 4 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 2 \cdot l^2 \\ -12 & -6 \cdot l & 12 & -6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 2 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

В матричной форме уравнения (9) имеют вид

$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \\ N_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot J}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l & -12 & 6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 4 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 2 \cdot l^2 \\ -12 & -6 \cdot l & 12 & -6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 2 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \alpha_1 \\ \delta_2 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Располагая матрицами жесткости $[K]_i$ конечных элементов, можно сформировать матрицу жесткости системы $[K_D]$.

Этот процесс осуществляется с помощью матрицы индексов $[I]$. Она представляет собой таблицу сопоставления номеров перемещений в общей и местной системах координат.

Для стержневого элемента матрица индексов имеет вид

Таблица 1 – Матрица индексов элемента

№ конечного элемента	Перемещения в элементе			
	1	2	3	4
	Узловые перемещения в общей системе			
1				
2				
.				
n				

Индексы элементов общей матрицы $[K_D]$ сопоставляют со стро-

ками матрицы $[I]$. Если индексы рассматриваемого (вычисляемого) элемента совпадают с номерами в одной строке матрицы индексов, то это позволяет установить и номера конечных элементов и индексы суммируемых элементов матриц $[K]_i$.

В машине идет перебор всех строк, выбор соответствующих коэффициентов, их суммирование и формирование всей матрицы $[K_D]$.

Матрица жесткости получается квадратной, симметричной, ленточного типа (при обходе, не допускающем больших разрывов в нумерации конечных элементов), размером $(n \times n_3)$, равным числу неизвестных перемещений.

Для формирования матрицы-столбца внешних усилий $\{P\}$ необходимо в этом методе все виды внешних нагрузок заменить совокупностью эквивалентных сил, приложенных в узлах.

В вектор обобщенных сил $\{P\}$ вносятся внешние сосредоточенные эквивалентные узловые усилия, приложенные в узлах в направлении соответствующих неизвестных перемещений. Матрица внешних сил носит название грузовой матрицы. Она формируется из грузовых членов для каждого из элементов. Предварительно они записываются в форме таблицы, в которой количество строк равно числу конечных элементов, а столбцов – числу перемещений в элементе.

Определение коэффициентов общей грузовой матрицы начинается с первого коэффициента $\{P_1\}$, представляющего сумму усилий по направлению перемещения 1 от всех внешних сил для всех конечных элементов.

Практическая схема формирования $\{R\}$ с использованием матрицы индексов $[I]$, следующая.

Номер столбца в соответствующей строке матрицы индексов указывает какой элемент должен быть выбран из набора грузовой матрицы для элементов, а содержимое столбца в той же строке укажет место на поле общей грузовой матрицы, куда должен быть послан найденный коэффициент для последующего суммирования его с ранее найденными и посланными в то же место коэффициентом.

Порядок формирования общей грузовой системы приведен на рисунке 2.

Сформировав грузовую матрицу $\{P\}$, получаем систему уравнений

МЖ элементов флора 1,2;

$[K] = 10^5*$	2,8	5,7	-2,8	5,7
	5,7	15,0	-5,7	7,5
	-2,8	-5,7	2,8	-5,7
	5,7	7,5	-5,7	15,0

МЖ элементов флора 5,6,9,10.

$[K] = 10^5*$	5,6	11,3	-5,6	11,3
	11,3	30,0	-11,3	15,0
	-5,6	-11,3	5,6	11,3
	11,3	15,0	-11,3	30,0

В таблице 13 приведена матрица индексов (МИ) системы

Таблица 13 – Матрица индексов перекрытия

Элементы	Обобщенные перемещения			
	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	2	3	4	0
3	2	0	6	8
4	4	0	9	10
5	0	5	6	7
6	6	7	9	0
7	6	8	12	14
8	9	10	15	16
9	0	11	12	13
10	12	13	15	0
11	12	14	0	0
12	15	16	0	0

Используя МИ системы и МЖ элементов килля, стрингеров и флоров составляем МЖ системы.

Распределённую нагрузку на элементы системы приводим к эквивалентным узловым нагрузкам. Полагаем, что вся нагрузка на перекрытие воспринимается балками главного направления – и флорами, каждый элемент которых загружен распределённой нагрузкой интенсивностью $q = p \cdot a = 216$ кН/м, а грузовая матрица для него будет иметь вид



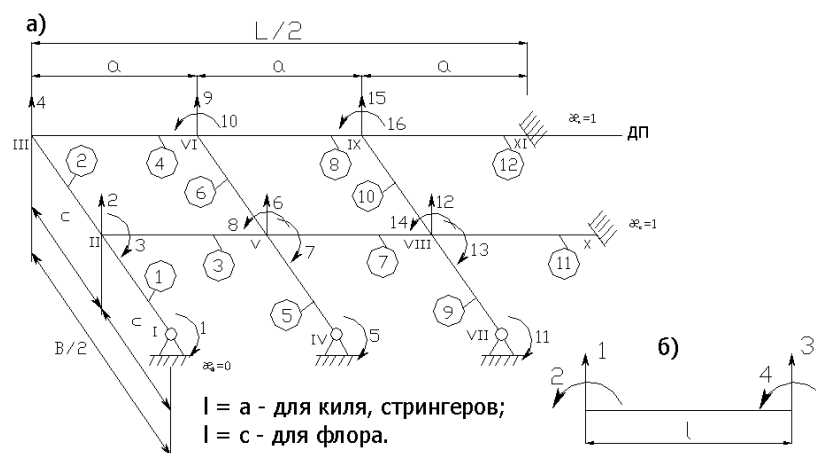


Рисунок 10 – Расчетная схема перекрытия (а) и элемент стержневой системы (б).

