

УДК 71.027

Е.В. Хромов, канд. техн. наук,**О.В. Хромов, магистрант***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДЕМПФИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕНИЯ**

Приведена методика определения коэффициента демпфирования на основе экспериментальной осциллограммы колебаний. Получена расчетная формула для коэффициента демпфирования при произвольном виде показательной функции трения.

При математическом моделировании колебательных процессов для описания внутреннего трения часто используют показательную функцию $f = b \psi^n \psi(\text{sign}(\dot{y}))^{n+1}$, где b – коэффициент демпфирования, n – показатель степени (обычно $n = 0, 1, 2$ или 3) [1 – 3]. В этой функции коэффициент b очевидно должен определяться на основании экспериментальных данных. В технической литературе этот вопрос традиционно рассматривается только для случая вязкого трения ($n = 1$) на основе аналитического решения дифференциального уравнения движения осциллятора. Поскольку реальные объекты могут не соответствовать этой модели, то представляет интерес определение коэффициента демпфирования для произвольного вида степенной функции.

Целью статьи является разработка обобщенной методики расчета коэффициента демпфирования на основе характеристик экспериментальной осциллограммы колебаний осциллятора с внутренним трением.

Допустим, что экспериментальная осциллограмма задана. При этом характер функции трения заранее неизвестен. Предположим, что для математического моделирования процесса используется дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + k^2 y + f_{mp}(\dot{y}) = 0. \quad (1)$$

Для описания внутреннего трения далее применяются следующие функции:

$$\text{– сухое трение } f_1 = b_1 \psi(\text{sign}(\dot{y})); \quad (2)$$

$$\text{– вязкое трение } f_2 = b_2 \dot{y}; \quad (3)$$

$$\text{– трение, пропорциональное квадрату скорости } f_3 = b_3 \dot{y}^2 \psi(\text{sign}(\dot{y})). \quad (4)$$

Рассмотрим задачу определения коэффициента b_i при заданных начальных условиях $t_0, y_0, v_0 = \dot{y}$ и времени затухания $\Delta t_z = t_z - t_0$ (t_z – момент времени завершения процесса колебаний, т.е. $y(t_z) = 0, \dot{y}(t_z) = 0$).

Для этой цели, следуя [1, 2], используем теорему об изменении кинетической энергии

$$\Delta E = E - E_0 = A_{уп} + A_{тр}, \quad (5)$$

где $E_0 = \frac{m \dot{y}_0^2}{2}$, $E = 0$ – кинетическая энергия осциллятора в начальном и конечном положениях, соответственно; $A_{уп}$ – работа силы упругости; $A_{тр}$ – работа силы трения.

Работа силы упругости и силы трения вычисляется по следующим формулам:

$$A_{уп} = \frac{c}{2} (y(t_0)^2 - y(t_z)^2) = \frac{c}{2} (y_0)^2, \quad (6)$$

$$A_{тр} = - \int_{t_0}^{t_z} F_{тр} \psi(\dot{y}) dt. \quad (7)$$

Здесь $F_{тр} = B \psi f_{тр}(\dot{y})$ – сила трения, B – коэффициент трения.

После подстановки (6) и (7) в (5) получим

$$-\frac{m \dot{y}_0^2}{2} = \frac{c}{2} y_0^2 - \int_{t_0}^{t_z} F_{тр} \psi(\dot{y}) dt,$$

или после перехода к обозначениям $k^2 = \frac{c}{m}$, $b = \frac{B}{m}$:

$$\frac{\dot{y}^2 + k^2 y_0^2}{2} = b \int_{t_0}^{t_z} f_{TP}(\dot{y}) \psi \dot{y} dt.$$

$$\text{Введем обозначение } J_n = \int_{t_0}^{t_z} f_{TP}(\dot{y}) \psi \dot{y} dt. \quad (8)$$

На основании (8) получим общую формулу для определения коэффициента демпфирования при любом виде показательной функции трения:

