

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет
Факультет радиоэлектроники
Кафедра радиотехники

В.В. Саламатин, И.Л. Афонин

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Часть 1 Электродинамика

Конспект лекций
для студентов высших учебных заведений
направления «Радиотехника»

Севастополь
2008

<http://www.rt.sebastopol.ua>

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Основы теории электромагнитного поля	4
1.1.	Векторы электромагнитного поля	4
1.2.	Материальные уравнения	6
1.3.	Уравнения Максвелла	7
1.3.1.	Первое уравнение Максвелла — обобщенный закон Ампера	7
1.3.2.	Второе уравнение Максвелла — обобщенный закон электромагнитной индукции Фарадея	12
1.3.3.	Третье уравнение Максвелла — обобщенная теорема Гаусса	13
1.3.4.	Четвертое уравнение Максвелла — закон непрерывности магнитных силовых линий	14
1.3.5.	Полная система уравнений Максвелла	15
1.4.	Сторонние силы	16
1.5.	Граничные условия	16
1.6.	Энергия электромагнитного поля	20
	Контрольные вопросы к разделу 1	22
	Задачи к разделу 1	23
2.	Статические и стационарные поля	24
2.1.	Электростатическое поле	24
2.1.1.	Скалярный электростатический потенциал	24
2.1.2.	Потенциальное поле точечного заряда, совокупности точечных зарядов и распределенного заряда	26
2.1.3.	Граничные условия	27
2.1.4.	Уравнения Пуассона и Лапласа	27
2.1.5.	Метод электрических изображений	29
2.2.	Магнитное поле постоянных токов	29
	Контрольные вопросы к разделу 2	32
	Задачи к разделу 2	33
3.	Основные свойства монохроматического поля	34
3.1.	Уравнения Максвелла и вектор Пойнтинга в комплексном виде	34
3.2.	Основные соотношения для плоской электромагнитной волны в однородном диэлектрике	37
3.3.	Комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Плоские волны в однородной среде с конечной проводимостью	43
3.4.	Поляризация плоских волн	46
	Контрольные вопросы к разделу 3	49
	Задачи к разделу 3	50

4.	Волны у границы раздела сред	51
4.1.	Отражение и преломление плоских волн при нормальном падении	51
4.2.	Уравнение плоской волны, движущейся в произвольном направлении	54
4.3.	Отражение плоских волн при наклонном падении	55
4.3.1.	Случай поляризации волны, нормальной к плоскости падения (перпендикулярная поляризация)	55
4.3.2.	Случай поляризации волны в плоскости падения (параллельная поляризация)	58
4.3.3.	Наклонное падение плоской волны на границу двух диэлектриков	59
4.3.4.	Наклонное падение плоской волны на границу раздела диэлектрик—проводник	64
4.4.	Граничные условия Леонтовича	68
4.5.	Эквивалентный поверхностный ток	69
4.6.	Граничные условия для переменных полей у поверхности идеального проводника	70
	Контрольные вопросы к разделу 4	71
	Задачи к разделу 4	71
5.	Волноводы и резонаторы	73
5.1.	Прямоугольный волновод	74
5.1.1.	Поперечно-электрические поля (TE)	76
5.1.2.	Поперечно-магнитные поля (TM)	80
5.1.3.	Волна H_{10} (TE_{10}) в прямоугольном волноводе	82
5.2.	Круглый цилиндрический волновод	86
5.3.	Возбуждение волноводов	90
5.4.	Затухание электромагнитных волн в волноводе с потерями	90
5.5.	Объемные резонаторы	93
	Контрольные вопросы к разделу 5	99
	Задачи к разделу 5	99

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1. Векторы электромагнитного поля

Электромагнитное поле представляет собой единство двух своих составляющих — электрического и магнитного полей. Источником электромагнитного поля являются электрические заряды. Неподвижные заряды создают только электрическое поле. Движущиеся заряды создают как электрическое, так и магнитное поле. Величина электрического заряда измеряется в кулонах (Кл) и обозначается символом Q . В простейшем (идеализированном) случае электрический заряд считают точечным. Если же он распределен в пространстве, то его называют объемным и характеризуют в каждой точке объемной плотностью ρ

$$\rho = \frac{\partial Q}{\partial V}, \text{ Кл/м}^3. \quad (1.1)$$

Из (1.1) следует соотношение для определения заряда, заключенного в некотором объеме

$$Q = \int_V \rho dV, \text{ Кл}. \quad (1.2)$$

Если объемный заряд движется со скоростью $\vec{V}$, то в каждой точке пространства можно определить вектор плотности электрического тока $\vec{j}$

$$\vec{j} = \rho \vec{V}. \quad (1.3)$$

Электрический ток I , протекающий сквозь некоторую поверхность S (например, сечение проводника), связан с плотностью тока $\vec{j}$ соотношением

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \text{ А}, \quad (1.4)$$

где вектор $d\vec{S}$ направлен по нормали, равен по величине элементу dS и называется вектор-площадкой.

Математически под электромагнитным полем можно понимать поле четырех основных векторов $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ или, другими словами, рассматривать часть пространства, в любой точке, которой однозначно существуют векторы $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$. При этом они имеют следующую интерпретацию:

- $\vec{E}$, В/м — вектор напряженности электрического поля;
- $\vec{D}$, Кл/м² — вектор электрической индукции (смещения);
- $\vec{H}$, А/м — вектор напряженности магнитного поля;
- $\vec{B}$, Вб/м²=Тл (Тесла) — вектор магнитной индукции.

Считают, что поле определено, если в каждой точке пространства извест-

ны величины и направления этих четырех векторов.

Вектор электрической индукции $\vec{D}$ характеризует связь электрического заряда с собственным электрическим полем. Вокруг электрического заряда существует электрическое поле, которое изображается силовыми линиями. Поток вектора электрической индукции $\psi = \oint_S \vec{D} d\vec{S}$ через окружающую заряд поверхность S равен величине этого заряда

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q. \quad (1.5)$$

Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ характеризует связь электрического тока с собственным магнитным полем. Вокруг провода с током создается магнитное поле, замкнутые линии которого окружают этот провод. Направление вектора $\vec{H}$ можно определить по правилу «буравчика». Связь вектора $\vec{H}$ и тока I определяется соотношением

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I, \quad (1.6)$$

т.е. циркуляция вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру l равна току I , пронизывающему поверхность, ограниченную этим контуром. Вектор $d\vec{l}$ является элементом контура.

Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ определяют как силу, с которой электрическое поле действует на единичный точечный положительный заряд. На заряд Q действует сила

$$\vec{F}_э = Q\vec{E}. \quad (1.7)$$

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ можно определить из соотношения

$$\vec{F}_м = Q(\vec{V} \times \vec{B}), \quad (1.8)$$

где $\vec{F}_м$ — сила действия на заряд магнитного поля;

$\vec{V}$ — вектор скорости движения заряда.

Суперпозиция сил, создаваемых электрической и магнитной составляющими поля, называется лоренцевой силой (силой Лоренца)

$$\vec{F} = \vec{F}_э + \vec{F}_м = Q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (1.9)$$

1.2. Материальные уравнения

Электрические и магнитные свойства среды характеризуются тремя параметрами:

- абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_a , Ф/м;
- абсолютной магнитной проницаемостью μ_a , Гн/м;
- удельной электрической проводимостью σ , См/м.

Эти параметры среды входят в материальные уравнения, связывающие попарно векторы электромагнитного поля:

$$\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}, \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H}, \quad \bar{j} = \sigma \bar{E}. \quad (1.10)$$

Параметры большинства известных сред в обычных условиях **скалярны** и **постоянны**. При этом соответствующие пары векторов **коллинеарны**, а их модули связаны линейной зависимостью. Такие среды называются **изотропными** и **линейными**. При возрастании напряженности поля линейная зависимость может нарушиться, среда становится **нелинейной**, а ее параметры — зависимыми от величины поля. В **анизотропных** средах свойства среды в разных направлениях различны. Для описания таких сред применяют **несимметричные тензоры**: $\|\varepsilon_a\|$, $\|\mu_a\|$, $\|\sigma\|$. Примерами анизотропных сред являются феррит, плазма в магнитном поле. Как правило, нелинейность или анизотропия проявляется лишь в одном из материальных соотношений. Соответственно различают нелинейные диэлектрики, анизотропные магнетики и т.п. Среда называется **однородной**, если ее параметры одинаковы, и **неоднородной**, если параметры меняются от точки к точке. В дальнейшем, если не сделано специальных оговорок, среды считаются линейными, изотропными и однородными.

Абсолютная диэлектрическая проницаемость ε_a связывает векторы $\bar{D}$ и $\bar{E}$ (1.10). Абсолютную диэлектрическую проницаемость вакуума обозначают ε_0 и называют **электрической постоянной**. Ее численное значение составляет

$$\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \text{ Ф/м.}$$

Относительная диэлектрическая проницаемость — безразмерная величина, приводимая в справочных таблицах. Она представляет собой отношение абсолютной диэлектрической проницаемости к электрической постоянной

$$\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0. \quad (1.11)$$

Абсолютная магнитная проницаемость μ_a связывает векторы магнитного поля $\bar{B}$ и $\bar{H}$. Абсолютную магнитную проницаемость вакуума называют **магнитной постоянной**: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Относительная магнитная проницаемость представляет собой отношение

$$\mu = \mu_a / \mu_0. \quad (1.12)$$

Значения μ для различных материалов приводятся в справочных таблицах.

Плотность тока $\vec{j}$ связана с напряженностью электрического поля $\vec{E}$ в каждой точке проводящей среды. Множитель σ в третьем уравнении (1.10) $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ называется удельной электрической проводимостью среды. При $\sigma = \text{const}$ это уравнение выражает закон Ома в дифференциальной форме. Проводимость металлов имеет численное значение порядка 10^7 См/м, для диэлектриков лежит в пределах $10^{-7} \dots 10^{-18}$ См/м.

1.3. Уравнения Максвелла

Основные уравнения электричества и магнетизма, кроме законов Фарадея, были получены при наблюдении стационарных полей. С логической точки зрения не следует, что они остаются неизменными для полей, зависящих от времени. Поэтому так велика заслуга Максвелла, который обобщил полученные до него экспериментальные закономерности на случай произвольного электромагнитного поля в произвольной среде, введя всего лишь одно дополнительное слагаемое в закон, открытый Ампером, создав систему уравнений. Макроскопическая теория электромагнетизма основывается на уравнениях Максвелла. Необъятное количество экспериментальных фактов, полученных после введения этих уравнений, не оставляет сомнения в их правильности, так как выводы электромагнитной теории находятся в неизменном соответствии с результатами опытов и практической деятельности.

Исходными в нашем рассмотрении являются уравнения Максвелла в интегральной форме, как непосредственно основанные на опыте. Дифференциальные уравнения поля, справедливые почти в любой его точке, выводятся затем аналитически. Уравнения Максвелла не только устанавливают взаимосвязь электрических токов и зарядов с полем, но и определяют свойства самого поля. Найденные Максвеллом законы электромагнетизма относятся к числу фундаментальных законов природы и замечательны в следующем отношении: они могут дать больше, чем заключено в том материале, из которого они получены. Об уравнениях Максвелла знаменитый немецкий физик Генрих Герц писал: *«нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытав по временам такого чувства, будто математические формулы живут собственной жизнью, обладая собственным разумом — кажется, что эти формулы умнее нас, умнее даже самого автора, как будто они дают нам больше, чем в свое время было в них заложено»*.

1.3.1. Первое уравнение Максвелла — обобщенный закон Ампера

Согласно закону Ампера

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

В частном случае, если контур l в виде окружности охватывает проводник

с током I , при этом центр окружности совпадает с осью проводника, то вследствие симметрии напряженность магнитного поля H одинакова во всех точках контура, т.е. не зависит от переменной интегрирования и ее можно вынести за знак интеграла

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_l H d\vec{l} = H \oint_l d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = I,$$

откуда

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

где r — расстояние от центра проводника до точки наблюдения.

Максвелл обобщил закон Ампера на случай переменного тока. В правой части уравнения он дополнительно ввел слагаемое $I_{\text{см}}$, так называемый ток смещения, обусловив это необходимостью сохранения количества электричества в ограниченной системе. Введенное Максвеллом понятие тока смещения, как мы увидим впоследствии, оказалось очень плодотворным. Его величина определяется по формуле, вывод которой приведен ниже

$$I_{\text{см}} = \int_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (1.13)$$

где $\vec{j}_{\text{см}}$ — плотность тока смещения.

Таким образом, первое уравнение Максвелла является обобщенным законом Ампера в интегральной форме и записывается следующим образом

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (1.14)$$

Векторы электромагнитного поля, заряды и токи могут быть связаны между собой либо интегральными соотношениями, либо дифференциальными. Переход от одних соотношений к другим осуществляется с помощью двух теорем векторного анализа: теоремы Остроградского-Гаусса и теоремы Стокса.

Теорема Остроградского-Гаусса связывает интеграл от некоторого векторного поля $\vec{A}$ по замкнутой поверхности S с интегралом по объему V , ограниченному этой поверхностью, следующим соотношением

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} dV. \quad (1.15)$$

Теорема Стокса связывает интеграл по замкнутому контуру l с интегралом по поверхности S , ограниченной этим контуром

$$\oint_l \bar{A} d\bar{l} = \int_S \text{rot } \bar{A} d\bar{S}. \quad (1.16)$$

Значения дифференциальных операторов дивергенции и ротора в различных координатных системах приведены в приложении А. Их выражения в декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$\text{div } \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\text{rot } \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Для получения выражения (1.13), определяющего ток смещения, рассмотрим основные законы электрического тока.

Электрическим током через замкнутую поверхность S называется скорость изменения количества электричества Q в объеме V , ограниченном поверхностью S , с обратным знаком

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (1.17)$$

Учитывая, что $I = \int_S \bar{j} d\bar{S}$ и $Q = \int_V \rho dV$, переписываем (1.17) в виде

$$\int_S \bar{j} d\bar{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

или, меняя порядок дифференцирования и интегрирования, получаем

$$\int_S \bar{j} d\bar{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Преобразуя поверхностный интеграл левой части на основании теоремы Остроградского-Гаусса в интеграл по объему, имеем

$$\int_S \bar{j} d\bar{S} = \int_V \text{div } \bar{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Это равенство, справедливое для произвольного объема, может выпол-

няться только в том случае, если равны подынтегральные выражения

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Уравнение (1.18) является дифференциальным выражением уравнения (1.17) и называется **уравнением непрерывности тока и заряда**.

Истоками линий плотности тока являются те точки поля, где плотность заряда изменяется со временем. Для постоянного тока объемная плотность зарядов ρ в каждой точке среды должна оставаться постоянной, т.е. $\partial \rho / \partial t = 0$, а это означает, что

$$\operatorname{div} \bar{j} = 0. \quad (1.19)$$

Следовательно,

$$\oint_S \bar{j} d\bar{S} = \int_V \operatorname{div} \bar{j} dV = 0. \quad (1.20)$$

Уравнения (1.19) и (1.20) носят название первого закона Кирхгофа в дифференциальной и интегральной формах соответственно. Линии постоянного тока не имеют истоков и стоков. Другими словами, цепь постоянного тока должна быть замкнута. В случае переменного тока линии тока оказались незамкнуты, так как имеют истоки и стоки в точках с изменяющейся плотностью заряда

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Максвелл обобщил принцип непрерывности линий тока на случай переменного тока путем введения понятия о токе смещения.

Известно (1.5), что

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = Q = \int_V \rho dV.$$

Применив к этому равенству теорему Остроградского-Гаусса, получим

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \operatorname{div} \bar{D} dV = \int_V \rho dV \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \bar{D} = \rho. \quad (1.21)$$

Подставляя (1.21) в (1.18), находим

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{D}).$$

Переносим правую часть в левую и меняя порядок дифференцирования по времени и по пространственным координатам, получаем

$$\operatorname{div} \left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) утверждает, что вектор, представляющий собой сумму векторов $\bar{j}$ и $\partial \bar{D}/\partial t$, непрерывен. Другими словами, вектор $\partial \bar{D}/\partial t$ дополняет вектор плотности тока до замкнутости. Максвелл ввел понятие о плотности тока смещения $\bar{j}_{\text{см}}$, понимая под ним второе слагаемое уравнения (1.22)

$$\bar{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (1.23)$$

По Максвеллу существует полный ток, плотность которого состоит из двух слагаемых: плотности тока проводимости $\bar{j}$, пропорциональной напряженности электрического поля ($\bar{j} = \sigma \bar{E}$), и плотности тока смещения, пропорциональной производной напряженности поля по времени $\left(\bar{j}_{\text{см}} = \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right)$

$$\bar{j}_{\text{полн}} = \bar{j} + \bar{j}_{\text{см}}.$$

Таким образом $\operatorname{div} \bar{j}_{\text{полн}} = 0$.

Принцип непрерывности линий тока соблюдается и для случая переменного тока. Ток смещения определяется по выражению (1.13)

$$I_{\text{см}} = \int_S \bar{j}_{\text{см}} d\bar{S} = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{S}. \quad (1.24)$$

Меняя порядок интегрирования и дифференцирования, получаем

$$I_{\text{см}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{D} d\bar{S} = \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Переход от интегрального уравнения Максвелла (1.14) к дифференциальному может быть осуществлен с помощью теоремы Стокса (1.16)

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot} \bar{H} d\bar{S} = \int_S \left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S},$$

откуда

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \sigma \bar{E} + \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Ротор вектора напряженности магнитного поля в любой его точке равен сумме плотности тока проводимости и скорости изменения вектора электриче-

ской индукции в этой точке.

Закон Ампера в дифференциальной форме записывается уравнением

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}. \quad (1.27)$$

Из уравнения (1.27) на основании формулы векторного анализа $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} = 0$ вытекает, что дивергенция правой части равенства (1.27) равна нулю, т.е. $\operatorname{div} \bar{j} = 0$. Между тем, это условие выполняется лишь в частном случае постоянного тока. Для переменных токов закон сохранения количества электричества приводит к требованию, чтобы

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Уравнение (1.27) и равенство (1.28) находятся в очевидном противоречии друг с другом. Не подвергая сомнению закон сохранения количества электричества, мы должны признать несправедливость уравнения (1.27) для переменного поля. Максвелл высказал предположение о том, как надо «исправить» это уравнение для переменных полей. По Максвеллу следует в правую часть уравнения (1.27) вместо плотности тока проводимости поставить плотность полного тока, переписав уравнение (1.27) в виде

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}_{\text{полн}},$$

где $\bar{j}_{\text{полн}}$ — есть сумма векторов плотностей токов проводимости и смещения.

Так как $\operatorname{div} \bar{j}_{\text{полн}} = 0$, то это «исправленное» уравнение находится в согласии с законом сохранения количества электричества.

1.3.2. Второе уравнение Максвелла — обобщенный закон электромагнитной индукции Фарадея

По Фарадею, если через поверхность S , ограниченную проводящим контуром l , проходит меняющийся по времени магнитный поток, то в контуре возникает электродвижущая сила индукции. Обобщение закона по Максвеллу заключается в отказе от ограничения, наложенного на него словами «проводящий» контур. Согласно Максвеллу соотношение

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

выполняется для всякого контура независимо от того, является ли этот контур проводящим или произвольно выбранным в диэлектрической среде, т.е., меняющееся во времени магнитное поле вызывает (независимо от параметров

среды) электрическое вихревое поле.

Поток Φ вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по аналогии с потоком ψ вектора электрической индукции $\vec{D}$ можно записать в виде:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

тогда второе уравнение Максвелла в интегральной форме — обобщенный закон электромагнитной индукции Фарадея запишется в следующем виде

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (1.29)$$

Для перехода к дифференциальной форме применяем теорему Стокса

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Так как S — произвольная поверхность, равенство интегралов возможно только при равенстве подынтегральных выражений

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (1.30)$$

Ротор вектора напряженности электрического поля в любой его точке равен по величине и противоположен по знаку скорости изменения вектора магнитной индукции в этой точке. Таким образом, электрическое поле создается как электрическими зарядами, так и любым изменением во времени вектора магнитной индукции.

1.3.3. Третье уравнение Максвелла — обобщенный закон Гаусса

Поток электрической индукции $\psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ через любую замкнутую поверхность S равен электрическому заряду, заключенному внутри этой поверхности

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV. \quad (1.31)$$

Это соотношение известно из электростатики как теорема Гаусса. Оно было обобщено Максвеллом на случай полей, произвольно зависящих от времени. Уравнение устанавливает, что электрические заряды служат истоками и стоками электрического поля, линии электрической индукции выходят из областей,

содержащих положительные заряды, и входят в области, где находятся отрицательные заряды.

Связь между объемной плотностью ρ электрического заряда и вектором электрической индукции $\bar{D}$ устанавливается обобщенной теоремой Гаусса в дифференциальной форме. Дифференциальную форму теоремы Гаусса можно получить из интегральной, используя теорему Гаусса-Остроградского

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \operatorname{div} \bar{D} dV = \int_V \rho dV. \quad (1.32)$$

Равенство (1.32) сохраняется при произвольном объеме V , следовательно, равны и подынтегральные выражения

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho. \quad (1.33)$$

В каждой точке поля дивергенция вектора $\bar{D}$ равна объемной плотности электрического заряда.

Дивергенция вектора есть величина, инвариантная по отношению к преобразованию координат, хотя форма ее записи в разных координатных системах различна. Величины, не меняющие своего значения при преобразовании координат, называются *инвариантными*.

1.3.4. Четвертое уравнение Максвелла — закон неразрывности магнитных силовых линий

Экспериментально было обнаружено, что силовые линии вектора магнитной индукции $\bar{B}$ независимо от того, создается ли поле постоянными магнитами или катушками с током, образуют в пространстве замкнутые линии. Математически это описывается уравнением

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0. \quad (1.34)$$

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Линии вектора $\bar{B}$ замкнуты, либо уходят в бесконечность.

Применяя теорему Гаусса-Остроградского, получаем соотношение (1.34) в дифференциальной форме

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = \int_V \operatorname{div} \bar{B} dV = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \quad (1.35)$$

Из сравнения уравнений $\oint_S \bar{D} d\bar{S} = Q$ и $\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0$ вытекает, что магнитные

заряды в природе отсутствуют.

Уравнения Максвелла составляют основу всей электродинамики. Из первых двух уравнений следует, что при любом изменении во времени электрического поля возникает вихревое магнитное поле (первое уравнение), любое изменение магнитного поля создает в свою очередь, вихревое электрическое поле (второе уравнение). Таким образом, переменное электрическое и магнитное поля не существуют независимо друг от друга, они непрерывно переходят одно в другое и, как будет показано ниже, образуют электромагнитную волну.

1.3.5. Полная система уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла описывают электромагнитное поле как форму материи, характеризующую явлениями, возникающими в пространстве при наличии электрических токов и зарядов. Полная система этих уравнений представлена в таблице 1.1.

Таблица 1.1 — Полная система уравнений Максвелла

	Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	Уравнения Максвелла в интегральной форме	Физическое содержание уравнений
I	$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$	$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \bar{j} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \epsilon_a \bar{E} d\bar{S}$	<i>Токи смещения поля наравне с токами проводимости образуют магнитное поле.</i>
II	$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$	$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mu_a \bar{H} d\bar{S}$	<i>Переменное магнитное поле образует вихревое электрическое поле.</i>
III	$\operatorname{div} \epsilon_a \bar{E} = \rho$	$\oint_s \epsilon_a \bar{E} d\bar{S} = \Sigma Q$	<i>Электрическое поле может иметь истоки. Истоками электрического поля являются электрические заряды.</i>
IV	$\operatorname{div} \mu_a \bar{H} = 0$	$\oint_s \mu_a \bar{H} d\bar{S} = 0$	<i>Магнитное поле не имеет истоков. В природе свободные магнитные заряды отсутствуют.</i>

Если параметры среды ϵ_a , μ_a , σ не зависят от напряженностей поля $\bar{E}$ и $\bar{H}$, то система уравнений Максвелла будет линейной.

Раздел физики, посвященный изучению переменных электромагнитных полей называется **электродинамикой**.

1.4. Сторонние силы

Для создания электромагнитного поля используются источники, получающие энергию извне. Источник электромагнитного поля принято называть *сторонней силой*. **Сторонняя сила** — электромагнитная величина ($\bar{j}_{\text{ст}}$, $I_{\text{ст}}$, $\bar{E}_{\text{ст}}$, $\bar{H}_{\text{ст}}$ и т.д.) заданная как функция координат и времени в качестве исходной при расчете данного электромагнитного поля. Сторонняя сила является источником данного поля и существует за счет внешних (для данного поля) энергетических ресурсов. Между сторонней силой и созданным ею полем имеется очевидное соответствие по частоте колебаний и функциональной зависимости от времени. Сторонние силы вводятся в основные уравнения электромагнитного поля в виде дополнительных слагаемых, например, $\bar{j}_{\text{ст}}$ в правой части первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j}_{\text{ст}},$$

где $\bar{j}_{\text{ст}}$ — плотность стороннего тока,
и $\rho_{\text{ст}}$ в третьем уравнении

$$\text{div } \bar{D} = \rho + \rho_{\text{ст}},$$

где $\rho_{\text{ст}}$ — объемная плотность стороннего заряда.