Матрица жесткости (МЖ) конечного элемента, учитывающего изгиб, имеет вид

$$[K_i] = \frac{EI}{a^3} = \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}$$

На основе общего выражения МЖ элемента получаем

МЖ элементов киля 4,8,12;

$$[K] = 10^5 * \begin{bmatrix} 31,3 & 37,5 & -31,3 & 37,5 \\ 37,5 & 60,0 & -37,5 & 30,0 \\ -31,3 & -37,5 & 31,3 & -37,5 \\ 37,5 & 30,0 & -37,5 & 60,0 \end{bmatrix}$$

МЖ элементов стрингера 3,7,11;

$$[K] = 10^5 * \begin{bmatrix} 52,2 & 62,4 & -52,2 & 62,4 \\ 62,4 & 100 & -62,4 & 50,0 \\ -52,2 & -62,4 & 52,2 & -62,4 \\ 62,4 & 50,0 & -62,4 & 100 \end{bmatrix}$$

$$[P] = [K_D] \cdot \{Q\}, \quad (14)$$

которую необходимо решать относительно неизвестных перемещений.

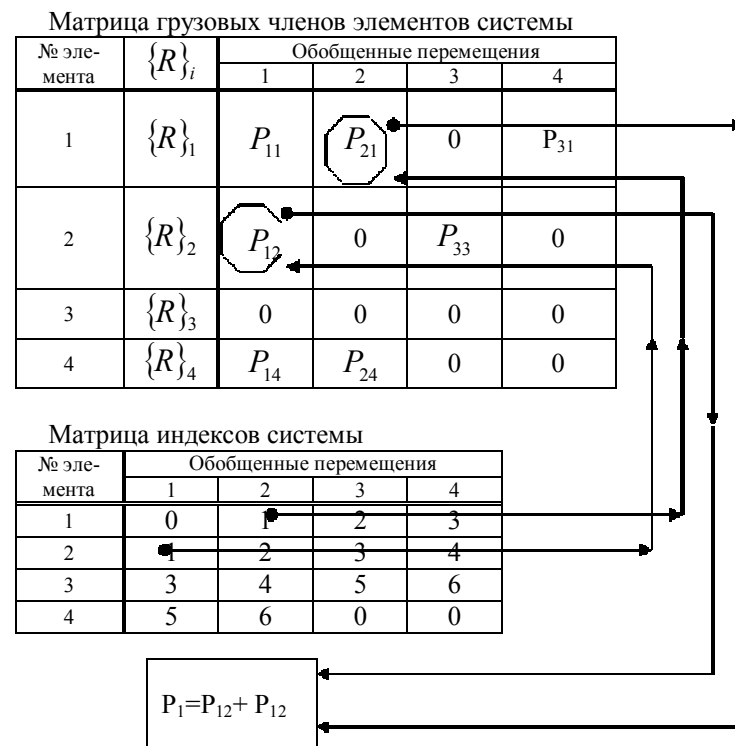


Рисунок 2 – Порядок формирования общей грузовой матрицы системы

Решение системы линейных неоднородных уравнений производится на ЭВМ, имеющейся в распоряжении пользователя.

По величинам перемещений $\{q\}$ в узлах вычисляются суммарные изгибающие моменты и перерезывающие силы по формулам, справедливым для любого конечного элемента $i - j$

$$\begin{aligned}
N_{ij}^{\Sigma} &= K_{11} \cdot \delta_i + K_{12} \cdot \alpha_i + K_{13} \cdot \delta_j + K_{14} \cdot \alpha_j; \\
M_{ij}^{\Sigma} &= K_{21} \cdot \delta_i + K_{22} \cdot \alpha_i + K_{23} \cdot \delta_j + K_{24} \cdot \alpha_j; \\
N_{ji}^{\Sigma} &= K_{31} \cdot \delta_i + K_{32} \cdot \alpha_i + K_{33} \cdot \delta_j + K_{34} \cdot \alpha_j; \\
M_{ji}^{\Sigma} &= K_{41} \cdot \delta_i + K_{42} \cdot \alpha_i + K_{43} \cdot \delta_j + K_{44} \cdot \alpha_j,
\end{aligned} \quad (15)$$

где M_{ij}^{Σ} и M_{ji}^{Σ} – суммарные изгибающие моменты;
 N_{ij}^{Σ} и N_{ji}^{Σ} – суммарные перерезывающие силы;
 $K_{11} \dots K_{44}$ – коэффициенты матрицы жесткости;
 $\alpha_i, \delta_i, \alpha_j, \delta_j$ – перемещения.

Полученные суммарные изгибающие моменты и перерезывающие силы связаны с эквивалентными действительными усилиями зависимостями

$$\begin{aligned}
M_i^{\Sigma} &= M_i^{\vartheta} + M_i; \\
N_i^{\Sigma} &= N_i^{\vartheta} + N_i,
\end{aligned} \quad (16)$$

где M_i^{ϑ} и N_i^{ϑ} – сосредоточенные нагрузки, эквивалентные распределенной нагрузке;

M_i и N_i – действительные внутренние усилия в i -ом узле.

Таким образом

$$\begin{aligned}
M_i &= M_i^{\Sigma} - M_i^{\vartheta}; \\
N_i &= N_i^{\Sigma} - N_i^{\vartheta}.
\end{aligned} \quad (17)$$

По полученным значениям внутренних усилий строятся соответствующие эпюры M_i и N_i для всех конечных элементов и определяются нормальные и касательные напряжения.

$I_{\phi} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$ – момент инерции поперечного сечения флора;

t_1, t_2, t_{1K} – толщина обшивки днища, второго дна, горизонтального килля;

$t_{3K}, t_{3C}, t_{3\phi}$ – толщина стенки вертикального килля, стрингера, флора;

$\chi_k, \chi_c, \chi_{\phi}$ – коэффициент опорной пары килля, стрингера, флора;

$\chi = 0$ – при свободном опирании;

$\chi = 1$ – при жестком закреплении;

h – высота двойного дна.