$$b = \frac{\dot{y}^2 + k^2 y_0^2}{2 \psi J_n}. \quad (9)$$

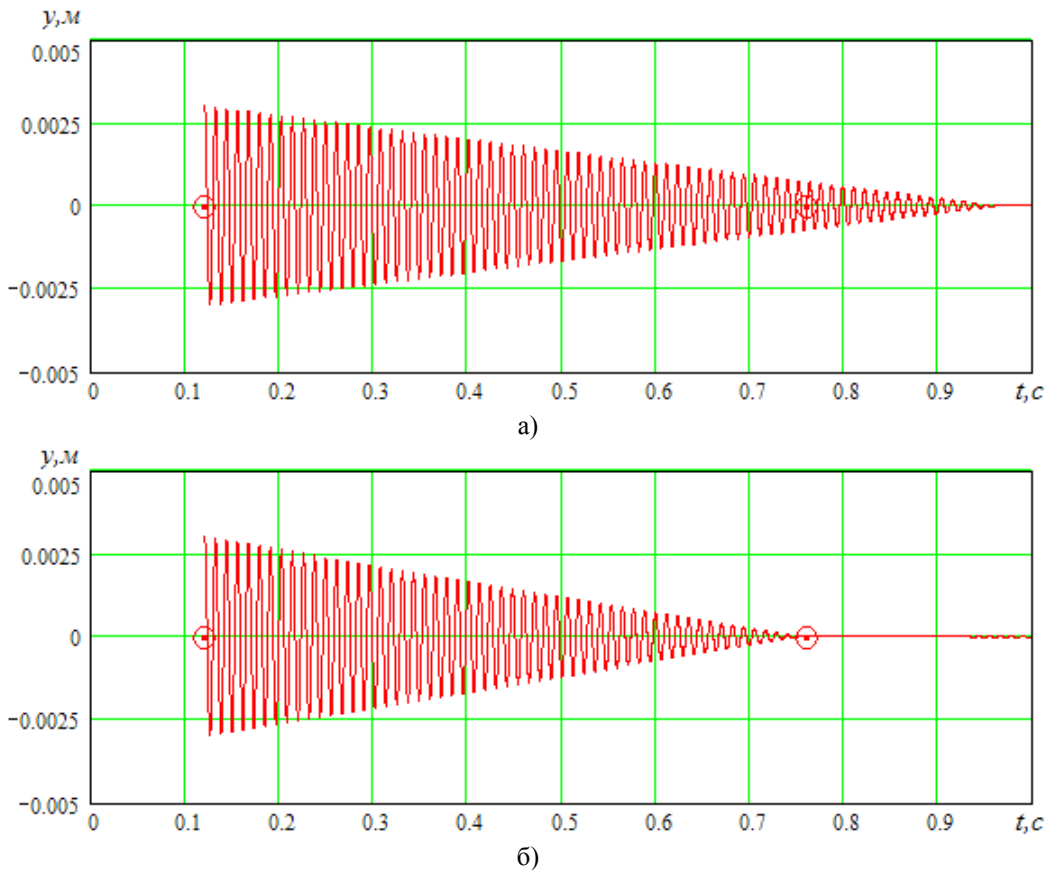


Рисунок 1 – Расчетные графики колебаний балки в случае сухого трения для коэффициентов демпфирования: а) $b_1 = 3$; б) $b_1 = 4$

Особенность применения этой формулы заключается в определении интеграла (8), в который входит неизвестная функция скорости $\dot{y}(t)$. Эта функция является решением дифференциального уравнения движения (1), куда в свою очередь входит неизвестный коэффициент демпфирования b_i . Таким образом, если дифференциальное уравнение не имеет аналитического решения, то для коэффициента b_i также невозможно получить конечную аналитическую зависимость.

Рассмотрим два подхода определения коэффициентов b_i . Приближенный метод, когда предполагают, что за один период колебаний изменение амплитуды незначительно, т.е. колебания описываются функцией $y = a \psi \sin kt$ ($a = \text{const}$), а скорость $\dot{y} = ak \psi \cos kt$. В этом случае, как показано в

[1, 2], для интеграла (9), а следовательно, для коэффициентов b_i можно получить аналитические выражения, которые пригодны, очевидно, для анализа только медленно затухающих процессов, т.е. при малых значениях коэффициентов демпфирования.

Второй подход заключается в использовании итерационной процедуры, а также численных методов для решения дифференциального уравнения и вычисления интеграла (8). Такой подход до сих пор в литературе не использовался. Предлагаемая методика включает следующие этапы:

- на основании экспериментальной осциллограммы фиксируются следующие параметры $t_0, t_z, y_0, \dot{y}_0 = 0, T, k = \frac{2\pi}{T}$ (T – период колебаний);
- задается вид функции трения и начальное значение коэффициента b_i ;
- численно решаем дифференциальное уравнение (1), строим расчетную диаграмму колебаний, определяем расчетный момент времени затухания t_{zp} и численные значения скорости;
- вычисляется интеграл (8);
- по формуле (9) определяется расчетный коэффициент b_{ip} ;
- контролируется выполнение условий $t_{zp} = t_z$ и $b_{ip} = b_i$, если они не выполняются, то повторяются все процедуры при новом значении коэффициента b_i .

Рассмотрим указанную методику на примере. Пусть задан осциллятор, движения которого описывается дифференциальным уравнением (1). Согласно экспериментальной осциллограмме [3] $t_0 = 0,013, t_z = 0,76 \text{ с}, y_0 = 0,003, \dot{y}_0 = 0, T = 0,012 \text{ с}, k = \frac{2\pi}{T}$. Для описания внутреннего трения принимаем, например функцию (2) $f_1 = b_1 \psi_{\text{sign}}(\dot{y})$. Задаем произвольное значение коэффициента $b_1 = 3$. Численно решается дифференциальное уравнение (1) и строится график $y(t)$ (рисунок 1, а). По графику найдем $t_{zp} = 0,96$. Вычисляется интеграл J_n и по формуле (9) определяется расчетное значение коэффициента $b_{ip} = 3,181$.

Из рисунка 1, а видно, что расчетное время затухания $t_{zp} > t_z$ и $b_{ip} \neq b_1$. Очевидно, что коэффициент b_1 необходимо увеличить. Например при $b_1 = 4$ получаем $b_{ip} = 4,001$, тогда $t_{zp} = t_z$ (рисунок 1, б).