Сторонние силы вводятся в те уравнения, где фигурируют аналогичные величины, в данном случае электрические токи и заряды.

1.5. Граничные условия

На граничной поверхности раздела сред параметры ϵ , μ , σ скачкообразно изменяются. При этом, согласно выражениям (1.10): $\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$, $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$, $\bar{j} = \sigma \bar{E}$, неизбежно испытывают скачки некоторые векторы поля. Для решения задач электродинамики, помимо уравнений Максвелла, необходимо знать **граничные условия** — соотношения между векторами поля в двух очень близких точках, находящихся по обе стороны границы раздела двух сред. Граничные условия являются следствием уравнений Максвелла в интегральной форме для этого особого случая.

Вектор поля с произвольной ориентацией может быть представлен геометрической суммой двух составляющих: касательной и нормальной к граничной плоскости (рисунок 1.1). Определим соотношения между касательными составляющими векторов поля двух сред и нормальными составляющими.

Граничные условия для касательных составляющих векторов поля

Предположим, что имеются две однородные среды, разделенные граничной поверхностью S (рисунок 1.2), на которой могут возникать поверхностные электрические заряды, а также поверхностные электрические токи (т.е. токи, текущие в бесконечно тонком поверхностном слое).

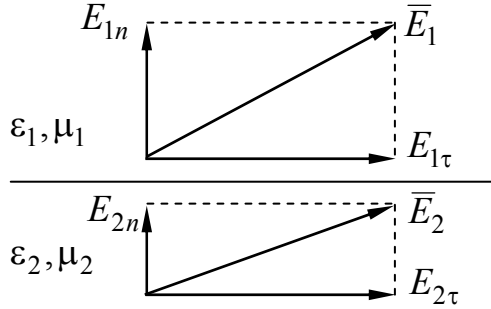


Рисунок 1.1 — Составляющие вектора $\vec{E}$ на границе раздела сред

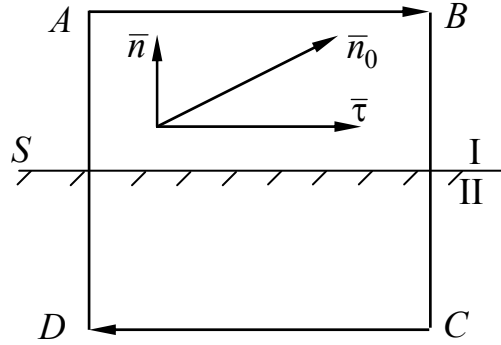


Рисунок 1.2 — К выводу граничных условий для касательных составляющих векторов поля

Распределение зарядов и токов на границе S будем характеризовать поверхностной плотностью заряда σ_S и вектором поверхностной плотности тока $\vec{j}_S$. Обозначим векторы поля в первой и второй средах $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ и $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ соответственно и найдем связь между ними.

Построим контур $ABCD$, пересекающий поверхность S (рисунок 1.2). Применяя к этому контуру первое и второе уравнения Максвелла в интегральной форме, получаем

$$\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = I_S + \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (1.36)$$

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (1.37)$$

где I_S , Ψ , Φ — соответственно ток, электрический поток и магнитный поток через поверхность контура.

Если стороны AB и CD прижимать к границе S так, что площадь $ABCD$ обращается в ноль, то в пределе $\Psi = \Phi = 0$. Однако величина I_S при наличии на S поверхностных токов в ноль не обращается, ибо деформированный (сжатый) контур все равно будет охватывать ток.

Пусть расстояние от точки A до точки B равно dl . Вводя далее вектор $d\vec{l} = \vec{\tau} dl$, где $\vec{\tau}$ — орт касательной к стороне AB сжатого контура, из уравнения (1.36), получаем

$$\vec{H}_1 d\vec{l} - \vec{H}_2 d\vec{l} = I_S = \vec{j}_S \vec{n}_0 dl,$$

где $\bar{n}_0$ — орт нормали к поверхности контура.

Отсюда следует, что на поверхности S

$$(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)\bar{\tau} = \bar{j}_S \bar{n}_0, \quad \text{но} \quad \bar{\tau} = \bar{n}_0 \times \bar{n},$$

тогда

$$(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)(\bar{n}_0 - \bar{n}) = \bar{j}_S \bar{n}_0 \quad \text{или} \quad \bar{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{j}_S.$$

Учитывая, что

$$\bar{n} \times \bar{H}_1 = \bar{n} \times (\bar{H}_{1n} + \bar{H}_{1\tau}) = \bar{n} \times \bar{H}_{1\tau},$$

получаем

$$\bar{n} \times (\bar{H}_{1\tau} - \bar{H}_{2\tau}) = \bar{j}_S. \quad (1.38)$$

Таким образом, при переходе через границу S с поверхностным током касательная составляющая вектора $\bar{H}$ испытывает скачок. Величина этого скачка равна поверхностной плотности тока $\bar{j}_S$. Если поверхностных токов на граничной поверхности нет, то равенство (1.38) принимает вид

$$\bar{n} \times (\bar{H}_{1\tau} - \bar{H}_{2\tau}) = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\bar{H}_{1\tau} = \bar{H}_{2\tau}. \quad (1.39)$$

Во второе уравнение Максвелла электрические токи непосредственно не входят, поэтому независимо от того, есть или нет поверхностный ток, из (1.37) получаем

$$\bar{E}_{1\tau} = \bar{E}_{2\tau}. \quad (1.40)$$

На *границе раздела реальных сред* касательные составляющие векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ *всегда непрерывны*.

Граничные условия для нормальных составляющих векторов поля

Рассмотрим на границе раздела сред S , которая в общем случае может быть заряжена с поверхностной плотностью σ_S , площадку ΔS настолько малой величины, чтобы можно было положить равномерно распределенными на ней заряд и векторы поля (рисунок 1.3). Затем построим цилиндр высотой Δh так, чтобы рассматриваемая площадка представляла его поперечное сечение. Тогда, применяя к области, заключенной в цилиндре, третье уравнение Максвелла (1.31), получаем

$$\oint_{S_{\text{цил}}} \bar{D} d\bar{S} = \int_{\Delta S} \sigma_S dS = \sigma_S \Delta S. \quad (1.41)$$

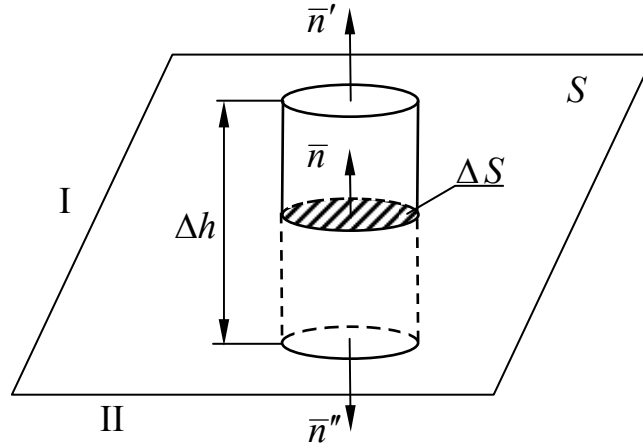


Рисунок 1.3 — К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов поля

Поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую поверхность цилиндра состоит из потоков через основания цилиндра в первой ($\vec{D}_1 \vec{n}' \Delta S$) и второй ($\vec{D}_2 \vec{n}'' \Delta S$) средах и потока через всю боковую поверхность цилиндра — $\int_{S_{\text{бок}}} \vec{D}_{1,2} d\vec{S}$, т.е.

$$\vec{D}_1 \vec{n}' \Delta S + \vec{D}_2 \vec{n}'' \Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{D}_{1,2} d\vec{S} = \sigma_S \Delta S.$$

Устремим высоту цилиндра к нулю ($\Delta h \rightarrow 0$). Тогда поток через боковую поверхность $\int_{S_{\text{бок}}} \vec{D}_{1,2} d\vec{S} \rightarrow 0$, так как поверхность $S_{\text{бок}} \rightarrow 0$. При этом также $\vec{n}' \rightarrow \vec{n}$, а $\vec{n}'' \rightarrow -\vec{n}$. Следовательно, при условии, что $\Delta h \rightarrow 0$ будем иметь

$$\vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} = \sigma_S \quad \text{или} \quad \vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \sigma_S,$$

$$\epsilon_{a1} E_{1n} - \epsilon_{a2} E_{2n} = \sigma_S. \quad (1.42)$$

Нормальная составляющая вектора электрической индукции при переходе через граничную поверхность претерпевает скачок, численно равный поверхностной плотности электрического заряда. Поверхностный заряд может образоваться на поверхности проводника в электростатическом поле. В переменном электромагнитном поле такие заряды возможны лишь на поверхности идеальных проводников. Поэтому при переменных полях в **реальных** средах нормальная составляющая вектора электрической индукции на границе не меняется

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{или} \quad \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}.$$

Используя четвертое уравнение Максвелла для магнитной индукции (1.34), рассуждая аналогичным образом, получаем

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \text{или} \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$$

Нормальные составляющие векторов магнитной индукции на границе раздела сред равны друг другу.

1.6. Энергия электромагнитного поля

Энергия представляет собой количественную меру движения материи. **Закон сохранения энергии** — один из фундаментальных законов природы. Явления **электромагнетизма** подчиняются ему без всяких исключений. В равной степени электромагнитное поле подчиняется **закону сохранения массы**, связанной с энергией W формулой Эйнштейна $W = mc^2$, и **закону сохранения импульса**.

Энергия, сосредоточенная в произвольном объеме может изменяться во времени, вследствие:

— перехода внутри объема V электромагнитной формы движения материи в другие формы: тепловую, механическую, химическую и другие. Для электромагнитного поля это равнозначно потерям. Скорость отдачи энергии электромагнитным полем называется мощностью его потерь P_{Π} ;

— приобретение электромагнитным полем внутри объема V энергии от сторонних источников. При этом скорость увеличения энергии поля равна мощности сторонних сил $P_{\text{ст}}$;

— пересечения электромагнитными волнами, переносящими определенную энергию, граничной поверхности S . В этом случае электромагнитная форма движения материи сохраняется. Поток электромагнитных волн из некоторого объема будем называть излучением. Мощность излучения $P_{\text{изл}}$.

По закону сохранения энергии, введенные величины должны быть связаны соотношением

$$\frac{dW}{dt} = P_{\text{ст}} - P_{\Pi} - P_{\text{изл}}. \quad (1.43)$$

Теорема Умова-Пойнтинга о сохранении энергии в электромагнитном поле

В произвольном объеме V электромагнитного поля сосредоточен запас энергии, равный

$$W = \int_V \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV = \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (1.44)$$

С изменением электрического и магнитного полей во времени объемная плотность электрической энергии $\epsilon_a E^2/2$ и объемная плотность магнитной

энергии $\mu_a H^2/2$ меняются. Для того чтобы выяснить, что происходит с общим запасом энергии, найдем из уравнений Максвелла значения производных $\partial \bar{E}/\partial t$ и $\partial \bar{H}/\partial t$:

$$\varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \text{rot } \bar{H} - \bar{j};$$

$$\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\text{rot } \bar{E}.$$

Умножая первое из написанных равенств скалярно на $\bar{E}$, а второе на $\bar{H}$ и складывая их, получаем

$$\varepsilon_a \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_a \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \bar{E} \text{rot } \bar{H} - \bar{H} \text{rot } \bar{E} - \bar{j} \bar{E}. \quad (1.45)$$

Но

$$\bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{E}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2); \quad \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{H}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (H^2),$$

а согласно тождеству

$$\bar{E} \text{rot } \bar{H} - \bar{H} \text{rot } \bar{E} = -\text{div}(\bar{E} \times \bar{H}),$$

уравнение (1.45) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) = -\text{div}(\bar{E} \times \bar{H}) - \bar{j} \bar{E},$$

или, интегрируя по объему и меняя знаки на обратные, будем иметь

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = \int_V \text{div}(\bar{E} \times \bar{H}) dV + \int_V \bar{j} \bar{E} dV. \quad (1.46)$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем первый интеграл правой части (1.46) по поверхности S , ограничивающей рассматриваемый объем

$$\int_V \text{div}(\bar{E} \times \bar{H}) dV = \int_S (\bar{E} \times \bar{H}) dS.$$

Тогда, обозначая

$$\bar{E} \times \bar{H} = \bar{\Pi}, \quad (1.47)$$

получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = \int_V \bar{j} \bar{E} dV + \int_S \bar{\Pi} d\bar{S}. \quad (1.48)$$

Уравнение (1.48) выражает собой закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Рассмотрим его физическое содержание. Левая часть уравнения представляет собой скорость изменения во времени полного запаса электромагнитной энергии в рассматриваемом объеме с обратным знаком $(-dW/dt)$. Первый член правой части представляет собой потери мощности P_{Π} в проводящих частях объема V . Второе слагаемое в правой части — поток вектора плотности энергии, протекающего через поверхность S в единицу времени. Таким образом,

$$-\frac{dW}{dt} = P_{\Pi} + \int_S \bar{\Pi} d\bar{S}. \quad (1.49)$$

Согласно определению вектора $\bar{\Pi}$ (1.47), энергия электромагнитного поля в каждой точке движется по нормали к плоскости, образованной векторами $\bar{E}$ и $\bar{H}$, в сторону, совпадающую с поступательным движением правовинтового штопора, вращаемого от вектора $\bar{E}$ к вектору $\bar{H}$ на наименьший угол.

Уравнение (1.49) утверждает, что изменение запаса электромагнитной энергии в произвольном объеме обусловлено, во-первых, превращением части ее в тепло (при конечной проводимости среды) и, во-вторых, движением энергии в пространстве через поверхность, ограничивающую объем. Рассматриваемое уравнение имеет наименование **теоремы Умова-Пойнтинга**.

Это наименование дано в честь известного русского ученого Н.А. Умова, впервые поставившего и исследовавшего вопрос о потоках энергии любого вида в различных средах, и в честь английского физика Пойнтинга, исследовавшего эти же вопросы применительно к электромагнитному полю.

Вектор $\bar{\Pi}$ получил название **вектора Пойнтинга**.

Контрольные вопросы к разделу 1

1. Назовите векторы, характеризующие электромагнитное поле.
2. Запишите и поясните материальные уравнения для векторов электромагнитного поля.
3. Запишите выражения для электрической и магнитной постоянных.
4. Назовите единицы измерения основных электрических и магнитных величин.
5. Напишите четыре уравнения Максвелла в интегральной форме и поясните их физический смысл.
6. Назовите возможные пути перехода от интегральной к дифференциальной форме записи уравнений Максвелла.
7. Получите первое и второе уравнения Максвелла в дифференциальной форме и поясните их физический смысл.
8. Найдите уравнения непрерывности электрического тока, а также третье и четвертое уравнения Максвелла в дифференциальной форме и поясните их физический смысл.
9. Объясните необходимость введения граничных условий для векторов

поля.

10. Определите понятие сторонних сил.

11. Используя уравнения Максвелла, получите выражения для баланса энергии электромагнитного поля в дифференциальной и интегральной формах и поясните физический смысл входящих в эти выражения слагаемых.

12. Запишите выражения для вектора Пойнтинга и поясните его физический смысл.

Задачи к разделу 1

1. Электрон с зарядом $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, летящий вдоль оси z со скоростью $V = 10000$ км/с, попадает в зону, где одновременно существуют электрическое и магнитное поля: $\vec{E} = \vec{i} E_x$, $E_x = 10^6$ В/м и $\vec{B} = \vec{j} B_y$, $B_y = 0.04$ Т. Определите направление и величину силы, действующей на электрон и его ускорение.

2. Положительный заряд Q равномерно распределен по объему шара радиуса R . Найдите электрическую индукцию D и напряженность электрического поля E в точках, расположенных вне и внутри шара. Диэлектрическая проницаемость материала шара и окружающей среды соответственно равны ϵ_a и ϵ_0 . Постройте графики зависимостей указанных величин (D и E) от расстояния r до центра шара.

3. Определите напряженность магнитного поля H , создаваемую постоянным током I , текущим по бесконечному цилиндрическому проводнику кругового сечения радиусом R , вне и внутри проводника. Постройте график зависимости H от расстояния r до оси проводника.

4. Мощность, излучаемая Солнцем, равна $P_C = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите мощность, падающую на Землю. Расстояние от Солнца до Земли $r_{CЗ} \cong 150 \cdot 10^6$ км, радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

5. Имеется плоская граница раздела двух сред, обладающих относительными диэлектрическими проницаемостями: $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_2 = 81$. Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}_1$ в первой среде образует угол $\theta_1 = 45^\circ$ с направлением нормали. Найдите ориентацию вектора $\vec{E}_2$ во второй среде.

2. СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

Стационарными называются поля, неизменные во времени. Они подчиняются общим законам электромагнетизма, но в частном случае, когда все величины постоянны во времени (при этом $\partial/\partial t \equiv 0$).

Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной форме для этого случая:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{j}; & \operatorname{rot} \bar{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0; & \operatorname{div} \bar{D} &= \rho; \\ \bar{B} &= \mu_a \bar{H}; & \bar{D} &= \varepsilon_a \bar{E}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Стороннюю силу представим, как постоянную напряженность электрического поля $\bar{E}_{\text{ст}}$, которая наряду с собственным полем $\bar{E}$ создает в среде электрический ток в соответствии с законом Ома

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_{\text{ст}}).$$

Сравнив уравнения (2.1) с полной системой уравнений Максвелла, заметим, что обоюдная связь между электрическим и магнитным полями утрачена. Магнитное поле не влияет на электрическое. Однако электрическое поле создает в проводящей среде токи, непрерывно связанные с магнитным полем.

2.1. Электростатическое поле

2.1.1. Скалярный электростатический потенциал

Электростатическое поле связано с системой неподвижных электрических зарядов. Оно является частным случаем стационарного поля при $\bar{j} = 0$ и может, следовательно, существовать только в среде, проводимость которой равна нулю.

Уравнения Максвелла для электростатики имеют вид:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \quad \operatorname{div} \bar{D} = \rho; \quad \bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}. \quad (2.2)$$

Из равенства $\operatorname{rot} \bar{E} = 0$ вытекает, что электростатическое поле — бивихревое. Всякое **безвихревое** поле является **потенциальным** и может быть представлено в виде градиента некоторой скалярной функции φ , для которого справедливо тождество $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$, известное из векторного анализа.

Выразим напряженность электростатического поля $\bar{E}$ через градиент скалярного электростатического потенциала φ , взятый с обратным знаком, т.е.

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (2.3)$$

Знак минус означает, что вектор $\vec{E}$ направлен от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом. Градиентом скалярной функции φ называется вектор, направленный в сторону быстрого увеличения φ и равный по величине производной по указанному направлению. Производная по любому направлению $\bar{l} = \bar{l}_l l$ равна проекции градиента φ на это направление:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \bar{l}_l \text{grad} \varphi. \quad (2.4)$$

В прямоугольной системе координат $\text{grad} \varphi$ можно представить в виде геометрической суммы проекций на соответствующие оси

$$\text{grad} \varphi = \bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует

$$\partial \varphi = \text{grad} \varphi \cdot \bar{l}_l \cdot \partial l = \text{grad} \varphi \cdot \partial \bar{l}. \quad (2.6)$$

Интегрируя φ от точки 1 до точки 2, получаем с помощью выражений (2.3) и (2.6)

$$\int_1^2 \partial \varphi = \int_1^2 \text{grad} \varphi \cdot d\bar{l}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} d\bar{l}. \quad (2.7)$$

Разность потенциалов между двумя точками равна линейному интегралу от вектора $\vec{E}$, взятому с обратным знаком, между этими точками. Из формулы (2.7) следует, что разность потенциалов не зависит от пути интегрирования. Выражения (2.3) и (2.7) позволяют перейти от описания электростатического поля с помощью вектора $\vec{E}$ к описанию поля при помощи функции φ и обратно. Оба описания поля равноправны. Однако оперировать со скалярной функцией проще, чем с векторной. В отличие от напряженности поля, являющейся функцией точки, потенциал определен лишь разностью своих значений в двух точках. Можно, однако, записать

$$\varphi_2 = - \int_1^2 \vec{E} d\bar{l} + \varphi_1.$$

Следовательно, потенциал φ_2 определяется с точностью до постоянной φ_1 . Значение φ_1 может быть выбрано произвольно. В связи с этим целесообразно ввести некоторую точку и потенциалу ее условно придать нулевое значение. Обычно за точку нулевого потенциала принимают точку, находящуюся в бесконечности. При инженерном анализе работы отдельных электрических устройств за нулевой потенциал часто принимают потенциал Земли, больших металлических масс, экранов и т.д.

Потенциал φ какой-либо точки численно равен работе A по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности ($\varphi_1 = 0$) в данную точку

$$A = -\int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = -Q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = Q(\varphi_2 - \varphi_1) = Q\varphi_2. \quad (2.8)$$

Скалярные поля изображаются **поверхностями уровня**, для потенциала эта поверхность называется **эквипотенциальной** и соответствует геометрическому месту точек, где $\varphi = \text{const}$. Градиент скалярной функции по определению всегда перпендикулярен поверхности уровня, поэтому в электростатическом поле линии вектора $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

2.1.2. Потенциальное поле точечного заряда, совокупности точечных зарядов и распределенного заряда

Напряженность поля точечного заряда Q определяется из выражения

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2} \cdot \vec{l}_r.$$

Найдем потенциал произвольной точки поля $M(r)$ по формуле (2.7) интегрированием от бесконечности до r , считая $\varphi_{(\infty)} = 0$

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E}(r) d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r}. \quad (2.9)$$

Линии поля $\vec{E}$ расходятся от заряда по радиусам. Эквипотенциальными поверхностями является семейство концентрических сфер.

Если поле создано совокупностью точечных зарядов, то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \sum \frac{Q_i}{r_i}. \quad (2.10)$$

В случае, когда заряды распределены в объеме V непрерывно

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r}, \quad (2.11)$$

где r — расстояние от точки наблюдения до произвольного элемента объема dV . При этом интегрирование производится по всему объему, где имеются заряды, т.е. по координатам точек источников.

2.1.3. Граничные условия

Для решения задач электростатики необходимо знать условия на границе раздела диэлектрик—проводник. Внутри проводника электрическое поле отсутствует, так как в противном случае в нем протекал бы ток $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Следовательно, в электростатике на границе любого проводника будут следующие граничные условия:

$$E_{\tau} = 0, \quad E_n = -\frac{\sigma_S}{\epsilon_a}.$$

Здесь σ_S — поверхностная плотность заряда.

В соответствии с выражением $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ граничные условия для потенциала запишутся как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\sigma_S}{\epsilon_a}.$$

Поверхность проводника эквипотенциальна. Таким образом, поверхностная плотность заряда пропорциональна нормальной производной от потенциала у его поверхности.

На границе раздела двух диэлектриков граничные условия имеют вид:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \epsilon_{a1} E_{1n} = \epsilon_{a2} E_{2n}.$$

2.1.4. Уравнения Пуассона и Лапласа

Объединяя уравнения $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ и $\text{div} \epsilon_a \vec{E} = \rho$, получаем

$$\text{div grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) носит название **уравнения Пуассона**. Другая форма записи этого уравнения следующая

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (2.13)$$

где ∇ — символический оператор набла, имеющий, например, для прямоугольной системы координат вид

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда в прямоугольной системе координат уравнение Пуассона записывается следующим образом

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (2.14)$$

В области, свободной от зарядов, потенциал поля подчиняется **уравнению Лапласа**, являющемуся частным случаем уравнений (2.12) или (2.13), (2.14):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= 0; \\ \nabla^2 \varphi &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Уравнения Пуассона и Лапласа определяют дифференциальные свойства потенциала в каждой точке поля.

Решение уравнений Лапласа и Пуассона требует задания граничных условий. Эти граничные условия выражаются аналитически наиболее просто в том случае, когда форма граничных поверхностей соответствует форме координатных поверхностей. Поэтому выбранная система координат должна быть адекватна исследуемой задаче. Так при расчете поля между плоскостями удобна, очевидно, прямоугольная система координат. В случае изучения поля с осевой симметрией преимущества имеет цилиндрическая система координат, в случае симметрии относительно центра — сферическая.

В качестве примера рассчитаем поле плоского конденсатора.