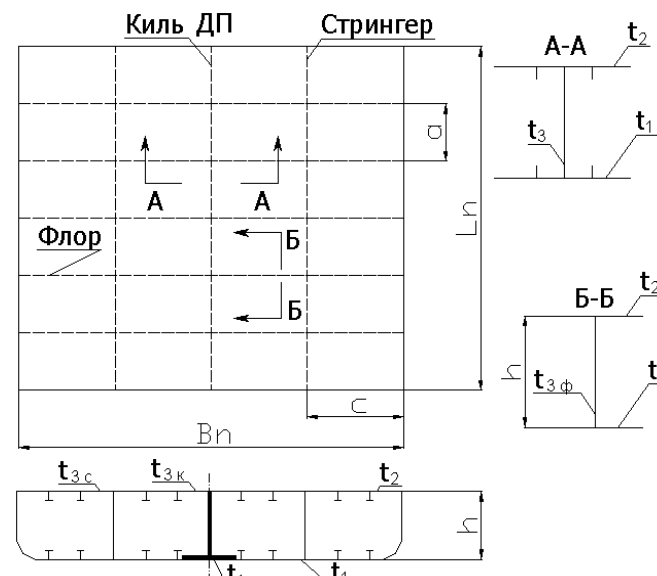


Рисунок 9 – Судовое днищевое перекрытие со вторым дном

Рассчитаем перекрытия на действие равномерно распределенного давления, равного высоте борта, $p = 0,09 \text{ МПа}$.

Расчетная по МКЭ схема перекрытия с учетом симметрии конструкции и нагрузки относительно центра перекрытия приведена на рисунке 10. На схеме обозначены: арабскими цифрами номера конечных элементов i и номера перемещений j , римскими цифрами номера узлов стержней. Число элементов – 12, перемещений – 16, узлов – 11.



Таблица 12 – Исходные данные

№ Вари- анта	B_{Π} , м	H , м	L_{Π} , м	n_{ϕ}	n_c	h , м	t_1 , мм	t_2 , мм	t_{3K} , мм	t_{3C} , мм	$t_{3\phi}$, мм	f_P , мм ²	n_P	χ_c
1	12,0	8,0	10,8	5	3	0,8	10	10	9	8	6	1500	3	1/0
2	12,8	8,2	10,8	5	3	0,8	10	10	9	8	6	1500	3	
3	14,0	8,4	10,8	5	3	0,9	10	10	9	8	7	1500	4	
4	14,4	8,6	10,8	5	3	0,9	12	10	9	9	7	1600	5	
5	14,4	8,8	14,4	5	3	1,0	12	10	9	9	8	1600	5	
6	16,0	9,2	14,4	5	3	1,0	12	10	10	9	8	1600	7	
7	16,8	9,3	14,4	5	3	1,2	12	10	10	9	8	1600	7	
8	16,8	10,0	18,0	5	3	1,2	14	12	10	9	9	1800	7	
9	18,0	10,3	18,0	5	3	1,3	12	10	10	10	9	2000	8	
10	19,2	11,0	18,0	5	3	1,3	14	10	10	10	9	2200	8	

Примечание – $\chi_c / \chi_{\phi} = 1/0$ – для всех вариантов, коэффициент опорной пары стрингера и флора.

Пример

Расчет прочности методом конечных элементов днищевого перекрытия со вторым дном, конструктивная схема которого приведена на рисунке 9.

Исходные данные:

$H = 9$ м – высота борта судна;

$B_{\Pi} = 16$ м – ширина судна (перекрытия);

$L_{\Pi} = 14,4$ м – длина отсека (перекрытия);

$a = 2,4$ м – расстояние между флорами;

$C = 4$ м – расстояние между продольными балками (стрингерами, килем);

$I_K = 36 \cdot 10^{-3}$ м⁴ – момент инерции поперечного сечения киля;

$I_C = 30 \cdot 10^{-3}$ м⁴ – момент инерции поперечного сечения стрингера;

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СУДОВОЙ БАЛКИ

1) Выбрать из таблицы 2 вариант задания, номер которого совпадает с номером фамилии студента по списку в журнале.

2) Идеализировать стержень в виде совокупности 4-х конечных элементов, учитывая симметричность закрепления и нагрузки. Установить размеры типового конечного элемента и обозначить обобщенные перемещения в его узлах.

3) Пронумеровать элементы, узлы и перемещения в стержне (балке).

4) Вычислить элементы матриц жесткости конечных элементов $[K]_i$.

5) Составить матрицу индексов $[I]$.

6) Сформировать матрицу жесткости всей системы $[K_D]$.

7) Привести внешние нагрузки к узлам и составить матрицу грузовых членов элементов (эквивалентных сосредоточенных усилий) в соответствии с рисунком 3.

8) Сформировать общую грузовую матрицу.

9) Составить систему уравнений равновесия конструкций относительно неизвестных узловых перемещений.

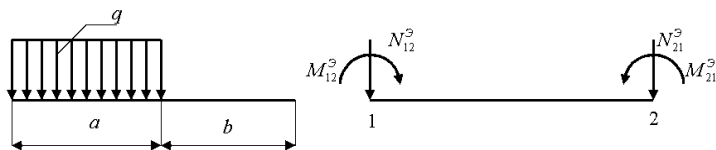
10) По программе вычислить на ПК перемещения углов системы α_i, δ_i

11) Используя зависимости (15), вычислить суммарные изгибающие моменты M_{ij}^{Σ} и перерезывающие силы N_{ij}^{Σ} , а затем по формулам (17) – внутренние усилия M_i и N_i в узлах стержня.

12) Построить для всех конечных элементов стержня эпюры изгибающих моментов M_i и перерезывающих сил N_i .

13) Изменяя величины внешнего усилия P или поперечной нагрузки q на 50 % в сторону увеличения и уменьшения и внося коррективку в общую грузовую матрицу, повторить расчет по п.п. 10, 11 и построить кривые зависимостей M_i и N_i от варьируемой внешней силы.