Рассмотрим этот же пример, если для описания внутреннего трения принята функция (4) $f_3 = b_3 \psi_2 \psi_{\text{sign}}(\dot{y})$.

Задаем произвольное значение коэффициента $b_3 = 30$. Результаты численного решения уравнения (1) представлены на рисунке 2, а, откуда видно, что расчетное время затухания $t_{zp} > t_z$. Коэффициент демпфирования согласно расчету $b_{3ip} = 30,151 \neq b_3$. Очевидно, что коэффициент b_3 необходимо увеличить. Например, при $b_3 = 64$ получаем $b_{3ip} = 64,076$, тогда $t_{zp} = t_z$ (рисунок 2, б).

Численные эксперименты показали, что предложенная методика после ее реализации в одном из стандартных программных пакетов представляет собой эффективный и достаточно точный инструмент для расчета коэффициента демпфирования при любой форме функции трения.

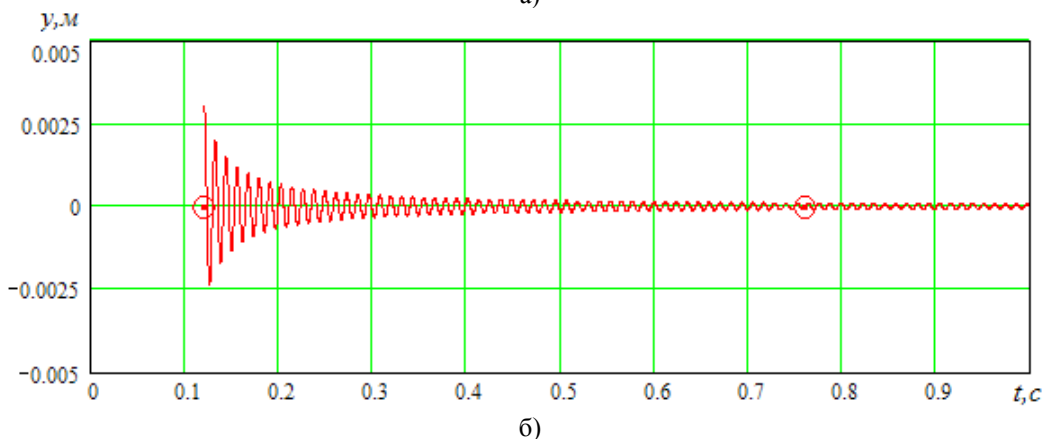
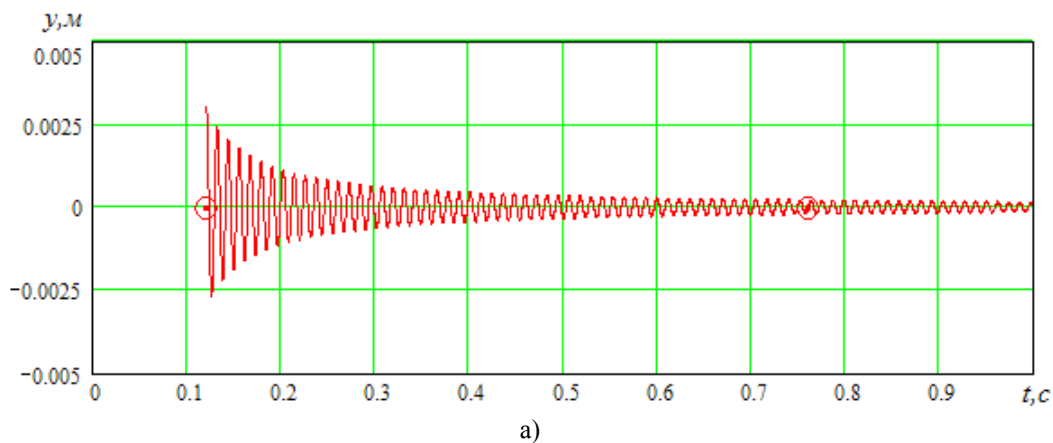


Рисунок 2 – Расчетные графики колебаний балки в случае сухого трения
для коэффициентов демпфирования: а) $b_3 = 30$; б) $b_3 = 64$

Выводы

1. На основе теоремы об изменении кинетической энергии получена расчетная формула для определения коэффициента демпфирования при произвольном виде показательной функции трения.
2. Предложена методика расчета коэффициента демпфирования с использованием итерационной процедуры.
3. Показано, что достаточная для инженерных расчетов точность достигается после трех – пяти итераций.

Библиографический список

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики, Т.2. — Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. — М.: Наука, 1985. — 492 с.
2. Магнус К. Колебания / К. Магнус. — М.: Мир, 1982. — 302 с.
3. Хромов Е.В. Исследование вынужденных колебаний осциллятора в около резонансной области для различных характеристик демпфирования // Вестн. НТУ(ХПИ) Сер. Динамика и прочность: сб. науч. тр. — Харьков, 2007. — Вып. 38. — С. 168 – 174.

Поступила в редакцию 13.11.2007 г.