Пусть находящиеся в однородной среде параллельные пластины A и B имеют соответственно потенциалы $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = \varphi_0$. Расстояние между пластинами d (рисунок 2.1). Выбираем расположение координатных осей так, как это показано на рисунке. В рассматриваемой задаче поле зависит только от координаты x , поэтому, сохраняя в уравнении Лапласа (2.15) только первое слагаемое, получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = C_1 x + C_2.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 & \text{при } x &= 0, \\ \varphi &= \varphi_0 & \text{при } x &= d. \end{aligned}$$

В соответствии с этим имеем:

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{\varphi_0}{d}.$$

Таким образом,

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{d} \cdot x.$$

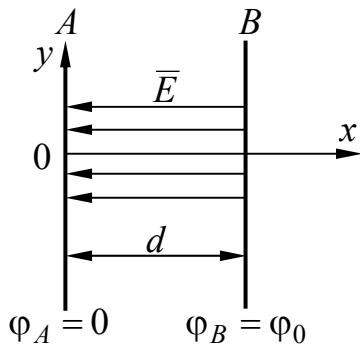


Рисунок 2.1 — Поле плоского конденсатора

Потенциал изменяется линейно с изменением x . Напряженность поля определяется как градиент потенциала

$$\bar{E} = -\text{grad} \varphi = -\bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \text{ т.е.}$$

$$\bar{E} = -\bar{i} \frac{\varphi_0}{d} \quad \text{и} \quad E = \frac{\varphi_0}{d}.$$

Напряженность поля постоянна во всех его точках и направлена в сторону, противоположную оси x . Учитывая, что у поверхности проводника

$$E_n = \frac{\sigma_S}{\epsilon_a},$$

имеем для пластины A :

$$\sigma_{SA} = -E_n \cdot \epsilon_a = -\frac{\varphi_0}{d} \epsilon_a,$$

для пластины B :

$$\sigma_{SB} = \frac{\varphi_0}{d} \epsilon_a.$$

Заряд распределен на пластинах равномерно. Общий заряд на площадке величиной S равен

$$Q = \sigma_S \cdot S = \frac{\varphi_0 \epsilon_a S}{d}.$$

Следовательно, емкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{\epsilon_a S}{d}.$$

Аналогично рассчитывается поле заряженной сферы, заряженного круглого цилиндра при использовании уравнения Лапласа в сферической и цилиндрической системах координат соответственно.

2.1.5. Метод электрических изображений

Пусть имеется бесконечная эквипотенциальная плоскость S (проводник), над которой задано некоторое распределение зарядов (рисунок 2.2). Требуется определить поле, созданное этими зарядами над плоскостью. Непосредственное определение поля суммированием полей от отдельных зарядов, очевидно, невозможно, так как для этого необходимо знать распределение индуцированных зарядов на самой плоскости.

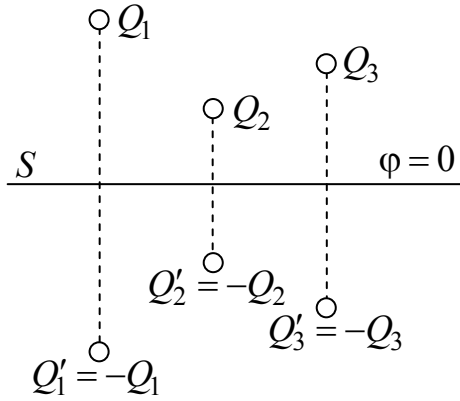


Рисунок 2.2 — К расчету поля зарядов над проводящей поверхностью

Искомое поле должно удовлетворять уравнению Лапласа для всего свободного от зарядов пространства над плоскостью и удовлетворять граничным условиям, а именно: заданным значениям зарядов или потенциалов на заряженных телах и постоянству потенциала на плоскости. Значение потенциала на плоскости можно, не нарушая общности решения, положить равным нулю. Теперь легко видеть, что если взамен индуцированных зарядов, расположенных на плоскости, ввести фиктивные (зеркальные) заряды Q'_1 , Q'_2 , Q'_3 , равные и обратные по знаку

зарядам Q_1 , Q_2 , Q_3 и расположенные симметрично относительно плоскости, то поле, созданное зарядами Q_1 , Q_2 , Q_3 , и фиктивными зарядами Q'_1 , Q'_2 , Q'_3 , будет удовлетворять в верхнем полупространстве тем же граничным условиям, что и поле зарядов Q_1 , Q_2 , Q_3 над проводящей поверхностью, а граничные условия на плоскости удовлетворяются вследствие симметричного расположения относительно плоскости равных по величине и противоположных по знаку зарядов. Введенные фиктивные заряды, позволяющие удовлетворить граничным условиям на плоскости, называются **электрическими изображениями** истинных зарядов.

Таким образом, метод электрических изображений основан на идее проведения сложной задачи электростатики к более простой задаче с теми же граничными условиями.

2.2. Магнитное поле постоянных токов

Магнитное поле постоянного тока определяется уравнениями:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}; \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0; \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H}. \quad (2.16)$$

Для их решения вводится вспомогательная величина — **векторный потенциал** $\bar{A}$ магнитного поля. В силу тождества

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} = 0$$

в уравнении $\operatorname{div} \bar{B} = 0$ полагаем

$$\bar{B} = \mu_a \bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A}. \quad (2.17)$$

Таким образом, задача о нахождении вектора $\bar{H}$ сводится к задаче о нахождении вспомогательного вектора $\bar{A}$. Однако равенство (2.17) не определяет

вектор $\bar{A}$ однозначно, так как для того, чтобы задать поле вектора, надо задать не только его вихрь, но и истоки. Поскольку вектор $\bar{A}$ имеет для нас вспомогательное значение и необходимо лишь знание его вихрей, то истоки вектора можно задать произвольно. Представляется целесообразным положить, что

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0. \quad (2.18)$$

Из (2.17) имеем

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \bar{A}.$$

Подставляя $\bar{H}$ в уравнение

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j},$$

получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \mu_a \bar{j}.$$

На основании тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}$$

и учитывая (2.18), получаем

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{j}. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) является **уравнением Пуассона в векторной форме**.

Решение уравнения Пуассона для скалярного потенциала

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$$

имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

По аналогии с ним решение уравнения (2.19) такое же:

$$\bar{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\bar{j} dV}{r}. \quad (2.20)$$

Объем V охватывает все области, где плотность токов отлична от нуля.

Если ток протекает по проводнику, диаметр которого мал по сравнению с расстоянием r в выражении (2.20), ток можно считать линейным, протекающим по тонкой нити. Тогда в результате интегрирования $\bar{j} dS dl$ по поперечному сечению получаем $I d\bar{l}$, и формула для векторного потенциала принимает вид

$$\bar{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{I d\bar{l}}{r}, \quad (2.21)$$

где $d\vec{l}$ — элемент контура с током.

Определив вектор $\vec{A}$, с помощью формулы

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{A}$$

находят напряженность магнитного поля. Если магнитное поле создается контуром l_1 с током I_1 , то индуктивность этого контура равна отношению собственного магнитного потока Φ_{11} , пронизывающего контур, к току I_1

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_{S_1} \vec{B}_1 d\vec{S}.$$

Для второго контура l_2 с током I_2 его собственная индуктивность рассчитывается аналогично, т.е.

$$L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \frac{1}{I_2} \int_{S_2} \vec{B}_2 d\vec{S}.$$

Отношение магнитного потока Φ_{12} , пронизывающего контур l_1 , к вызвавшему его току в контуре l_2 , называется взаимной индуктивностью M_{12} между контурами 1 и 2

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{1}{I_2} \int_{S_1} \vec{B}_2 d\vec{S},$$

аналогично

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}.$$

Взаимные индуктивности равны между собой. Сосредоточенные параметры L и M определяют связь электрических цепей с созданным ими в окружающем пространстве магнитным полем и рассчитываются методами теории стационарных полей.

Контрольные вопросы к разделу 2

1. Какое поле называется электростатическим?
2. Напишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме для стационарных полей.
3. Какова взаимосвязь вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ и векторного потенциала φ в дифференциальной и интегральной формах?
4. Напишите выражения для потенциального поля точечного заряда, совокупности точечных зарядов, распределенного заряда.

5. Напишите уравнения Пуассона и Лапласа в общем виде и в прямоугольной системе координат.
6. В чем заключается суть метода зеркальных изображений?
7. Напишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме для магнитного поля постоянного тока.
8. Как вводится векторный потенциал $\vec{A}$ магнитного поля?
9. Напишите решение уравнения Пуассона для векторного потенциала.

Задачи к разделу 2

1. Найдите напряженность электрического поля и емкость плоского конденсатора. Площадь пластины — S , расстояние между пластинами — d , относительная диэлектрическая проницаемость — ϵ , потенциал одной из пластин равен нулю, другой — ϕ_0 . (Указание: примените уравнение Лапласа.)
2. Определите напряженность электрического поля и емкость сферического конденсатора. Радиус внутренней сферы — a , радиус внешней сферы — b . Внешняя сфера имеет нулевой потенциал, внутренняя — потенциал ϕ_0 . Относительная диэлектрическая проницаемость среды между проводящими сферами — ϵ . (Указание: примените уравнение Лапласа.)
3. Найдите полную величину энергии электростатического поля заряженного диэлектрического шара, находящегося в свободном пространстве ($\epsilon = 1$). Заряд шара — Q , радиус шара — R , относительная диэлектрическая проницаемость шара $\epsilon_{\text{ш}} = 2$. Сравните энергию внутри шара и вне его.
4. Радиус проводящей сферы — a . Расстояние от центра шара до точечного заряда Q равно b . Сфера заземлена, т.е. ее потенциал $\phi = 0$. Определите величину зеркального изображения заряда и его положение.
5. Найдите напряженность магнитного поля H внутри центрального проводника коаксиального кабеля, в пространстве между проводниками, внутри внешнего проводника и вне кабеля. Радиус внутреннего проводника — a , радиусы внешнего проводника b и c . По коаксиальному кабелю передается постоянный ток I .
6. По круглому витку радиуса R протекает ток I (рисунок 2.3). Необходимо определить на большом расстоянии от витка ($r_c \gg R$) векторный потенциал и показать, что при этом виток действует как магнитный диполь.

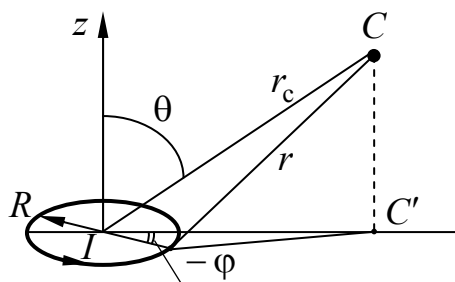


Рисунок 2.3 — К расчету поля витка с током

3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

3.1. Уравнения Максвелла и вектор Пойнтинга в комплексном виде

Ниже будут приведены уравнения Максвелла, а также другие соотношения для электромагнитного поля, меняющегося во времени по гармоническому закону. Гармонические колебания имеют широкое применение в радиотехнике. Следует также указать, что многие негармонические процессы при теоретическом анализе могут быть представлены с помощью рядов или интегралов Фурье в виде суперпозиции гармонических колебаний. Поэтому изучение гармонических процессов и, в частности, монохроматического электромагнитного поля весьма полезно для практики.

Для анализа гармонических колебаний удобно использовать символический метод, согласно правилам которого любая гармонически изменяющаяся величина

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где A_m — амплитуда; ω — угловая частота; φ — начальная фаза колебаний, заменяется комплексной функцией

$$a_k(t) = A_m e^{i(\omega t + \varphi)},$$

над которой и совершаются последующие математические операции. Функция $a_k(t)$, называемая **текущим** или **мгновенным комплексом**, обычно записывается в виде

$$a_k(t) = A_m e^{i(\omega t + \varphi)} = A_m e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = \dot{A} \cdot e^{i\omega t},$$

где $\dot{A} = A_m e^{i\varphi}$ — независящая от времени комплексная амплитуда, т.е. комплексное число, модуль и аргумент которого равны амплитуде и начальной фазе вещественной функции, описывающей гармонические колебания.

Так как всякого рода линейные операции (сложение, вычитание, дифференцирование, интегрирование) над вещественной и мнимой частями комплексной величины производятся отдельно, указанная замена приводит к правильному результату, если от конечных комплексных функций с множителем $e^{i\omega t}$ вновь перейти к соответствующим синусоидальным функциям, т.е. вычислить вещественную часть получающейся комплексной величины. Разумеется, все это будет справедливо при условии, что рассматриваются только линейные соотношения.

Итак, меняющееся во времени по гармоническому закону электромагнитное поле может быть представлено комплексными векторными функциями

$$\vec{E}_k = \vec{\dot{E}}(x, y, z) \cdot e^{i\omega t}; \quad \vec{H}_k = \vec{\dot{H}}(x, y, z) \cdot e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

где $\dot{\vec{E}}(x, y, z)$ и $\dot{\vec{H}}(x, y, z)$ — независимые от времени комплексные функции, называемые комплексными векторными амплитудами напряженности электрического и магнитного полей. Ясно, что векторные амплитуды являются функциями координат точки наблюдения в пространстве. Истинные (мгновенные) значения векторов поля при этом будут равны вещественной части.

$$\bar{E} = \text{Re}(\bar{E}_k) \quad \text{и} \quad \bar{H} = \text{Re}(\bar{H}_k).$$

Как следует из (3.1), производные функций $\bar{E}_k$ и $\bar{H}_k$ по времени определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}_k}{\partial t} &= i\omega \dot{\vec{E}}(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} = i\omega \bar{E}_k; \\ \frac{\partial \bar{H}_k}{\partial t} &= i\omega \dot{\vec{H}}(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} = i\omega \bar{H}_k. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Система уравнений Максвелла для монохроматических полей в комплексном виде имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{H}_k &= \bar{j}_k + i\omega \epsilon_a \bar{E}_k; \\ \text{rot } \bar{E}_k &= -i\omega \mu_a \bar{H}_k; \\ \text{div}(\epsilon_a \bar{E}_k) &= \rho_k; \\ \text{div}(\mu_a \bar{H}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Такой же вид имеют уравнения для комплексных амплитуд напряженностей поля, которые можно получить из предыдущих уравнений путем сокращения их на общий множитель $e^{i\omega t}$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{H}} &= \dot{\vec{j}} + i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}; \\ \text{rot } \dot{\vec{E}} &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}; \\ \text{div}(\epsilon_a \dot{\vec{E}}) &= \dot{\rho}; \\ \text{div}(\mu_a \dot{\vec{H}}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введение в уравнения Максвелла комплексных величин основано на линейности этих уравнений. Однако в выражении для вектора Пойнтинга использовать подобные приемы нельзя.

С практической точки зрения мгновенные значения плотности энергии поля в режиме гармонических колебаний не представляют существенного интереса. Более важно в этом случае знать среднее значение подобных величин

$$\bar{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\Pi} dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\bar{E} \cdot \bar{H}] dT = \frac{1}{T} \int_0^T [\text{Re}(\bar{E}_{\kappa}) \cdot \text{Re}(\bar{H}_{\kappa})] dt. \quad (3.5)$$

Вещественные части $\text{Re}(\bar{E}_{\kappa})$ и $\text{Re}(\bar{H}_{\kappa})$ можно представить как полусуммы комплексных $\bar{E}_{\kappa}$, $\bar{H}_{\kappa}$ и комплексно-сопряженных функций $\bar{E}_{\kappa}^*$, $\bar{H}_{\kappa}^*$:

$$\text{Re}(\bar{E}_{\kappa}) = \frac{\bar{E}_{\kappa} + \bar{E}_{\kappa}^*}{2}; \quad \text{Re}(\bar{H}_{\kappa}) = \frac{\bar{H}_{\kappa} + \bar{H}_{\kappa}^*}{2}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{\text{cp}} &= \frac{1}{4T} \int_0^T [\bar{E}_{\kappa} \bar{H}_{\kappa} + \bar{E}_{\kappa}^* \bar{H}_{\kappa} + \bar{E}_{\kappa} \bar{H}_{\kappa}^* + \bar{E}_{\kappa}^* \bar{H}_{\kappa}^*] dt = \\ &= \frac{1}{4T} \int_0^T [\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}} \cdot e^{i2\omega t} + \dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}} + \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* + \dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}}^* \cdot e^{-i2\omega t}] dt = \frac{1}{4} [\dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}} + \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^*]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Представим

$$\dot{\bar{E}} = \alpha_1 + i\beta_1 \quad \text{и} \quad \dot{\bar{H}} = \alpha_2 + i\beta_2,$$

тогда

$$\dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}} = (\alpha_1 - i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2 - i\beta_1\alpha_2 + i\alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2;$$

$$\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 - i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2 + i\beta_1\alpha_2 - i\alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2.$$

Просуммировав левые и правые части этих равенств, получаем

$$\dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}} + \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* = 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) = 2\text{Re}[\dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}}] = 2\text{Re}[\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^*].$$

Следовательно,

$$\bar{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{4} [\dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}} + \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^*]. \quad (3.8)$$

Таким образом, среднее значение вектора Пойнтинга $\bar{\Pi}_{\text{cp}}$ в гармоническом электромагнитном поле равно вещественной части комплексного вектора

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} [\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*], \quad (3.9)$$

который носит название **комплексного вектора Пойнтинга**.

3.2. Основные соотношения для плоской электромагнитной волны в однородном диэлектрике

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля в однородной диэлектрической среде, свободной от сторонних токов и зарядов, имеют вид:

1. $\text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_a \vec{E};$
2. $\text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{H};$
3. $\text{div } \vec{E} = 0;$
4. $\text{div } \vec{H} = 0.$

Предположим, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ являются функциями только времени и одной из декартовых координат, например, координаты z . Тогда, используя прямоугольную систему координат и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

получаем для проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ из уравнений 1 и 2 следующие соотношения:

- | | | | |
|----|---|-----|---|
| 5. | $-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = i\omega\epsilon_a \dot{E}_x;$ | 8. | $-\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -i\omega\mu_a \dot{H}_x;$ |
| 6. | $\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} = i\omega\epsilon_a \dot{E}_y;$ | 9. | $\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -i\omega\mu_a \dot{H}_y;$ |
| 7. | $i\omega\epsilon_a \dot{E}_z = 0;$ | 10. | $i\omega\mu_a \dot{H}_z = 0.$ |

Из уравнений 3 и 4 следует:

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 11. | $\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} = 0;$ | 12. | $\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z} = 0.$ |
|-----|--|-----|--|

Из уравнений 7 и 11 следует, что E_z не зависит ни от времени, ни от пространственных координат. Естественно, что такое поле не существует, поэтому $E_z = 0$. Аналогично и $H_z = 0$. Таким образом, электромагнитное поле имеет лишь составляющие, перпендикулярные оси z .

Из рассмотрения уравнений 5, 6, 8, 9 видно, что система уравнений Максвелла распадается на две независимые системы (I) и (II), а именно:

$$i\omega\epsilon_a \dot{E}_x = -\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -i\omega\mu_a \dot{H}_y; \quad (\text{I})$$

$$i\omega\epsilon_a\dot{E}_y = \frac{\partial\dot{H}_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial\dot{E}_y}{\partial z} = i\omega\mu_a\dot{H}_x. \quad (\text{II})$$

Уравнения системы (I) связывают составляющие $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$, тогда как уравнения системы (II) связывают составляющие $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$ электромагнитного поля. Взаимосвязанными являются лишь взаимно перпендикулярные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Иными словами, системы (I) и (II) описывают два независимых друг от друга поля, в каждом из которых электрический $\vec{E}$ и магнитный $\vec{H}$ векторы взаимно перпендикулярны. Для дальнейшего анализа сохраним лишь систему (I):

$$\begin{aligned} i\omega\epsilon_a\dot{E}_x &= -\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}; \\ \frac{\partial\dot{E}_x}{\partial z} &= -i\omega\mu_a\dot{H}_y. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Чтобы иметь уравнение, содержащее только одну из функций, например, $\dot{E}_x$, продифференцируем второе уравнение по z и, подставив в него значение $\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}$ из первого уравнения, получим

$$\frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial z^2} + \omega^2\epsilon_a\mu_a\dot{E}_x = 0.$$

Обозначим $\omega^2\epsilon_a\mu_a = k^2$. Тогда

$$\frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial z^2} + k^2\dot{E}_x = 0. \quad (3.11)$$

Полученное уравнение хорошо известно математикам и называется **уравнением Гельмгольца** или **уравнением колебаний (волновым уравнением)**.

Решение этого уравнения целесообразно записать следующим образом

$$\dot{E}_x = \dot{E}_n e^{-ikz} + \dot{E}_o e^{ikz}, \quad (3.12)$$

где $\dot{E}_n$ и $\dot{E}_o$ — произвольные, вообще говоря, комплексные постоянные.

Для перехода к мгновенным значениям левую и правую части уравнения (3.12) нужно умножить на временной множитель $e^{i\omega t}$, т.е.

$$\bar{E}_{kx} = \dot{E}_n e^{-ikz} e^{i\omega t} + \dot{E}_o e^{ikz} e^{i\omega t}. \quad (3.13)$$

Или переходя от символической записи к обычной, получаем

$$E_x = E_{nm} \cos(\omega t - kz) + E_{om} \cos(\omega t + kz). \quad (3.14)$$

Таким образом, общее решение (3.13) или (3.14) представляет собой сумму двух частных решений, каждое из которых называется **волновой функцией** или **волной**.

Аргумент косинуса, т.е. $\omega t \pm kz$, называемый обычно фазой волны, является функцией времени t и пространственной координаты z . Если зафиксировать z , то величина $E_{n,o}$ принимает те же самые значения через промежутки времени, кратные периоду $T = 2\pi/\omega$. Если же фиксировано время, то величина $E_{n,o}$ изменяется периодически вдоль оси z с периодом λ , называемым длиной волны. Легко видеть, что величины k и λ связаны друг с другом

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ м}^{-1}. \quad (3.15)$$

Число k служит важнейшей характеристикой волнового процесса и носит название **постоянной распространения волны**. Употребляются также термины **фазовая постоянная** и **волновое число**. Физический смысл величины k состоит в том, что она указывает, на сколько радиан изменяется фаза волны при прохождении одного метра пути. Наличие двух знаков в формулах (3.13) — в множителе $e^{\mp ikz}$ и в (3.14) — в аргументе $\cos(\omega t \pm kz)$ связано с тем, что плоские волны могут распространяться в двух противоположных направлениях.

Назовём поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$\omega t \pm kz = \text{const},$$

волновым фронтом плоской волны. Очевидно, что в рассматриваемом случае волновые фронты представляют собой бесконечные плоскости, перпендикулярные оси z и перемещающиеся в пространстве со скоростью

$$V_\phi = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k}, \quad (3.16)$$

носящей название **фазовой скорости**.

Поскольку время изменяется всегда лишь в одном направлении, уравнение $(\omega t - kz) = \text{const}$ соответствует фронту волны, распространяющейся в направлении положительной оси z . Изменение знака в фазе волны ведёт к изменению направления её распространения.

Следовательно, первое частное решение в уравнениях (3.13), (3.14) представляет собой плоскую волну, движущуюся со скоростью V_ϕ вдоль оси z , второе частное решение также представляет собой плоскую волну, движущуюся со скоростью V_ϕ , но уже в отрицательном направлении оси z .

Подставляя в формулу (3.16) значение $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$, получаем

$$V_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (3.17)$$

Фазовая скорость волны в однородном диэлектрике определяется параметрами среды ϵ_a и μ_a .

Фазовая скорость в вакууме равна

$$V_{\Phi 0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$V_{\Phi 0} = c. \quad (3.18)$$

Таким образом, получен один из основных результатов теории Максвелла: отождествление скорости света в вакууме со скоростью произвольной электромагнитной волны. Другими словами, скорость плоских электромагнитных волн в вакууме равна скорости света c независимо от частоты колебаний этих волн. В физике среды с подобными свойствами носят название сред без дисперсии.

Чтобы решить систему уравнений (I) относительно $\dot{H}_y$, можно продифференцировать первое уравнение по z и подставить в него множитель $\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}$ из второго уравнения. При этом

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y = 0. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.19) аналогично (3.11). Его решение имеет вид

$$\dot{H}_y = \dot{H}_n e^{-ikz} + \dot{H}_o e^{ikz}, \quad (3.20)$$

или

$$H_y = H_{nm} \cos(\omega t - kz) + H_{om} \cos(\omega t + kz), \quad (3.21)$$

где H_n и H_o — произвольные постоянные.

Для нахождения связи между постоянными $\dot{E}_n$, $\dot{E}_o$, $\dot{H}_n$, $\dot{H}_o$ подставим решения (3.12) и (3.20) в первое уравнение системы (I) $i\omega\epsilon_a \dot{E}_x = -\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}$,

$$i\omega\epsilon_a \dot{E}_n e^{-ikz} + i\omega\epsilon_a \dot{E}_o e^{ikz} = ik\dot{H}_n e^{-ikz} - ik\dot{H}_o e^{ikz},$$

так как равенство должно выполняться при любых значениях z , то можно положить

$$i\omega\varepsilon_a \dot{E}_n e^{-ikz} = ik\dot{H}_n e^{-ikz},$$

и

$$i\omega\varepsilon_a \dot{E}_o e^{ikz} = -ik\dot{H}_o e^{ikz},$$

откуда

$$\begin{aligned}\dot{H}_n &= \frac{\omega\varepsilon_a}{k} \dot{E}_n = \frac{\omega\varepsilon_a}{\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} \dot{E}_n = \frac{\dot{E}_n}{\sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}} = \frac{\dot{E}_n}{Z_0}; \\ \dot{H}_o &= -\frac{\omega\varepsilon_a}{k} \dot{E}_o = -\frac{\dot{E}_o}{Z_0},\end{aligned}\quad (3.22)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$.