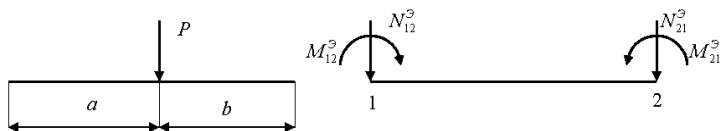
$$l = a + b$$

$$N_{12}^0 = q \cdot a \cdot \left[1 - \left(\frac{a}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^3 \right],$$

$$N_{21}^0 = q \cdot \left[\left(\frac{a}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^3 \right],$$

$$M_{12}^0 = \frac{q \cdot a^2}{24} \cdot \left[12 - 16 \cdot \left(\frac{a}{l} \right) + 6 \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right],$$

$$M_{21}^0 = \frac{q \cdot a^2}{24} \cdot \left[8 \cdot \left(\frac{a}{l} \right) - 6 \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]$$



$$N_{12}^0 = P \cdot b^2 \cdot \frac{(3 \cdot a + b)}{l^3}$$

$$N_{21}^0 = P \cdot a^2 \cdot \frac{(3 \cdot b + a)}{l^3}$$

$$M_{12}^0 = P \cdot \frac{a \cdot b^2}{l^2}$$

$$M_{21}^0 = P \cdot \frac{a^2 \cdot b}{l^2}$$

Рисунок 3 – Схема приведения нагрузки к узлам конечного элемента

ного пояса и включением в поперечное сечение соответствующих продольных ребер;

ж) при выборе расчетной схемы рекомендуется учитывать условия симметрии геометрической формы внешней нагрузки относительно центра перекрытия, задавая при этом ограничения (отсутствие) углов поворота вдоль осей симметрии, а так же уменьшение вдвое момента инерции и площади стенки балок, вдоль которых проходят эти оси.

- 1) Выбрать из таблицы 12 вариант задания, номер которого совпадает с номером фамилии студента по списку в журнале.
- 2) Составить расчетную (идеализированную) схему перекрытия, учитывая симметричность конструкции и нагрузки.
- 3) Установить размеры конечных элементов, обобщенные перемещения в узлах. Пронумеровать элементы, узлы и перемещения.
- 4) Вычислить элементы матриц жесткости [МЖ] конечных элементов $[X]_i$.
- 5) Составить матрицу индексов [И].
- 6) Сформировать матрицу жесткости конструкции [К].
- 7) Привести внешние нагрузки к узловым эквивалентным (сосредоточенным) и сформировать матрицу грузовых членов всех элементов.
- 8) Сформировать общую грузовую матрицу $\{R\}$.
- 9) Сформировать общие уравнения равновесия конструкции и решить их с использованием программы СЛАУ (SLAU).
- 10) По полученным перемещениям, используя матрицу индексов [И], определить суммарные изгибающие моменты и перерезывающие силы в среднем и крайних флорах, в среднем и крайнем сечениях кили и стрингера.



ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ДНИЩЕВОГО ПЕРЕКРЫТИЯ

К числу наиболее характерных судовых конструкций, которые могут быть идеализированы стержневой системой, относятся судовые перекрытия. Расчёт их принципиально не отличается от расчёта одно- и многопролётных балок, рассмотренного при выполнении разделов 3.1 и 3.2.

Вместе с тем имеется ряд особенностей при подготовке решения, на которых стоит остановиться особо.

В качестве основного типа перекрытий рассмотрим днищевые перекрытия, представляющие систему балок набора, расположенных во взаимноперпендикулярных направлениях и перевязанных между собой одним или двумя общими настилами. Опорами для таких перекрытий служат борта, поперечные и продольные переборки и т.д. Для транспортных судов характерны перекрытия типа “двойное дно”. Перекрытия первого типа имеют обычно большое количество одинаковых поперечных блоков и нескольких продольных связей (киль, стрингеры). Перекрытия танкерного типа имеют ограниченное число флоров (2-4) и одну перекрёстную связь (киль) с большими концевыми кницами, нарушающими их призматичность.

При расчёте днищевых перекрытий можно использовать следующие допущения:

- перекрытие плоское, без учёта погиби;
- опорный контур – абсолютно жесткий (при расчете супертанкеров и других крупных судов необходимо учитывать податливость опорного контура);
- поперечные и продольные связи – взаимноперпендикулярны;
- киль и стрингеры жестко защемлены на поперечных переборках. Условия заделки флоров на борту транспортных судов – свободное опирание, для танкеров – жесткая заделка (для крупнотоннажных судов условия закрепления перекрёстных связей зависят от соотношения нагрузок и длин пролетов соседних перекрытий);
- число элементов, на которые разбивается перекрытие, зависит от особенностей конструкции и характера нагрузки. Непризматические участки балок (в районе больших книц) заменяются ступенчато-переменными. Вырезы в стенках балок учитываются либо более подробной разбивкой на конечные элементы, либо введением в расчет эквивалентной площади на сдвиг;
- моменты инерции балок определяются с учетом присоединен-

Пример.

Свободно опертая на жесткие опоры балка длиной $l = 2$ м загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 1.2$ кН/м. Момент инерции поперечного сечения балки $I = 1 \cdot 10^{-5}$ м⁴, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м². Определить перемещение балки и возникающие в ней под действием заданной нагрузки изгибающие моменты и перерезывающие силы.

Представим балку в виде соединения двух одинаковых элементов. Балка и ее расчетная схема представлены на рисунке 4.

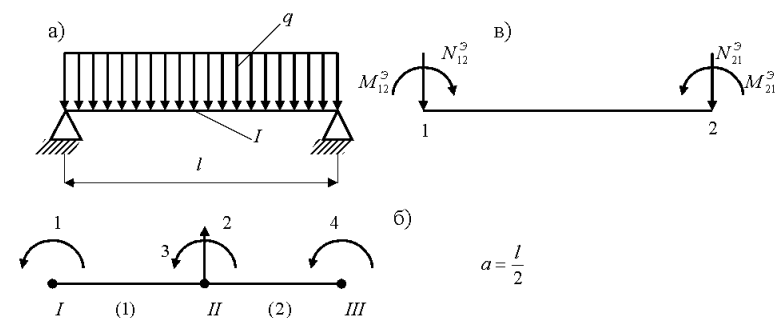


Рисунок 4 – Балка (а), расчетная схема (б), типовой конечный элемент (в)



Таблица 2 – Исходные данные

№ варианта	Вид нагрузки	Длина l , м	Усилия P , кН	Нагрузка q , кН/м	Момент инерции I , м ⁴
1.		4	10	12	$1,6 \cdot 10^{-4}$
2.		4	12	14	$2,0 \cdot 10^{-4}$
3.		4	14	16	$2,2 \cdot 10^{-4}$
4.		4	16	18	$2,4 \cdot 10^{-4}$
5.		4	10	5	$2,6 \cdot 10^{-4}$
6.		8	10	4	$5 \cdot 10^{-4}$
7.		8	15	6	$5,2 \cdot 10^{-4}$
8.		8	15	8	$5,4 \cdot 10^{-4}$
9.		8	10	10	$5,6 \cdot 10^{-4}$
10.		8	10	12	$5,8 \cdot 10^{-4}$

В соответствии с типовым элементов обозначим номера элементов, узлов и перемещений. С помощью выражений (8) формируем матрицу жесткости (МЖ) этих элементов

в опорных сечениях j -го элемента;

$[k]_j$ – МЖ конечных элементов j ;

$\{P\}_j$ – эквивалентные узловые нагрузки на j элемент.

Определить перерезывающие силы, кН, и изгибающие моменты, кН·м, в опорных сечениях элемента VI.

$$N_{6-7}^{VI} = k_{11}^{VI} * 0 + k_{12}^{VI} * X_7 + k_{13}^{VI} * X_8 + k_{14}^{VI} * X_9 =$$

$$= (889 * 4.73 - 395 * 20.66 + 889 * 3.81) = 568.6$$

$$M_{6-7}^{VI} = (k_{21}^{VI} * 0 + k_{22}^{VI} * X_7 + k_{23}^{VI} * X_8 + k_{24}^{VI} * X_9) - P_7 =$$

$$(2667 * 4.75 - 884 * 20.66 + 1333 * 3.81) - 106.3 = -774.1$$

$$N_{7-6}^{VI} = (k_{31}^{VI} * 0 + k_{32}^{VI} * X_7 + k_{33}^{VI} * X_8 + k_{34}^{VI} * X_9) - P_8 =$$

$$= (-889 * 4.73 + 395 * 20.66 - 889 * 3.81) - 142 = 426.6$$

$$M_{7-6}^{VI} = (k_{41}^{VI} * 0 + k_{42}^{VI} * X_7 + k_{43}^{VI} * X_8 + k_{44}^{VI} * X_9) - P_9 =$$

$$= (1333 * 4.73 - 889 * 20.66 + 2667 * 3.81) - 0 = 1794$$

$$N_{7-8}^{VII} = (k_{11}^{VII} * X_8 + k_{12}^{VII} * X_9 + k_{13}^{VII} * X_{10} + k_{14}^{VII} * 0) - P_8 =$$

$$(395 * 20.66 + 889 * 3.81 - 395 * 29.95) - 142 = 424.5$$

$$M_{7-8}^{VII} = (k_{21}^{VII} * X_8 + k_{22}^{VII} * X_9 + k_{23}^{VII} * X_{10} + k_{24}^{VII} * 0) - P_9 =$$

$$= (889 * 20.66 + 2667 * 3.81 - 889 * 29.95) - 108.3 = 1796$$

Найденные значения усилий $\{R\}_j$ должны удовлетворять урав-

новешенности узлов рамы

$$\{R_{7-6}\}_{VI} + \{R_{7-8}\}_{VII} = 0$$

$$N_{7-6}^{VI} + N_{7-8}^{VII} = 426.6 - 424.5 \approx 0$$

$$M_{7-6}^{VI} + M_{7-8}^{VII} = -1794 + 1796 \approx 0$$



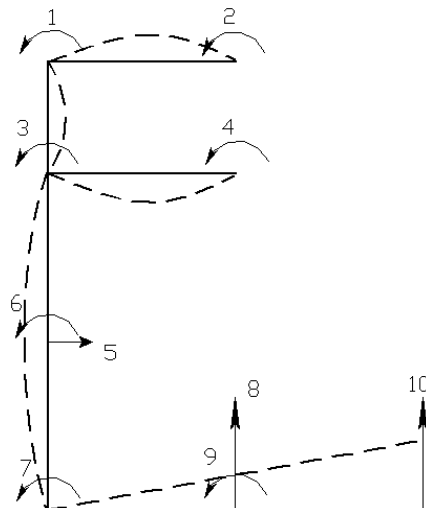


Рисунок 8 – Схема расчетных узловых перемещений рамы

Таблица 11 – Перемещение узловых сечений элементов

№ эле- ментов	Вектор пере- мещений	Перемещения			
I	$\{q\}_I$	0	X_1	0	X_2
II	$\{q\}_{II}$	0	X_1	0	X_3
III	$\{q\}_{III}$	0	X_3	0	X_4
IV	$\{q\}_{IV}$	0	X_3	X_5	X_6
V	$\{q\}_V$	X_5	X_6	0	X_7
VI	$\{q\}_{VI}$	X	X_7	X_8	X_9
VII	$\{q\}_{VII}$	X_8	X_9	X_{10}	0

Усилия, возникшие в узловых сечениях элементов от смещения концевых сечений $\{q\}_j$ и приложения к элементу распределённой внешней нагрузки, имеют вид

$$\{R\}_j = [k]_j \cdot \{q\}_j - \{P\}_j,$$

где $\{R\}_j$ – узловые (перерезывающие) силы и изгибающие моменты

$$[K] = \frac{E \cdot J}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l & -12 & 6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 4 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 2 \cdot l^2 \\ -12 & -6 \cdot l & 12 & -6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 2 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 12 & -24 & 12 \\ 12 & 8 & -12 & 4 \\ -24 & -12 & 24 & -12 \\ 12 & 4 & -12 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Таблица 3 – Матрица индексов $[I]$ для рассматриваемой стержневой системы

№ эле- мента	Перемещения			
	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	2	3	0	4

Используя матрицу индексов системы и матрицу жесткости элементов составляем матрицу жесткости системы

Матрица жесткости системы (балки)

$$[K_D] = \begin{bmatrix} 8 & -12 & 4 & 0 \\ -12 & 48 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 16 & 4 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Распределенную нагрузку на элементах приводим к эквивалентным сосредоточенным в узлах нагрузкам.