Следовательно, общие выражения для проекций векторов электрического и магнитного полей принимают вид:

— в символической записи

$$\dot{E}_x = \dot{E}_n e^{-ikz} + \dot{E}_o e^{ikz}, \quad \dot{H}_y = \frac{\dot{E}_n}{Z_0} e^{-ikz} - \frac{\dot{E}_o}{Z_0} e^{ikz}; \quad (3.23)$$

— в тригонометрической форме

$$\begin{aligned}E_x &= E_{nm} \cos(\omega t - kz) + E_{om} \cos(\omega t + kz); \\ H_y &= \frac{E_{nm}}{Z_0} \cos(\omega t - kz) - \frac{E_{om}}{Z_0} \cos(\omega t + kz).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Первое слагаемое в этих выражениях описывает электромагнитную волну, движущуюся в положительном направлении оси z , или так называемую **прямую волну**. Второе слагаемое — **обратную волну**.

Из (3.22) следует, что

$$\frac{\dot{E}_n}{\dot{H}_n} = Z_0 \quad \text{и} \quad -\frac{\dot{E}_o}{\dot{H}_o} = Z_0, \quad (3.25)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$, Ом — величина, которая называется **волновым сопротивлением среды**.

Волновое сопротивление вакуума определяется как

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{10^{-9}/36\pi}} = 377 \text{ Ом.} \quad (3.26)$$

Знак минус перед отношением $\dot{E}_o/\dot{H}_o$ для обратной волны показывает, что вектор Пойнтинга этой волны направлен в сторону, противоположную оси z .

Из выражения (3.22) вытекает, что как для прямой, так и для обратной волн количества энергии, запасённой в электрическом и магнитном полях, равны друг другу, т.е.

$$\mu_a \frac{H^2}{2} = \mu_a \frac{E^2}{2Z_0^2} = \frac{\mu_a E^2}{2\mu_a/\varepsilon_a} = \varepsilon_a \frac{E^2}{2}. \quad (3.27)$$

Покажем теперь, что скорость движения энергии $V_{\text{эн}}$ совпадает по величине со значением скорости движения волновой поверхности $V_{\text{ф}}$. Если прямая волна распространяется в направлении оси z , то за промежуток времени dt через участок S плоскости, перпендикулярной оси z , пройдёт количество энергии dW , равное её величине, заключённой в параллелепипеде длиной $V_{\text{эн}} dt$ и сечением S , т.е.

$$dW = \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \cdot V_{\text{эн}} dt \cdot S.$$

Учитывая (3.27), находим

$$dW = \varepsilon_a E^2 \cdot V_{\text{эн}} dt \cdot S. \quad (3.28)$$

С другой стороны, эту величину можно вычислить при помощи вектора Пойнтинга как

$$dW = \Pi S dt = EH S dt = E^2 \sqrt{\varepsilon_a/\mu_a} S dt. \quad (3.29)$$

Приравнявая выражения (3.28) и (3.29), получаем

$$\varepsilon_a E^2 \cdot V_{\text{эн}} dt S = E^2 \sqrt{\varepsilon_a/\mu_a} S dt,$$

откуда

$$V_{\text{эн}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = V_{\text{ф}}. \quad (3.30)$$

Хотя общее решение системы уравнений (I) представляется в виде наложения двух волн – прямой и обратной, во многих случаях имеет место только одна прямая волна, движущаяся от источника излучения. Обратная волна может существовать, например, тогда, когда среда, в которой находится источник поля, ограничена. Появление обратной волны в этом случае вызвано возмущениями (отражениями), возникающими на границе раздела сред. Следует заметить, что вместо терминов «*прямая*», «*обратная*» часто применяют термины «*падающая*», «*отражённая*» волны.

3.3. Комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Плоские волны в однородной среде с конечной проводимостью

В природе идеальных диэлектриков не существует, и всякая среда обладает некоторой проводимостью. Разделение сред на проводники, полупроводники и диэлектрики может быть произведено по относительным значениям плотности тока проводимости $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ и плотности тока смещения $\vec{j}_{\text{см}} = \omega \epsilon_a \vec{E}$. С этой целью запишем первое уравнение Максвелла для комплексных амплитуд векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в точках, где нет сторонних источников:

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + i\omega \epsilon_a \vec{E} = i\omega \left(\epsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E}.$$

Введём обозначение

$$\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_a \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right) \quad (3.31)$$

и назовем эту величину *комплексной абсолютной диэлектрической проницаемостью*.

Другая форма записи имеет вид

$$\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a (1 - i \text{tg } \sigma), \quad (3.32)$$

$$\text{где } \text{tg } \sigma = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \text{ — тангенс угла потерь.} \quad (3.33)$$

Полученное уравнение

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \dot{\epsilon}_a \vec{E} \quad (3.34)$$

позволяет рассматривать любую среду как «диэлектрик» с комплексной диэлектрической проницаемостью $\dot{\epsilon}_a$. Соотношение значений вещественной части ϵ_a комплексной диэлектрической проницаемости $\dot{\epsilon}_a$ (3.31) и мнимой части σ/ω позволяет определить, является ли эта среда проводником, диэлектриком или полупроводником.

Среда может считаться проводником, если $\sigma \gg \omega \epsilon_a$, и диэлектриком, если $\sigma \ll \omega \epsilon_a$.

Для каждой реальной среды можно определить значение граничной частоты $\omega_{\text{гр}}$, при которой амплитуды плотности токов проводимости и смещения равны между собой, т.е.

$$\omega_{\text{гр}} \epsilon_a = \sigma, \quad \omega_{\text{гр}} = \frac{\sigma}{\epsilon_a}. \quad (3.35)$$

На высоких частотах, при которых $\omega \gg \omega_{\text{гр}}$, в среде преобладающую роль

играют токи смещения. Стало быть, среду можно рассматривать как диэлектрик. Для низких частот ($\omega \ll \omega_{\text{гп}}$) в среде преобладают токи проводимости, и такую среду можно рассматривать как проводник. На промежуточных частотах среда является полупроводником.

Законы распространения плоских волн в среде с конечной проводимостью можно установить, используя результаты для волны в идеальном диэлектрике, заменив лишь вещественную диэлектрическую проницаемость ϵ_a на комплексную диэлектрическую проницаемость $\dot{\epsilon}_a$.

Для волны в идеальном диэлектрике имеем

$$E_{\text{к}} = \dot{E}_{\text{п}} e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad H_{\text{к}} = \frac{\dot{E}_{\text{п}}}{Z_0} e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad (3.36)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, а $Z_0 = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$.

Для волны в среде с конечной проводимостью имеет место

$$E_{\text{к}} = \dot{E}_{\text{п}} e^{-\dot{k}z} e^{i\omega t}, \quad H_{\text{к}} = \frac{\dot{E}_{\text{п}}}{\dot{Z}_0} e^{-\dot{k}z} e^{i\omega t}, \quad (3.37)$$

где $\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \mu_a}$, а $\dot{Z}_0 = \sqrt{\mu_a / \dot{\epsilon}_a}$.

Величины $\dot{k}$ и $\dot{Z}_0$ являются комплексными.

Выясним, какой физический смысл имеет комплексная величина $\dot{k}$. Представим $\dot{k}$ в виде

$$\dot{k} = \beta - i\alpha, \quad (3.38)$$

где β и α — вещественные числа.

После подстановки (3.38) в (3.37) для $E_{\text{к}}$, получаем

$$E_{\text{к}} = \dot{E}_{\text{п}} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}. \quad (3.39)$$

Выражение (3.39) есть запись в символической форме гармонической волны, имеющей амплитуду $E_{\text{пм}} e^{-\alpha z}$ и фазовый множитель β . В обычной записи (3.39) принимает вид

$$E = E_{\text{пм}} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \quad (3.40)$$

Таким образом, комплексный характер величины $\dot{k}$ означает, что электромагнитная волна, двигаясь вдоль оси z , не остается постоянной по амплитуде. Амплитуда волн убывает вдоль направления распространения по экспоненциальному закону. Этот результат является естественным, поскольку наличие проводимости в среде означает, что электромагнитная энергия, переносимая

волной, частично рассеивается в виде тепла.

Комплексный фазовый множитель (3.38) полностью характеризует движение волны. Вещественная часть β имеет тот же смысл, что и фазовый множитель k при движении волны в диэлектрике. Она определяет собой скорость движения волновой поверхности

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (3.41)$$

Эта скорость получила наименование *фазовой скорости*.

Мнимая часть α комплексного фазового множителя определяет собой убывание амплитуды волны и носит название *коэффициента затухания*.

Комплексное волновое сопротивление $\dot{Z}_0$, связывающее амплитуды напряженности электрического и магнитного полей, может быть представлено в виде

$$\dot{Z}_0 = Z_0 e^{i\varphi}, \quad (3.42)$$

где Z_0 — модуль, а φ — аргумент комплексного волнового сопротивления.

Подставляя (3.42) и (3.38) в (3.37) для H_k , получаем

$$H_k = \frac{\dot{E}_{\Pi}}{\dot{Z}_0} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

или для мгновенных значений

$$H = \frac{E_{\Pi m}}{Z_0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi). \quad (3.43)$$

Как видно из (3.43), амплитуда напряженности магнитного поля пропорциональна амплитуде напряженности электрического поля, и отношение амплитуд равно модулю комплексного волнового сопротивления

$$\frac{E_{\Pi m} e^{-\alpha z}}{\frac{E_{\Pi m}}{Z_0} e^{-\alpha z}} = Z_0.$$

Во времени напряженности электрического и магнитного полей сдвинуты по фазе на угол, равный аргументу комплексного волнового сопротивления.

На рисунках 3.1 и 3.2 показаны изменения мгновенных значений векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в зависимости от времени t в некоторой точке пространства $z = z_0$ в однородном диэлектрике и в среде с потерями.

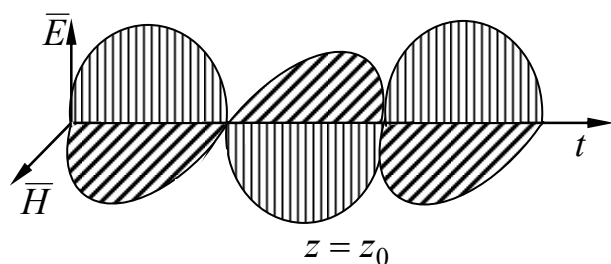


Рисунок 3.1 — Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$
в однородном диэлектрике

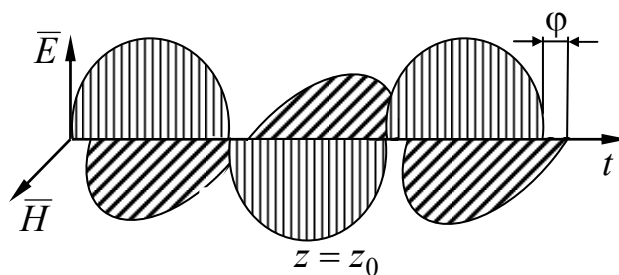


Рисунок 3.2 — Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$
в среде с потерями

На рисунках 3.3 и 3.4 изображены зависимости тех же величин от координаты z в некоторый момент времени $t = t_0$.

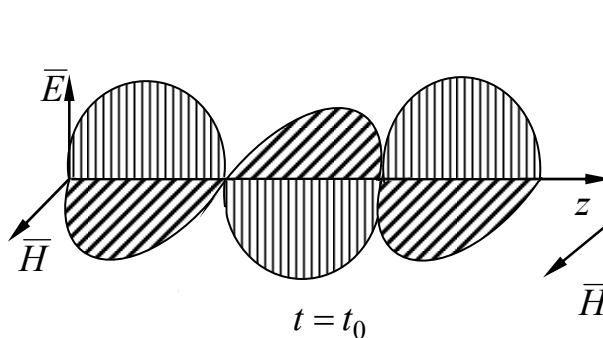


Рисунок 3.3 — Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$
в однородном диэлектрике

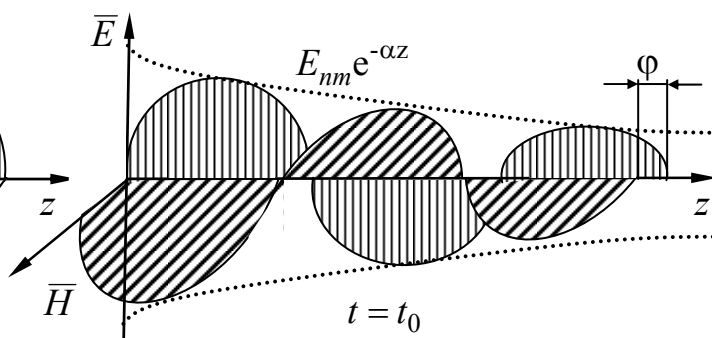


Рисунок 3.4 — Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$
в среде с потерями

Распространение волны сопровождается переносом энергии. В однородной диэлектрической среде имеется только активный поток энергии в направлении оси z . В среде с потерями имеются как активные, так и реактивные потоки энергии.

3.4. Поляризация плоских волн

Электромагнитное поле с векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$, направления которых может быть определено в любой момент времени, называется **поляризованным**. Если же направление вектора $\vec{E}$, и соответственно вектора $\vec{H}$, изменяется в пространстве случайным образом, поле будет **неполяризованным**. Простейшим примером поляризованного электромагнитного поля является рассмотренное выше поле плоской волны. Плоскость, проходящая через направление распространения этой волны и вектор $\vec{E}$, называется **плоскостью поляризации**. Если положение плоскости поляризации относительно некоторой неподвижной системы координат остается неизменным, то плоская волна имеет **линейную поляризацию**. В этом случае вектор $\vec{E}$ всегда оказывается параллельным некоторой фиксированной оси x , прямоугольной системы координат. Однако линейная поляризация не является единственно возможной поляризацией плоских волн в

режиме гармонических колебаний.

Пусть вдоль оси z распространяются две плоские волны с векторами электрического поля

$$\bar{E}_x = \bar{i} E_{1m} \cos(\omega t - \beta z)$$

и

$$\bar{E}_y = \bar{j} E_{2m} \cos(\omega t - \beta z - \varphi), \quad (3.44)$$

где φ — угол фазового сдвига между ними.

Совокупность этих волн можно рассматривать как одну плоскую волну с более сложной поляризационной структурой. Из выражений (3.44) видно, что вектор напряженности электрического поля $\bar{E} = \bar{E}_x + \bar{E}_y$ суммарной волны имеет две проекции E_x и E_y , причем в плоскости $z = 0$

$$E_x = E_{1m} \cos \omega t$$

и

$$E_y = E_{2m} \cos(\omega t - \varphi). \quad (3.45)$$

Выясним, как ведет себя вектор $\bar{E}$ во времени.

Учитывая, что

$$\frac{E_x}{E_{1m}} = \cos \omega t$$

и

$$\frac{E_y}{E_{2m}} = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi,$$

имеем

$$\frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{1m} E_{2m}} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (3.46)$$

Полученное равенство представляет собой уравнение эллипса, повернутого относительно координат x и y на некоторый угол. Этот эллипс является геометрическим местом точек, в которых находится конец вектора $\bar{E}$ в различные моменты времени. Иными словами, вектор $\bar{E}$ вращается в плоскости $z = \text{const}$, совершая полный оборот за время $T = 2\pi/\omega$. При этом соответственно он меняется и по величине. Аналогичный вывод можно сделать и о векторе $\bar{H}$, ибо он в любой момент времени перпендикулярен вектору $\bar{E}$. Электромагнитная волна подобного типа носит наименование **волны с эллиптической поляризацией** или **эллиптически поляризованной волны**, а эллипс, описываемый концом вектора $\bar{E}$, называется **эллипсом поляризации** или **поляризационным эллипсом**. Согласно изложенному, плоскость поляризации такой волны непрерывно вращается в пространстве, причем направление вращения зависит от

знака угла φ .

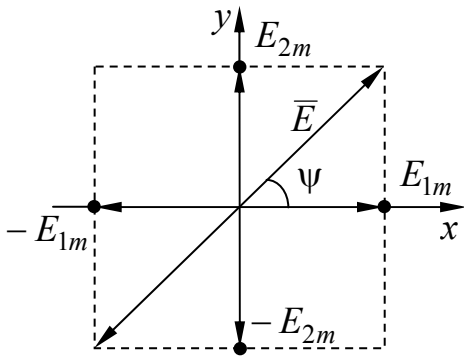
Различают волны с правым и левым направлениями вращения. В первом случае плоскость поляризации и векторы поля относительно наблюдателя, смотрящего по направлению распространения волны, вращаются по часовой стрелке, а во втором — в обратном направлении.

Рассмотрим возможные частные случаи поляризации плоской волны, вытекающие из уравнения (3.46).

Пусть фазовый сдвиг $\varphi = 0$. В этом случае уравнение (3.46) принимает вид

$$\frac{E_x}{E_{1m}} - \frac{E_y}{E_{2m}} = 0,$$

откуда следует, что



причем

$$E_y = \frac{E_{2m}}{E_{1m}} E_x, \quad -E_{1m} \leq E_x \leq E_{1m}. \quad (3.47)$$

Последнее выражение представляет собой уравнение отрезка прямой (рисунок 3.5). Следовательно, при $\varphi = 0$ эллиптически поляризованная волна превращается в волну линейно поляризованную. Угол наклона плоскости поляризации такой волны к плоскости $y = 0$, как вытекает из (3.47), равен

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{E_{2m}}{E_{1m}} \right).$$

Рисунок 3.5 — К определению линейно поляризованной волны

Если фазовый сдвиг $\varphi = \pm\pi$, то волна вновь будет иметь линейную поляризацию, ибо из (3.46) получается

$$E_y = -\frac{E_{2m}}{E_{1m}} E_x,$$

но теперь плоскость поляризации имеет уже другой угол наклона

$$\psi = -\operatorname{arctg} \left(\frac{E_{2m}}{E_{1m}} \right).$$

Совершенно ясно, что волну с линейной поляризацией можно рассматривать как предельный случай эллиптически поляризованной волны, имеющей эллипс поляризации с малой осью, равной нулю.

Предположим далее, что

$$\varphi = \pm \pi/2,$$

а

$$E_{1m} = E_{2m} = E_m.$$

При таких условиях уравнение (3.46) превращается в уравнение окружности

$$E_x^2 + E_y^2 = E_m^2 \quad (3.48)$$

и, стало быть, годографом вектора $\vec{E}$ в плоскости $z = 0$ становится окружность. На рисунке 3.6 изображены графики уравнений (3.48) и указаны направления вращения вектора $\vec{E}$ при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = -\pi/2$. Электромагнитная волна, характеризующаяся уравнением (3.48), называется **волной с круговой поляризацией**.

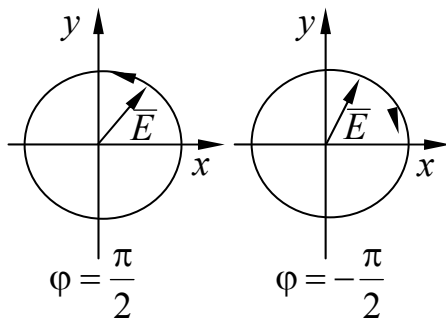


Рисунок 3.6 — К определению волны с круговой поляризацией

При движении этой волны вдоль оси z концы векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ описывают в пространстве винтовые линии.

Если фазовый угол φ , как и в предыдущем случае, равен $\pm \pi/2$, но $E_{1m} \neq E_{2m}$, то уравнение принимает вид

$$\frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} = 1.$$

Таким образом, мы снова получаем эллипс. Только оси его теперь совпадают уже с осями прямоугольной системы координат. **Эллиптическую** и **круговую** поляризацию часто называют **вращающейся поляризацией**. Очевидно, что волну с вращающейся поляризацией можно представить в виде совокупности двух линейно поляризованных волн, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ которых взаимно ортогональны.

Контрольные вопросы к разделу 3

1. Приведите систему уравнений Максвелла в комплексной форме.
2. Как определяется среднее значение вектора Пойнтинга в гармоническом электромагнитном поле?
3. Каковы основные свойства плоской электромагнитной волны?
4. Обоснуйте уравнение плоской волны, распространяющейся в однородном диэлектрике.
5. Поясните физический смысл фазовой постоянной волны k .
6. Напишите формулы для фазовой скорости волны в диэлектрике и волнового сопротивления среды.
7. Каково соотношение между объемными плотностями энергии электрического и магнитного полей в диэлектрической среде?
8. В чем заключаются особенности распространения плоской волны в

полупроводящей среде по сравнению с диэлектрической средой?

9. Поясните принципы классификации сред по их электрической проводимости.

10. Приведите выражение для комплексной диэлектрической проницаемости среды.

11. Какие виды поляризации могут иметь место в задачах электродинамики?

12. Как определяется мгновенное значение напряженности электрического поля в свободном пространстве и в полупроводящей среде? Запишите выражения в символической и тригонометрической формах.

Задачи к разделу 3

1. Определите, при какой частоте амплитуда гармонически изменяющегося тока смещения в морской воде будет равна амплитуде тока проводимости, если известно, что проводимость морской воды $\sigma = 4 \text{ См/м}$, а ее относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 81$.

2. Определите фазовую скорость, длину волны, коэффициент затухания плоской однородной волны, распространяющейся в полиэтилене ($\varepsilon = 2,25$; $\text{tg } \delta = 4 \cdot 10^{-4}$; $\mu = 1$; $f = 100 \text{ МГц}$).

3. Плоская электромагнитная волна с частотой ω отражается от проводящей металлической поверхности, движущейся со скоростью V в направлении распространения волны. Определите частоту отраженной волны, которая регистрируется неподвижным наблюдателем. Скорость распространения электромагнитной волны считать равной $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

4. Действующее значение вектора напряженности электрического поля, распространяющейся в однородном диэлектрике, равна E_d . Определите среднее значение вектора Пойнтинга, если относительная диэлектрическая проницаемость среды равна ε , относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$.

5. Определите, во сколько раз уменьшится амплитуда волны, падающей нормально на поверхность среды с параметрами: $\sigma = 4 \text{ См/м}$, $\varepsilon = 81$, $\mu = 1$ на расстоянии $l = 1 \text{ м}$ при частотах сигналов: $f_1 = 5 \text{ кГц}$, $f_2 = 500 \text{ кГц}$, $f_3 = 10 \text{ МГц}$.

6. Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси z , в плоскости $z = 0$ равна

$$\vec{E} = E_0 (\vec{1}_x + e^{i\varphi} \cdot \vec{1}_y).$$

Определите вид поляризации, если $\varphi = 60^\circ$.

4. ВОЛНЫ У ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

Явления на границе раздела двух разнородных сред: отражение, преломление и поглощение электромагнитных волн занимают важное место в электродинамике, распространении радиоволн. Характеристики явлений отражения и преломления можно разбить на два класса:

— **угловые** — законы для углов отражения и преломления, вытекающие из особенностей волнового процесса и одинаковые для волн любой физической природы;

— **динамические** — законы для напряженностей отраженной и преломленной волн, изменения фазы и поляризации, зависящие от конкретных граничных условий.

4.1. Отражение и преломление плоских волн при нормальном падении

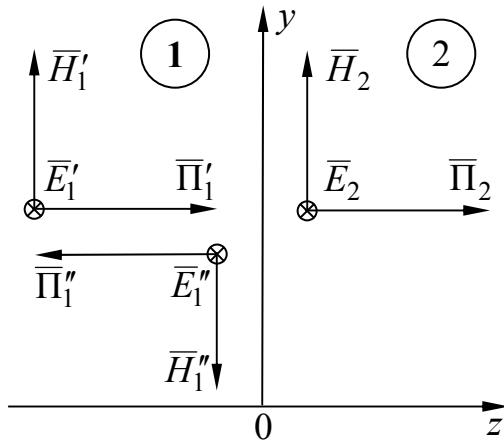


Рисунок 4.1 — Векторы поля на границе раздела сред при нормальном падении плоской волны

Рассмотрим плоскую волну, движущуюся в положительном направлении оси z , которая перпендикулярна к плоскости, разделяющей две среды с различными физическими параметрами (рисунок 4.1). Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля $\vec{E}_1'$ падающей волны имеет вид

$$\vec{E}_1' = \vec{E}_n e^{-\gamma_1 z}, \quad (4.1)$$

где $\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ — постоянная распространения волны,

$$\vec{E}_n = \vec{E}_1' \text{ при } z = 0.$$

Комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}_1'$ равна

$$\vec{H}_1' = \frac{\vec{E}_n}{\dot{Z}_{01}} e^{-\gamma_1 z}, \quad (4.2)$$

где $\dot{Z}_{01}$ — волновое сопротивление первой среды.