Таблица 4 – Матрица грузовых членов элементов (эквивалентные сосредоточенные нагрузки в узлах)

№ эле- мента	$\{P_i\}$	ПЕРЕМЕЩЕНИЯ			
		1	2	3	4
1	$\{P_1\}$	$-\frac{q \cdot a}{2}$	$-\frac{q \cdot a^2}{12}$	$-\frac{q \cdot a}{2}$	$\frac{q \cdot a^2}{12}$

2	$\{P_2\}$	$-\frac{q \cdot a}{2}$	$-\frac{q \cdot a^2}{12}$	$-\frac{q \cdot a}{2}$	$\frac{q \cdot a^2}{12}$
---	-----------	------------------------	---------------------------	------------------------	--------------------------

Используя матрицу [И] и таблицу грузовых элементов, формируем общую грузовую матрицу-столбец. Каждый элемент грузовой матрицы предоставляется как сумма грузовых элементов, соответствующих одноименным перемещениям элементов балки в матрице индексов, установленным при их сквозной (общей) нумерации.

Таблица 5 – Общая грузовая матрица балки

Перемещение	Элементы грузовой матрицы	Матрица-столбец
1	$-\frac{q \cdot a^2}{12}$	$-\frac{q \cdot a^2}{12}$
2	$-\frac{q \cdot a}{2} - \frac{q \cdot a}{2}$	$-q \cdot a$
3	$\frac{q \cdot a^2}{12} - \frac{q \cdot a^2}{12}$	0
4	$\frac{q \cdot a^2}{12}$	$\frac{q \cdot a^2}{12}$

Располагая матрицей жесткости системы и общей грузовой матрицей, составим систему уравнений относительно неизвестных перемещений

$$\begin{bmatrix} 8 & -12 & 4 & 0 \\ -12 & 48 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 16 & 4 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00005 \\ -0.0006 \\ 0 \\ 0.00005 \end{bmatrix}$$

Решив систему уравнений относительно неизвестных перемещений, получаем

Таблица 10 – Общая грузовая матрица

№ перемещений	Элементы грузовой матрицы $\{R\}$
1	0+6,2=6,2
2	0
3	-9,5-11,8+22=0,7
4	11,8
5	53,6+75=128,6
6	-25,1+37,8=12,7
7	-40,8+106,3=65,5
8	142+142=284
9	2106,3+106,3=0
10	142+142=284

Значение узловых перемещений приведены в таблице 11, а схема перемещений – на рисунке 8

Система алгебраических уравнений для определения узловых перемещений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 6,2 \\ 0 \\ 0,7 \\ 11,8 \\ 128,6 \\ 12,7 \\ 65,5 \\ 284 \\ 0 \\ 284 \end{bmatrix} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 39,1 & 7,8 & 11,7 & & & & & & & \\ & 7,8 & 15,6 & & & & & & & \\ & 11,7 & & 359 & 7,8 & -160 & 160 & & & \\ & & & 7,8 & 15,6 & & & & & \\ & & & -160 & & 214 & & 160 & & \\ & & & 160 & & & 640 & 160 & & \\ & & & & & 160 & 160 & 2987 & -889 & 1333 \\ & & & & & & -889 & 790 & & -395 \\ & & & & & & 1333 & & 5334 & -889 \\ & & & & & & & -395 & -889 & 395 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix}$$

Таблица 9 – Приведение нагрузок к узлам.

№ эле- эле- мента	Вид нагрузки	Узловые нагрузки (силы и моменты)
I, IV _Δ , V _Δ		$q_1 = P_1 \cdot S, Q_1 = \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot H_1$ $P_1 = -0.3 \cdot Q_1, P_1 = -0.7 \cdot Q_1$ $M_1 = -\frac{Q_1 H_1}{15}, M_3 = -\frac{Q_1 H_1}{10}$
IV, V		$q_2 = P_2 \cdot S$ $q_3 = P_3 \cdot S = 2 \cdot Q_2$ $P_3 = -\frac{q_2 H_1}{2}, P_5 = -\frac{q_3 H_1}{2}$ $M_3 = \frac{q_2 H_1^2}{12}, M_5 = \frac{q_2 H_1^2}{12}$ для элемента IV; $P_5 = -\frac{q_3 H_1}{2}, P_6 = -\frac{q_3 H_1}{2}$ $M_5 = \frac{q_3 H_1^2}{12}, M_6 = \frac{q_3 H_1^2}{12}$ - для элемента V;

Используя МИ и матрицу грузовых членов, формируем общую грузовую матрицу – столбец системы.

$$x_1 = -0.200 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$x_1 = -0.125 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$x_1 = 0 \text{ м};$$

$$x_1 = -0.200 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

Далее, используя (14), определяем суммарные изгибающие моменты, кН·м, и перерезывающие силы, кН

$$M_{12}^{\Sigma} = 0 + K_{22} \cdot x_1 + K_{23} \cdot x_2 + K_{24} \cdot x_3 = -8 \cdot 0.2 + 12 \cdot 0.125 - 0 = -0.1;$$

$$M_{21}^{\Sigma} = 0 + K_{42} \cdot x_1 + K_{43} \cdot x_2 + K_{44} \cdot x_3 = -4 \cdot 0.2 + 12 \cdot 0.125 + 0 = 0.7;$$

$$M_{23}^{\Sigma} = K_{21} \cdot x_2 + K_{22} \cdot x_3 + K_{24} \cdot x_4 = -12 \cdot 0.125 + 4 \cdot 0.2 = -0.7;$$

$$M_{32}^{\Sigma} = K_{41} \cdot x_2 + K_{42} \cdot x_3 + K_{43} \cdot 0 + K_{44} \cdot x_4 = -12 \cdot 0.125 + 8 \cdot 0.2 = 0.1;$$

$$N_{12}^{\Sigma} = K_{12} \cdot x_1 + K_{13} \cdot x_2 + K_{14} \cdot x_3 = -12 \cdot 0.2 + 24 \cdot 0.125 = 0.6;$$

$$N_{21}^{\Sigma} = K_{31} \cdot 0 + K_{32} \cdot x_1 + K_{33} \cdot x_2 + K_{34} \cdot x_3 = 12 \cdot 0.2 - 24 \cdot 0.125 = -0.6;$$

$$N_{23}^{\Sigma} = K_{11} \cdot x_2 + K_{12} \cdot x_3 + K_{14} \cdot x_4 = -24 \cdot 0.125 + 12 \cdot 0.2 = 0.6;$$

$$N_{32}^{\Sigma} = K_{41} \cdot x_2 + K_{42} \cdot x_3 + K_{43} \cdot 0 + K_{44} \cdot x_4 = 24 \cdot 0.125 - 12 \cdot 0.2 = 0.6.$$