Так как параметры второй среды отличны от параметров первой, то в плоскости $z = 0$ происходит отражение, и в первой среде возникает отраженная волна, движущаяся в отрицательном направлении оси z . Результирующее поле в первой среде имеет вид

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1' + \vec{E}_1'' = \vec{E}_n e^{-\gamma_1 z} + \vec{E}_0 e^{\gamma_1 z};$$

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_1' - \dot{H}_1'' = \frac{\dot{E}_{\text{п}}}{\dot{Z}_{01}} e^{-\gamma_1 z} - \frac{\dot{E}_0}{\dot{Z}_{01}} e^{\gamma_1 z}. \quad (4.3)$$

где $\dot{E}_0$ — комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля отраженной волны при $z = 0$.

Во второй среде имеется только одна преломленная волна, движущаяся в положительном направлении оси z . Поле во второй среде определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \dot{E}_{\text{пр}} e^{-\gamma_2 z}, \\ \dot{H}_2 &= \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{Z}_{02}} e^{-\gamma_2 z}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $\dot{E}_{\text{пр}}$ — комплексная амплитуда напряженности электрического поля преломленной волны на границе, $\dot{Z}_{02}$ — волновое сопротивление второй среды.

Чтобы найти амплитуды полей в первой и второй средах, используем граничные условия.

$$\text{При } z = 0 \quad \dot{E}_1 = \dot{E}_{\text{п}} + \dot{E}_0, \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_{\text{пр}}.$$

Так как в рассматриваемом случае векторы напряженности электромагнитного поля параллельны плоскости раздела, то в силу граничных условий при $z = 0$ $\dot{E}_1 = \dot{E}_2$, $\dot{H}_1 = \dot{H}_2$, т.е.

$$\dot{E}_{\text{п}} + \dot{E}_0 = \dot{E}_{\text{пр}};$$

$$\frac{1}{\dot{Z}_{01}} (\dot{E}_{\text{п}} - \dot{E}_0) = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{Z}_{02}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{п}} &= \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{2} \left(1 + \frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}} \right); \\ \dot{E}_0 &= \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{2} \left(1 - \frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя значения $\dot{E}_{\text{п}}$ и $\dot{E}_0$ в (4.3), получаем уравнения, которые дают возможность вычислить поля в любой точке пространства, если известны значения $\dot{E}_{\text{пр}}$ электрического поля на границе раздела сред.

Введем понятия коэффициента отражения $\dot{\Gamma}$ и коэффициента преломления или прохождения (передачи) $\dot{T}$.

Коэффициентом отражения $\dot{\Gamma}$ назовем отношение комплексной амплитуды напряженности электрического поля отраженной волны к комплексной амплитуде напряженности электрического поля падающей волны на поверхности раздела сред:

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{\vec{E}}_o}{\dot{\vec{E}}_n}.$$

В результате подстановки значений $\dot{\vec{E}}_n$ и $\dot{\vec{E}}_o$ из (4.5), получаем

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{Z}_{02} - \dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02} + \dot{Z}_{01}}. \quad (4.6)$$

Коэффициентом прохождения или **преломления** назовем отношение комплексной амплитуды напряженности электрического поля волны, прошедшей во вторую среду, к комплексной амплитуде напряженности электрического поля падающей волны на границе раздела сред

$$\dot{T} = \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}}{\dot{\vec{E}}_n}.$$

Или, учитывая (4.5), получаем

$$\dot{T} = \frac{2\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{02} + \dot{Z}_{01}}. \quad (4.7)$$

Если волновое сопротивление второй среды равно волновому сопротивлению первой среды ($\dot{Z}_{02} = \dot{Z}_{01}$), то $\dot{\Gamma} = 0$ и $\dot{T} = 1$. Отраженная волна в этом случае отсутствует, и весь поток энергии переходит из первой среды во вторую. В подобных случаях говорят, что обе среды согласованы друг с другом.

4.2. Уравнение плоской волны, движущейся в произвольном направлении

Составим общее уравнение, пригодное для случая, когда направление движения волны, определяемое вектором Пойнтинга (направлением луча), не совпадает ни с одной из координатных осей (рисунок 4.2).

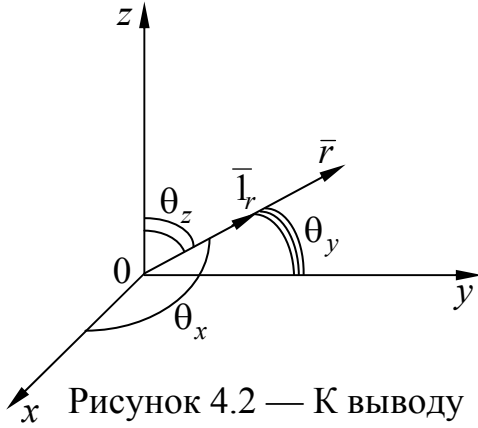


Рисунок 4.2 — К выводу уравнения волны, движущейся в произвольном направлении

Комплексная амплитуда волны равна

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-\gamma r}, \quad (4.8)$$

где r — расстояние от начала координат до рассматриваемой точки пространства; $\dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{E}}$ при $r = 0$.

Векторы поля однородной плоской волны, распространяющейся в направлении $\vec{r}$, будут одинаковыми во всех точках волновой поверхности. Обозначим $\vec{R}$ — радиус-вектор до произвольной точки на волновой поверхности, тогда расстояние $r = \vec{l}_r \vec{R}$.

В прямоугольной системе координат:

$$\vec{R} = \vec{l}_x x + \vec{l}_y y + \vec{l}_z z;$$

$$\vec{l}_r = \vec{l}_x \cos \theta_x + \vec{l}_y \cos \theta_y + \vec{l}_z \cos \theta_z,$$

их произведение равно

$$r = \vec{l}_r \cdot \vec{R} = x \cos \theta_x + y \cos \theta_y + z \cos \theta_z, \quad (4.9)$$

где $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ — углы между направлениями распространения волны и осями координат.

Таким образом, в соответствии с (4.8) получаем

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-\gamma(x \cos \theta_x + y \cos \theta_y + z \cos \theta_z)}. \quad (4.10)$$

Если волна распространяется в среде без потерь, то постоянная распространения $\gamma = i\beta = ik$. В этом случае вместо (4.8) будем иметь

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-ikr} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-ik \vec{l}_r \vec{r}}.$$

Обозначим $\vec{k} = \vec{l}_r k$ и назовем эту величину **волновым вектором**. Этот вектор в прямоугольной системе координат имеет вид

$$\vec{k} = \vec{l}_x k_x + \vec{l}_y k_y + \vec{l}_z k_z,$$

где k_x, k_y, k_z — проекции волнового вектора на оси координат.

4.3. Отражение плоских волн при наклонном падении

Предположим, что падающая волна имеет линейную поляризацию. При этом необходимо определить так называемую **плоскость падения**. Последняя представляет собой плоскость, проходящую через направление распространения волны и нормаль к плоскости раздела сред.

Анализ проведем для двух частных случаев:

- волна поляризована нормально к плоскости падения (плоскость поляризации волны и плоскость падения взаимно перпендикулярны);
- волна поляризована в плоскости падения.

Общий случай произвольной ориентации вектора $\vec{E}$ можно рассматривать как суперпозицию частных случаев.

4.3.1. Случай поляризации волны, нормальной к плоскости падения (перпендикулярная поляризация)

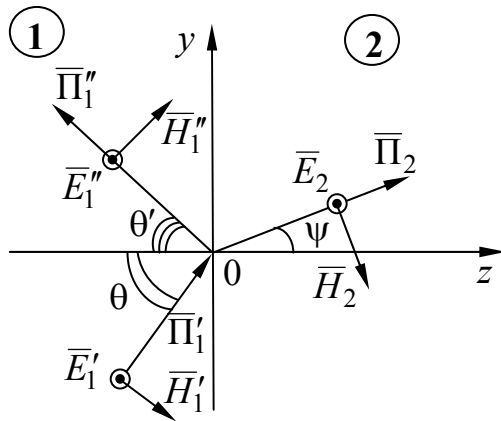


Рисунок 4.3 — Векторы поля на границе раздела сред при наклонном падении (перпендикулярная поляризация)

На рисунке 4.3 показаны направления осей координат и векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ падающей, отраженной и преломленной волн. Электрические векторы всех волн направлены перпендикулярно к плоскости падения и параллельно оси x . Магнитные векторы имеют составляющие H_z и H_y , и их положительные направления выбраны так, чтобы в направлении оси z вектор Пойнтинга отраженной волны был бы обратен вектору Пойнтинга падающей и преломленной волн.

В соответствии с уравнением волны, движущейся в произвольном направлении, для падающей волны имеем:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_1' &= \dot{\vec{E}}_n e^{-\gamma_1 (y \sin \theta + z \cos \theta)}, \\ \dot{\vec{H}}_1' &= \frac{\dot{\vec{E}}_n}{Z_{01}} e^{-\gamma_1 (y \sin \theta + z \cos \theta)}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Для отраженной волны справедливо следующее:

$$\dot{\vec{E}}_1'' = \dot{\vec{E}}_0 e^{-\gamma_1 (y \sin \theta' - z \cos \theta')},$$

$$\dot{\vec{H}}_1'' = \frac{\dot{\vec{E}}_0}{\dot{Z}_{01}} e^{-\gamma_1 (y \sin \theta' - z \cos \theta')} . \quad (4.12)$$

Во второй среде имеется лишь преломленная волна, т.е.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_2 &= \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} e^{-\gamma_2 (y \sin \psi + z \cos \psi)} , \\ \dot{\vec{H}}_2 &= \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}}{\dot{Z}_{02}} e^{-\gamma_2 (y \sin \psi + z \cos \psi)} . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Результирующее поле в первой среде представляет собой сумму полей падающей и отраженной волн. На границе раздела двух сред касательные составляющие векторов $\vec{E}_\tau$ и $\vec{H}_\tau$ в первой и второй средах равны между собой.

Так как электрические векторы параллельны плоскости раздела, то, полагая $z = 0$, получаем на основании (4.11)...(4.13)

$$\dot{\vec{E}}_{\text{п}} e^{-\gamma_1 y \sin \theta} + \dot{\vec{E}}_0 e^{-\gamma_1 y \sin \theta'} = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} e^{-\gamma_2 y \sin \psi} . \quad (4.14)$$

Уравнение (4.14) справедливо при любом y , в том числе и при $y = 0$.

Тогда

$$\dot{\vec{E}}_{\text{п}} + \dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} . \quad (4.15)$$

Это возможно при выполнении условия

$$\gamma_1 \sin \theta = \gamma_1 \sin \theta' = \gamma_2 \sin \psi ,$$

откуда

$$\theta = \theta' , \quad \sin \psi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin \theta , \quad (4.16)$$

что позволяет сформулировать следующие законы:

- **закон отражения** — угол отражения равен углу падения $\theta' = \theta$,
- **закон преломления Снеллиуса** — отношение синусов углов преломления и падения равно отношению комплексных коэффициентов распространения в первой и второй средах:

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\alpha_2 + i\beta_2} . \quad (4.17)$$

Из этого равенства следует, что в общем случае угол преломления ψ может быть комплексным. Если ограничиться рассмотрением диэлектриков с не-

существенными потерями $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 0$, то

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}}{\omega \sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (4.18)$$

где $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ — коэффициенты преломления сред.

Закон Снеллиуса в записи

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta} = \frac{n_1}{n_2}$$

известен из оптики. На границе раздела сред, при $z = 0$ равны касательные составляющие магнитного вектора $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, т.е.:

$$(\dot{\vec{H}}'_1 - \dot{\vec{H}}''_1) \cos \theta = \dot{\vec{H}}_2 \cos \psi.$$

Из (4.11)—(4.13) следует при $z = 0$ и $y = 0$:

$$\left(\frac{\dot{\vec{E}}_{\text{н}}}{\dot{Z}_{01}} - \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{о}}}{\dot{Z}_{01}} \right) \cos \theta = \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}}{\dot{Z}_{02}} \cos \psi$$

или

$$\dot{\vec{E}}_{\text{н}} - \dot{\vec{E}}_{\text{о}} = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \frac{\dot{Z}_{01} \cos \psi}{\dot{Z}_{02} \cos \theta}. \quad (4.19)$$

Из уравнений (4.15) и (4.19) можно определить значения $\dot{\vec{E}}_{\text{н}}$ и $\dot{\vec{E}}_{\text{о}}$ через комплексную амплитуду $\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}$ на поверхности раздела:

$$\dot{\vec{E}}_{\text{н}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \left(1 + \frac{\dot{Z}_{01} \cos \psi}{\dot{Z}_{02} \cos \theta} \right);$$

$$\dot{\vec{E}}_{\text{о}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \left(1 - \frac{\dot{Z}_{01} \cos \psi}{\dot{Z}_{02} \cos \theta} \right).$$

Соответственно для коэффициентов отражения $\dot{\Gamma}_{\perp}$ и преломления $\dot{\Gamma}_{\perp}$, получаем для нормально поляризованной волны:

$$\dot{\Gamma}_{\perp} = \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{о}}}{\dot{\vec{E}}_{\text{н}}} = \frac{\dot{Z}_{02} \cos \theta - \dot{Z}_{01} \cos \psi}{\dot{Z}_{02} \cos \theta + \dot{Z}_{01} \cos \psi}, \quad (4.20)$$

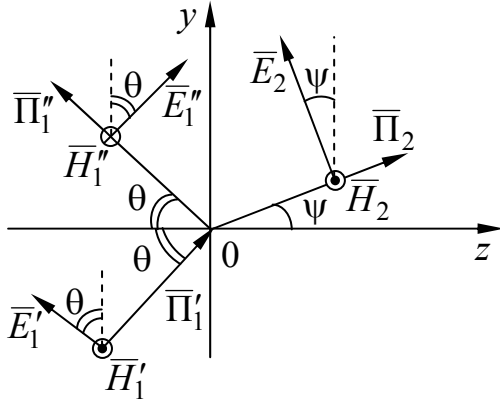
$$\dot{T}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{np}}{\dot{E}_{\pi}} = \frac{2\dot{Z}_{02} \cos \theta}{\dot{Z}_{02} \cos \theta + \dot{Z}_{01} \cos \psi}. \quad (4.21)$$

Результирующее поле в первой среде можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 = \dot{E}_x &= \left(\dot{E}_{\pi} e^{-\gamma_1 z \cos \theta} + \dot{E}_0 e^{\gamma_1 z \cos \theta} \right) \cdot e^{-\gamma_1 y \sin \theta}; \\ \dot{H}_{z1} &= \frac{\sin \theta}{\dot{Z}_{01}} \cdot \left(\dot{E}_{\pi} e^{-\gamma_1 z \cos \theta} + \dot{E}_0 e^{\gamma_1 z \cos \theta} \right) \cdot e^{-\gamma_1 y \sin \theta}; \\ \dot{H}_{y1} &= \frac{\cos \theta}{\dot{Z}_{01}} \cdot \left(-\dot{E}_{\pi} e^{-\gamma_1 z \cos \theta} + \dot{E}_0 e^{\gamma_1 z \cos \theta} \right) \cdot e^{-\gamma_1 y \sin \theta}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Уравнения для составляющих $\dot{E}$ и $\dot{H}$ показывают, что вдоль плоскости раздела движется бегущая волна с постоянной распространения $\gamma_1 \sin \theta$.

4.3.2. Случай поляризации волны в плоскости падения (параллельная поляризация)



Теперь магнитный вектор имеет лишь одну составляющую $\dot{H}_x$, параллельную плоскости раздела, а электрический вектор — две составляющие $\dot{E}_y$ и $\dot{E}_z$ (рисунок 4.4).

Для составляющих поля в первой среде получаем:

Рисунок 4.4 — Векторы поля на границе раздела сред при наклонном падении волны (параллельная поляризация)

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 = \dot{H}_{x1} &= -\frac{1}{\dot{Z}_{01}} \left(\dot{E}_{\pi} e^{-\gamma_1 z \cos \theta} - \dot{E}_0 e^{\gamma_1 z \cos \theta} \right) \cdot e^{-\gamma_1 y \sin \theta}; \\ \dot{E}_{z1} &= -\sin \theta \left(\dot{E}_{\pi} e^{-\gamma_1 z \cos \theta} - \dot{E}_0 e^{\gamma_1 z \cos \theta} \right) \cdot e^{-\gamma_1 y \sin \theta}; \\ \dot{E}_{y1} &= \cos \theta \left(\dot{E}_{\pi} e^{-\gamma_1 z \cos \theta} + \dot{E}_0 e^{\gamma_1 z \cos \theta} \right) \cdot e^{-\gamma_1 y \sin \theta}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для составляющих поля во второй среде находим:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_2 &= -\frac{\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}}{\dot{Z}_{02}} \cdot e^{-\gamma_2 z \cos \psi} \cdot e^{-\gamma_2 y \sin \psi}; \\ \dot{E}_{z2} &= -\sin \psi \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \cdot e^{-\gamma_2 z \cos \psi} \cdot e^{-\gamma_2 y \sin \psi}; \\ \dot{E}_{y2} &= \cos \psi \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \cdot e^{-\gamma_2 z \cos \psi} \cdot e^{-\gamma_2 y \sin \psi}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Из граничных условий $z = 0$, $y = 0$, $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$, $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$, следует, что

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_{\text{п}} - \dot{\vec{E}}_{\text{о}} &= \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \cdot \frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}}; \\ \dot{\vec{E}}_{\text{п}} + \dot{\vec{E}}_{\text{о}} &= \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \theta},\end{aligned}$$

откуда

$$\dot{\vec{E}}_{\text{п}} = \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}}{2} \left(\frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}} + \frac{\cos \psi}{\cos \theta} \right); \quad \dot{\vec{E}}_{\text{о}} = \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}}{2} \left(\frac{\cos \psi}{\cos \theta} - \frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}} \right).$$

Коэффициенты отражения $\dot{\Gamma}_{\parallel}$ и преломления $\dot{T}_{\parallel}$ для параллельно поляризованной волны определяются выражениями:

$$\dot{\Gamma}_{\parallel} = \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{о}}}{\dot{\vec{E}}_{\text{п}}} = \frac{\dot{Z}_{02} \cos \psi - \dot{Z}_{01} \cos \theta}{\dot{Z}_{02} \cos \psi + \dot{Z}_{01} \cos \theta}, \quad (4.25)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}}{\dot{\vec{E}}_{\text{п}}} = \frac{2\dot{Z}_{02} \cos \theta}{\dot{Z}_{02} \cos \psi + \dot{Z}_{01} \cos \theta}. \quad (4.26)$$

4.3.3. Наклонное падение плоской волны на границу раздела двух диэлектриков

В случае двух идеальных диэлектрических сред, как было показано ранее, угол преломления определяется равенством

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \cdot \sin \theta.$$

Для немагнитных сред $\mu_1 = \mu_2 = 1$, поэтому

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (4.27)$$

Отношение волновых сопротивлений равно

$$\frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a2}}}{\sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a1}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (4.28)$$

Представим выражения для коэффициентов отражения $\dot{\Gamma}_\perp$, $\dot{\Gamma}_\parallel$ и преломления $\dot{T}_\perp$, $\dot{T}_\parallel$ в несколько ином виде, учитывая соотношения (4.27) и (4.28):

$$\dot{\Gamma}_\perp = \frac{\dot{Z}_{02} \cos \theta - \dot{Z}_{01} \cos \psi}{\dot{Z}_{02} \cos \theta + \dot{Z}_{01} \cos \psi} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \theta - \cos \psi}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \theta + \cos \psi} = \frac{\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta}{\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta}$$

или

$$\dot{\Gamma}_\perp = \frac{\sin(\psi - \theta)}{\sin(\psi + \theta)}; \quad (4.29)$$

$$\dot{T}_\perp = \frac{2\dot{Z}_{02} \cos \theta}{\dot{Z}_{02} \cos \theta + \dot{Z}_{01} \cos \psi} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \theta + \cos \psi} = \frac{2 \sin \psi \cos \theta}{\sin(\psi + \theta)}. \quad (4.30)$$

Аналогично для $\dot{\Gamma}_\parallel$ и $\dot{T}_\parallel$ получаем:

$$\dot{\Gamma}_\parallel = \frac{\dot{Z}_{02} \cos \psi - \dot{Z}_{01} \cos \theta}{\dot{Z}_{02} \cos \psi + \dot{Z}_{01} \cos \theta} = \frac{\operatorname{tg}(\psi - \theta)}{\operatorname{tg}(\psi + \theta)}, \quad (4.31)$$

$$\dot{T}_\parallel = \frac{2\dot{Z}_{02} \cos \theta}{\dot{Z}_{02} \cos \psi + \dot{Z}_{01} \cos \theta} = \frac{2 \sin \psi \cos \theta}{\sin(\psi + \theta) \cos(\psi - \theta)}. \quad (4.32)$$

Выражения (4.29)—(4.32) носят название **формул Френеля для перпендикулярной и параллельной поляризаций**.

— **Полное прохождение.** Покажем, что для волн с параллельной поляризацией существует угол падения, именуемый **углом Брюстера** $\theta_{\text{бр}}$, при котором отраженная волна отсутствует, т.е. полностью переходит во вторую среду и $\dot{\Gamma}_\parallel = 0$:

$$\dot{\Gamma}_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\psi - \theta)}{\operatorname{tg}(\psi + \theta)} = 0 \text{ при } \psi + \theta = 90^\circ, \quad \text{так как} \quad \operatorname{tg} 90^\circ \rightarrow \infty.$$

При этом $\psi = 90^\circ - \theta$.

По закону Снеллиуса

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\sin \theta}{\sin \psi} = \frac{\sin \theta}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad \text{или} \quad \theta_{\text{Бр}} = \arctg \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right). \quad (4.33)$$

Для перпендикулярной поляризации угол полного прохождения не существует. $\dot{\Gamma}_{\perp}$ всегда больше нуля. **Угол Брюстера** называется также углом **полной поляризации**. Если волна с произвольной поляризацией направлена на диэлектрическую пластину под углом $\theta_{\text{Бр}}$, то отраженный луч имеет только перпендикулярную поляризацию, так как параллельно поляризованный компонент полностью проходит через пластину.

Диэлектрические пластины и шайбы, служащие для герметизации и крепления в различных устройствах, часто ставят под углом Брюстера. Тогда они полностью прозрачны для проходящих волн.

— **Полное отражение.** Рассмотрим случай, когда волна проходит из оптически более плотной среды в менее плотную, т.е. $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. При этом

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \sin \theta, \quad \sin \psi > \sin \theta.$$

При некотором угле падения, который называется **критическим углом**

$$\psi = 90^\circ, \quad \sin \psi = 1,$$

$$\sin \theta_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad \theta_{\text{кр}} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right). \quad (4.34)$$

В этом случае вектор Пойнтинга во второй среде направлен вдоль границы. При углах, превышающих $\theta_{\text{кр}}$, наблюдается явление **полного внутреннего отражения**. В этом случае $\sin \psi$ должен быть больше единицы, что для вещественных ψ , разумеется, невозможно. Выясним, какой характер будет иметь поле во второй среде, если $\theta > \theta_{\text{кр}}$.

Угол преломления ψ представим в виде комплексного угла:

$$\psi = \psi' + i\psi''$$

и

$$\sin \psi = \sin(\psi' + i\psi'') = \sin \psi' \cos(i\psi'') + \cos \psi' \sin(i\psi'').$$

Известно, что

$$\cos(i\psi'') = \operatorname{ch}\psi'';$$

$$\sin(i\psi'') = i \operatorname{sh}\psi'',$$

где $\operatorname{ch}\psi''$ — косинус гиперболический;

$\operatorname{sh}\psi''$ — синус гиперболический.

Следовательно,

$$\sin \psi = \sin \psi' \operatorname{ch}\psi'' + i \cos \psi' \operatorname{sh}\psi''.$$

Таким образом, при комплексном угле ψ $\sin \psi$ становится комплексной величиной. Чтобы $\sin \psi = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \sin \theta$ превратился в действительную величину, необходимо положить $\psi' = \pi/2$, при этом $\cos \psi' = 0$, $\sin \psi' = 1$. Тогда $\sin \psi = \operatorname{ch}\psi''$. При этом $\operatorname{ch}\psi''$ может принимать любые действительные величины, начиная с единицы. В этом случае неравенство $\sin \psi > 1$ выполняется.

Итак, получаем

$$\psi = \frac{\pi}{2} + i\psi'', \quad \cos \psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\psi''\right) =$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} \cos(i\psi'') - \sin \frac{\pi}{2} \sin(i\psi'') = -\sin(i\psi'') = -i \operatorname{sh}\psi'',$$

где $\operatorname{sh}\psi''$ — монотонно изменяющаяся функция от $-\infty$ до ∞ .

Поле во второй среде имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_2 &= \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \cdot e^{-\gamma_2(z \cos \psi + y \sin \psi)} = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \cdot e^{-i\beta_2 z(-i \operatorname{sh}\psi'')} \cdot e^{-i\beta_2 y \operatorname{ch}\psi''} = \\ &= \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \cdot e^{-\beta_2 \operatorname{sh}\psi'' z} \cdot e^{-i\beta_2 \operatorname{ch}\psi'' y}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Из (4.35) следует, что поле во второй среде имеет форму волны, распространяющейся вдоль плоскости раздела. Фазовый множитель такой волны равен

$$\beta_2 \operatorname{ch}\psi'' = \beta_2 \sin \psi > \beta_2.$$

Вдоль нормали к поверхности раздела, т.е. в положительном направлении оси z , амплитуды поля убывают по экспоненциальному закону. Для перпендикулярной поляризации справедливо следующее:

$$\dot{H}_{2y} = \cos \psi \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{Z}_{02}} \cdot e^{-\beta_2 \text{sh} \psi'' z} \cdot e^{-i\beta_2 \sin \psi y} = -i \text{sh} \psi'' \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{Z}_{02}} \cdot e^{-\beta_2 \text{ch} \psi'' z} \cdot e^{-i\beta_2 \sin \psi y}.$$

Проекция $\dot{H}_{y2}$ сдвинута по фазе относительно проекции $\dot{E}_{x2}$ на $\pi/2$. Следовательно, энергия поля вглубь второй среды не передается. Аналогичные результаты получаются также и для волны, поляризованной в плоскости падения.

Определим коэффициенты отражения $\dot{\Gamma}_{\perp}$ и $\dot{\Gamma}_{\parallel}$, сделав подстановку $\cos \psi = -i \text{sh} \psi''$:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{\perp} &= \frac{\dot{Z}_{02} \cos \theta + i \dot{Z}_{01} \text{sh} \psi''}{\dot{Z}_{02} \cos \theta - i \dot{Z}_{01} \text{sh} \psi''}; \\ \dot{\Gamma}_{\parallel} &= -\frac{\dot{Z}_{01} \cos \theta + i \dot{Z}_{02} \text{sh} \psi''}{\dot{Z}_{01} \cos \theta - i \dot{Z}_{02} \text{sh} \psi''}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Легко видеть, что модули числителей и знаменателей в обоих случаях равны и $\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel} = 1$, значит амплитуды отраженной и падающей волн равны. Отраженная волна уносит всю энергию, принесенную падающей волной. Парадоксальным кажется тот факт, что подстановка тех же выражений в формулы для коэффициентов преломления, не приводит к $\dot{T}_{\perp} = 0$ и $\dot{T}_{\parallel} = 0$, т.е. при полном отражении волны в среду 1 одновременно создается поле в среде 2. Каково оно, мы уже определили. Экспоненциальное убывание амплитуды волны не связано с потерями во второй среде (они здесь не учитываются), а определяются тем, что в среднем энергия из первой среды во вторую не переходит. Следовательно, волна проникает во вторую среду, проходит в ней какой-то путь и полностью возвращается в первую среду. Более детальные исследования показывают, что волна в среде 2 движется по эллиптическим траекториям, проходя определенное расстояние вдоль оси z .

Поверхностная волна в среде 2 не существует изолированно от поля в среде 1, представляющего собой сумму падающей и отраженной волн. Возникновение поверхностной волны можно рассматривать как проявление “инерционности” при полном отражении. Волна не может изменить сразу направление своего движения.

4.3.4. Наклонное падение плоской волны на границу раздела диэлектрик—проводник

— Коэффициент затухания и фазовая постоянная в проводнике

Постоянная распространения γ_2 в проводнике определяется соотношением

$$\gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = ik_2 = i\omega \sqrt{\left(\epsilon_{a2} - i\frac{\sigma_2}{\omega}\right)\mu_{a2}},$$

где ϵ_{a2} , μ_{a2} , σ_2 — электромагнитные параметры проводника.

Для проводников, как показано выше, $\epsilon_{a2} \ll \sigma_2/\omega$, поэтому

$$\gamma_2 \approx i\omega \sqrt{-i\frac{\sigma_2\mu_{a2}}{\omega}} = i\sqrt{-i}\sqrt{\omega\sigma_2\mu_{a2}}.$$

Так как

$$\sqrt{-i} = (-i)^{1/2} = e^{-i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad i\sqrt{-i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

то постоянная распространения равна

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{\omega\sigma_2\mu_{a2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{\omega\sigma_2\mu_{a2}}}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\alpha_2 = \beta_2 = \sqrt{\frac{\omega\sigma_2\mu_{a2}}{2}}. \quad (4.37)$$

Коэффициент затухания α_2 амплитуды волны и фазовая постоянная β_2 в проводнике определяются с достаточно высокой точностью соотношением (4.37).

— Угол преломления в проводнике

Постоянная распространения γ_2 в проводнике по модулю значительно больше постоянной распространения γ_1 в диэлектрике, т.е. $\gamma_2 \gg \gamma_1$ или $\gamma_1/\gamma_2 \ll 1$. В соответствии с законом Снеллиуса $\sin\psi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\sin\theta$ при любых углах падения θ $\sin\psi \cong 0$ и $\psi \cong 0$, следовательно, волна в проводнике распространяется перпендикулярно к границе раздела сред, т.е.

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} \cdot e^{-\alpha_2 z} \cdot e^{-i\beta_2 z}. \quad (4.38)$$

— *Глубина проникновения поля в проводник*

Под глубиной проникновения поля в проводник понимают расстояние δ , на котором амплитуда волны уменьшается в $e = 2,718$ раз по сравнению с амплитудой на поверхности проводника. Амплитуда волны, как следует из (4.38), определяется выражением

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} e^{-\alpha_2 z}.$$

При $z = 0$

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}}.$$

При $z = \delta$

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} e^{-\alpha_2 \delta} = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} e^{-1},$$

откуда $\alpha_2 \delta = 1$ и глубина проникновения δ поля в проводник в соответствии с (4.37) равна

$$\delta = \frac{1}{\alpha_2} = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma_2 \mu_{a2}}}. \quad (4.39)$$

Для хороших проводников коэффициент затухания α достигает больших значений, и поле оказывается сосредоточенным лишь в тонком поверхностном слое. Так, для меди $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ См/м, $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; подставляя эти значения в (4.39), получаем

$$\delta = \frac{66}{\sqrt{f, \text{МГц}}}, [\text{мкм}] \quad \text{или} \quad \delta = \frac{66}{\sqrt{f, \text{Гц}}}, [\text{мм}].$$

Например, для $f = 10$ ГГц имеем $\delta = 0,66$ мкм. Постоянную распространения γ_2 можно выразить и через δ как

$$\gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = \frac{1+i}{\delta}.$$

Мощность волны пропорциональна $\dot{\vec{E}}^2$, поэтому только небольшая часть исходной (при $z = 0$) мощности, равная $e^{-2} = 0,135$, преодолевает рубеж $z = \delta$. Рубеж $z = 2\delta$ преодолевает мощность, составляющая $e^{-4} = 0,018$ от исходной и т.д. Почти вся электромагнитная энергия (86,5%), проникающая в проводник, сосредотачивается или теряется в поверхностном слое $z = \delta$ (*скин-эффект*).

— *Длина волны в проводнике*

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 2\pi\delta.$$

На частоте 100 МГц ($\lambda_0 = 3$ м) $\lambda_2 = 2\pi \cdot 6,6$ мкм = 41,5 мкм. На этом расстоянии ($z = \lambda_2$) от начала отсчета амплитуда поля убывает в $e^{2\pi} = 535$ раз, а его мощность в 287000 раз. При столь сильном поглощении нельзя уже говорить о волновом гармоническом процессе. Колебания вырождаются в апериодически затухающие. В этом случае такие понятия, как длина волны и фазовая скорость теряют свой первоначальный физический смысл.

— *Волновое сопротивление* проводящей среды найдём по формуле

$$\dot{Z}_{02} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a - i\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{-i\frac{\sigma}{\omega}}} = \frac{\sqrt{i}}{\sigma} \sqrt{\omega\sigma\mu_a},$$

так как

$$\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

то

$$\dot{Z}_{02} = \frac{1+i}{\sigma} \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_a}{2}} = \frac{1+i}{\sigma\delta}. \quad (4.40)$$

Следовательно,

$$\dot{Z}_{02} = R_{02} + iX_{02}, \quad R_{02} = X_{02} = \frac{1}{\sigma\delta}, \quad \text{а} \quad Z_{02} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta}.$$

Комплексное волновое сопротивление проводящей среды имеет индуктивный характер, а его реактивная и активная составляющие равны между собой. Аргумент комплексного волнового сопротивления равен

$$\psi_{02} = \operatorname{arctg} \frac{X_{02}}{R_{02}} = 45^\circ.$$

Таким образом, комплексные амплитуды векторов поля в проводящей среде имеют вид:

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} e^{-\alpha_2 Z} e^{-i\beta_2 Z}, \quad \dot{\vec{H}}_2 = \frac{\dot{\vec{E}}_{\text{пр}}}{Z_{02}} e^{-\alpha_2 Z} e^{-i\left(\beta_2 Z + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Для меди имеем

$$\dot{Z}_{02} = \frac{\sqrt{2}}{5,8 \cdot 10^7 \cdot 6,6 \cdot 10^{-6}} = 0,0037 \text{ Ом}$$

при $f = 100$ МГц. По сравнению с $Z_0 = 377$ Ом в свободном пространстве Z_{02} меньше примерно в 10^5 раз.

Из-за малых значений толщины скин-слоя металлы нельзя использовать как среду для передачи электромагнитных волн. Однако металлические стенки широко применяются как отражатели электромагнитных волн, ограничивающие поля в волноводах, резонаторах и других устройствах.

— Напряжённости поля у границы диэлектрик—проводник

Если волна падает из диэлектрика на проводник, то формулы для коэффициентов отражения и передачи можно значительно упростить, так как $\psi \cong 0$ и $\cos \psi \cong 1$, а $Z_{02}/Z_{01} \ll 1$.

Для перпендикулярной поляризации коэффициент отражения $\dot{\Gamma}_{\perp}$ (4.20) и коэффициент преломления $\dot{T}_{\perp}$ (4.21) запишутся следующим образом:

$$\dot{\Gamma}_{\perp} = \frac{\dot{Z}_{02} \cos \theta - \dot{Z}_{01} \cos \psi}{\dot{Z}_{02} \cos \theta + \dot{Z}_{01} \cos \psi} = \frac{-1 + \frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}} \frac{\cos \theta}{\cos \psi}}{1 + \frac{\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}} \frac{\cos \theta}{\cos \psi}} \approx -1 + \frac{2\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}} \cos \theta;$$

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{2\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}} \cos \theta.$$

Для параллельной поляризации, учитывая (4.25) и (4.26), $\dot{\Gamma}_{\parallel}$ и $\dot{T}_{\parallel}$ равны:

$$\dot{\Gamma}_{\parallel} \approx -1 + \frac{2\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01} \cos \theta};$$

$$\dot{T}_{\parallel} \approx \frac{2\dot{Z}_{02}}{\dot{Z}_{01}}.$$

В обоих случаях коэффициент отражения почти не отличается от -1 , следовательно, амплитуда отражённой волны по величине почти равна амплитуде падающей, но вектор $\vec{E}_o$ повернут относительно $\vec{E}_{\parallel}$ на 180° . Результирующая тангенциальная (касательная) составляющая

$$\dot{\vec{E}}_{\Pi} - \dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}}$$

на поверхности проводника мала по сравнению с $\dot{\vec{E}}_{\Pi}$. Их отношение равно коэффициенту преломления (прохождения). Результирующая касательная составляющая магнитного поля H_{τ} почти в два раза больше, чем у падающей волны, так как направления $\dot{\vec{H}}_{\Pi}$ и $\dot{\vec{H}}_0$ совпадают. Энергия электромагнитного поля проводника в основном сосредоточена в магнитном поле. Вектор плотности потока энергии

$$\vec{\Pi} = \vec{E}_{\tau} \times \vec{H}_{\tau} = \vec{E}_{\tau} \vec{H}_{\tau} \vec{n} = (R_{02} + iX_{02}) \cdot H_{\tau}^2 \vec{n},$$

направленный в проводник, состоит из равных по величине вещественной и мнимой частей. Активный компонент превращается в тепло внутри проводника. Реактивный компонент соответствует колеблющемуся потоку энергии, который попеременно входит в проводящую среду через её граничную поверхность и выходит из неё, периодически меняя направление своего движения.

4.4. Граничное условие Леонтовича

Назовём отношение касательных составляющих E_{τ} и H_{τ} на граничной поверхности S *поверхностным импедансом*

$$Z_S = \frac{E_{\tau}}{H_{\tau}}. \quad (4.41)$$

За исключением идеализированного случая бесконечной проводимости одной из сред составляющие E_{τ} и H_{τ} непрерывны при переходе через границу, следовательно, выражение (4.41) в равной степени относится к полям по обе стороны границы:

$$\begin{aligned} E_{\tau 1} &= E_{\tau 2}; \\ H_{\tau 1} &= H_{\tau 2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

При любом угле падения θ при $\gamma_1/\gamma_2 \ll 1$ угол преломления $\psi \approx 0$, и во второй среде E_2 и H_2 будут поперечными, а продольными составляющими можно пренебречь.

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} E_{\text{пр}} &= E_{\tau 2}; \\ H_{\text{пр}} &= H_{\tau 2}; \\ Z_S &= \frac{E_{\tau 2}}{H_{\tau 2}} = \frac{E_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} = \dot{Z}_{02}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Таким образом, $Z_S = \dot{Z}_{02}$. Поверхностный импеданс на границе раздела с оптически очень плотной средой равен её волновому сопротивлению.

Из (4.43) следует

$$E_{\tau 2} = \dot{Z}_{02} H_{\tau 2},$$

а, учитывая (4.42), получаем

$$E_{\tau 1} = \dot{Z}_{02} H_{\tau 1}. \quad (4.44)$$

Соотношение (4.44) было выведено академиком Леонтовичем и называется **приближённым граничным условием Леонтовича**.

Использование этого условия значительно облегчает анализ волн в тех случаях, когда оптические плотности сред, в которых они распространяются, существенно различны (например, воздух и металл). При этом не требуется определять электромагнитное поле в оптически плотной среде. Решение задачи для двухслойной системы сводится к задаче для одной среды с заданным импедансом Z_S на её границе.

В отличие от (4.42) граничное условие (4.44) является приближённым, так как, если $\psi \neq 0$, кроме касательных $E_{\tau 2}$ и $H_{\tau 2}$ имеется ещё небольшие нормальные составляющие E_{n2} и H_{n2} .

4.5. Эквивалентный поверхностный ток

Проникающее в проводник поле вызывает в нём ток с плотностью $\bar{j} = \sigma \bar{E}$, направление которого параллельно поверхности проводника. Как и напряжённости поля, плотность тока быстро убывает по мере удаления от поверхности. Интерес представляет плотность суммарного тока, протекающего под данной точкой проводящей поверхности. Назовём его **плотностью эквивалентного поверхностного тока** $\bar{j}_S$, условно сконцентрированного на поверхности и равного интегралу от реального распределения $\bar{j}$ по глубине

$$\begin{aligned} \bar{j}_S &= \int_0^\infty \bar{j} dz = \sigma \int_0^\infty \bar{E} dz = \sigma \int_0^\infty \dot{\bar{E}}_{\text{пр}} e^{-\gamma_2 z} dz = \sigma \bar{E}_{\text{пр}} \int_0^\infty e^{-\frac{1+i}{\delta} z} dz = \\ &= \sigma \bar{E}_{\text{пр}} \left(-\frac{\delta}{1+i} \right) e^{-\frac{1+i}{\delta} z} \Big|_0^\infty = \frac{\sigma \delta \bar{E}_{\text{пр}}}{1+i}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где $E_\tau = \bar{E}_{\text{пр}}$ — напряжённость поля на поверхности проводника;

$$\bar{E}_\tau = Z_S (\bar{H}_\tau \times \bar{n});$$

$$Z_S = Z_{02} = \frac{1+i}{\delta \sigma}.$$

Подставляя

$$\bar{E}_\tau = \bar{E}_{\text{пр}}$$

в (4.45), получаем

$$\bar{j}_S = \frac{\sigma\delta}{1+i} \cdot \frac{1+i}{\sigma\delta} (\bar{H}_\tau \times \bar{n}) = \bar{H}_\tau \times \bar{n}, \quad (4.46)$$

где $\bar{H}_\tau$ — напряжённость магнитного поля на поверхности проводника;
 $\bar{n}$ — нормаль с поверхности проводника.

Плотность эквивалентного поверхностного тока равна по величине касательной составляющей вектора напряжённости магнитного поля H_τ и перпендикулярно ей по направлению.

4.6. Граничные условия для переменных полей у поверхности идеального проводника

Комплексная амплитуда напряжённости поля внутри проводника равна

$$A = A_0 e^{-\alpha z},$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_a}{2}}.$

При $\sigma = \infty$, $\alpha = \infty$ и $A = 0$, т.е.

$$E_2 = D_2 = H_2 = B_2 = 0.$$

В идеально проводящей среде электромагнитное поле отсутствует. Из найденных ранее граничных условий получаем

$$\begin{aligned} (\bar{H}_{1\tau} - \bar{H}_{2\tau}) \times \bar{n} &= \bar{j}_S; \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau}; \\ \varepsilon_{a1} E_{1n} - \varepsilon_{a2} E_{2n} &= \sigma_s; \\ \mu_1 H_{1n} &= \mu_2 H_{2n} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{H}_{1\tau} \times \bar{n} &= \bar{j}_S; \\ E_{1\tau} &= 0; \\ \varepsilon_{a1} E_{1n} &= \sigma_s; \\ \mu_1 H_{1n} &= 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Касательная составляющая напряжённости электрического поля и нормальная составляющая напряжённости магнитного поля у поверхности идеального проводника отсутствуют.

Касательная составляющая напряжённости магнитного поля и нормальная составляющая напряжённости электрического поля достигают у плоской границы идеального проводника максимального значения.

Плотность электрического тока $\vec{j}_S$ на поверхности проводника равна по величине и перпендикулярна по направлению касательной составляющей напряжённости магнитного поля у поверхности. Нормальная составляющая электрического поля определяется распределением поверхностной плотности σ_s заряда.

Контрольные вопросы к разделу 4

1. Напишите выражения для коэффициентов отражения и передачи при нормальном падении волны на границу раздела двух сред.
2. Составьте общее уравнение плоской волны, движущейся в произвольном направлении, несовпадающем ни с одной из координатных осей.
3. Что называется плоскостью падения и волнами с перпендикулярной и параллельной поляризацией?
4. Приведите выражения для коэффициентов отражения и преломления при наклонном падении перпендикулярно и параллельно поляризованных волн.
5. Сформулируйте законы для углов отражения и преломления (закон Снеллиуса).
6. Поясните особенности наклонного падения плоской волны на границу раздела двух диэлектриков.
7. Покажите, что для волн с параллельной поляризацией существует угол падения (угол Брюстера), при котором отраженная волна отсутствует, т.е. волна полностью переходит во вторую среду.
8. В чем заключается явление полного отражения электромагнитных волн и при каких условиях оно может иметь место?
9. Дайте определение глубины проникновения электромагнитной волны в проводник, поверхностного эффекта, поверхностного сопротивления.
10. В каких случаях применимы граничные условия Леонтовича?
11. Напишите приближенные граничные условия и поясните их физический смысл.
12. Приведите граничные условия для переменных полей у поверхности идеального проводника.

Задачи к разделу 4

1. Плоская электромагнитная волна падает нормально из вакуума на границу раздела со средой, имеющей параметры: $\varepsilon = 81$; $\mu = 1$; $\sigma = 0,1$ См/м. Определите комплексные коэффициенты отражения $\vec{\Gamma}$ и преломления $\vec{T}$ на частоте 100 МГц.
2. Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами: $\varepsilon = 4$; $\mu = 1$; $\sigma = 0$. Определите среднее значение плотности потока мощности в диэлектрике, если среднее значение потока мощности падающей волны 1 Вт/м^2 .

3. Вычислите угол полного внутреннего отражения и угол Брюстера для следующих диэлектриков: дистиллированной воды ($\varepsilon = 81$); слюды ($\varepsilon = 6$); оптического стекла ($\varepsilon = 2,25$).

4. Плоская волна, распространяющаяся в среде с параметрами: $\varepsilon = 2,25$; $\mu = 1$; $\sigma = 0$, падает под углом 45° на границу раздела между средой и вакуумом. Определите коэффициент отражения для волн, поляризованных в плоскости падения и перпендикулярно ей.

5. Определите глубину проникновения электромагнитного поля в проводник (например, медь) на различных частотах: 10 кГц, 100 МГц, 10 ГГц.

6. Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума на поверхность среды, относительная диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 2,25$. Определите углы падения, при которых поляризация отраженной волны остается круговой, осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную. Определите соотношение осей эллипса поляризации для угла падения 45° .

5. ВОЛНОВОДЫ И РЕЗОНАТОРЫ

Перейдем к изучению так называемых *направляемых волн*, которые распространяются только в каком-то заданном направлении. Устройства, в которых распространяются направляемые волны, получили название *направляющих устройств* или *направляющих систем*. Электромагнитные волны в направляющих системах движутся вдоль граничных поверхностей, выполняющих функции своеобразных «электромагнитных рельсов».

Не существует универсальных направляющих систем, удовлетворяющих техническим требованиям во всех диапазонах частот, основными из которых являются следующие:

- малый коэффициент затухания, обеспечивающий высокий КПД фидера (линии передачи электромагнитной энергии, например, от передатчика к антенне или от антенны к приемнику);
- обеспечение заданной передаваемой мощности, что существенно для мощных фидеров;
- экономическая целесообразность, определяемая умеренными поперечными размерами, малой массой, доступными материалами, простотой конструкции и технологии производства.

Освоение каждого нового участка частотного диапазона неизменно сопровождается созданием новых типов направляющих систем.

Физические принципы действия направляющих систем различны. В полосе частот от нуля до сотен мегагерц используются двухпроводная и коаксиальная линии. Структура поля в указанных системах такова, что линии электрического поля начинаются на одном проводнике, а заканчиваются на другом.

В полых металлических волноводах, работающих в СВЧ диапазоне (от гигагерц до терагерц), плоская однородная волна распространяется внутри трубы как бы зигзагами, многократно отражаясь от ее металлических стенок.

Волноводы диэлектрические, металлодиэлектрические (для КВЧ диапазона) используют эффекты полного отражения и возникновения поверхностной волны при наклонном падении луча на границу двух диэлектриков. Как и в полых металлических волноводах, волна распространяется в них, многократно отражаясь от границы раздела.

Каждая направляющая система характеризуется структурой электромагнитного поля, типами волн, которые могут распространяться в данной системе, способами возбуждения, потерями электромагнитной энергии при распространении волны вдоль системы.

Для волн сантиметрового, а также отчасти дециметрового и миллиметрового диапазонов длин волн широкое применение получили полые металлические волноводы прямоугольного сечения.

Перечислим наиболее употребительные сечения прямоугольных металлических волноводов: 120×57 мм, 110×55 мм, 90×45 мм, 72×34 мм, 58×25 мм, 48×24 мм, 35×15 мм, 28,5×12,6 мм, 23×10 мм, 17×8 мм, 11×5,5 мм, 7,2×3,4 мм, 3,6×1,8 мм, 1,6×0,8 мм. Внутренняя поверхность волноводных узлов серебрится для предотвращения коррозии и связанных с этим потерь энергии.

5.1. Прямоугольный волновод

Чтобы найти поля, которые могут распространяться в прямоугольном волноводе без потерь (рисунок 5.1), необходимо решить уравнения Максвелла для области, ограниченной идеально проводящими стенками, для которых касательная составляющая вектора напряженности электрического поля равна нулю.

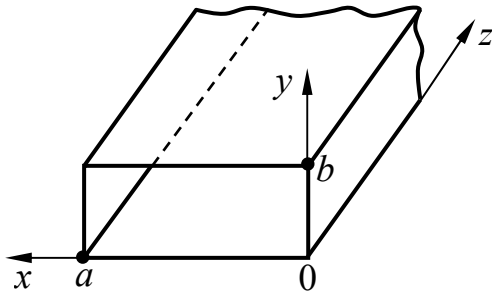


Рисунок 5.1 — Прямоугольный волновод

Будем полагать, что волновод имеет бесконечно большую протяженность, и что источники поля в рассматриваемой области отсутствуют.