Действительные узловые нагрузки находим по формулам (16)

$$M_{12} = M_{12}^{\Sigma} - M_{12}^{\varnothing} = -0.1 - (-0.1) = 0 \text{ кН·м};$$

$$M_{21} = -M_{23} = M_{21}^{\Sigma} - M_{21}^{\varnothing} = 0.7 - 0.1 = 0.6 \text{ кН·м};$$

$$M_{32} = M_{32}^{\Sigma} - M_{32}^{\varnothing} = 0.1 - 0.1 = 0 \text{ кН·м};$$

$$N_{12} = N_{12}^{\Sigma} - N_{12}^{\varnothing} = 0.6 - (-0.6) = 1.2 \text{ кН};$$

$$N_{21} = N_{21}^{\Sigma} - N_{21}^{\varnothing} = -0.6 - (-0.6) = 0 \text{ кН};$$

$$N_{23} = N_{23}^{\Sigma} - N_{23}^{\varnothing} = -0.6 - (-0.6) = 0 \text{ кН};$$

$$N_{32} = N_{32}^{\Sigma} - N_{32}^{\varnothing} = 0.6 - (-0.6) = 1.2 \text{ кН};$$

По результатам вычислений строятся эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил.

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СУДОВОЙ РАМЫ

- 1) Выбрать из таблицы 6 вариант задания.
- 2) Выбрать из рассматриваемой стержневой конструкции тип и размеры конечных элементов. Установить и пронумеровать обобщённые перемещения для элемента.
- 3) С помощью выбранных конечных элементов заменить конструкцию дискретной моделью из 9-10 элементов.
- 4) Пронумеровать элементы, узлы и неизвестные перемещения узлов рамы.
- 5) Вычислить геометрические характеристики конечных элементов-стержней рамы.
- 6) Вычислить элементы МЖ элементов по формуле (12).
- 7) Используя схему разбивки конструкции на элементы и учитывая порядок обхода обобщённых перемещений для элемента, выписать МИ.
- 8) Располагая МЖ для конечных элементов и МИ, сформировать общую МЖ системы.
- 9) Привести внешние нагрузки к узлам элементов рамы.
- 10) Составить условия сопряжения в узловых точках конструкции для внешних и внутренних усилий.
- 11) Установив связь между перемещениями и внутренними усилиями в узлах каждого элемента и используя условия сопряжения, составить систему алгебраических уравнений.
- 12) По результатам счета составить таблицу величин перемещений узлов и проанализировать их характер.
- 13) Вычислить внутренние усилия (моменты и силы) в элементах конструкции. Построить эпюры их распределения.
- 14) Вычислить нормальные и касательные напряжения в элементах. Проанализировать характер и величину напряжений.

узловым точкам.

Эквивалентные узловые нагрузки (грузовые матрицы) для элементов бимса III

$$\{P\}_{III} = \left\{ -\frac{q_2 b}{2}, -\frac{q_2 b^2}{12}, -\frac{q_2 b}{2}, \frac{q_2 b^2}{12} \right\}$$

флора VI, VII

$$\{P\}_{VI, VII} = \left\{ \frac{qb}{2}, \frac{q_1 b^2}{12}, \frac{q_1 b}{2}, -\frac{q_1 b^2}{12} \right\}$$

где $b = \frac{B}{4} = 4,5$ - пролёт элементов III, VI, VII.

При определении узловой нагрузки на шпангоут, распределённой по треугольному закону, разложим её на прямоугольную и треугольную и результаты получим суммированием соответствующих составляющих обоих типов нагрузки.

Таблица 8 – Матрица грузовых членов для всех элементов

№ элемента	$\{P\}_i$	1	2	3	4
I	$\{P\}_I$	0	0	0	0
II	$\{P\}_{II}$	0	6,2	0	-9,5
III	$\{P\}_{III}$	0	-11,8	0	11,8
IV	$\{P\}_{IV}$	0	22,0	53,6	-25,1
V	$\{P\}_V$	75	73,6	0	-40,8
VI	$\{P\}_{VI}$	0	106,3	142	-106,3
VII	$\{P\}_{VII}$	142	106,3	142	0

Матрица жесткости балочного элемента имеет вид:

$$[K_i] = \frac{EI}{a^3} = \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}$$

Используя МЖ элемента, учитывающего изгиб, вычисляем МЖ стержней рамы (флора, шпангоута, бимсов).

Элементы I, III

$$K = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 2,3 & 5,2 & -2,3 & 5,2 \\ & 15,6 & -5,2 & 7,8 \\ & & 2,3 & -5,2 \\ & & & 15,6 \end{bmatrix}$$

Элемент II

$$K = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 7,8 & 11,7 & -7,8 & 11,7 \\ & 23,5 & -11,7 & 11,7 \\ & & 7,8 & -11,7 \\ & & & 23,5 \end{bmatrix}$$

Элементы IV, V

$$K = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 107 & 160 & 107 & 160 \\ & 320 & -160 & 160 \\ & & 107 & -160 \\ & & & 320 \end{bmatrix}$$

Элемент VI, VII

$$K = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 395 & 889 & -395 & 889 \\ & 2267 & -889 & 1333 \\ & & 395 & -889 \\ & & & 2667 \end{bmatrix}$$

МИ для системы имеет вид

Таблица 7 – Матрица индексов

№ элемента	Индексы узловых перемещений элемента			
	1	2	3	4
	Индексы перемещений узловых точек системы			
I	0	1	0	2
II	0	1	0	3
III	0	3	0	4
IV	0	3	5	6
V	5	6	0	7
VI	0	7	8	9
VII	8	9	10	0

Используя МИ системы и МЖ элементов стержней рамы, составляем общую МЖ. Составим вектор эквивалентных узловых нагрузок конечных элементов в местной системе координат. Для этого приведем распределённую нагрузку, действующую на элементы рамы, к