Введя прямоугольную систему координат, запишем граничные условия на стенках волновода в виде

$$E_\tau = 0 \text{ при } x=0, x=a, y=0, y=b, \quad (5.1)$$

где E_τ — касательная составляющая вектора электрического поля.

Интерес представляют условия, при которых решение уравнений поля имеет форму бегущей волны, распространяющейся вдоль оси волновода z , поэтому естественно полагать, что зависимость составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ от координаты z в установившемся режиме представляется функцией

$$e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (5.2)$$

где γ — пока еще неизвестная постоянная распространения.

Для зависимости вида (5.2) дифференцирование любой из проекций вектора $\vec{E}$ или вектора $\vec{H}$ по переменной z эквивалентно умножению ее на величину $-\gamma$, например,

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [\dot{E}_{x0}(x, y) \cdot e^{-\gamma z}] = -\gamma \dot{E}_x \text{ и так далее.}$$

Для внутреннего пространства волновода при $\vec{j}=0$ и $\rho=0$ первые два уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= i\omega \epsilon_a \vec{E}; \\ \text{rot } \vec{E} &= -i\omega \mu_a \vec{H}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Запишем эти уравнения для составляющих векторов поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} &= \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{H}_x & \dot{H}_y & \dot{H}_z \end{vmatrix} = \bar{1}_x \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right) + \bar{1}_y \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) + \bar{1}_z \left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \right) = \\ &= \bar{1}_x (i\omega\epsilon_a \dot{E}_x) + \bar{1}_y (i\omega\epsilon_a \dot{E}_y) = \bar{1}_z (i\omega\epsilon_a \dot{E}_z), \end{aligned}$$

откуда с учетом (5.2)

$$\begin{cases} 1. \quad \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \gamma \dot{H}_y = i\omega\epsilon_a \dot{E}_x; & 4. \quad \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + \gamma \dot{E}_y = -i\omega\mu_a \dot{H}_x; \\ 2. \quad -\gamma \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\epsilon_a \dot{E}_y; & 5. \quad -\gamma \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega\mu_a \dot{H}_y; \\ 3. \quad \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = i\omega\epsilon_a \dot{E}_z; & 6. \quad \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -i\omega\mu_a \dot{H}_z, \end{cases} \quad (5.4)$$

где ϵ_a и μ_a — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей волновод.

Если теперь в уравнения (1) и (2) системы (5.4) подставить значения $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ из уравнений (4) и (5), а затем в уравнения (4) и (5) — значения $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ из уравнений (1) и (2), то неизвестные $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$, $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$ можно выразить через величины $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + i\omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right); \\ \dot{E}_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + i\omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right); \\ \dot{H}_x = \frac{1}{k_c^2} \left(i\omega\epsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right); \\ \dot{H}_y = -\frac{1}{k_c^2} \left(i\omega\epsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right), \end{cases} \quad (5.5)$$

где $k_c^2 = \gamma^2 + k^2$ и $k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$.

Подставляя $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ из системы уравнений (5.5) в равенство (6) системы (5.4), а $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ в равенство (3), получаем уравнения для проекций $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial^2 y} + k_c^2 \dot{H}_z = 0; \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial^2 y} + k_c^2 \dot{E}_z = 0. \quad (5.7)$$

Из выражений (5.5) следует, что электромагнитное поле в волноводе в общем случае представляет собой сумму двух независимых частных полей:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{i\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, & \dot{E}_y &= \frac{i\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, & \dot{E}_z &= 0 \\ \dot{H}_x &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, & \dot{H}_y &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, & \dot{H}_z &\neq 0 \end{aligned} \right\}; \quad (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, & \dot{E}_y &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, & \dot{E}_z &\neq 0 \\ \dot{H}_x &= \frac{i\omega\epsilon_a}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, & \dot{H}_y &= -\frac{i\omega\epsilon_a}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, & \dot{H}_z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.9)$$

Легко заметить, что поле (5.8) является полем поперечно-электрическим ($\dot{E}_z = 0$), а поле (5.9) — поперечно-магнитным ($\dot{H}_z = 0$). Перейдем к изучению этих полей по отдельности.

5.1.1. Поперечно-электрические поля (TE)

Согласно (5.8) поле TE в волноводе определяется продольной составляющей $\dot{H}_z$, которая удовлетворяет уравнению (5.6). Граничные условия для функции $\dot{H}_z$ можно найти из общих граничных условий (5.1). Последние применительно к полю TE выглядят так:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0 & \text{при } y=0, & & y=b; \\ \dot{E}_y &= 0 & \text{при } x=0, & & x=a. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Отсюда с учетом (5.8) будем иметь

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=a;$$

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b. \quad (5.11)$$

Используя метод разделения переменных (метод Фурье), решение уравнения (5.6) представим в виде

$$\dot{H}_z = X(x)Y(y) \cdot e^{-\gamma z}, \quad (5.12)$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ — функции, зависящие соответственно от x и y . Подставляя последнее выражение в уравнение (5.6) и проводя несложные преобразования, получаем

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_c^2 = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y = 0 \quad \text{и} \quad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2,$$

где k_x^2 и k_y^2 — произвольные постоянные разделения.

Общее решение этих дифференциальных уравнений запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= \dot{A}_1 \cos k_x x + \dot{B}_1 \sin k_x x; \\ Y &= \dot{A}_2 \cos k_y y + \dot{B}_2 \sin k_y y. \end{aligned}$$

Таким образом, проекция вектора $\dot{H}_z$ равна

$$\dot{H}_z = (\dot{A}_1 \cos k_x x + \dot{B}_1 \sin k_x x) \cdot (\dot{A}_2 \cos k_y y + \dot{B}_2 \sin k_y y) \cdot e^{-\gamma z}, \quad (5.13)$$

причем постоянная распространения запишется в виде

$$\gamma^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_c^2. \quad (5.14)$$

Чтобы найти входящие сюда неизвестные величины, воспользуемся граничными условиями (5.11). Из первого условия вытекает $B_1 = 0$, $\sin k_x a = 0$ и

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots$$

Из второго уравнения получается, что $B_2 = 0$, $\sin k_y b = 0$ и $k_y = \frac{n\pi}{b}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно,

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2; \quad (5.15)$$

$$\gamma = \gamma_{mn} = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}; \quad (5.16)$$

$$\dot{H}_z = \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma_{mn} z}, \quad (5.17)$$

где $\dot{A}_{mn} = \dot{A}_1 \dot{A}_2$.

Подставляя теперь значение $\dot{H}_z$ в равенство (5.8), находим выражения для проекций векторов поперечно-электрического поля в прямоугольном волноводе:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{i\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_y &= -\frac{i\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_y &= \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_z &= \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Как видно из полученных равенств, при $m = n = 0$ все компоненты векторов, за исключением $\dot{H}_z$, обращаются в нуль. Следовательно, числа m и n могут принимать здесь любые значения, равные 0, 1, 2, ..., но они не должны одновременно равняться нулю. Таким образом, в прямоугольном волноводе может существовать бесчисленное множество типов поперечно-электрических полей, характеризуемых различными значениями m и n (поля TE_{mn} или магнитные волны H_{mn}). Согласно (5.18) вдоль сторон a и b распределение поля имеет форму стоячей волны, причем величина m определяет число полувольт, укладывающихся на интервале $0 \leq x \leq a$, а n — число полувольт на интервале $0 \leq y \leq b$.

Поле (5.18), очевидно, будет распространяться по оси z в виде бегущей волны, если постоянная распространения γ_{mn} (5.16) равна чисто мнимой величине

$$\gamma_{mn} = i\beta_{mn} = i\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (5.19)$$

где β_{mn} — фазовая постоянная (волновое число).

Для этого необходимо, чтобы при заданных f , m , n , a , b выполнялось неравенство

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a > \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2.$$

Если же

$$k^2 < \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2,$$

то поле становится затухающим. Стало быть, в волноводе поле TE_{mn} (H_{mn}) считается распространяющимся, если частота колебаний f больше некоторой критической частоты $f_{кр}$, определяемой из условия $\gamma_{mn} = 0$, т.е.

$$\omega_{кр}^2 \varepsilon_a \mu_a = k_{с\text{кр}}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2,$$

откуда

$$f_{кр} = \frac{V}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}, \quad (5.20)$$

где $V = 1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$.

Критическая длина волны $\lambda_{кр}$, соответствующая найденной критической частоте, рассчитывается по формуле

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} = \frac{c}{V} \cdot \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}}. \quad (5.21)$$

Условие распространения волны по волноводу имеет вид:

$$f > f_{кр} \quad \text{или} \quad \lambda < \lambda_{кр}. \quad (5.22)$$

Нетрудно далее рассчитать фазовую скорость и длину волны в волноводе. Фазовая скорость V_Φ равна

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{\omega}{k \sqrt{1 - \frac{k_{с\text{кр}}^2}{k^2}}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - \frac{\omega_{кр}^2 \varepsilon_a \mu_a}{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a}}} = \frac{V}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2}}, \quad (5.23)$$

а длина волны —

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{V_{\Phi}}{f} = \frac{V_{\Phi} \lambda}{c} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}} \cdot \frac{V}{c}. \quad (5.24)$$

Следовательно, величина $\lambda_{\text{в}}$ отличается от длины волны λ , определенной для свободного пространства с параметрами: $\varepsilon_{\text{а}} = \varepsilon_0$, $\mu_{\text{а}} = \mu_0$.

Групповая (энергетическая) скорость имеет вид

$$V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\beta_{mn}} = V \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}. \quad (5.25)$$

Из выражений (5.23) и (5.25) для фазовой и групповой скоростей следует, что прямоугольный волновод является дисперсной средой, в которой $V_{\Phi} > c$, а $V_{\text{гр}} < c$ при условии $V = c$.

Характеристическое сопротивление волновода в случае поперечно-электрических (магнитных) волн равно

$$(Z_C)_{TE} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\omega \mu_{\text{а}}}{\beta_{mn}} = \frac{\sqrt{\mu_{\text{а}}/\varepsilon_{\text{а}}}}{\sqrt{1 - (f_{\text{кр}}/f)^2}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}}. \quad (5.26)$$

5.1.2. Поперечно-магнитные поля (ТМ)

Поперечно-магнитные поля в волноводе определяются проекцией $\dot{E}_z$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.7) и граничным условиям

$$\dot{E}_z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b. \quad (5.27)$$

Так как уравнения (5.6) и (5.7) совершенно аналогичны, то и решение последнего имеет точно такой же вид, как и (5.13), т.е.

$$\dot{E}_z = (\dot{A}_1 \cos k_x x + \dot{B}_1 \sin k_x x) \cdot (\dot{A}_2 \cos k_y y + \dot{B}_2 \sin k_y y) \cdot e^{-\gamma z}, \quad (5.28)$$

причем

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad \text{и} \quad \gamma^2 = k_x^2 + k_y^2 - k^2. \quad (5.29)$$

Удовлетворяя граничным условиям (5.27), получаем:

$$A_1 = 0, \quad \sin k_x a = 0 \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$A_2 = 0, \quad \sin k_y b = 0 \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

С учетом этого из (5.28) найдем

$$\dot{E}_z = \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma_{mn} z}, \quad (5.31)$$

где $\dot{B}_{mn} = \dot{B}_1 \dot{B}_2$.

Подставляя найденные значения $\dot{E}_z$ в формулы (5.9), получаем выражения для составляющих векторов поперечно-магнитных полей в прямоугольном волноводе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_y = -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_z = \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_x = \frac{i\omega\epsilon_a}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_y = -\frac{i\omega\epsilon_a}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_z = 0. \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Как и для поперечно-электрических полей, для поперечно-магнитных полей имеют место соотношения:

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2;$$

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2}.$$

Таким образом, в прямоугольном волноводе может существовать бесчисленное множество типов поперечно-магнитных полей, характеризующихся различными числами m и n (поля TM_{mn} или E_{mn}). Эти числа имеют тот же физический смысл, что и в случае полей TE_{mn} (H_{mn}). Легко заметить, что при m или n равным нулю, векторы поля повсюду обращаются в нуль. Стало быть, в рассматриваемом волноводе поля TM_{00} (E_{00}), TM_{m0} (E_{m0}), TM_{0n} (E_{0n}) не

существуют и величины m или n теперь равны $m=1, 2, 3, \dots$ и $n=1, 2, 3, \dots$

Повторяя далее рассуждения, аналогичные предыдущим, можно получить выражения для критических частот, критических длин волн и других параметров поперечно-магнитных волн различных типов. Все они по виду совпадают с формулами, относящимися к поперечно-электрическим волнам, за исключением выражения для $(Z_C)_{TM}$ или $(Z_C)_{E_{mn}}$

$$(Z_C)_{E_{mn}} = \frac{\beta_{mn}}{\omega \epsilon_a} = Z_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}. \quad (5.33)$$

Простейшей волной этого класса полей является E_{11} или TM_{11} .

Итак, все возможные типы решений в прямоугольном волноводе исчерпываются полями (5.18) и (5.32). Эти поля носят наименование собственных полей или собственных волн прямоугольного волновода. Очевидно, любое другое поле с более сложной конфигурацией в точках, где нет источников, может быть представлено в виде совокупности собственных полей.

5.1.3. Волна H_{10} (TE_{10}) в прямоугольном волноводе

Самую простую структуру поля в прямоугольном волноводе имеют поперечно-электрические волны H_{10} (TE_{10}) и H_{01} (TE_{01}). Обе они обладают идентичными свойствами, поэтому ограничимся рассмотрением только волны H_{10} .

Полагая в выражениях (5.18) $m=1$, $n=0$, для проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ этой волны получаем:

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -i\omega\mu_a \frac{a}{\pi} \dot{A}_{10} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}; \\ \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = i\beta_{10} \frac{a}{\pi} A_{10} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}; \\ \dot{H}_y = 0; \\ \dot{H}_z = A_{10} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}. \end{cases} \quad (5.34)$$

Здесь

$$\beta_{10} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_v}, \quad (5.35)$$

λ — длина волны в среде, заполняющей волновод;

$\lambda_{\text{в}}$ — длина волны в волноводе.

Согласно (5.20) критическая частота поля H_{10} равна

$$f_{\text{кр}10} = \frac{V}{2a} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a} \cdot 2a}, \quad (5.36)$$

и, соответственно, критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}10} = \frac{c}{f_{\text{кр}10}} = 2a\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (5.37)$$

Если волновод заполнен воздухом, т.е. $\epsilon = 1$, $\mu = 1$, то

$$f_{\text{кр}10} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cdot 2a} = \frac{c}{2a}, \quad \lambda_{\text{кр}10} = 2a; \quad (5.38)$$

длина волны в волноводе равна

$$\lambda_{\text{в}10} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}, \quad (5.39)$$

где λ_0 — длина волны в свободном пространстве.

Из формул (5.36)—(5.38) видно, что величины $f_{\text{кр}}$ и $\lambda_{\text{кр}}$ в данном случае не зависят от размера « b » поперечного сечения волновода. Кроме того, $\lambda_{\text{кр}}$ у поля H_{10} оказывается больше критических длин волн всех других типов, включая и поле H_{01} при условии, что $a > b$ (для поля H_{01} критическая длина волны равна $2b\sqrt{\epsilon\mu}$). Вследствие этого допустимые поперечные размеры волновода для заданной частоты колебаний получаются самыми малыми, если в нём возбуждается волна H_{10} (TE_{10}). Эта причина наряду с простой конфигурацией поля, привела к тому, что на практике в прямоугольных волноводах, как правило, применяется волна H_{10} .

Как следует из формулы (5.34), силовые линии электрического поля параллельны оси y . Магнитные силовые линии, как всегда, замкнуты. Они лежат в плоскости, перпендикулярной электрическим силовым линиям и окружают вертикально направленные токи смещения.

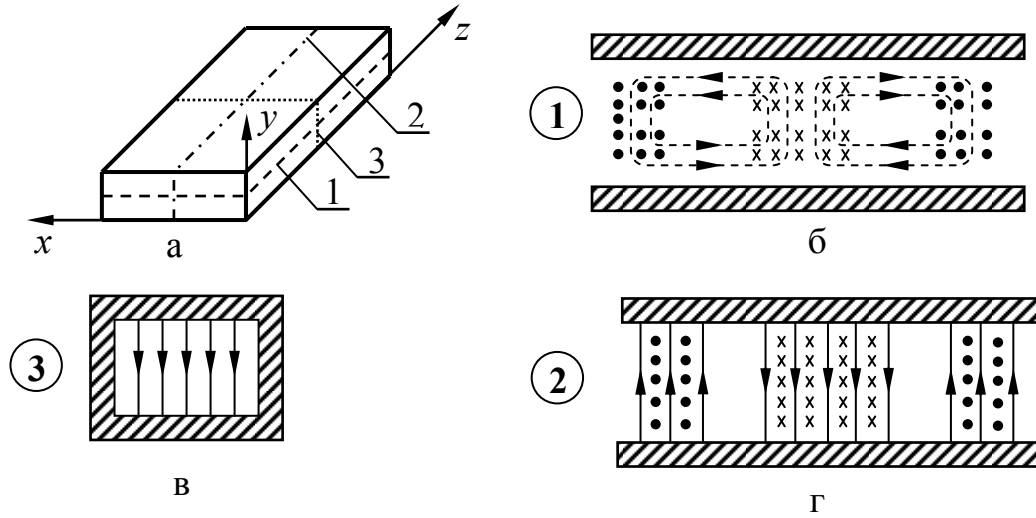
Структура электромагнитного поля волны H_{10} показана на рисунке 5.2.

При распространении волны по волноводу на стенках его появляется поверхностный электрический ток. Вектор плотности тока, как известно, связан с вектором напряжённости магнитного поля соотношением

$$\vec{j}_S = \vec{H} \times \vec{n},$$

где $\vec{n}$ — нормаль к стенке.

Из этого равенства следует, что составляющей напряжённости магнитного поля $\vec{H}_x$ в волноводе соответствует продольный ток с плотностью $\vec{j}_{Sz}$, причём при $y=0$ $j_{Sz} = H_x$, а при $y=b$ $j_{Sz} = -H_x$.



- 1 — сечение плоскостью $y = \text{const}$;
 2 — сечение плоскостью $x = \text{const}$;
 3 — сечение плоскостью $z = \text{const}$

Рисунок 5.2 — Структура электромагнитного поля волны типа H_{10}

Магнитное поле волны H_{10} имеет поперечную и продольную составляющие. Силовые линии магнитного поля замкнуты и лежат в плоскостях, перпендикулярных силовым линиям электрического поля. Поперечная составляющая магнитного поля H_x максимальна в центре широкой стенки волновода и убывает до нуля возле узких стенок. Продольная составляющая магнитного поля H_z максимальна у узких стенок волновода и равна нулю в центре волновода, как это показано на рисунке 5.3.

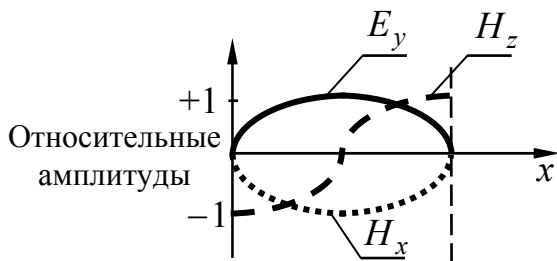


Рисунок 5.3 — Зависимости E_y , H_x и H_z вдоль оси x

Распределение плотности продольного тока j_{Sz} в плоскости $y=0$ в пределах $0 \leq x \leq a$ для какого-то фиксированного момента времени определяется соотношением для $\dot{H}_x$ (5.34), т.е.

$$j_{Sz} = j_{Sz0} \sin \frac{\pi}{a} x.$$

Так как H_x обращается в нуль при $x=0$ и $x=a$, то продольный ток на боковых стенках волновода также равен нулю.

Составляющей поля H_z (5.34) соответствуют поперечные электрические токи, текущие по стенкам волновода в направлениях, перпендикулярных оси z

$$j_{Sx} = j_{Sx0} \cos \frac{\pi}{a} x.$$

Максимальная плотность поперечных токов будет на боковых стенках, а при значении $x = a/2$

$$j_{Sx} = 0.$$

Распределение плотности поверхностных токов на стенках прямоугольного волновода с волной H_{10} показано на рисунке 5.4.

Электрические токи протекают таким образом, что на широких стенках волновода возникают заряды, из которых выходят, и в которые входят силовые линии электрического поля. В центре широкой стенки волновода токи текут вдоль волновода, поэтому, если посередине широкой стенки волновода сделать узкую продольную щель, то она практически не исказит поле волновода, так как не пересекает линий тока. Это же можно сказать и о поперечной щели в узкой стенке волновода. Токи проводимости замыкаются посредством токов смещения.

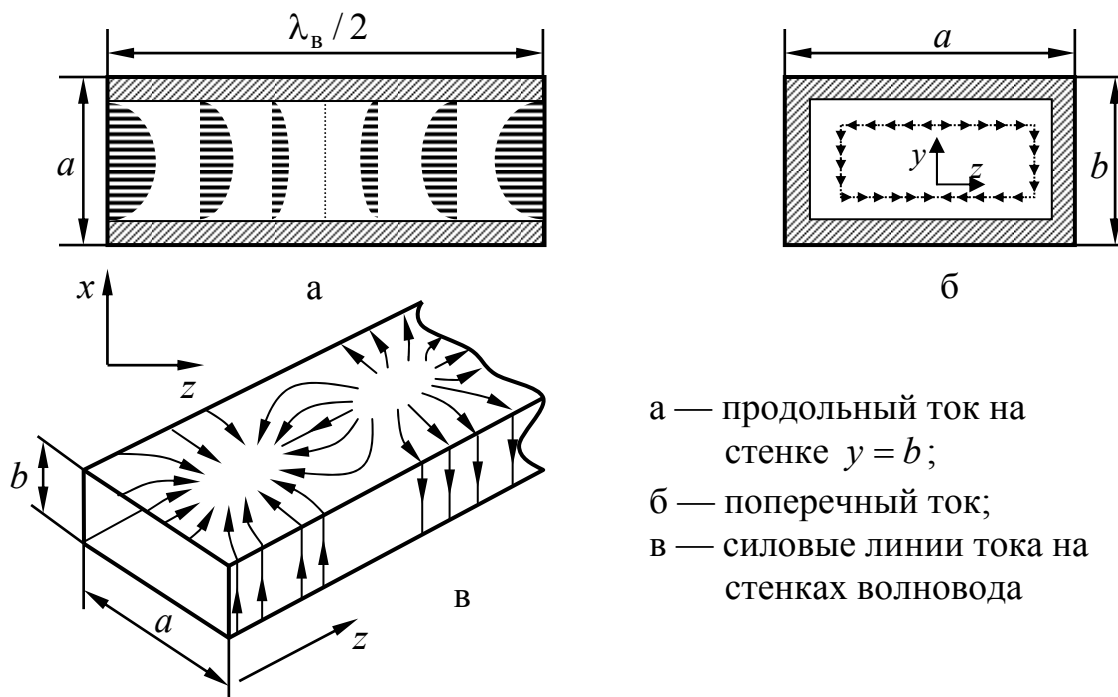


Рисунок 5.4 — Токораспределение на стенках волновода с волной H_{10}

Величина мощности, проходящей через поперечное сечение S волновода, определяется выражением

$$P = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S \dot{E}_y \dot{H}_x^* dS.$$

При подстановке H_x и E_y из (5.34) получаем

$$P = \frac{1}{4} \omega \mu_a A_{10}^2 \beta_{10} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 ab. \quad (5.40)$$

С помощью этого выражения можно вычислить величину A_{10} как функцию передаваемой мощности.

Прямоугольный волновод в одноволновом (одномодовом) режиме работает на волне H_{10} в диапазоне частот $f_H \leq f \leq f_B$. Значения верхней и нижней частот принимаются приблизительно равными: $f_H \approx 1,25 f_{\text{кр}10}$, $f_B \approx 2 f_{\text{кр}10}$ ($b \leq a/2$).

Относительная полоса одноволнового режима приблизительно равна

$$\frac{f_B - f_H}{f_0} = 46\%,$$

где $f_0 = 0,5(f_B + f_H)$.

Эти соотношения лежат в основе разработки стандартного ряда волноводов, приведенного выше.

5.2. Круглый цилиндрический волновод

В цилиндрическом волноводе без потерь электромагнитное поле, так же, как и в прямоугольном волноводе, может быть представлено в виде совокупности поперечно-электрических и поперечно-магнитных полей различных типов. Поперечные составляющие векторов поля могут быть выражены через продольные составляющие $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$ подобно тому, как это было сделано для прямоугольного волновода.