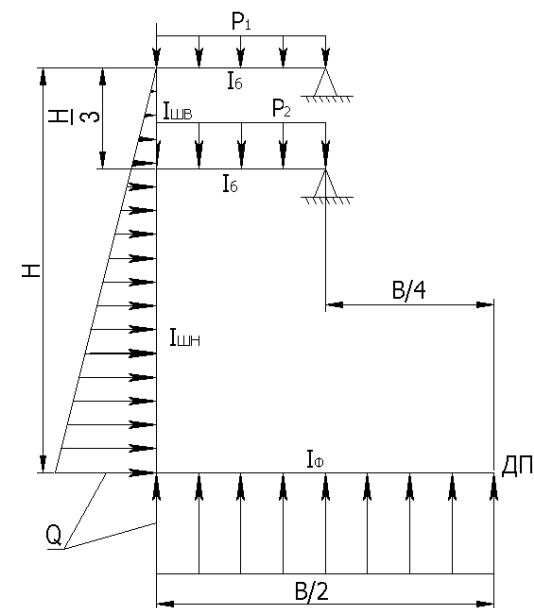


Рисунок 5 – Схема нагрузок на раму

Таблица 6 – Исходные данные

№ варианта	H, м	B, м	P ₁ , кН/м ²	P ₂ , кН/м ²	I _ф , м ⁴ ·10 ⁻³	I _{шн} , м ⁴ ·10 ⁻³	I _{шв} , м ⁴ ·10 ⁻⁵	I _б , м ⁴ ·10 ⁻⁵
1	8,1	16,0	4	9	14	1,5	8,8	8,8
2	8,4	16,4	5	10	14	1,5	9,0	8,9
3	8,7	16,8	6	11	15	1,6	9,2	9,0
4	9,0	17,2	4	12	15	1,6	9,4	9,1
5	9,3	17,6	5	13	15	1,7	9,6	9,2
6	9,6	18,0	6	14	16	1,7	9,8	9,3
7	9,9	18,4	4	15	16	1,8	1,0	9,4
8	10,2	18,8	5	14	18	1,8	1,2	9,5



9	10,5	19,2	6	13	18	1,9	1,4	9,6
10	10,8	19,6	5	12	18	1,9	1,6	9,8

Пример

Рассчитаем методом конечных элементов шпангоутную раму судна, состоящую из стержней и представленную на рисунке 6.

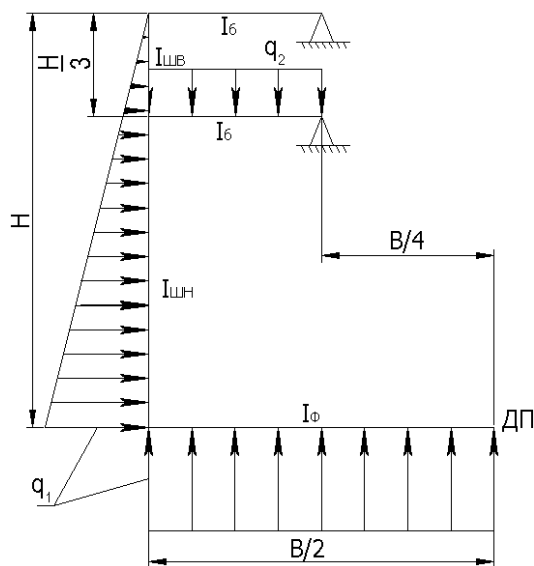


Рисунок 6 – Шпангоутная рама судна

Размеры рамы и её элементов, нагрузки:

$D = 9.0$ м – высота борта судна;

$B = 18.0$ м – ширина судна;

$S = 0.7$ м – шпация;

$I_Ф = 15 \cdot 10^{-3}$ м⁴ – момент инерции флора;

$I_{н.шп.} = 1,2 \cdot 10^{-3}$ м⁴ – момент инерции нижнего шпангоута;

$I_{в.шп.} = 8,8 \cdot 10^{-5}$ м⁴ – момент инерции верхнего шпангоута;

$I_Ф = 8,8 \cdot 10^{-5}$ м⁴ – момент инерции бимса;

$q_1 = P_1 \cdot S = 90 \cdot 0.7 = 63$ кН/м – интенсивность нагрузки на (днище) флор;

$q_2 = P_2 \cdot S = 10 \cdot 0.7 = 7$ кН/м – интенсивность нагрузки на бимсе.

Расчётная схема рамы приведена на рисунке 7. На схеме учтены симметрия конструкции и нагрузки, произведена разбивка стержней на конечные элементы, большинство узлов расположено в точках соединения стержней рамы и в опорных сечениях. В местной системе координат ось X направлена вдоль стержня от узла i к узлу $i+1$, а ось Y_i ориентирована относительно оси X_j так же, как ось X относительно оси Y , рисунок 7 (б). Нумерация перемещений в общей системе координат производится в порядке последовательного обхода узлов. Положительные направления перемещений показаны на рисунке 7. В принятой схеме число элементов равно 7, число перемещений узлов – 10.

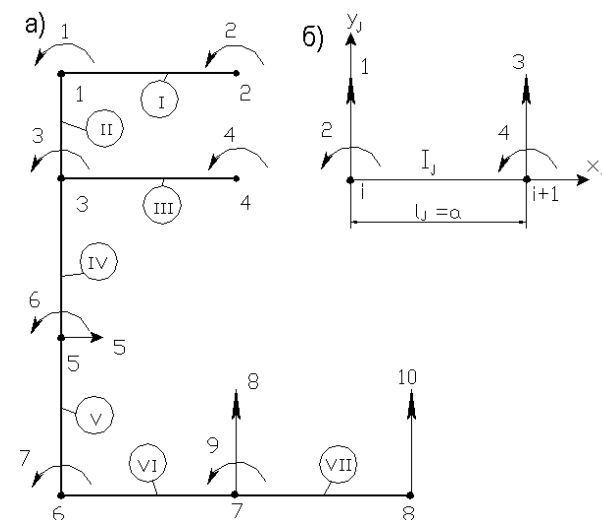


Рисунок 7 – Расчётная схема рамы (а) и типов элемент j стержневой системы (б).