Уравнения для проекций $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_z$ в цилиндрической системе координат (рисунок 5.5) выглядят аналогично друг другу:

$$\begin{cases} 1. \quad \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \dot{H}_z = 0; \\ 2. \quad \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \dot{E}_z = 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

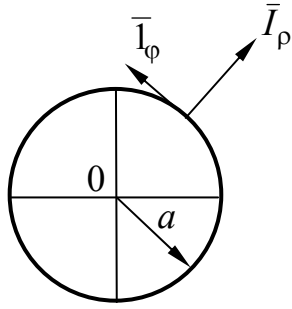


Рисунок 5.5 — К расчету поля цилиндрического волновода

Решение уравнения (1) системы (5.41) имеет вид:

$$\dot{H}_z = \dot{A}_{mn} J_m(k_c \rho) \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z}. \quad (5.42)$$

Граничное условие $\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho} = 0$ при $\rho = a$

удовлетворяется, если производная функции Бесселя $J_m(k_c \rho)$ равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial J_m(k_c \rho)}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при } \rho = a \text{ или}$$

$$J'_m(k_c a) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.43)$$

где значок штрих в символе J' означает производную по аргументу.

В теории бesselевых функций установлено, что для каждого значения m имеется бесконечное счётное множество корней уравнения $J'_m(v) = 0$. Обозначим эти корни v_{mn} , где n — порядковый номер корня. Значения нескольких первых корней v_{mn} при $m = 0, 1, 2$ приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 — Корни производных функций Бесселя

Номер корня	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965

Из равенства (5.43) вытекает, что

$$k_c a = v_{mn},$$

откуда

$$k_c = \frac{v_{mn}}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.44)$$

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2 - k^2}$$

и, соответственно,

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2}. \quad (5.45)$$

Волна будет распространяться по волноводу, если

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} > \frac{\gamma_{mn}}{a}.$$

Критическая частота поля TE_{mn} (H_{mn}) теперь определяется выражением

$$\omega_{кр} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \frac{\gamma_{mn}}{a}$$

или

$$(f_{кр})_{H_{mn}} = \frac{v_{mn}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}, \quad (5.46)$$

а критическая длина волны равна

$$(\lambda_{кр})_{H_{mn}} = \frac{2\pi a}{v_{mn}} \cdot \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (5.47)$$

Из таблицы 5.1 следует, что наименьшим корнем уравнения $J'_m(v) = 0$ является корень v_{11} , равный 1,84. Стало быть, волна TE_{11} (или H_{11}) при данном радиусе волновода a будет иметь наибольшую критическую длину, т.е.

$$(\lambda_{кр})_{H_{11}} = 3,41 a \sqrt{\epsilon \mu}.$$

Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны H_{11} в сечении круглого волновода изображены на рисунке 5.6.

Формулы для групповой и фазовой скоростей волны H_{11} в круглом волноводе имеют следующий вид:

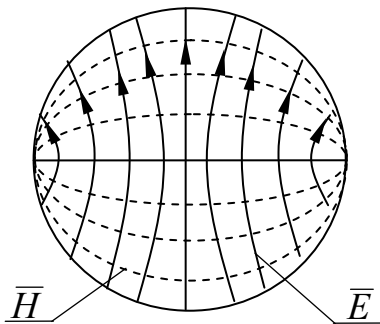


Рисунок 5.6 — Структура поля волны H_{11} в поперечной плоскости

$$\begin{cases} V_{гр} = V \sqrt{1 - (f_{кр}/f)^2}; \\ V_{ф} = \frac{V}{\sqrt{1 - (f_{кр}/f)^2}}. \end{cases} \quad (5.48)$$

Характеристическое сопротивление равно

$$(Z_c)_{H_{mn}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (f_{кр}/f)^2}}.$$

Решение уравнения (2) системы (5.41) выглядит аналогично (5.42), т.е.

$$\dot{E}_z = \dot{B}_{mn} J_m(k_c \rho) \cos m\varphi e^{-\gamma z}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Это решение удовлетворяет условию $\dot{E}_z = 0$ при $\rho = a$, если

$$k_c = \frac{\chi_{mn}}{a},$$

где χ_{mn} — корни уравнения $J_m(\chi) = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Значения первых корней полученного уравнения при $m = 0, 1, 2$ приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2 — Корни уравнения $J_m(\chi) = 0$

Номер корня	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	2,405	3,832	5,135
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,173	11,620

Критические частоты поперечно-магнитных полей круглого волновода TM_{mn} (или E_{mn}) равны

$$(f_{кр})_{E_{mn}} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}, \quad (5.49)$$

а критические длины волн

$$(\lambda_{кр})_{E_{mn}} = \frac{2\pi a}{\chi_{mn}} \sqrt{\epsilon_a \mu_a}. \quad (5.50)$$

Если $f > f_{кр}$ или $\lambda < \lambda_{кр}$, то поле будет распространяться по волноводу в виде бегущей волны.

Так как корень χ_{mn} принимает наименьшее значение при $m = 0$, $n = 1$, то самую низкую критическую частоту (наибольшую критическую длину волны) имеет волна $E_{01}(TM_{01})$. Подставляя значение $\chi_{01} = 2,405$ в (5.50), получаем

$$(\lambda_{кр})_{E_{01}} = 2,61a \sqrt{\epsilon \mu}.$$

Для одномодового режима работы круглого волновода с воздушным заполнением ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$) должно выполняться неравенство

$$2,61a < \lambda < 3,41a.$$

5.3. Возбуждение волноводов

Конструкции устройств, предназначенных для возбуждения в волноводе волны определённого типа, или для извлечения энергии из волновода с волной того же типа одинаковы.

Известны следующие способы возбуждения волноводов:

— в волноводе необходимо поместить прямой провод (штырь) так, чтобы он находился в точке, где напряжённость электрического поля имеет максимальное значение, и ориентировать провод так, чтобы его ось совпадала с направлением вектора напряжённости электрического поля; при такой ориентации провода индуцируемая в нём ЭДС будет максимальной;

— в волноводе необходимо поместить рамочную антенну (виток), ориентируя её так, чтобы нормаль к плоскости рамки совпала с направлением вектора напряжённости магнитного поля; при этом рамку следует расположить там, где нормальная к её плоскости напряжённость магнитного поля имеет максимальное значение;

— в стене волновода нужно прорезать щель перпендикулярно к линиям тока (вдоль силовых линий магнитного поля) в максимуме их плотности.

На рисунке 5.7 приведён пример возбуждения волны H_{10} в прямоугольном волноводе.

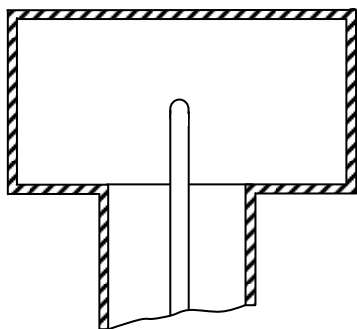


Рисунок 5.7 — Возбуждение волны H_{10} в прямоугольном волноводе с помощью штыря

Элементом связи является штырь, расположенный в точке, где напряжённость электрического поля E_y волны H_{10} должна иметь максимальное значение (при $x = a/2$). Конструктивно этот штырь является продолжением внутреннего провода коаксиальной линии, присоединённой с другой стороны к генератору. Обычно волновод на одном конце закрывается проводящей стенкой, расположенной на расстоянии $\lambda_v/4$ от штыря. Благодаря этому передача энергии происходит только в одну сторону.

5.4. Затухание электромагнитных волн в волноводах с потерями

В реальных условиях часть электромагнитной энергии, передаваемой по волноводу, расходуется на нагревание стенок, а также теряется в среде, заполняющей волновод. Вследствие этого амплитуды поля уменьшаются вдоль направления распространения, т.е. волна в волноводе становится затухающей.

Постоянная распространения затухающей волны, существующей в среде с потерями, есть величина комплексная

$$\gamma = \alpha + i\beta, \quad (5.51)$$

где α — коэффициент затухания; β — волновое число.

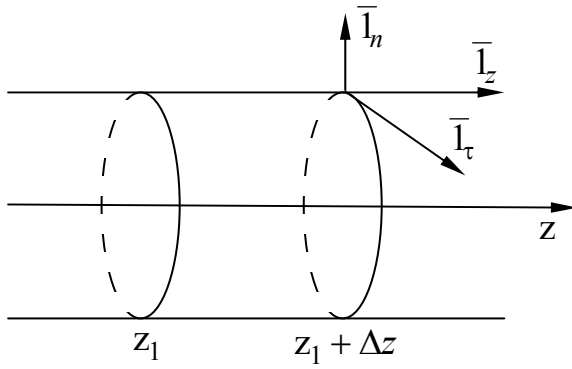


Рисунок 5.8 — К расчету затухания электромагнитной волны в волноводе

Для определения коэффициента затухания α рассмотрим цилиндрический волновод с потерями (рисунок 5.8). Пусть в плоскости $z = z_1$ мощность равна P_1 . В плоскости $z = z_1 + \Delta z = z_2$ мощность P_2 отличается от величины P_1 из-за потерь энергии на участке Δz . Если $\Delta z \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_1 - P_2}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Таким образом, величина $-\frac{\partial P}{\partial z}$ представляет собой убывание средней мощности в волноводе на единицу длины. Как известно, средняя мощность, передаваемая по волноводу, равна

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \bar{\mathbf{l}}_z dS, \quad (5.52)$$

где S — площадь поперечного сечения волновода;

$\bar{\mathbf{l}}_z$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением распространения волны.

Векторы $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ в волноводе можно представить таким образом:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0(n, \tau) \cdot e^{-\gamma z} = \dot{\vec{E}}_0(n, \tau) \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-i\beta z};$$

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_0(n, \tau) \cdot e^{-\gamma z} = \dot{\vec{H}}_0(n, \tau) \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-i\beta z}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\dot{\vec{E}}_0 \times \dot{\vec{H}}_0^*) \cdot e^{-2\alpha z} \bar{\mathbf{l}}_z dS = P_0 e^{-2\alpha z},$$

где $P_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\dot{\vec{E}}_0 \times \dot{\vec{H}}_0^*) \bar{\mathbf{l}}_z dS.$

Дифференцируя величину P по z , получаем

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P_0 e^{-2\alpha z} = -2\alpha P.$$

Отсюда вытекает, что коэффициент затухания равен

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{dP}{dz} \cdot \frac{1}{P}. \quad (5.53)$$

На практике волновод обычно заполнен воздухом, который является диэлектриком с очень малым уровнем потерь. В этом случае потери в диэлектрике, естественно, можно не принимать во внимание. При таком условии убыль средней мощности в волноводе на единицу длины равна среднему потоку вектора Пойнтинга через стенки, рассчитываемому также на единицу длины, т.е.

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_L (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \bar{\mathbf{l}}_n dl, \quad (5.54)$$

где L — контур поперечного сечения волновода;

$\bar{\mathbf{l}}_n$ — орт нормали к стенке волновода.

Подставляя значения P и dP/dz из (5.52) и (5.54) в (5.53), получаем выражение, определяющее коэффициент затухания:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\oint_L (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \bar{\mathbf{l}}_n dl}{\oint_S (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \bar{\mathbf{l}}_z dS}. \quad (5.55)$$

Согласно приближённому граничному условию Леонтовича, у стенок волновода

$$\dot{\vec{E}}_\tau = \dot{Z}_S \dot{\vec{H}}_\tau,$$

где $\dot{Z}_S = R_S + iX_S$ — поверхностное сопротивление проводника, и поэтому в (5.55) можно заменить подынтегральное выражение

$$(\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \bar{\mathbf{l}}_n = \dot{Z}_S \dot{H}_\tau^2,$$

так как $\dot{\vec{E}}_n \times \bar{\mathbf{l}}_n = 0$ и $\dot{\vec{H}}_n \times \bar{\mathbf{l}}_n = 0$.

Следовательно, приближённая формула для коэффициента затухания электромагнитной волны в волноводе принимает вид

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R_S \oint_L H_\tau^2 dl}{\operatorname{Re} \int_S (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \cdot \vec{1}_z dS}. \quad (5.56)$$

Обычно стенки волновода изготавливаются из металла с высокой проводимостью, поэтому допустим лишь небольшую погрешность, если реальные величины $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ заменим на величины, соответствующие идеальному волноводу.

Согласно сделанным допущениям значение β будет таким же, как и в волноводе без потерь.

Формула (5.56) применима не только к волноводам, но и к другим направляющим системам, образованным проводящими поверхностями.

5.5. Объёмные резонаторы

Основным параметром любой колебательной системы является резонансная частота. Для колебательного контура она равна $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. С повышением частоты величины индуктивности L и ёмкости C уменьшаются, добротность также уменьшается, а на волнах дециметрового диапазона становится недопустимо низкой из-за больших потерь электромагнитной энергии на излучение, а также тепловых потерь вследствие сильного поверхностного эффекта в проводниках. Всё это приводит к тому, что в диапазонах УВЧ, СВЧ и КВЧ в качестве колебательных систем используются объёмные резонаторы. **Объёмный резонатор** представляет собой диэлектрический объём, ограниченный замкнутой металлической поверхностью. Обладая высокими резонансными частотами, а также имея большую добротность, объёмные резонаторы находят широкое применение в указанных диапазонах частот. Существует большое количество различных типов резонаторов, отличающихся друг от друга формой металлической поверхности. Применяются прямоугольные, цилиндрические, тороидальные и другие типы резонаторов.

Прямоугольный или **цилиндрический резонатор** можно рассматривать как отрезок аналогичного волновода, закороченного на концах проводящими плоскими поверхностями. В этом случае можно использовать результаты исследования соответствующего волновода.

Учитывая последнее обстоятельство, перейдём к анализу собственных колебаний в прямоугольном резонаторе (рисунок 5.9).

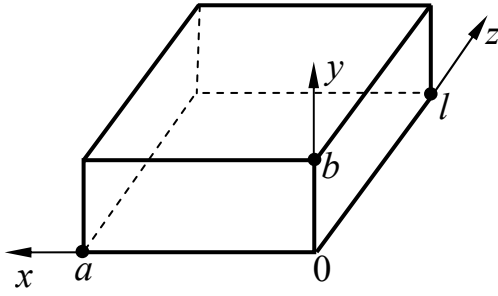


Рисунок 5.9 — Прямоугольный объемный резонатор

На основании аналогии с прямоугольным волноводом можно утверждать, что в резонаторе будут существовать поля поперечно-электрического и поперечно-магнитного типов (предполагается, что ось волновода совпадает с осью z резонатора). При этом распределение поля вдоль оси z резонатора в отличие от волновода должно иметь характер стоячих волн.

Используя подобную методику, рассмотрим собственные поперечно-электрические колебания в резонаторе.

Будем искать поле в резонаторе в виде совокупности двух волн H_{mn} , распространяющихся по оси z в противоположных направлениях. Используя выражения (5.18) для полей прямой волны в волноводe и добавляя к ним проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ обратной волны, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = \frac{i\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \left(\dot{A}_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} + \dot{B}_{mn} e^{\gamma_{mn}z} \right); \\ \dot{E}_y = -\frac{i\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \left(\dot{A}_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} + \dot{B}_{mn} e^{\gamma_{mn}z} \right); \\ \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \left(\dot{A}_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} - \dot{B}_{mn} e^{\gamma_{mn}z} \right); \\ \dot{H}_y = \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \left(\dot{A}_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} - \dot{B}_{mn} e^{\gamma_{mn}z} \right); \\ \dot{H}_z = \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \left(\dot{A}_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} + \dot{B}_{mn} e^{\gamma_{mn}z} \right). \end{array} \right. \quad (5.57)$$

Угловая частота ω здесь пока остаётся неизвестной, ибо она является искомой частотой собственных колебаний. То же самое можно сказать и о постоянной распространения

$$\gamma_{mn} = i\beta_{mn} = i\sqrt{\omega^2\epsilon_a\mu_a - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (5.58)$$

Поле в резонаторе (5.57) должно удовлетворять граничным условиям и на «торцевых» стенках, т.е.,

$$\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = l.$$

Легко убедиться, что проекции $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ на поверхности $z = 0$ обращаются в нуль, если

$$\dot{B}_{mn} = -\dot{A}_{mn}. \quad (5.59)$$

Следовательно, волны, распространяющиеся по оси z в противоположных направлениях, имеют равные амплитуды, и совокупность их действительно образует стоячую волну.

Из выражений (5.57) получается, что при $z = l$ проекции $\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0$, если

$$\dot{A}_{mn} e^{-i\beta_{mn}l} + \dot{B}_{mn} e^{i\beta_{mn}l} = 0$$

или с учётом (5.59)

$$\sin \beta_{mn}l = 0. \quad (5.60)$$

Отсюда вытекает, что $\beta_{mn}l = p\pi$,

$$\beta_{mn} = \frac{p\pi}{l}, \quad (5.61)$$

где p — целое число.

Подставив найденные значения $\dot{B}_{mn}$ и β_{mn} в (5.57), для проекций векторов поля в резонаторе будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = \frac{\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{A}_{mnp} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z; \\ \dot{E}_y = -\frac{\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_{mnp} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z; \\ \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = i \frac{p\pi}{l} \frac{1}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_{mnp} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{l} z; \\ \dot{H}_y = i \frac{p\pi}{l} \frac{1}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{A}_{mnp} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{l} z; \\ \dot{H}_z = -i \dot{A}_{mnp} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z. \end{array} \right. \quad (5.62)$$

Амплитудные коэффициенты $\dot{A}_{mnp}$ здесь обозначены тремя индексами m, n, p в соответствии с осями x, y, z .

Таким образом, прямоугольный резонатор характеризуется множеством

типов собственных поперечно-электрических колебаний. Каждый тип колебаний определяется числами m , n , p и обозначается H_{mnp} (TE_{mnp}). Величины m и n имеют тот же смысл, что и в прямоугольном волноводе. Число p определяет количество полуволн, укладываемых на стороне l резонатора. В рассматриваемом случае оно может принимать значения $p = 1, 2, 3, \dots$

Каждый тип поперечно-электрических колебаний в резонаторе имеет свою собственную угловую частоту ω_{mnp} , которая согласно выражениям (5.61) и (5.58) равна

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (5.53)$$

Угловой частоте ω_{mnp} соответствует собственная частота

$$f_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \quad (5.64)$$

а собственная длина волны равна

$$\lambda_{mnp} = \frac{c}{f_{mnp}} = \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (5.65)$$

Из выражения (5.63)—(5.65) видно, что чем больше значения m , n и p , тем выше собственная частота колебаний и тем короче собственная длина волны.

Простейшими типами поперечно-электрических колебаний в прямоугольном резонаторе являются колебания H_{101} (TE_{101}) и H_{011} (TE_{011}). Эти колебания имеют самые низкие собственные частоты и соответственно самые большие собственные длины волн. Они имеют также наиболее простую структуру поля.

Поле поперечно-магнитного типа в резонаторе можно представить в виде совокупности двух волноводных поперечно-магнитных волн TE_{mn} (TM_{mn}), распространяющихся по оси z в противоположных направлениях.

Собственные частоты и длины волн поперечно-магнитных колебаний в резонаторе определяются выражениями, выведенными для колебаний H_{mnp} (TE_{mnp}). При наличии потерь амплитуды собственных колебаний в резонаторе экспоненциально убывают во времени, причем скорость затухания колебаний с увеличением потерь возрастает. Эта скорость определяет **добротность** объемного резонатора.

Выражение для расчета добротности резонатора имеет вид

$$Q_{mnp} = \omega_{mnp} \cdot \frac{W_{mnp}}{P_{\Pi}}, \quad (5.66)$$

где W_{mnp} — энергия, запасенная в резонаторе;

P_{Π} — средняя мощность потерь.

Эта формула позволяет рассчитать добротность резонатора, если известно распределение поля в соответствующем резонаторе без потерь.

В реальных устройствах часть энергии из резонатора обычно передается в связанные с ним элементы. Поэтому добротность такого нагруженного резонатора оказывается меньше вычисленной собственной добротности (5.66).

Выражение для добротности нагруженного резонатора имеет вид

$$Q_{mnp \text{ нагр}} = \omega_{mnp} \cdot \frac{W_{mnp}}{P_{\Pi} + P_{\text{H}}} = \omega_{mnp} \cdot \frac{W_{mnp}}{P_{\Pi}} \cdot \frac{P_{\Pi}}{P_{\Pi} + P_{\text{H}}} = Q_{mnp} \cdot \frac{P_{\Pi}}{P_{\Pi} + P_{\text{H}}}, \quad (5.67)$$

где Q_{mnp} — добротность ненагруженного резонатора;

P_{H} — потери в нагрузке.

Расчеты показывают, что если резонатор с медными стенками заполнен воздухом, то при частоте $f = 3000$ МГц ($\lambda = 10$ см) его собственная добротность для колебания H_{101} равна $Q_{H_{101}} \approx 19600$. Добротность нагруженного резонатора может быть в несколько раз меньшей.

Рассматривая **цилиндрический резонатор** как отрезок круглого волновода, закрытого на концах идеально проводящими поверхностями, можно считать, что в нем существуют электромагнитные колебания поперечно-электрического и поперечно-магнитного типов. Среди множества поперечно-электрических колебаний в резонаторе минимальную собственную частоту имеет колебание H_{111} (TE_{111}).

Собственные частоты колебаний H_{11p} в цилиндрическом резонаторе равны

$$\omega_{H_{11p}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{v_{11}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}.$$

Так как $v_{11} = 1,84$, то при $p = 1$ получаем:

$$\omega_{H_{111}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{1,84}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2},$$

$$f_{H_{111}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{0,293}{a}\right)^2 + \frac{1}{4l^2}}, \quad (5.68)$$

$$\lambda_{H_{111}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{0,293}{a}\right)^2 + \frac{1}{4l^2}}} \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (5.69)$$

Из множества колебаний поперечно-магнитного типа в цилиндрическом резонаторе наименьшей собственной частотой обладают колебания E_{010} (TM_{010}). Собственная частота колебания E_{01p} (TM_{01p}) определяется выражением

$$\omega_{E_{01p}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\chi_{01}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \quad (5.70)$$

а собственная длина волны

$$\lambda_{E_{01p}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\chi_{01}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (5.71)$$

При $p = 0$ имеем

$$\begin{cases} \omega_{E_{010}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \frac{\chi_{01}}{a} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \frac{2,405}{a}; \\ f_{E_{010}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \frac{\chi_{01}}{2\pi a}; \\ \lambda_{E_{010}} = \frac{2\pi a}{2,405} \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,61a \sqrt{\epsilon \mu}. \end{cases} \quad (5.72)$$

В случае поперечно-магнитных колебаний индекс p может принимать нулевые значения. При этом собственные частоты колебаний E_{mn0} (TM_{mn0}) оказываются равными критическим частотам поперечно-магнитных волн E_{mn} (TM_{mn}) волновода.

Контрольные вопросы к разделу 5

1. Что называется направляющей системой?
2. Сформулируйте задачу определения поля в прямоугольном волноводе.
3. Изложите порядок нахождения составляющих напряженности электрического и магнитного полей в прямоугольном волноводе.
4. Напишите и проанализируйте выражения для длины, фазовой и групповой скоростей электромагнитной волны в волноводе при различных значениях m и n , а также критической длины волны.
5. Приведите выражения составляющих напряженности поля в прямоугольном волноводе для волны типа H_{10} .
6. Изобразите картину поля в волноводе для волн типа H_{10} , H_{20} .
7. В каких пределах могут изменяться фазовая и групповая скорости электромагнитных волн в волноводе?
8. Каково условие одноволнового режима работы в волноводе?
9. Охарактеризуйте волну H_{11} в круглом волноводе.
10. Изложите порядок нахождения составляющих векторов поля в круглом волноводе.
11. Напишите формулы, по которым определяют критические длины волн в круглом волноводе.
12. Каковы способы возбуждения волноводов?
13. Каковы причины затухания электромагнитных волн в прямоугольном волноводе?
14. Что представляют собой объемные резонаторы, и какие типы резонаторов Вы знаете?
15. Как найти поле в резонаторе на основе знания поля электромагнитной волны в регулярном волноводе?
16. Напишите выражения для собственной частоты колебания и добротности резонатора.
17. Каковы принципиальные отличия колебательного LC контура от объемного резонатора?
18. Назовите простейшие четыре типа колебаний в резонаторе прямоугольной формы и в цилиндрическом.
19. В чем отличие нагруженной добротности резонатора от собственной?

Задачи к разделу 5

1. Прямоугольный волновод, заполненный воздухом, имеет поперечное сечение $a \times b = 11 \times 5 \text{ см}^2$. Определите все типы волн, которые могут существовать в волноводе при частоте 5000 МГц. Для основной волны и волны с наиболее высокими значениями m и n найдите критическую длину волны, длину волны в волноводе, фазовую и групповую скорости.

2. Какие типы волн могут распространяться в круглом волноводе диаметром 3 см, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon = 3,2$? Частота колебаний 10 ГГц.
3. При каком диаметре круглого волновода в нем может распространяться только основной тип волны при частоте колебаний 10 ГГц?
4. Выведите выражение для мощности, проходящей через поперечное сечение волновода, если энергия передается волной H_{10} .
5. Определите первые три собственные частоты прямоугольного резонатора. Размер резонатора $40 \times 20 \times 50$ мм.